Création des particules scalaires dans un univers de de-Sitter en présence champ électrique

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier l'effet du champ électrique sur la création des particules scalaires dans un univers de de-Sitter à D dimensions à partir du vide. Comme dans le chapitre précédent, nous écrivons d'abord l'équation de Klein Gordon correspondante et nous cherchons ses solutions. Ensuite, nous utilisons les solutions semi-classiques de l'équation d'Hamilton-Jacobi pour classer les solutions de Klein Gordon en état "in" et "out". A partir de la relation de Bogolubov qui lie ces états nous calculons la probabilité de création d'une paire et la densité des particules créées. Finalement, nous faisons la somme sur tous les états possibles pour obtenir le nombre total des particules créées et le Lagrangien effectif de Schwinger.

4.2 Equation de Klein Gordon en présence d'un champ électrique

Pour commencer, nous considérons un champ de matière scalaire de masse m et de charge e soumis à un champ gravitationnel décrit par le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et à un champ électromagnétique externe représenté par le quadri-potentiel A_μ. La prescription de couplage minimal nous conduit à l'équation de Klein-Gordon suivante

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(i\partial_\mu - eA_\mu\right)\left[g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\left(i\partial_\nu - eA_\nu\right)\phi\right] + \left(m^2 + \xi R\right)\phi = 0 \tag{4.1}$$

Considérons la jauge

$$A_\mu = (0, 0, ..., A_d) \tag{4.2}$$

où la composante A_d ne dépend que du temps.

Maintenant, nous écrivons $\phi\left(\vec{x}, \eta\right)$ sous la forme

$$\phi\left(\vec{x}, \eta\right) = e^{i\vec{k}\vec{x}}\chi\left(\eta\right) \tag{4.3}$$

La fonction $\chi\left(\eta\right)$ vérifie alors l'équation

$$\left[\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + (d-1)\frac{a'}{a^3}\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{1}{a^2}\left(k_\perp^2 + (k_d - eA_d)^2\right) - \left(m^2 + \xi R\right)\right]\chi\left(\eta\right) = 0 \tag{4.4}$$

Nous posons encore

$$\chi\left(\eta\right) = \frac{1}{a^{\frac{d-1}{2}}}\varphi\left(\eta\right) \tag{4.5}$$

pour obtenir l'équation

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \left(k_\perp^2 + (k_d - eA_d)^2\right) + m^2a^2 + \left(\xi - \frac{d-1}{4d}\right)\left(d\left(d-3\right)\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + 2d\frac{a''}{a}\right)\right]\varphi\left(\eta\right) = 0 \tag{4.6}$$

Pour l'espace de de-Sitter, le facteur d'échelle est

$$a\left(\eta\right) = -\frac{1}{H\eta} \tag{4.7}$$

et ainsi pour avoir des solutions analytiques nous choisissons pour le champ électrique la forme suivante

$$A_d\left(\eta\right) = -\frac{E_0}{H^2\eta}. \tag{4.8}$$

Dans ce cas l'équation de Klein Gordon pour la fonction $\varphi\left(\eta\right)$ devient

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + k^2 - 2ek_d\frac{E_0}{H^2\eta} + \frac{\mathcal{M}^2}{H^2\eta^2}\right]\varphi\left(\eta\right) = 0 \tag{4.9}$$

où

$$\mathcal{M}^2 = M^2 + \frac{e^2 E_0^2}{H^2} \tag{4.10}$$

et

$$M^2 = m^2 + \left(\xi - \frac{d-1}{4d}\right) d\,(d+1)\,H^2. \tag{4.11}$$

Pour resoudre cette equation, nous utilisons la changement de variable

$$\eta = a\rho \tag{4.12}$$

Nous obtenons alors l'équation

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + a^2k^2 - \frac{2eE_0k_d}{H^2}\frac{a}{\rho} + \frac{\mathcal{M}^2}{H^2\rho^2}\right]\tilde{\varphi}\,(\rho) = 0 \tag{4.13}$$

qui prend la forme de whittaker pour $a = \frac{i}{2k}$[43],

$$\left[\frac{d^2}{d^2\rho} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\rho} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{\rho^2}\right]\tilde{\varphi}\,(\rho) = 0 \tag{4.14}$$

où les constantes μ et λ sont donnée par :

$$\lambda = -\frac{ieE_0}{H^2}\frac{k_d}{k} = i\widetilde{\lambda} \tag{4.15}$$

et

$$\mu = i\sqrt{\frac{\mathcal{M}^2}{H^2} - \frac{1}{4}} = i\widetilde{\mu} \tag{4.16}$$

L'équation de whittaker admets deux ensembles des solutions linéarement indépendantes qui peuvent etre écrites en termes des fonction de whittaker

$$M_{\lambda,\mu}\,(\rho) = \rho^{\mu+\frac{1}{2}}e^{-\frac{\rho}{2}}M\left(\mu - \lambda + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; \rho\right) \tag{4.17}$$

et

$$W_{\lambda,\mu}\,(\rho) = \rho^{\mu+\frac{1}{2}}e^{-\frac{\rho}{2}}U\left(\mu - \lambda + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; \rho\right) \tag{4.18}$$

où $M\,(a, b, \rho)$ et $U\,(a, b, \rho)$ sont les fonction de Kummer.

4.3 Choix des état "in" et "out"

Maintenant, nous devons classer les solutions exactes obtenues en états "in" et "out" afin d'étudier la création des particules. Pour cela il faut solutionner l'équation de Hamilton-Jacobi. Nous cherchons d'abord, les solutions semi-classiques de l'équation d' Hamilton-Jacobi

$$g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu S+eA_\mu\right)\left(\partial_\nu S+eA_\nu\right)-m^2=0 \tag{4.19}$$

En séparant la partie dépendante de $\vec{r}$

$$S=G\left(\eta\right)+\vec{k}.\vec{r}, \tag{4.20}$$

nous obtenons pour $G\left(\eta\right)$ l'équation suivante

$$\left(\frac{dG}{d\eta}\right)^2=k_\perp^2+\left(k_d+\frac{E_0}{H^2\eta}\right)^2+\frac{e^2E_0^2}{H^4\eta^2}+\frac{M^2}{H^2\eta^2} \tag{4.21}$$

dont une solution formelle est donnée par

$$G\left(\eta\right)=\int d\eta\sqrt{k_\perp^2+\left(k_d+\frac{E_0}{H^2\eta}\right)^2+\frac{e^2E_0^2}{H^4\eta^2}+\frac{M^2}{H^2\eta^2}} \tag{4.22}$$

A l'aide de l'intégrale [43]

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{x} &= \sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}-\sqrt{\alpha}\operatorname{arg\,sinh}\left(\frac{2\alpha+\beta x}{x\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}\right)\\ &\quad+\frac{\beta}{2}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\operatorname{arg\,sinh}\left(\frac{2\gamma x+\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}\right)\end{aligned} \tag{4.23}$$

où α,β et γ sont des nombres réels, avec $\gamma>0$ et $4\alpha\gamma-\beta^2>0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}G\left(\eta\right) &= \sqrt{k^2\eta^2+\frac{M^2}{H^2}+\frac{2k_deE_0}{H^2}\eta}\\ &\quad-\frac{M}{H}\ln\left[\frac{\frac{M^2}{H^2}+\frac{k_deE_0}{H^2}\eta}{\eta\sqrt{\frac{M^2}{H^2}k^2-\frac{k_d^2e^2E_0^2}{H^2}}}+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{\frac{M^2}{H^2}+\frac{2k_deE_0}{H^2}\eta}{\eta\sqrt{\frac{M^2}{H^2}k^2-\frac{k_d^2e^2E_0^2}{H^2}}\eta}}\right)^2+1}\right]\\ &+\frac{eE_0k_d}{H^2k}\ln\left[\frac{k^2\eta+\frac{eE_0}{H^2}k_d}{\sqrt{\frac{M^2}{H^2}k^2-\frac{k_d^2e^2E_0^2}{H^2}}}+\sqrt{\left(\frac{k^2\eta+\frac{eE_0}{H^2}k_d}{\sqrt{\frac{M^2}{H^2}k^2-\frac{k_d^2e^2E_0^2}{H^2}}}\right)^2+1}\right]\end{aligned} \tag{4.24}$$

Nous pouvons alors voir que

$$G(\eta) \sim \left\{ \begin{array}{c} -\frac{M}{H} \ln(-\eta) + c^{st} \text{ pour } \eta \to 0 \\ k\eta + c^{st} \text{ pour } \eta \to -\infty \end{array} \right\} \quad (4.25)$$

Les solutions $\varphi_{in}^{\pm}$ et $\varphi_{out}^{\pm}$ doivent se comporter comme suit

$$\varphi_{in}^{\pm} = \lim_{\eta \to -\infty} e^{\mp iG(\eta)} \sim e^{\pm ik\eta} \quad (4.26)$$

et

$$\varphi_{out}^{\pm} = \lim_{\eta \to 0} e^{\mp iG(\eta)} \sim (k\eta)^{\mp i\frac{m}{H}} . \quad (4.27)$$

De l'autre coté, les fonctions $W_{\lambda,\mu}(\rho)$ ont, à $\rho \to -\infty$, le comportement asymptotique

$$W_{\lambda,\mu}(\rho) \sim (-\rho)^{\lambda} e^{-\frac{\rho}{2}} \sim e^{-ik\eta} \quad (4.28)$$

et les fonction $M_{\lambda,\mu}(\rho)$ ont au voisinage de $\rho \to 0$, le comportement asymptotique

$$M_{\lambda,\mu}(\rho) \sim (\rho)^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho}{2}} \sim (k\eta)^{\mu} \quad (4.29)$$

Les états "in" sont alors données en fonction de $W_{\lambda,\mu}(\rho)$ et $W_{-\lambda,\mu}(-\rho)$

$$\varphi_{in}^{+} = N_{in} W_{-\lambda,\mu}(-\rho) \quad (4.30)$$

$$\varphi_{in}^{-} = N_{in}^{*} W_{\lambda,\mu}(\rho) \quad (4.31)$$

et les états "out" sont les fonctions $M_{\lambda,-\mu}(\rho)$ et $M_{-\lambda,\mu}(-\rho)$

$$\varphi_{out}^{+} = N_{out} M_{\lambda,-\mu}(\rho) \quad (4.32)$$

$$\varphi_{out}^{-} = N_{out}^{*} M_{-\lambda,\mu}(-\rho) . \quad (4.33)$$

4.4 Normalisation des solutions

Nous considérons maintenant le produit scalaire entre les deux champs $\phi_1\left(\vec{x}, \eta\right)$ et $\phi_2\left(\vec{x}, \eta\right)$ défini dans un espace à $D = d + 1$ dimensions par

$$(\phi_1, \phi_2) = i \int d^d x \sqrt{|g|} g^{0\nu} \left(\varphi^+ \partial_\nu \varphi^- - \varphi^- \partial_\nu \varphi^+ \right). \tag{4.34}$$

La condition de normalisation des états "in" est

$$i \int d^d x \sqrt{|g|} g^{00} \left(\phi^+_{k,in} \partial_0 \phi^-_{k',in} - \phi^-_{k,in} \partial_0 \phi^+_{k',in} \right) = (2\pi)^d \, \delta \left(\vec{k} - \vec{k}' \right) \tag{4.35}$$

Compte tenu du fait que

$$\delta \left(\vec{k} - \vec{k}' \right) = \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} \exp \left[i\vec{x} \left(\vec{k} - \vec{k}' \right) \right],$$

la condition de normalisation se réduit à

$$\varphi^+_{k,in} \partial_0 \varphi^-_{k',in} - \varphi^-_{k,in} \partial_0 \varphi^+_{k',in} = i. \tag{4.36}$$

Comme le produit scalaire ne dépend pas du temps comforme η, nous pouvons utiliser les comportements asymtotiques pour calculer les constantes de normalisation. Nous prenons alors

$$\varphi^+_{in} = N_{in} \left(-2ik\eta \right)^\lambda e^{-ik\eta} \tag{4.37}$$

et

$$\varphi^-_{in} = N^*_{in} \left(2ik\eta \right)^\lambda e^{ik\eta} \tag{4.38}$$

En utilisant la propriété

$$(-i2k)^{-\lambda} (i2k)^\lambda = (-i)^{-\lambda} (i)^\lambda (2k)^{-\lambda} (2k)^\lambda = \left(e^{-i\frac{\pi}{2}} \right)^{-\lambda} \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^\lambda = e^{i\pi\lambda} \tag{4.39}$$

nous obtenons

$$|N_{in}|^2 = \frac{e^{-i\pi\lambda}}{2k} \tag{4.40}$$

et, alors

$$N_{in} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}\tilde{\lambda}}}{\sqrt{2k}}. \tag{4.41}$$

Pour les états "out" nous btenons

$$|N_{out}|^2 = \frac{i}{4\mu k} e^{-\pi\tilde{\mu}} \tag{4.42}$$

et

$$N_{out} = \sqrt{\frac{1}{4\tilde{\mu}k}} e^{-\frac{\pi}{2}\tilde{\mu}}. \tag{4.43}$$

4.5 Création des particules

Nous pouvons maintenant calculer la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particules créées à l'aide de la transformation de Bogoliubov qui se déduit de la relation entre les fonctions de Whittaker [43]

$$M_{\lambda,\mu}(\rho) = \frac{\Gamma(2\mu-1)\, e^{-i\pi\lambda}}{\Gamma\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)} W_{-\lambda,\mu}(-\rho) + \frac{\Gamma(2\mu+1)\, e^{i\pi\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)} W_{\lambda,\mu}(\rho) \tag{4.44}$$

avec$-\frac{\pi}{2} < \arg\rho < \frac{3\pi}{2}$ et $2\mu \neq -1, -2, ...$

Les fonctions $\varphi_{in}^{+}(\eta)$ et $\varphi_{in}^{-}(\eta)$ peuvent être exprimé en termes des fonctions $\varphi_{out}^{+}(\eta)$ et$\varphi_{out}^{-}(\eta)$ comme suit

$$\varphi_{out}^{+}(\eta) = \alpha\varphi_{in}^{+}(\eta) + \beta\varphi_{in}^{-}(\eta) \tag{4.45}$$

$$\varphi_{out}^{-}(\eta) = \alpha^{*}\varphi_{in}^{-}(\eta) + \beta^{*}\varphi_{in}^{+}(\eta) \tag{4.46}$$

où les coefficients de Bogoliubov sont donnés par

$$\alpha = \frac{N_{out}}{N_{in}} \frac{\Gamma(1+i2\widetilde{\mu})\, e^{-\pi\widetilde{\lambda}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\left(\tilde{\mu}-\tilde{\lambda}\right)\right)} \tag{4.47}$$

et

$$\beta = \frac{N_{out}}{N_{in}} \frac{\Gamma(1+i2\widetilde{\mu})\, e^{-\pi\left(\tilde{\mu}-\tilde{\lambda}\right)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\left(\tilde{\mu}+\tilde{\lambda}\right)\right)} \tag{4.48}$$

avec la condition

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \tag{4.49}$$

La probabilité de création de particules est alors

$$p_k = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^2 = \left|\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\left(\tilde{\mu}-\tilde{\lambda}\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\left(\tilde{\mu}+\tilde{\lambda}\right)\right)}\right|^2 e^{-2\pi|\tilde{\mu}|} \tag{4.50}$$

En utilisant la propriété

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^2 = \frac{\pi}{\cosh\pi x} \tag{4.51}$$

nous obtenons

$$p_k = \frac{\cosh \pi \left(\tilde{\mu} - \tilde{\lambda}\right)}{\cosh \pi \left(\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}\right)} e^{-2\pi|\tilde{\mu}|} \tag{4.52}$$

$$p_k = \frac{\cosh \pi \left(|\tilde{\mu}| + \frac{k_d}{k}\frac{eE_0}{H^2}\right)}{\cosh \pi \left(|\tilde{\mu}| - \frac{k_d}{k}\frac{eE_0}{H^2}\right)} e^{-2\pi|\tilde{\mu}|}$$

Pour la densité des particules créées nous pouvons utiliser la condition $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$, pour obtenir

$$n(k) = |\beta|^2 = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2 - |\beta|^2} = \frac{\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^2}{1 - \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^2} \tag{4.53}$$

Après un calcul simple nous obtenons l'expresion de la densité des particules céées dans l'espace de de-Sitter avec un champ électrique

$$\begin{aligned} n(k) &= \frac{\cosh \pi \left(|\tilde{\mu}| + \frac{k_d}{k}\frac{eE_0}{H^2}\right) e^{-2\pi|\tilde{\mu}|}}{\cosh \pi \left(|\tilde{\mu}| - \frac{k_d}{k}\frac{eE_0}{H^2}\right) - \cosh \pi \left(|\tilde{\mu}| + \frac{k_d}{k}\frac{eE_0}{H^2}\right) e^{-2\pi|\tilde{\mu}|}} \\ &= \frac{\exp\left(2\pi \frac{k_d}{k}\frac{eE_0}{H^2}\right) + \exp\left(-2\pi|\tilde{\mu}|\right)}{2\cos\left(2\pi|\tilde{\mu}|\right)}. \end{aligned}$$

Comme la création de particules est bien définie uniquement dans la limite adiabatique $M >> H$ la densité des particules devient

$$n\left(\vec{k}\right) = \exp\left[-2\pi\left(|\mu| - \frac{k_d}{k}\frac{eE_0}{H^2}\right)\right]. \tag{4.54}$$

4.6 Nombre total des particules créées

Considéron maintenant le nombre de particules défini par

$$N = \int \frac{dV_d d^d k}{(2\pi)^d a^d(t)} n\left(\vec{k}\right) \tag{4.55}$$

$\frac{dV_d dk^d}{(2\pi)^d a^d(t)}$ est le nombre des états dans l'élément de l'espace des phase $dV_d dk^d$. Le facteur $a^d(t)$ au dénominateur exprime la dilution des particules par l'expansion de l'univers. Nous avons

$$dV_d = \prod_{i=1}^{d} dx_i \tag{4.56}$$

$$d^d k = \prod_{i=1}^{d} dk_i. \tag{4.57}$$

Nous définissons le coordonnées sphériques à $(d+1)$ dimension

$$\begin{aligned}
k_1 &= k \sin\theta_1 \sin\theta_2 ... \sin\theta_{d-2} \sin\theta_{d-1} \\
k_2 &= k \cos\theta_1 \sin\theta_2 ... \sin\theta_{d-2} \sin\theta_{d-1} \\
k_3 &= k \cos\theta_2 \sin\theta_3 ... \sin\theta_{d-2} \sin\theta_{d-1} \\
&\vdots \\
k_d &= k \cos\theta_{d-1}
\end{aligned}$$

avec

$$d^d k = \prod_{i=1}^{d} dk_i = k^{d-1} dk d\Omega \tag{4.58}$$

où l'angle solide est donnée par

$$d\Omega = \prod_{i=1}^{d-1} (\sin\theta_i)^{i-1} d\theta_i. \tag{4.59}$$

Dans ce cas nous avons

$$\begin{aligned}
N &= \int \frac{dV_d}{(2\pi)^d a^d(t)} k^{d-1} dk d\Omega \exp\left[-2\pi\left(|\mu| - \frac{k_d}{k}\frac{eE_0}{H^2}\right)\right] && (4.60) \\
&= \int \frac{dV_d}{(2\pi)^d a^d(t)} \int k^{d-1} dk \exp\left[-2\pi|\mu|\right] \int \prod_{i=1}^{d-1} (\sin\theta_i)^{i-1} d\theta_i \exp\left(\frac{2\pi e E_0}{H^2}\cos\theta_{d-1}\right) && (4.61)
\end{aligned}$$

Pour pouvoir effectuer les intégrations sur les angles θ_i avec $i = \overline{1, d-2}$, nous utilisons l'intégrale suivante [43]

$$\int_0^\pi (\sin\theta_i)^i d\theta_i = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+2}{2}\right)} \tag{4.62}$$

Il suit alors

$$2\int_0^\pi \prod_{i=0}^{d-3} (\sin\theta_i)^i d\theta_i = 2\left(\sqrt{\pi}\right)^{d-2} \prod_{i=0}^{d-3} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+2}{2}\right)} = \frac{2\left(\sqrt{\pi}\right)^{d-1}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \tag{4.63}$$

Pour l'intégrale sur θ_{d-1}, nous utilisons la formule [43]

$$\int_0^\pi (\sin\theta)^{d-2} e^{\alpha\cos\theta} d\theta = \sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{d-2}{2}} I_{\frac{d-2}{2}}(\alpha) \tag{4.64}$$

où $I_\nu(\alpha)$ est la fonction de Bessel modifiée. Nous obtenons alors

$$N = \int \frac{dV_d}{a^d(t)} \int k^{d-1} dk \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{H^2}{2\pi e E_0}\right)^{\frac{d-2}{2}} I_{\frac{d-2}{2}} \left(\frac{2\pi e E_0}{H^2}\right) \exp\left[-2\pi |\mu|\right] \tag{4.65}$$

Comme $n(k)$ ne dépend pas de k, l'intégration sur k se diverge. L'origine de cette divergence est que le nombre des particules créées dans un temps infini est aussi infini. Par contre, le nombre de particules par unité de temps et par unité de volume $\frac{dN}{dtdV_d}$ doit être fini et, généralement, c'est la quantité qui est en lien avec les mesures expérimentales. Ainsi, nous pouvons écrire

$$N = \int dN = \int \frac{dN}{dtdV_d} dtdV_d. \tag{4.66}$$

La divergence de l'intégrale $\int \frac{dV_d d^d k}{(2\pi)^d a^d(t)} (.)$ doit être la même que celle de $\int dtdV_d (.)$. Comme il a été montré dans [7], la notion de particules ne peut avoir un sens sauf si

$$|k| < \mathcal{M} e^{Ht}. \tag{4.67}$$

Alors, pour un instant donné t, nous devons introduire un cut-off $\Lambda = \mathcal{M} e^{Ht}$.

$$N = \int dV_d \frac{1}{a^d(t)} \int_0^\Lambda k^{d-1} dk \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{H^2}{2\pi e E_0}\right)^{\frac{d-2}{2}} I_{\frac{d-2}{2}} \left(\frac{2\pi e E_0}{H^2}\right) \exp\left[-2\pi |\mu|\right] \tag{4.68}$$

Pour une légère variation de cut-off, nous écrivons

$$\frac{dN}{d\Lambda dV_d} = \frac{1}{a^d(t)} \Lambda^{d-1} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{H^2}{2\pi e E_0}\right)^{\frac{d-2}{2}} I_{\frac{d-2}{2}} \left(\frac{2\pi e E_0}{H^2}\right) \exp\left[-2\pi |\mu|\right], \tag{4.69}$$

avec

$$d\Lambda = \mathcal{M} H e^{Ht} dt. \tag{4.70}$$

Nous obtenons donc le nombre des particules créées par unité du temps et par unité de volume

$$\frac{dN}{dtdV_d} = \frac{\mathcal{M}^d H}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{H^2}{2\pi e E_0}\right)^{\frac{d-2}{2}} I_{\frac{d-2}{2}} \left(\frac{2\pi e E_0}{H^2}\right) \exp\left[-2\pi |\mu|\right] \tag{4.71}$$

Pour un champ gravitationnel pur ($E_0 = 0$), nous avons

$$\frac{dN}{dtdV_d} = \frac{\mathcal{M}^d H}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{H^2}{2\pi e E_0}\right)^{\frac{d-2}{2}} I_{\frac{d-2}{2}} \left(\frac{2\pi e E_0}{H^2}\right) \exp\left[-2\pi |\mu|\right]. \tag{4.72}$$

4.7 Action effective de Schwinger

Maintenant, nous utilisons les résultats obtenus pour calculer la partie imaginaire de l'action éffective de Schwinger. L'action effective de Schwinger définit l'amplitude de transition vide-vide comme suit

$$\langle vid \mid vid\rangle = \exp\left(iS_{eff}\right) = \exp\left(i\int d^D x \mathcal{L}_{eff}\right) \tag{4.73}$$

où $\mathcal{L}_{eff}$ est dit le lagrangien effectif de Schwinger. La probabilité de transition vide-vide est alors

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{vac-vac} &= \left|\langle vid \mid vid\rangle\right|^2 \\ &= \exp\left(-2\,\mathrm{Im}\,S_{eff}\right) \\ &= \exp\left(-\int d^D x\; 2\,\mathrm{Im}\,L_{eff}\right). \end{aligned} \tag{4.74}$$

Dans ce cas, la probabilité de création des particules peut être donc extraite de la partie imaginaire de S_{eff}

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{Creat.} &= 1 - \mathcal{P}_{vac-vac} \\ &= 1 - \exp\left(-\int d^D x\; 2\,\mathrm{Im}\,L_{eff}\right) \\ &\simeq \int d^D x\; 2\,\mathrm{Im}\,L_{eff}. \end{aligned} \tag{4.75}$$

Ici, $d^D x = dtdV_d$ et $2\,\mathrm{Im}\,L_{eff}$ est la probabilité par unité de temps par unité de volume de créer des particules à partir du vide.

Soit $C_{\vec{k}}$ la probabilité pour qu'il n'y ait pas de création de paires dans l'état $\vec{k}$. La quantité $C_{\vec{k}}\left(P_{\vec{k}}\right)^n$ est donc la probabilité d'avoir seulement n paires créés dans l'état $\vec{k}$. Nous avons alors

$$\sum_n C_{\vec{k}}\left(P_{\vec{k}}\right)^n = 1, \tag{4.76}$$

ce qui nous donne

$$C_{\vec{k}} = 1 - P_{\vec{k}} = 1 - \left|\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right|^2 = \frac{1}{\left|\alpha_k\right|^2} = \frac{1}{1 + \left|\beta_k\right|^2} \tag{4.77}$$

En utilisant la probabilité $C_{\vec{k}}$, la probabilité de transition vide-vide peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{vac-vac} &= \prod_k C_{\vec{k}} \\ &= \prod_k \exp\left[-\ln\left(1+|\beta_k|^2\right)\right] \\ &= \exp\left[-\sum_k \ln\left(1+|\beta_k|^2\right)\right].\end{aligned} \tag{4.78}$$

Par conséquent la partie imaginaire de l'action effective de Schwinger est

$$\int dtdV_d \; 2\,\mathrm{Im}\, L_{eff} = \sum_k \ln\left(1+|\beta_k|^2\right). \tag{4.79}$$

Utilisons le developpement de Taylor

$$\ln\left(1+|\beta_k|^2\right) = \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} |\beta_k|^{2n}$$

pour obtenir l'équivalent à la fameuse série de Schwinger

$$\int dtdV_d \; 2\,\mathrm{Im}\, L_{eff} = \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_k |\beta_k|^{2n}. \tag{4.80}$$

Il est à noter que la sommation sur k peut être remplacée par l'intégrale $\int \frac{dV_d d^dk}{(2\pi)^d a^d(t)}$

$$\sum_k \rightarrow \int \frac{dV_d d^dk}{(2\pi)^d\, a^d(t)} \tag{4.81}$$

où la mésure $\frac{dV_d d^dk}{(2\pi)^d a^d(t)}$ représente le nombre d'états dans l'intervale $\left[\vec{k}, \vec{k}+d\vec{k}\right]$ dans le volume dV_d.

L'action effective de Schwinger devient

$$\begin{aligned}\int dtdV_d L_{eff} &= \int dV_d \int \frac{k^{d-1}dk}{(2\pi)^d\, a^d(t)} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp\left(-2n\pi\,|\mu|\right) \\ &\quad \int \prod_{i=1}^{d-1} \left(\sin\theta_i\right)^{i-1} d\theta_i \exp\left(-2n\pi\cos\theta_{d-2}\frac{eE_0}{H^2}\right)\end{aligned} \tag{4.82}$$

Après intégration sur les angles, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int dtdV_d L_{eff} &= \int dV_d \int \frac{k^{d-1}dk}{(2\pi)^{d-1}\, a^d(t)} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-2n\pi\,|\mu|\right) \\ &\quad \left(\frac{H^2}{eE_0}\right)^{\frac{d}{2}-1} I_{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{2n\pi eE_0}{H^2}\right)\end{aligned} \tag{4.83}$$

En utilisant la même procedure utilisée dans la section précédente pour éliminer la divergence de l'intégrale $\int k^{d-1}dk$, nous obtenons l'expression finale du Lagrangien effectif de Schwinger dans l'espace de de-Sitter à $(d+1)$ dimensions

$$2\,\mathrm{Im}\,L_{eff}=\frac{1}{(2\pi)^{d-1}}\frac{(m^2H^2+eE_0^2)^{\frac{d}{2}}}{H\,(eE_0)^{\frac{d}{2}-1}}\sum_{n=1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{d}{2}}}\exp\left(-2n\pi\left|\mu\right|\right)I_{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{2n\pi eE_0}{H^2}\right) \tag{4.84}$$

4.8 Le courant induit

Si nous voulons chercher la dynamique du champ électrique nous ajoutons à l'action du champ scalaire le Lagrangien du champ de Maxwell

$$\mathcal{L}[A]=-\sqrt{-g}\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,,$$

ce qui donne pour le champ A_μ l'équation de mouvement suivante

$$\nabla_\mu F^{\nu\mu}=J^\nu$$

avec

$$J_\mu=-\frac{ie}{2}\left\{\phi^\dagger D_\mu\phi-\phi\left(D_\mu\phi\right)^\dagger\right\}+\text{h.c.}\,.$$

La valeur moyenne du courant dans l'état du vide est nulle pour toutes les composantes à l'exception de la direction d, qui est donnée par

$$\langle 0|J_d|0\rangle=\frac{2e}{a^2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(k_d-eA_d\right)\left|\varphi_{in}\left(x\right)\right|^2. \tag{4.85}$$

Comme

$$\varphi\left(x\right)=\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\left[a_{in,k}\varphi_k e^{ikx}+b_{in,k}^{+}\varphi_{-k}^{+}e^{-ikx}\right] \tag{4.86}$$

et

$$\varphi^*\left(x\right)=\int\frac{d^dk'}{(2\pi)\,d}\left[a_{in,k'}^{+}\varphi_{k'}^{+}e^{-ik'x}+b_{in,k'}\varphi_{-k'}e^{+ik'x}\right] \tag{4.87}$$

il vient

$$\partial_d\varphi=\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\left[ika_{in,k}\varphi_k e^{ikx}-ikb_{in,k}^{+}\varphi_{-k}^{+}e^{-ikx}\right] \tag{4.88}$$

et

$$\partial_d\varphi^*=\int\frac{d^dk'}{(2\pi)^d}\left[-k'a_{in,k'}^{+}\varphi_{k'}^{+}e^{-ik'x}+ik'b_{in,k'}\varphi_{-k'}e^{+ik'x}\right] \tag{4.89}$$

Nous avons alors

$$\left\langle 0 \mid J^{d}(x) \mid 0 \right\rangle = \left\langle 0 \mid \frac{ie}{2} g^{dd} \left\{ \left(\partial_d \varphi + ieA_d \varphi \right), \varphi^* \right\} - \left\{ \left(\partial_d \varphi^* - ieA_d \varphi^* \right), \varphi \right\} \mid 0 \right\rangle$$
$$= \left\langle 0 \mid \frac{ie}{2} g^{dd} \left[\left\{ \partial_d \varphi, \varphi^* \right\} + ieA_d \left\{ \varphi, \varphi^* \right\} - \left\{ \partial_d \varphi^*, \varphi \right\} + ieA_d \left\{ \varphi^*, \varphi \right\} \right] \mid 0 \right\rangle$$

Après quelques calculs nous obtenons

$$j^d = \left\langle 0 \mid J^d(x) \mid 0 \right\rangle = \frac{2e}{(2\pi)^d a^2} \int d^d k \left(k + eA_d \right) \left| \varphi_{in}^{+} \right|^2$$

et par conséquent,

$$j^d = \frac{2e}{(2\pi)^d a^2} \int d^d k \left(k + eA_d \right) \frac{e^{\frac{i\lambda\pi}{2}}}{\sqrt{2k}} \left| W_{k,\mu}(\rho) \right|^2$$

Compte tenu du comportement des fonctions $W_{\lambda,\mu}(z)$ à $|z| \to \infty$

$$W_{\lambda,\mu}(z) = e^{-z/2} z^{\lambda} \left(1 + \frac{\mu^2 - \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^2}{z} + \frac{\left[\mu^2 - \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \left[\mu^2 - \left(\lambda - \frac{3}{2} \right)^2 \right]}{2z^2} + \ldots \right)$$

nous pouvons écrire

$$j_d = \frac{2e}{a^{d+1}} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{ie^{-i\pi\mu}}{4\mu k} \left(k\cos\theta + eA_d \right) \begin{pmatrix} 1 + \frac{eE_0}{H^2} \frac{1}{k} \frac{1}{\eta} \cos\theta \\ + \cos^2\theta \frac{e^2 E_0^2}{4H^4} \frac{1}{k^2} \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{M}{H} \right)^4 \frac{1}{k^2} \frac{1}{\eta^2} \\ + \frac{1}{4} \cos^4\theta \frac{e^4 E_0^4}{H^8} \frac{1}{k^2} \frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{2} \frac{M^2}{H^2} \frac{e^2 E_0^2}{H^4} \frac{1}{k^2} \frac{1}{\eta^2} \cos^2\theta \end{pmatrix} e^{\pi \widetilde{\lambda}}. \tag{4.90}$$

En faisant l'intégration sur les angles, nous obtenons

$$j_d = \frac{2e}{a^{d+1}} \frac{ie^{-i\pi\mu}}{4\mu} \int \frac{k^{d-1} dk}{(2\pi)^d} \left(B_1 - \frac{eE_0}{H^2 \eta} \left(B_2 - 1 \right) \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{4} \frac{M^4}{H^4 \eta^2} B_1 - \frac{1}{2} \frac{M^2}{H^2} \frac{e^2 E_0^2}{H^4 \eta^2} B_3 + \frac{1}{4} B_5 \frac{e^4 E_0^4}{H^8 \eta^2} \right) \frac{1}{k^2} \right)$$

où les coefficients sont donnés par

$$B_n = \int d\Omega \left(\cos\theta \right)^n e^{\pi \widetilde{\lambda}}.$$

La dernière expression de j_d montre des divergences ultraviolettes qui nécéssitent une régularisation.

4.9 Conclusion

En conclusion, nous avons étudié dans ce chapitre l'influence d'un champ éléctrique sur la création de spin 0 dans l'éspace de de-Sitter à $(d+1)$ dimensions. Nous avons trouvé des solutions éxactes pour l'équation de K-G correspondante. Ensuite nous avons établi la relation entre les états d'énèrgie positif et négatif pour obtenir les coefficients de Bogoliubov à partir desquels nous avons calculé la probabilité et la densité des particules crées. De ces résultats nous avons pu extraire la partie imaginaire de Schwinger.

Chapitre 5

Création de particule de spin$\frac{1}{2}$ dans un univers de de-Sitter

5.1 introduction

Dans ce chapitre nous nous proposons d'étudier l'effet du champ électrique sur la création des particules de Dirac dans l'univers de de Sitter à $(d+1)$ dimensions. Nous commençons d'abord par la solution de l'équation de Dirac et la détermination des états "in" et "out". Ensuite, nous calculons la probabilité de création d'une paire et la densité des fermions créés à partir des coefficients de Bogoliubov.

5.2 Equation de Dirac en présence d'un champ éléctrique

Considérons une particule de spin 1/2, de masse m et de charge $(-e)$ qui se propage en présence d'un champ électrique dans un espace-temps à $(d+1)$ dimensions décrit par la métrique

$$ds^2 = a^2(\eta)\left(d\eta^2 - d\vec{x}^2\right), \tag{5.1}$$

où $a(\eta) = a_0 f(\eta)$ et $f(\eta)$ est une fonction arbitraire. Nous choisissons la jauge

$$A_\mu = (0, 0, ..., A_d(\eta)),$$

avec

$$A_d = E_0 f(\eta). \tag{5.2}$$

Suivant le principe du couplage minimal, l'équation de Dirac covariante s'écrit

$$\left[i\tilde{\gamma}^{\mu}(\eta)\left(\partial_{\mu} - ieA_{\mu}(\eta) - \Gamma_{\mu}(\eta)\right) - m\right]\Psi(\eta, \vec{x}) = 0 \tag{5.3}$$

où $\tilde{\gamma}^{\mu}$ sont les matrices de Dirac dépendantes de la courbure de l'espace. Ces matrices qui vérifient la relation d'anti-commutation $\{\tilde{\gamma}^{\mu}, \tilde{\gamma}^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}$ sont reliées aux matrices habituelles de Dirac γ^a par la relation

$$\tilde{\gamma}^{\mu} = e^{\mu}_{a}\gamma^{a}, \tag{5.4}$$

où e^{μ}_{a} sont les tétrades permettant de passer d'un système de coordonnées Minkowskien (noté par les indices latins a,b...) à un système de coordonnées quelconque, (noté par les indices grecs μ, ν...). Nous avons alors

$$g^{\mu\nu} = e^{\mu}_{a} e^{\nu}_{b} \eta^{ab}. \tag{5.5}$$

avec $\left\{\gamma^{a}, \gamma^{b}\right\} = 2\eta^{ab}$où η^{ab} est la métrique de Minkowski.

Pour une métrique du genre (**??**), les matrices de Dirac dépendantes de la courbure de l'espace-temps s'écrivent

$$\tilde{\gamma}^{0}(\eta) = \frac{1}{a(\eta)}\gamma^{0} \tag{5.6}$$

$$\tilde{\gamma}^{i}(\eta) = \frac{1}{a(\eta)}\gamma^{i}, i = 1, 2, ..., d \tag{5.7}$$

où γ^0 et γ^i avec $i = \overline{1, d}$, sont les matrices habituelles de Dirac qui peuvent être écrites en $(d+1)$ dimensions dans un espace de Minkowski comme suit

$$\gamma^{0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

$$\gamma^{i} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{i} \\ -\sigma_{i}^{+} & 0 \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

où les matrices σ_i vérifient la condition

$$\sigma_{i}\sigma_{j}^{+} + \sigma_{j}\sigma_{i}^{+} = 2\delta_{ij}. \tag{5.10}$$

Les connexions de spin Γ_{μ} sont définies à l'aide des symboles de Christoffel $\Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha}$ (**??**)

$$\Gamma_{\alpha} = -\frac{1}{8} g_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha}\left[\tilde{\gamma}^{\mu}, \tilde{\gamma}^{\nu}\right], \tag{5.11}$$

Dans le présent modèle, les seuls symboles de Christoffel non nuls sont

$$\Gamma_{00}^{0} = \frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}, \tag{5.12}$$

$$\Gamma_{ij}^{0} = \Gamma_{0j}^{i} = \frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}\delta_{ij} \tag{5.13}$$

Par un calcul simple nous obtenons

$$\Gamma_0 = 0 \tag{5.14}$$

$$\Gamma_i = \frac{1}{2}\frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}\gamma_0\gamma_i = -\frac{1}{2}\frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}\gamma^0\gamma^i. \tag{5.15}$$

Pour un espace de dimension $(d+1)$ l'équation de Dirac se réduit alors à

$$\left[i\frac{1}{a(\eta)}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - ieA_{\mu}(\eta) + i\frac{d}{2}\frac{\dot{a}(\eta)}{a^2(\eta)}\gamma^0 - m\right]\Psi(\eta,\vec{x}) = 0. \tag{5.16}$$

Pour éliminer le terme supplémentaire $i\frac{d}{2}\frac{\dot{a}(\eta)}{a^2(\eta)}\gamma^0$ nous posons

$$\Psi(\eta,x) = a(\eta)^{-\frac{d}{2}}\phi(\eta,\vec{x}). \tag{5.17}$$

L'équation résultante qui a une forme simple se ressemble à l'équation de Dirac habituelle (dans un espace plat) mais avec une masse dependante du temps

$$\left[i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - ieA_{\mu}(\eta) - ma(\eta)\right]\Psi(\eta,\vec{x}) = 0. \tag{5.18}$$

5.3 Séparation des variables

Dans le but de résoudre cette équation, nous écrivons la fonction d'onde sous la forme

$$\chi(\eta,x) = \gamma^0\gamma^d \exp\left(i\vec{k}.\vec{x}\right)\xi(\eta). \tag{5.19}$$

Le spineur $\xi(\eta)$ vérifie alors l'équation

$$\left[i\gamma^d\frac{\partial}{\partial\eta} - \gamma^0\left(k_d - eA_d(\eta)\right) - \left(\gamma_{\perp}.k_{\perp}\right)\gamma^0\gamma^d - m\gamma^0\gamma^d a(\eta)\right]\xi(\eta) = 0. \tag{5.20}$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\hat{K}_1\xi_{k,s}(\eta,s) = \hat{K}_2\xi_{k,s}(\eta,s). \tag{5.21}$$

où

$$\hat{K}_1 = i\gamma^d \frac{\partial}{\partial\eta} - \gamma^0 \left(k_d - eA_d(\eta)\right) - \gamma^0\gamma^d ma\left(\eta\right) \tag{5.22}$$
$$\hat{K}_2 = \left(\gamma_\perp .k_\perp\right)\gamma^0\gamma^d$$

Ici, nous pouvons voir que $\left[\hat{K}_1, \hat{K}_2\right] = 0$, ce qui nous permet de construire une base propre commune aux opérateurs $\hat{K}_1$ et $\hat{K}_2$. De plus, nous montrer que

$$\hat{K}_2^2 = -k_\perp^2 = -\sum_i^{d-1}\left(k_i^2\right), \tag{5.23}$$

ce qui montre que l'opérateur $\hat{K}_2$ a deux valeurs propres ; $isk_\perp$ avec $s = \pm 1$. Il n'est pas dificile de montrer que les vecteur propres communs aux opérateurs $\hat{K}_1$ et $\hat{K}_2$ sont donnés par

$$\xi_{k,s}\left(\eta, s\right) = \begin{pmatrix} \xi_1\left(\eta, s\right)\Upsilon_{s,1} \\ \xi_2\left(\eta, s\right)\Upsilon_{s,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1\left(\eta, s\right)\Upsilon_s \\ \xi_2\left(\eta, s\right)\sigma_d^+\Upsilon_s \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

où $\Upsilon_s\left(\vec{k}\right)$, avec $s = \pm 1$, sont les vecteurs propres de la matrice $\vec{\sigma}_\perp .\vec{k}_\perp$

$$\hat{K}_2^2 = -\left(k_x^2 + k_y^2 + ... + k_{d-1}^2\right) \tag{5.25}$$

Les fonctions $\xi_1\left(\eta, s\right)$ et $\xi_1\left(\eta, s\right)$ vérifient le système d'équations différentielles de première ordre

$$\left(i\frac{\partial}{\partial\eta} + ma\left(\eta\right)\right)\xi_1\left(\eta, s\right) = \left[-isk_\perp + k_d - eA_d(\eta)\right]\xi_2\left(\eta, s\right) \tag{5.26}$$
$$\left(i\frac{\partial}{\partial\eta} - ma\left(\eta\right)\right)\xi_2\left(\eta, s\right) = \left[isk_\perp + k_d - eA_d(\eta)\right]\xi_1\left(\eta, s\right) \tag{5.27}$$

pour ce système nous pouvons voir que le $2^{ème}$ tèrme contient les coefficients de couplage $\left[(k_d - eA_d) \pm isk_\perp\right]$ depend du temps conforme. pour cela l'équation du second ordre des intéraction est compliquée donc pour trouver des bonnes solutions on introduit la transformation unitaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \xi_1\left(\eta, s\right) \\ \xi_2\left(\eta, s\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\begin{pmatrix} 1 & \tau \\ -\tau & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1\left(\eta, s\right) \\ \varphi_2\left(\eta, s\right) \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

où

$$\tau = -\frac{a_0}{eE_0}\left(\mathcal{M} - m\right) \tag{5.29}$$

et

$$\mathcal{M} = \sqrt{m^2 + \frac{e^2 E_0^2}{a_0^2}} \tag{5.30}$$

A partir de cette écriture nous obtenons un système de deux équations différentielles du premier ordre couplées

$$\left[i\frac{d}{d\eta} - \frac{m^2}{\mathcal{M}}a_0 f(\eta) + \frac{eE_0}{\mathcal{M}a_0}k_d - \frac{e^2E^2}{\mathcal{M}a_0}f(\eta)\right]\varphi_2 = \left[\frac{m}{\mathcal{M}}k_d + isk_\perp\right]\varphi_1 \tag{5.31}$$

$$\left[i\frac{d}{d\eta} + \frac{m^2}{\mathcal{M}}a_0 f(\eta) - \frac{eE_0}{\mathcal{M}a_0}k_d + \frac{e^2E^2}{\mathcal{M}a_0}f(\eta)\right]\varphi_1 = \left[\frac{m}{\mathcal{M}}k_d - isk_\perp\right]\varphi_2 \tag{5.32}$$

Par intéraction nous obtenons deux équations différentielles du second ordre decouplées

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + a_0^2\mathcal{M}^2 f^2(\eta) - 2eE_0k_d f(\eta) + k^2 \mp i\mathcal{M}a_0 f'(\eta)\right]\varphi_{1,2} = 0 \tag{5.33}$$

Cette équation admet des solutions pour différents modèles : univers de de Sitter $f(\eta) = \frac{-1}{H^2\eta}$, univers dominé par radiation $f(\eta) = \eta$ et un univers de Milne $f(\eta) = e^{\rho\eta}$, univers asymptotiquement Minkowskien $f(\eta) = a + b\tanh(\lambda\eta)$...etc.

Il est à noter que dans (**??**) le champ gravitationnel se couple à la masse des particules, tandis que le champ électrique se couple à la charge e. Dans le nouveau système (**??**), nous pouvons voir qu'un champ effectif est couplé à la quantité $\mathcal{M}$.

De plus, l'équation (**??**) peut s'écrire sous la forme

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \left(\tilde{k}_d - e\mathcal{E}f(\eta)\right)^2 + \tilde{M}^2 + \tilde{k}_\perp^2 \pm ie\mathcal{E}\ f'(\eta)\right]\varphi_s = 0 \tag{5.34}$$

avec

$$e\mathcal{E} = \mathcal{M}a_0, \tag{5.35}$$

$$\tilde{k}_d = k_d\frac{eE_0}{\mathcal{M}a_0}, \tag{5.36}$$

$$\tilde{k}_\perp^2 = k_\perp^2\frac{e^2E_0^2}{\mathcal{M}^2a_0^2} \tag{5.37}$$

et

$$\tilde{M} = k\frac{m}{\mathcal{M}}. \tag{5.38}$$

L'équation (5.34) est similaire à celle de Dirac pour une particule de masse $\tilde{M}$, charge $(-e)$ et de vecteur d'onde $\tilde{k}$ soumise à un champ électrique décrit par la jauge $A_1 = \mathcal{E}f(\eta)$ dans un espace de Minkowski. Alors, la densité des particules de masse m, charge $(-e)$ et de vecteur d'onde k créées par un champ électrique $A_1 = E_0 f(\eta)$ dans un espace-temps en expansion où $a(\eta) = a_0 f(\eta)$ est la même que la densité des particules de masse $\tilde{M}$, charge $(-e)$ et de vecteur d'onde $\tilde{k}$ créées par le champ électrique $A_1 = \mathcal{E} f(\eta)$ dans un espace de Minkowski.

5.4 Solutions exactes pour l'espace de de Sitter

Pour un espace de de-Sitter nous avons $a_0 = H$, $\mathcal{M} = \sqrt{m^2 + \frac{e^2 E_0^2}{a_0^2}}$ et $f(\eta) = -\frac{1}{H^2\eta}$. Dans ce cas, nous obtenons pour $\varphi_{1,2}$ l'équation

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + \left(\frac{\mathcal{M}^2}{H^2} \mp i\frac{\mathcal{M}}{H}\right)\frac{1}{\eta^2} + 2\frac{eE_0 k_d}{H^2}\frac{1}{\eta} + k^2\right]\varphi_{1,2} = 0 \tag{5.39}$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\varphi''(\eta) + \omega_s^2(\eta)\,\varphi_s(\eta) = 0 \tag{5.40}$$

où $\omega_s^2(\eta)$ a l'expression

$$\omega_s^2(\eta) = a_0^2 \mathcal{M}^2 f^2(\eta) - 2eE_0 k_d f(\eta) + k^2 \mp i a_0 \mathcal{M} f'(\eta) \tag{5.41}$$

d'où nous en déduisons la condition adiabatique

$$\lim_{\eta \to 0}\left|\frac{\omega_s'(\eta)}{\omega_s^2(\eta)}\right| \approx \frac{H}{\mathcal{M}} \ll 1. \tag{5.42}$$

Pour résoudre l'équation (5.39) nous effectuons le changement de variable

$$\rho = -2ik\eta \tag{5.43}$$

pour obtenir l'équation

$$\left[\frac{d^2}{d^2\rho} + \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} \mp i\frac{\mathcal{M}}{H}\right)^2\right)\frac{1}{\rho^2} + i\frac{eE_0}{H^2}\frac{k_d}{k}\frac{1}{\rho} - \frac{1}{4}\right]\varphi_{1,2} = 0 \tag{5.44}$$

où $\varphi_s(\rho) \equiv \varphi_s(\eta)$.

Cette équation est identique à l'équation de Whittaker [43]

$$\left[\frac{d^2}{d^2\rho} + \frac{\left(\frac{1}{4} - \mu_s^2\right)}{\rho^2} + \frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4}\right]\varphi_{1,2} = 0 \tag{5.45}$$

avec

$$\mu_1 = \frac{1}{2} - i\frac{M}{H} = \mu \tag{5.46}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2} + i\frac{M}{H} = \mu^* \tag{5.47}$$

et

$$\lambda = i\frac{eE_0}{H^2}\frac{k_d}{k}. \tag{5.48}$$

Comme dans le cas des particules de spin 0, nous utilisons les solutions semi-classiques, pour identifier les états "in" et "out". Le résultat est

$$\varphi^+_{1,in}(\eta, s) = N_{1,in} W_{-\lambda,\mu}(-\rho) \tag{5.49}$$

$$\varphi^-_{1,in}(\eta, s) = N^*_{1,in} W_{\lambda,\mu}(\rho) \tag{5.50}$$

et

$$\varphi^+_{1,out}(\eta, s) = N_{1,ont} M_{-\lambda,\mu}(-\rho) \tag{5.51}$$

$$\varphi^-_{1,out}(\eta, s) = N^*_{1,ont} M_{\lambda,-\mu}(\rho) \tag{5.52}$$

Maintenant nous utilisons les relations fonctionelles

$$\left[(2\mu-1)\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{(2\mu-1)^2}{2\rho} - \lambda\right] W_{\lambda,\mu}(\rho) = -\left(\mu+\lambda-\frac{1}{2}\right) W_{\lambda,\mu-1}(\rho), \tag{5.53}$$

$$\left[(2\mu+1)\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{(2\mu+1)^2}{2\rho} - \lambda\right] M_{\lambda,\mu}(\rho) = \frac{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 - \lambda^2}{2(\mu+1)(2\mu+1)} \tag{5.54}$$

et

$$\left[(2\mu-1)\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{(2\mu-1)^2}{2\rho} - \lambda\right] M_{\lambda,\mu}(\rho) = 2\mu(2\mu-1) M_{\lambda,\mu+1}(\rho) \tag{5.55}$$

pour calculer la deuxième composante pour chaque spineur. Nous obtenons alors

$$\varphi^+_{2,in}(\eta, s) = i\frac{\mathcal{M}k - k_d\frac{eE_0}{H}}{ik_d m + sk_\perp \mathcal{M}} W_{-\lambda,\mu-1}(-\rho) \tag{5.56}$$

$$\varphi^-_{2,in}(\eta, s) = i\frac{-\left(\mathcal{M}k - k_d\frac{eE_0}{H}\right)}{ik_d m + sk_\perp\ \mathcal{M}} W_{\lambda,\mu-1}(\rho) \tag{5.57}$$

$$\varphi^+_{2,out} = \frac{4k}{\left(k_d\frac{m}{\mathcal{M}} - isk_\perp\right)}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\mathcal{M}}{H}\right) M_{-\lambda,\mu-1}(-\rho) \tag{5.58}$$

et

$$\varphi_{2,out}^{-}=\frac{k}{4\left(k_d\frac{m}{\mathcal{M}}-isk_\perp\right)}\frac{\left(1-\frac{e^2E_0^2}{\mathcal{M}^2H^2}\frac{k_d^2}{k^2}\right)}{\left(\frac{\mathcal{M}}{H}i-\frac{1}{2}\right)}M_{\lambda,1-\mu}\left(\rho\right). \tag{5.59}$$

Alors, les spineurs de Dirac correspondant aux états d'énergie positive et négative sont donnée par

$$\xi_{k,s,in}^{+}\left(\eta\right)=\begin{pmatrix}\xi_{1,in}^{+}\left(\eta,s\right)\Upsilon_s\\ \xi_{2,in}^{+}\left(\eta,s\right)\sigma_d^{+}\Upsilon_s\end{pmatrix} \tag{5.60}$$

$$\xi_{k,s,in}^{-}\left(\eta\right)=\begin{pmatrix}\xi_{1,in}^{-}\left(\eta,s\right)\Upsilon_s\\ \xi_{2,in}^{-}\left(\eta,s\right)\sigma_d^{+}\Upsilon_s\end{pmatrix} \tag{5.61}$$

$$\xi_{k,s,out}^{+}\left(\eta\right)=\begin{pmatrix}\xi_{1,out}^{+}\left(\eta,s\right)\Upsilon_s\\ \xi_{2,out}^{+}\left(\eta,s\right)\sigma_d^{+}\Upsilon_s\end{pmatrix} \tag{5.62}$$

$$\xi_{k,s,out}^{-}\left(\eta\right)=\begin{pmatrix}\xi_{1,out}^{-}\left(\eta,s\right)\Upsilon_s\\ \xi_{2,out}^{-}\left(\eta,s\right)\sigma_d^{+}\Upsilon_s\end{pmatrix} \tag{5.63}$$

où les fonctions $\xi_{1,in}^{+}\left(\eta,s\right)$ et $\xi_{2,in}^{+}\left(\eta,s\right)$ sont données par

$$\xi_{1,in}^{+}\left(\eta,s\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \tag{5.64}$$

$$\left[W_{-\lambda,\mu}\left(-\rho\right)-i\frac{H}{eE_0}\left(\mathcal{M}-m\right)\frac{\mathcal{M}k-k_d\frac{eE_0}{H}}{ik_dm+sk_\perp\mathcal{M}}W_{-\lambda,\mu-1}\left(-\rho\right)\right]$$

$$\xi_{2,in}^{+}\left(\eta,s\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \tag{5.65}$$

$$\left[\frac{H}{eE_0}\left(\mathcal{M}-m\right)W_{-\lambda,\mu}\left(-\rho\right)+i\frac{\mathcal{M}k-k_d\frac{eE_0}{H}}{ik_dm+sk_\perp\mathcal{M}}W_{-\lambda,\mu-1}\left(-\rho\right)\right]$$

$$\xi_{1,in}^{-}\left(\eta,s\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \tag{5.66}$$

$$\left[W_{-\lambda,\mu}\left(-\rho\right)+i\frac{H}{eE_0}\left(\mathcal{M}-m\right)\frac{\mathcal{M}k-k_d\frac{eE_0}{H}}{ik_dm+sk_\perp\mathcal{M}}W_{-\lambda,\mu-1}\left(-\rho\right)\right]$$

$$\xi_{2,in}^{-}\left(\eta,s\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \tag{5.67}$$

$$\left[\frac{H}{eE_0}\left(\mathcal{M}-m\right)W_{-\lambda,\mu}\left(-\rho\right)-i\frac{\mathcal{M}k-k_d\frac{eE_0}{H}}{ik_dm+sk_\perp\mathcal{M}}W_{-\lambda,\mu-1}\left(-\rho\right)\right] \tag{5.68}$$

$$\xi^{+}_{1,out}(\eta,s)=\frac{1}{\sqrt{1+\tau^{2}}} \tag{5.69}$$
$$\left[M_{-\lambda,\mu}(-\rho)-\frac{H}{eE_0}(\mathcal{M}-m)\frac{4k}{k_d\frac{m}{\mathcal{M}}-isk_{\perp}}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\mathcal{M}}{H}\right)M_{-\lambda,\mu-1}(-\rho)\right]$$

$$\xi^{+}_{2,out}(\eta,s)=\frac{1}{\sqrt{1+\tau^{2}}} \tag{5.70}$$
$$\left[\frac{H}{eE_0}(\mathcal{M}-m)M_{-\lambda,\mu}(-\rho)+\frac{4k}{k_d\frac{m}{\mathcal{M}}-isk_{\perp}}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\mathcal{M}}{H}\right)M_{-\lambda,\mu-1}(-\rho)\right]$$

$$\xi^{-}_{1,out}(\eta,s)=\frac{1}{\sqrt{1+\tau^{2}}} \tag{5.71}$$
$$\left[M_{\lambda,-\mu}(\rho)-\frac{H}{eE_0}(\mathcal{M}-m)\frac{k}{4\left(k_d\frac{m}{\mathcal{M}}-isk_{\perp}\right)}\frac{\left(1-\frac{e^2E_0^2}{\mathcal{M}^2H^2}\frac{k_d^2}{k^2}\right)}{\left(i\frac{M}{H}-\frac{1}{2}\right)}M_{\lambda,1-\mu}(\rho)\right]$$

$$\xi^{-}_{2,out}(\eta,s)=\frac{1}{\sqrt{1+\tau^{2}}} \tag{5.72}$$
$$\left[\frac{H}{eE_0}(\mathcal{M}-m)M_{\lambda,-\mu}(\rho)+\frac{k}{4\left(k_d\frac{m}{\mathcal{M}}-isk_{\perp}\right)}\frac{\left(1-\frac{e^2E_0^2}{\mathcal{M}^2H^2}\frac{k_d^2}{k^2}\right)}{\left(i\frac{M}{H}-\frac{1}{2}\right)}M_{\lambda,1-\mu}(\rho)\right]$$

5.5 Création de particule

Compte tenu des solutions obtenues, l'opérateur de champ de Dirac peut s'écrire sous l'une des deux formes suivantes

$$\hat{\phi}(\eta,x)=\sum_{k,s}\left[a_{\vec{k},s,in}\ \xi^{+}_{k,s,in}(\eta)\,e^{ikx}+b^{+}_{\vec{k},s,in}\ \xi^{-}_{k,s,in}(\eta)\,e^{-ikx}\right] \tag{5.73}$$

et

$$\hat{\phi}(\eta,x)=\sum_{k,s}\left[a_{\vec{k},s,out}\ \xi^{+}_{k,s,out}(\eta)\,e^{ikx}+b^{+}_{\vec{k},s,out}\ \xi^{-}_{k,s,out}(\eta)\,e^{-ikx}\right] \tag{5.74}$$

avec les relation d'anti-commutation habituelles

$$\left\{\hat{a}_{k,s,in},\hat{a}^{+}_{k',s',in}\right\}=\left\{\hat{b}_{k,s,in},\hat{b}^{+}_{k',s,in}\right\}=\delta_{s,s'}\delta_{k,k'}. \tag{5.75}$$

et

$$\left\{\hat{a}_{k,s,out},\hat{a}^{+}_{k',s',out}\right\}=\left\{\hat{b}_{k,s,out},\hat{b}^{+}_{k',s',out}\right\}=\delta_{s,s'}\delta_{k,k'}. \tag{5.76}$$

Les opérateurs $a_{k,in}$ et $b^{+}_{k,in}$ ne peuvent avoir une interprétation physique que pour $\eta \to -\infty$ où les fonctions $\varphi^{+}_{in}(\eta)$ et $\varphi^{-}_{in}(\eta)$ sont associées aux états d'énergie positive et d'énergie négative respectivement. Idem pour les opérateurs $a_{k,out}$ et $b^{+}_{k,out}$.

Pour calculer la probabilité de création d'une paire et la densité des fermions créés nous utilisons la relation fonctionnelle [43]

$$M_{\lambda,\mu}(\rho) = \frac{\Gamma(2\mu-1)\, e^{-i\pi\lambda}}{\Gamma\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)} W_{-\lambda,\mu}(-\rho) + \frac{\Gamma(2\mu+1)\, e^{i\pi\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)} W_{\lambda,\mu}(\rho) \tag{5.77}$$

qui nous permet d'établir la transformation de Bogoliubov

$$\xi^{+}_{s,\vec{k},out}(\eta) = \alpha_{s,\vec{k}}\xi^{+}_{s,\vec{k},in}(\eta) + \beta_{s,\vec{k}}\xi^{-}_{s,\vec{k},in}(\eta) \tag{5.78}$$

$$\xi^{-}_{s,\vec{k},out}(\eta) = \alpha^{*}_{s,\vec{k}}\xi^{-}_{s,\vec{k},in}(\eta) + \beta^{*}_{s,\vec{k}}\xi^{+}_{s,\vec{k},in}(\eta) \tag{5.79}$$

où les coefficients de Bogoliubov $\alpha_{s,\vec{k}}$ et $\beta_{s,\vec{k}}$ sont donnés par

$$\alpha_{s,\vec{k}} = \frac{N_{out}}{N_{in}} \frac{\Gamma(-2\mu-1)\, e^{-i\pi\lambda}}{\Gamma\left(-\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)} \tag{5.80}$$

et

$$\beta_{s,\vec{k}} = \frac{N_{out}}{N^{*}_{in}} \frac{\Gamma(-2\mu-1)\, e^{i\pi\left(-\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}}{\Gamma\left(-\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}. \tag{5.81}$$

avec, cette fois-ci, la condition

$$\left|\alpha_{s,\vec{k}}\right| + \left|\beta_{s,\vec{k}}\right| = 1. \tag{5.82}$$

Nous avons alors

$$\frac{\beta_{s,\vec{k}}}{\alpha_{s,\vec{k}}} = \frac{N_{in}}{N^{*}_{in}} \frac{\Gamma\left(-\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)} e^{i\pi\left(-\mu+\frac{1}{2}\right)} \tag{5.83}$$

$$\frac{\beta_{s,\vec{k}}}{\alpha_{s,\vec{k}}} = \sqrt{\left(\frac{k\mathcal{M} - k_d \frac{eE_0}{H}}{k\mathcal{M} + k_d \frac{eE_0}{H}}\right)} \frac{\Gamma\left(i\left(\frac{\mathcal{M}}{H} - \frac{eE_0}{H}\frac{k_d}{k}\right)\right)}{\Gamma\left(i\left(\frac{\mathcal{M}}{H} + \frac{eE_0}{H}\frac{k_d}{k}\right)\right)} e^{-i\pi\frac{\mathcal{M}}{H}}. \tag{5.84}$$

La probabilté de création d'une paire de particule dans l'état $\left(s,\vec{k}\right)$ est donc

$$p_{s,\vec{k}} = \left|\frac{\beta_{s,\vec{k}}}{\alpha_{s,\vec{k}}}\right|^2 \tag{5.85}$$

$$= \left|\frac{\Gamma\left(i\left(\frac{\mathcal{M}}{H} - \frac{eE_0}{H}\frac{k_d}{k}\right)\right)}{\Gamma\left(i\left(\frac{\mathcal{M}}{H} + \frac{eE_0}{H}\frac{k_d}{k}\right)\right)}\right|^2 \left(\frac{k\mathcal{M} - k_d\frac{eE_0}{H}}{k\mathcal{M} + k_d\frac{eE_0}{H}}\right) e^{-2\pi\frac{\mathcal{M}}{H}} \tag{5.86}$$

En utilisant la propriété de fonction Gamma

$$|\Gamma(i(x))|^2 = \frac{\pi}{x\sinh(\pi x)} \tag{5.87}$$

nous obtenons

$$p_{s,\vec{k}} = \frac{\sinh\left(\pi\left(\frac{\mathcal{M}}{H}+\frac{eE_0}{H}\frac{k_d}{k}\right)\right)}{\sinh\left(\pi\left(\frac{\mathcal{M}}{H}-\frac{eE_0}{H}\frac{k_d}{k}\right)\right)}e^{-2\pi\frac{\mathcal{M}}{H}}. \tag{5.88}$$

La densité des fermions est définie par

$$n(s,k) = \left|\beta_{s,\vec{k}}\right|^2. \tag{5.89}$$

Après un simple calcul, nous obtenons

$$n(s,k) = \frac{\sinh\left(\pi\left(\frac{\mathcal{M}}{H}+\frac{eE_0}{H}\frac{k_d}{k}\right)\right)e^{-2\pi\frac{\mathcal{M}}{H}}}{\sinh\left(\pi\left(\frac{\mathcal{M}}{H}-\frac{eE_0}{H}\frac{k_d}{k}\right)\right)+\sinh\left(\pi\left(\frac{\mathcal{M}}{H}+\frac{eE_0}{H}\frac{k_d}{k}\right)\right)e^{-2\pi\frac{\mathcal{M}}{H}}}. \tag{5.90}$$

Pour M>> H la densité des particules se comporte comme

$$n(s,k) = \exp\left(-2\pi\left(\frac{\mathcal{M}}{H}-\frac{eE_0}{H^2}\frac{k_d}{k}\right)\right). \tag{5.91}$$

Nous constatons que ce nombre devient plus significatif lorsque $k_d > 0$. Par conséquent, le champ électrique crée principalement les particules avec un vecteur d'onde positif $k_d > 0$. En d'autres termes, en présence d'un champ électrique, les particules préfèrent d'être créées avec un signe spécifique du moment canonique k. Cela dépend de l'orientation du champ électrique et de la charge de la particule. Les antiparticules seront alors créées dans la direction opposée avec la même densité.

5.6 Nombre de particules créées

Considéron maintenant le nombre de particules défini par

$$N = \sum_s \int \frac{dV_d dk^d}{(2\pi)^d a^d(t)} n(s,k) \tag{5.92}$$

$\frac{dV_d dk^d}{(2\pi)^d a^d(t)}$ est le nombre des états dans l'élément de l'espace des phase $dV_d dk^d$. Le facteur $a^d(t)$ au dénominateur exprime la dilution des particules par l'expansion de l'univers. Nous avons alors

$$N = (1+\delta_d)\frac{1}{(2\pi)^d a^d}\int dV_d \int k^{d-1}dk d\Omega \exp\left(-2\pi\left(\frac{\mathcal{M}}{H} - \frac{eE_0}{H^2}\cos\theta\right)\right) \tag{5.93}$$

où $\delta_d = 0$ pour $d = 1$ et $d = 2$ et $\delta_d = 1$ pour $d \geq 3$. Après integration sur les variable angulaires, nous obtenons

$$N = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^d}\frac{1}{a^d}(1+\delta_d)\int dV_d \int_0^{\Lambda} k^{d-1}dk \left(\frac{H^2}{\pi eE_0}\right)^{\frac{d}{2}-1} I_{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{2\pi eE_0}{H^2}\right)\exp\left(-2\pi\frac{\mathcal{M}}{H}\right) \tag{5.94}$$

En introduisant le cut-off $\Lambda = \mathcal{M}e^{Ht}$, nous pouvons écrire

$$\frac{dN}{d\Lambda dV_d} = (1+\delta_d)\frac{1}{(\sqrt{\pi})^d}\frac{1}{a^d}\Lambda^{d-1}\left(\frac{H^2}{\pi eE_0}\right)^{\frac{d}{2}-1} I_{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{2\pi eE_0}{H^2}\right)\exp\left(-2\pi\frac{\mathcal{M}}{H}\right). \tag{5.95}$$

Compte tenu du fait que

$$d\Lambda = \mathcal{M}He^{Ht}dt,$$

le nombre des particules créées par unité de temps et par unité de volume prend la forme finale

$$\frac{dN}{dtdV_d} = (1+\delta_d)\frac{\mathcal{M}^d H}{2(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\left(\frac{H^2}{2\pi eE_0}\right)^{\frac{d}{2}-1} I_{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{2\pi eE_0}{H^2}\right)\exp\left(-2\pi\frac{\mathcal{M}}{H}\right). \tag{5.96}$$

5.7 Action effective de Schwinger

Pour calculer l'action effective de Schwinger, nous introduisons d'abord, la probabilité $C_{s,\vec{k}}$ de ne pas avoir une paire dans l'état $\left(\vec{k}, s\right)$. Il vient alors suivant le principe de Pauli

$$C_{s,\vec{k}} + C_{s,\vec{k}}p_{s,\vec{k}} = 1, \tag{5.97}$$

ce qui nous donne

$$C_{s,\vec{k}} = \frac{1}{1+p_{s,\vec{k}}} = \left|\beta_{s,\vec{k}}\right|^2, \tag{5.98}$$

La probabilié de transition $vide - vide$ est donc

$$|\langle vid \mid vid\rangle|^2 = e^{-2\,\mathrm{Im}\, seff} = \prod_{s,\vec{k}} C_{s,\vec{k}} = \exp\sum_{k,s}\ln C_{s,\vec{k}} \tag{5.99}$$

et la partie imaginaire de l'action effective de Schwinger est

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = -\sum \ln c_k = -\sum \ln\left(1 - |\beta_k|^2\right) \tag{5.100}$$

Comme dans le chapitre précédent, nous faisons un développement de Taylor

$$-\ln\left(1-\left|\beta_{s,\overrightarrow{k}}\right|^2\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left|\beta_{s,\overrightarrow{k}}\right|^{2n} \tag{5.101}$$

et nous remplaçons la somme sur tous les états par

$$\sum_{k,s}\rightarrow(1+\delta_d)\int\frac{dV_d d^dk}{(2\pi)^d a^d(t)}, \tag{5.102}$$

L'action effective de Schwinger devient

$$2\int dtdV_d\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L}_{eff}=2\sum_{n=1}\frac{1}{n}\exp\left(-2n\pi\frac{\mathcal{M}}{H}\right)\int\frac{dV_dk^{d-1}dk}{(2\pi)^d a^d(t)}\int\prod_{i=0}^{d-2}(\sin\theta_i)^i\,d\theta_i\exp\left(-2n\pi\cos\theta_{d-2}\frac{eE_0}{H^2}\right) \tag{5.103}$$

En suivant les mêmes étapes que dans le chapitre précédent

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L}_{eff}=(1+\delta_d)\frac{1}{(2\pi)^{d-1}}\frac{(\mathcal{M}^2H^2+eE_0^2)^{\frac{d}{2}}}{H(eE_0)^{\frac{d-2}{2}}}\sum\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}\exp\left(-2n\pi\frac{\mathcal{M}}{H}\right)I_{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{2n\pi eE_0}{H^2}\right) \tag{5.104}$$

5.8 Cas particuliers

5.8.1 Un champ électrique dans l'espace de Minkowski

Pour un champ électrique dans l'espace de Minkowski, c-à-d $H\rightarrow 0$, nous utilisons le comportement de la fonction de Bessel modifiée

$$I_\nu(\alpha)\sim\frac{e^\alpha}{\sqrt{2\pi\alpha}}$$

et la limite

$$\begin{aligned}\lim_{H\rightarrow 0}\left(\frac{M}{H}-\frac{eE_0}{H^2}\right) &= \lim_{H\rightarrow 0}\frac{eE_0}{H^2}\left[\sqrt{1+\frac{m^2H^2}{e^2E_0^2}}-1\right]\\ &= \lim_{H\rightarrow 0}\frac{eE_0}{H^2}\left[1+\frac{m^2H^2}{2e^2E_0^2}-1\right]\\ &= \frac{m^2}{2eE_0}\end{aligned}$$

pour obtenir le résultat

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L}_{eff} = 2\frac{(eE_0)^{\frac{d+1}{2}}}{(2\pi)^d}\sum\frac{1}{n^{\frac{d+1}{2}}}\exp\left[-n\pi\frac{m^2}{eE_0}\right]. \tag{5.105}$$

Notons ici, que ce résultat coïncide avec celui de l'article [49]

5.8.2 Le champ gravitationnel pur

Pour $E = 0$, nous utilisons le developpement de la fonction de Bessel modifié

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k+1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \\ &\sim \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \end{aligned}$$

pour obtenir

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{2^{\frac{d}{2}-1}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\frac{m^d H}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\sum\frac{1}{n}\exp\left(-2n\pi\frac{m}{H}\right) \tag{5.106}$$

5.8.3 La dimension $d = 1$

Le cas $d = 1$ a été étudié par [7], dont le résultat est

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L}_{eff} = \frac{\mathcal{M}H}{\pi}\sum\frac{1}{n}\cosh\left(2\pi\frac{neE_0}{H^2}\right)\exp\left(-2n\pi\frac{\mathcal{M}}{H}\right). \tag{5.107}$$

A partir de notre expression nous pouvons obtenir le résultat de [7], en utilisant la forme explicite de la fonction $I_{-\frac{1}{2}}(x)$

$$I_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi x}}\cosh x.$$

5.8.4 La dimension $d = 3$

Pour $d = 3$, nous avons

$$I_{\frac{1}{2}}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{2\pi x}}\sinh x$$

et par conséquent,

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{2\pi^3}\frac{\mathcal{M}^3H^3}{eE_0}\sum\frac{1}{n^2}\sinh\left(\frac{2n\pi eE_0}{H^2}\right)\exp\left(-2n\pi\frac{\mathcal{M}}{H}\right). \tag{5.108}$$

5.9 Conclusion

En conclusion, nous avons étudié dans ce chapitre l'effet du champs éléctrique sur la création de paires de particules de spin $\frac{1}{2}$ dans un espace temps de de-Sitter à $(d+1)$ dimensions. D'abord, nous avons résolu l'équation de Dirac en introduisant une transformation unitaire. Puis, nous avons appliqué la transformation de Bogoliubov pour calculer la probabilité et la densité des particules crées en fonction de deux rapport $\frac{M}{H}$ et $\frac{eE_0}{H^2}$. Ensuite ,nous avons calculé le nombre total des particules créées en faisant la somme sur tous les modes. Finalement, nous définissons la lagrangien effective de Schwinger, nous avons fait tout les calculs pour un espace de de-Sitter à $(d+1)$ dimensions.