Création des particules en cosmologie

2.1 Introduction

Le modèle standard de la cosmologie ou le modèle ΛCDM suppose que l'univers a été créé dans le "big bang ". En fait, l'observation de la luminosité des supernovas de type Ia montre un décalage vers le rouge qui ne peut être expliqué que par une expansion accélérée de l'univers. Selon le principe de la conservation de la matière, cette accélération est accompanée d'une dilution de la matière et par conséquent, l'univers primordial était dense et chaud. L'accélération de l'expansion de l'univers s'interprète par la présence d'une force répulsive, à grande échelle, capable de surmonter la force gravitationnelle qui lie les différents constituants de l'univers. Cette interprétation suggère un champ d'énergie antigravitationnel -i.e. énergie du vide, connue sous le non d'énergie sombre. La nature de ce champ reste mystérieuse et le fameux candidat à l'énergie sombre est la constante cosmologique d'Einstein. Cependant, malgré le succé de ce modèle il présente des lacunes, notamment le problème de platitude, de l'horizon.....etc. Nous pouvons étendre le Modèle ΛCDM par l'inflation, en ajoutant d'autre éléments qui sont actuellement des domaines de recherche en cosmologie.

L'objectif de ce chapitre est de montrer que la création des particules par le champ gravitationnel peut constitue une alternative à l'inflation.

2.2 Un univers isotrope en expansion

Le modèle standard de Friedmann-Robertson-Walker se repose essentiellement sur l'hypothèse (le principe cosmologique) suivante ; l'univers est localement homogène, isotrope et en expansion. Une conséquence mathématique du principe cosmologique est l'existence d'un systéme de coordonnées comobiles dans lequel la métrique à quatre dimensions de l'espace-temps prend la forme

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \tag{2.1}$$

où t est le temps cosmique et le système de coordonnées (t, x, y, z) est appelé système de coordonnées comobiles. C'est la métrique générale utilisée pour la description de l'univers. Elle nous permet de décrire la géométrie et la dynamique de l'univers et de connaître l'évolution de sa taille en fonction du facteur d'echelle $a(t)$ qui représente l'expansion de l'univers.

Dans ce modèle les connexions affines (symboles de Christoffel) sont définies par

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\kappa} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda}\left(g_{\lambda\nu,\kappa} + g_{\lambda\kappa,\nu} - g_{\nu\kappa,\lambda}\right) \tag{2.2}$$

Sans difficulté nous obtenons $\Gamma^0_{00} = 0$ et $\Gamma^i_{00} = 0$. Ce qui signifie qu'une particule au repos dans ce système de coordonnées, reste au repos, il résulte donc que le système de coordonnées comobiles suit le mouvement de l'observateur. Les symboles de Christoffel non nulles sont

$$\Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\delta_{ij} \tag{2.3}$$

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij} \tag{2.4}$$

Les équations d'Einstein liant la courbure de l'univers à la présence de la matière s'écrivent

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\kappa} = -8\pi G T_{\mu\nu} \tag{2.5}$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci defini par

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\kappa}. \tag{2.6}$$

et $T_{\mu\nu}$ est le tenseur energie-impulsion du fluide cosmologique.

Les différentes composantes de $R_{\mu\nu}$ sont

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a} \quad , \quad R_{ij} = -(2\dot{a}^2 + a\ddot{a})\delta_{ij} \qquad \text{et} \qquad R_{0i} = 0. \tag{2.7}$$

En prenant la trace des équations d'Einstein nous arrivons à

$$R = 8\pi G T \tag{2.8}$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \tag{2.9}$$

Le fluide cosmique peut être étudié d'une manière analogique à un gaz parfait de pression P et de densité ρ. Dans ce cas nous avons

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (p + \rho)\, u_\mu u_\nu$$

où u_μ est la quadri-vitesse. Les composantes du tenseur d'énergie-impulsion sont alors données par

$$T^{00} = \rho\,(t) \quad , \; T^{0i} = 0 \;\; , \;\; T^{ij} = \delta_{ij} a^{-2} p\,(t) \tag{2.10}$$

et

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = -\rho + 3p \tag{2.11}$$

En remplaçant les équations (2.7), (2.10) et (2.11) dans l'équation d'Einstein (2.9) nous obtenons les équations fandamentales de la cosmologie

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} G\,(\rho + 3p) \tag{2.12}$$

et

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 4\pi G\,(\rho - p)\,. \tag{2.13}$$

En combinant ces deux dernières équations, nous arrivons à

$$8\pi G \rho(t) = 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) \tag{2.14}$$

Cette équation est l'équation fondamentale de Friedmann qui gouverne l'expansion de l'univers. Elle permet de déterminer la structure de l'univers selon son contenu.

A partir de la loi de conservation de l'énergie $\nabla_\mu T^{\mu 0} = 0$, nous obtenons l'équation differentielle du premier ordre

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\,(p + \rho) = 0, \tag{2.15}$$

qui peut être facilement résolue pour une équation d'état de la forme

$$p = \omega\rho, \tag{2.16}$$

où ω c'est le parmètre d'état independant du temps, dans ce cas nous obtenons

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\omega)} \tag{2.17}$$

où $\rho_0 = \rho(t_0)$ et $a_0 = a(t_0)$ sont respectivement la densité du fluide cosmique et le rayon de l'univers observé actuellement (l'indice 0 indique l'instant présent).

Suivant la valeur de ω nous pouvons déstinguer différentes situations :

a) Un univers dominé par la matière (matière non-relativiste) pour $\omega = 0$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} \tag{2.18}$$

En cosmologie, la matière est souvent appelée "poussière" et sa pression peut être considérée comme négligeable. Elle se compose de la matière baryonique et probablement de la matière non baryonique de nature encore inconnue.

Dans un univers plat et d'aprés l'équation de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho_0}{3}\frac{a_0^3}{a^3} \tag{2.19}$$

le facteur d'éxpansion devient

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3}}. \tag{2.20}$$

b) Un univers dominé par le rayonnement (matière relativiste) pour $\omega = \frac{1}{3}$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} \tag{2.21}$$

Le rayonnement est constitué de rayonnement électromagnétique (photons), neutrinos (si $k_BT \geq mc^2$) et ondes gravitationnelles. Nous avons

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho_0}{3}\frac{a_0^4}{a^4} \tag{2.22}$$

ce qui nous donne

$$a(t) \sim \sqrt{t}. \tag{2.23}$$

c) Un univers dominé par l'énergie du vide (modèle de de Sitter) $\omega = -1$

$$\rho = \Lambda = cste \tag{2.24}$$

Λ est la constante cosmologique. Dans un univers plat, l'équation de Friedmann étant

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\Lambda}{3} \tag{2.25}$$

le facteur d'échelle devient alors $a(t) = e^{Ht}$ avec $H = \sqrt{\frac{8\pi G\Lambda}{3}}$.

Nous pouvons résumer tout cela dans le tableau suivant :

fluide	équation du paramètre d'état	$\rho(a)$	$a(t)$
rayonnement	$\frac{1}{3}$	$\propto a^{-4}$	$\propto t^{\frac{1}{2}}$
matière noire	0	$\propto a^{-3}$	$\propto t^{\frac{2}{3}}$
constante cosmologique	-1	$\propto a^{0}$	$\propto \exp(Ht)$
courbure	$-\frac{1}{3}$	$\propto a^{-2}$	$\propto t$

(2.26)

2.3 L'inflation

La découverte du fond cosmique des micro-ondes est une énorme victoire pour la théorie du Big Bang et l'origine chaude de l'univers. Cependant d'un autre coté, cette découverte a également posé des problèmes majeurs et a mis la théorie du Big Bang dans sa forme standard face à un grand défi, car , comme mentionné auparavant, les cosmologistes ont constaté que la théorie du Big Bang était déficiente pour des raisons telles que le problème de convergence, de l'horizon et du monopole.

L'inflation pourait être une solution possible aux problèmes du modèle standard de la cosmologie dont le facteur d'echelle se développe exponentiellement. C'est un modèle cosmologique qui décrit une période d'expansion accélérée dans l'univers primordial à des énergies très élevées. En 1981, Guth [35] fut le premier théoricien à proposer les règles de base de l'inflation. Il a proposé un modèle basé sur la théorie de la surfusion lorsque les transitions de phase cosmiques au vrai vide coïncident avec l'inflation de-Sitter. Après la théorie de Guth plusieurs modèles modifiés de l'univers inflationniste ont été proposés.

2.4 Création de particules : Une altarnative à l'inflation

Dans ce paragraphe, nous montrons que la création des particules dans un univers de FRW est un mécanisme alternatif à l'inflation qui a une phase d'expansion exponentielle courte en suivant la référence [36]. La création des particules dans un univers en expansion est liée à la thermodynamique de l'espace-temps. C'est ainsi que nous partons de la première loi de la thermodynamique qui s'écrit

$$dQ = d(\rho V) + pdV. \tag{2.27}$$

Divisons la dernière équation par dt, pour obtenir la relation entre le taux de variation de la chaleur, de l'énergie et du volume de l'univers

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho V) + p\frac{dV}{dt} \tag{2.28}$$

Pour la métrique de FRW

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr} + r^2 d\Omega\right) \tag{2.29}$$

les équations de fridmann sont

$$\begin{aligned} 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} &= \frac{8\pi G}{c^2}\rho, & (2.30)\\ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} &= -\frac{8\pi G}{c^2}p. & (2.31) \end{aligned}$$

Puisque l'univers FRW est dépendant du temps, la définition de l'horizon des événements cosmologiques est subtile. Cependant, nous pouvons définir l'horizon apparent connaissant les propriétés locales de l'espace-temps. C'est pour ça que nous écrivons la métrique de FRW sous la forme

$$ds^2 = h_{ab}dx^a dx^b + \tilde{r}^2\left(d\theta^2 + \sin\theta^2 d\varphi^2\right) \tag{2.32}$$

où $\tilde{r} = a(t)\,r$ et $x^a = (t, r)$. La métrique bidimensionnelle réduite h_{ab} est donnée par

$$h_{ab} = diag\left(-c^2, \frac{a^2}{1-kr^2}\right).$$

La position de l'horizon apparent est donnée par la racine $(\tilde{r}_A)$ de l'équation

$$h^{ab}\partial_a\tilde{r}\partial_b\tilde{r} = 0, \tag{2.33}$$

ce qui nous donne

$$\tilde{r}_A = \frac{c}{\sqrt{H^2 + \frac{kc^2}{a^2}}} \tag{2.34}$$

où H est le parametre d'Hubble parameter défini par $H = \frac{\dot{a}}{a}$. Il est bien connu que la création des particules dans univers en expansion est un phénomène de nature thermique avec la température de Hawking [38]

$$T = \frac{\hbar c \kappa}{2\pi k_B}, \tag{2.35}$$

où κ est donnée par

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{-h}} \partial_a (\sqrt{-h} h^{ab} \partial_b \tilde{r}). \tag{2.36}$$

Compte tenu du fait que

$$\dot{\tilde{r}}_A = -H \tilde{r}_A^3 \left(\dot{H} - \frac{k}{a^2} \right) \tag{2.37}$$

nous pouvons écrire

$$\kappa = \frac{\tilde{r}_A}{2} \left(\dot{H} + 2H^2 + \frac{k}{a^2} \right) = \frac{1}{\tilde{r}_A} \left(1 - \frac{\dot{\tilde{r}}_A}{2H\tilde{r}_A} \right). \tag{2.38}$$

Pendant la phase de l'inflation, le facteur d'échelle de l'Univers prend la forme $a(t) \propto \exp(Ht)$ de sorte que $H = \frac{\dot{a}}{a} = cst$. Pour $H^2 >> c^2/a^2$, nous pouvons voir que $\tilde{r}_A \approx \frac{c}{H} = cst$ et $\dot{\tilde{r}}_A \approx 0$. La température de Hawking devient alors

$$T = \frac{\hbar \sqrt{H^2 + kc^2/a^2}}{2\pi k_B} \approx \frac{\hbar H}{2\pi k_B}. \tag{2.39}$$

En raison de l'isotropie de l'espace-temps FRW, le rayonnement est isotrope dans toutes les directions. Le gain de puissance effective dans l'univers est alors donné par la loi de rayonnement de Stephan-Boltzman

$$P = +\frac{dQ}{dt} = \sigma A_H T^4, \tag{2.40}$$

où $\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2}$ est Stephan-Boltzman. La loi (2.27) devient alors

$$\frac{d}{dt}(\rho V) + p\frac{dV}{dt} = \sigma A_H \left(\frac{\hbar H}{2\pi k_B} \right)^4. \tag{2.41}$$

Le volume et la surface de l'univers sont $V = \frac{4\pi}{3} \tilde{r}_A^3$ et $A_H = 4\pi \tilde{r}_A^2$, respectivement. En remplaçant les expressions de V, A_H et $\tilde{r}_A \approx c/H$ dans (2.41), nous obtenons

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} = \frac{3\sigma}{c} \left(\frac{\hbar}{2\pi k_B} \right)^4 H^5. \tag{2.42}$$

Maintenant, nous utilisons les équation de Fridmann pour écrire la dernière équation sous la forme

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + 3(1+\omega)\frac{\dot{a}}{a} = 3\omega_c(t)\frac{\dot{a}}{a}\ , \tag{2.43}$$

où l'équation d'état pour la matière ordinaire est $p = \omega\rho$ et le paramètre d'équation d'état dépendant du temps dû à la création de particules est $\omega_c(t) = \alpha\rho(t)$ avec $\alpha = \frac{\hbar G^2}{45c^7}$.

L'équation (2.43) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\alpha\dot{\rho}}{\omega + 1 - \alpha\rho} = -3\left(\omega + 1\right)\frac{\dot{a}}{a} \tag{2.44}$$

qui intégrable. Le résultat est

$$\ln\rho - \ln\left(1 + \omega - \alpha\rho\right) = -3\left(\omega + 1\right)\ln a + A \tag{2.45}$$

où A est une constante. En posant

$$A = -3\left(\omega + 1\right)\ln C \tag{2.46}$$

et

$$D = \left(\omega + 1\right)C^{-3(\omega+1)} \tag{2.47}$$

nous obtenons

$$\rho = \frac{Da^{-3(\omega+1)}}{1 + \frac{\alpha D}{\omega+1}a^{-3(\omega+1)}}. \tag{2.48}$$

Considérons maintenant la matière ordinaire avec $\omega = \frac{1}{3}$ et les particules créées

$$\rho = \frac{Da^{-4}}{1 + \frac{3\alpha D}{4}a^{-4}} = \frac{D}{a^4 + \frac{3\alpha D}{4}} \tag{2.49}$$

Pour un univers dominé les particules créées, nous avons $a^4 << \frac{3\alpha D}{4}$ et , par conséquent,

$$\rho = \frac{4}{3\alpha} = \frac{60c^7}{\hbar G^2} \tag{2.50}$$

L'équation de Friedmann devient alors

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{32\pi G}{9c^2\alpha} \tag{2.51}$$

dont la solution est

$$a = e^{Ht} \tag{2.52}$$

avec

$$H = \left(\frac{32\pi G}{9c^2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.53}$$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré un mécanisme de création de particules proposé pour l'inflation qui donne lieu à un terme de pression négative effictif dans les équations d'évolution de la densité d'énergie. Ceci conduit à une modification de la densité d'énergie en fonction du temps. En considérant le cas où $H^2 >> c^2/a^2$, nous avons montré que l'univers primordial peut subir une expansion exponentielle. Dans cette image, l'inflation est due à un effet quantique plutôt qu'à un champ scalaire.

Chapitre 3

Champs quantiques dans un univers en expansion

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous exposons la théorie quantique des champs dans un univers en expansion à $(d+1)$ dimension. En premier lieu, nous commençons par la quantification canonique d'un champ scalaire libre. Ensuite, nous considérons le cas d'un champ scalaire complexe en présence d'un champ extérieur de nature gravitationnelle généré par l'expansion de l'univers. Dans ce cas, comme nous allons le voir, notre système n'a pas un vide bien déterminé et la notion de particule n'est pas toute à fait claire. On dit alors que le vide est perturbé par le champ extérieur et donc instable [19, 20, 21]. Ils existent cependant des instants à lesquels l'interprétation en termes des particules est possible. Généralement ces instants sont le passé et le future lointains. Après avoir exposé la quantification du champ complexe, nous passons à la création de particules à partir du vide et comment exprimer la probabilité de création d'une paire particule-antiparticule et le nombre de particules créées en termes des coefficients de Bogoliubov. A la fin, nous considérons comme application la création de particules dans un espace de de-Sitter.

3.2 Champs quantiques libres

D'abord, nous commençons par la quantification du champ scalaire complexe libre dans l'espace de Minkowski à $D = d + 1$ dimensions

$$ds^2 = dt^2 - d\vec{x}^2 \tag{3.1}$$

$$d\vec{x}^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_d^2. \tag{3.2}$$

La densité lagrangienne de ce système est donnée par

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi. \tag{3.3}$$

Il est bien clair que la dynamique de ce système est régie par l'équation de Klein Gordon

$$(\Box + m^2)\varphi(x,t) = 0 \tag{3.4}$$

où l'opérateur $\Box$ est donné par

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle. \tag{3.5}$$

Les deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (3.4) sont $f_k(\vec{x},t)$ et $f_k^*(\vec{x},t)$ avec

$$f_k(\vec{x},t) = Ne^{i\left(k_0 t - \vec{k}\,\vec{x}\right)}, \tag{3.6}$$

où $k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ et $\vec{k}^2 = k_1^2 + k_2^2 + ... + k_d^2$. La constante de normalisation N se détermine à partir de la condition

$$f_k^* \dot{f}_k - \dot{f}_k^* f_k = i, \tag{3.7}$$

qui exprime la conservation du courant. La solution générale de l'équation de Klein Gordon est donc la somme de tous les modes $f_k(\vec{x},t)$ et $f_k^*(\vec{x},t)$

$$\varphi(\vec{x},t) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[A_k f_k(\vec{x},t) + B_k^* f_k^*(\vec{x},t)\right] \tag{3.8}$$

$$\varphi^*(\vec{x},t) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[B_k f_k(\vec{x},t) + A_k^* f_k^*(\vec{x},t)\right]. \tag{3.9}$$

où A_k et B_k sont des constantes. Avant de passer à la quantification, on note que les moments conjugués de $\varphi(\vec{x},t)$ et $\varphi^*(\vec{x},t)$ sont donnés par

$$\hat{\pi}_\varphi(\vec{x},t) = i\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} k_0 \left[A_k\ e^{i\left(k_0 t - \vec{k}\,\vec{x}\right)} - B_k^*\ e^{-i\left(k_0 t - \vec{k}\,\vec{x}\right)}\right] \tag{3.10}$$

$$\hat{\pi}_{\varphi^*}(\vec{x},t) = i\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} k_0 \left[B_k\ e^{i\left(k_0 t - \vec{k}\vec{x}\right)} - A_k^*\ e^{-i\left(k_0 t - \vec{k}\,\vec{x}\right)}\right]. \tag{3.11}$$

La procédure de la quantification canonique consiste à considérer le champ $\varphi(\vec{x},t)$ et leur moment conjugué comme des opérateurs qui vérifient les relations de commutations suivantes

$$\left[\hat{\varphi}(\vec{x},t)\ ,\ \hat{\pi}(\vec{x}',t)\right] = i\delta\left(\vec{x} - \vec{x}'\right) \tag{3.12}$$

et

$$\left[\hat{\varphi}(\vec{x},t)\ ,\ \hat{\varphi}(\vec{x}',t)\right] = \left[\hat{\pi}(\vec{x},t)\ ,\ \hat{\pi}(\vec{x}',t)\right] = 0. \tag{3.13}$$

Par conséquent, les coefficients A_k, B_k, A_k^* et B_k^* doivent être des opérateurs et les champs $\varphi(\vec{x},t)$ et $\varphi^+(\vec{x},t)$ s'écrivent sous la forme

$$\varphi(\vec{r},t) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[\hat{a}_k f_k(\vec{r},t) + \hat{b}_k^+ f_k^*(\vec{r},t)\right] \tag{3.14}$$

$$\varphi^+(\vec{r},t) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[\hat{b}_k f_k(\vec{r},t) + \hat{a}_k^+ f_k^*(\vec{r},t)\right]. \tag{3.15}$$

Compte tenu des relations de commutation (3.12) et (3.13), les opérateurs $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^+$, $\hat{b}_k$ et $\hat{b}_k^+$ vérifient les relations de commutation suivantes

$$\left[\hat{a}_k\ ,\ \hat{a}_{k'}^+\right] = \left[\hat{b}_k\ ,\ \hat{b}_{k'}^+\right] = (2\pi)^d\,\delta\left(\vec{k} - \vec{k}'\right) \tag{3.16}$$

et

$$\left[\hat{a}_k\ ,\ \hat{b}_{k'}^{+}\right] = \left[\hat{a}_k\ ,\ \hat{b}_k\right] = 0. \tag{3.17}$$

Par définition le Hamiltonien de ce système est donné par

$$H = \int d^d x\ \left(\pi_\varphi \dot{\varphi} + \pi_{\varphi^*} \dot{\varphi}^* - \mathcal{L}\right). \tag{3.18}$$

En faisant un calcul explicite, nous arrivons au résultat suivant

$$H = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} k_0 (\hat{a}_k^+\ \hat{a}_k\ + \hat{b}_k^+\ \hat{b}_k), \tag{3.19}$$

De la même manière, nous pouvons montrer que l'opérateur de charge est donné par

$$Q = e \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (\hat{a}_k^+\ \hat{a}_k\ - \hat{b}_k^+\ \hat{b}_k). \tag{3.20}$$

A ce néveau, nous remarquons que H et Q sont diagonals, ce qui nous permet d'interpréter les opérateurs $\hat{a}_k^+$ et a_k comme les opérateurs de création et d'annihilation de particules et les opérateurs b_k^+ et b_k comme les opérateurs de création et d'annihilation des antiparticules. Les opérateurs $N_a = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{a}_k^+\ \hat{a}_k$ et $N_b = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{b}_k^+\ \hat{b}_k$ représentent, respectivement, le nombre de particules et le nombre d'antiparticules. L'état qui vérifie la condition $N_a \left|0\right\rangle = N_b \left|0\right\rangle$ est dit l'état du vide.

3.3 Champs quantiques dans l'univers de FRW

Considérons maintenant, un champ scalaire complexe dans un espace-temps de FRW à $(D = d + 1)$ dimensions décrit par la métrique

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_d^2\right]. \tag{3.21}$$

Il est bien connu que l'action de ce système s'écrit sous la forme

$$S = \int d^D x \mathcal{L}. \tag{3.22}$$

où $\mathcal{L}$ est la densité lagrangienne du champ scalaire massif dans un espace courbe

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left(-g^{\mu\nu}\partial_\mu \Phi \partial_\nu^* \Phi - m^2 \Phi\Phi^* - \xi R \Phi\Phi^*\right) \tag{3.23}$$

avec $\sqrt{-g} = \sqrt{-\left|\det g_{\mu\nu}\right|} = a^d(t)$. Les termes $g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu^*\Phi$ et $\xi R\Phi\Phi^*$, où R est le scalair de Ricci et ξ est une constante numérique, représentent le couplage entre le champ complexe et le champs gravitationnel.

En appliquant le principe du moindre action ($\delta S = 0$), nous obtenons

$$\delta S = \int d^{d+1}x \left[-\partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\right) - \sqrt{-g}\left(m^2 + \xi R\right)\Phi\right]\delta\Phi^* = 0 \tag{3.24}$$

pour $\delta\Phi^*$quelconque. L'équation de Klein-Gordon en présence d'un champ gravitationnel est donc

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\partial_\nu\Phi\right) + \left(m^2 + \xi R\right)\Phi = 0. \tag{3.25}$$

Cette équation peut être écrite aussi sous la forme suivante

$$\left(\Box_g + m^2 + \xi R\right)\Phi = 0 \tag{3.26}$$

avec

$$\Box_g = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\partial_\nu\right). \tag{3.27}$$

3.3.1 Transformation conforme

Pour transformer la métrique (**??**) en une forme conformément minkowskienne, nous utilisons le temps conforme η plutôt que le temps cosmique t avec

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)} \tag{3.28}$$

où le facteur d'échelle $a(t)$ exprimé par la nouvelle variable η est noté $a(\eta)$, ce qui nous donne la forme suivante

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\vec{x}^2). \tag{3.29}$$

Avant de dériver l'équation de Klein Gordon par rapport au temps conforme, rappelons d'abord que les connexions de Christoffel pour l'espace temps de FRW sont données par

$$\Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\delta_{ij} \tag{3.30}$$

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij} \tag{3.31}$$

$$\Gamma^i_{jl} = \Gamma^i_{00} = \Gamma^0_{0i} = \Gamma^0_{00} = 0, \tag{3.32}$$

ce qui donne les composantes du tenseur de Ricci

$$R_{00} = d\frac{\ddot{a}}{a} \tag{3.33}$$

$$R_{ii} = (d-1)\,\dot{a}^2 + \ddot{a}a. \tag{3.34}$$

Le scalaire de Ricci R est alors

$$R = d\,(d-1)\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2d\frac{\ddot{a}}{a} \tag{3.35}$$

ou bien, en termes du temps conforme,

$$R = d\,(d-3)\left(\frac{a'}{a^2}\right)^2 + 2d\frac{a''}{a^3}$$

Notons que le point $(\cdot)$ indique la dérivée par rapport à t et le prime $(')$ indique la dérivée par rapport à η.

Pour obtenir l'équation de Klein Gordon avec le temps conforme η, nous essayons d'écrire la quantité $\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_0\left(\sqrt{-g}g^{00}\partial_0\Phi\right) + \xi R\Phi$ sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_0\left(\sqrt{-g}g^{00}\partial_0\Phi\right) + \xi R\Phi = a^{-s+q}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left(a^s\Phi\right) \tag{3.36}$$

Il vient alors

$$\left[a^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + (d-1)\,a^{-3}\left(\frac{\partial a}{\partial\eta}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}\right]\Phi + \xi\left(d\,(d-3)\left(\frac{a'}{a^2}\right)^2 + 2d\frac{a''}{a^3}\right)\Phi =$$
$$\left[a^q\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + 2sa^{q-1}\left(\frac{\partial a}{\partial\eta}\right)\frac{\partial}{\partial\eta} + s\,(s-1)\,a^{q-2}\left(\frac{\partial a}{\partial\eta}\right)^2 + sa^{q-1}\frac{\partial^2 a}{\partial\eta^2}\right]\Phi$$

ce qui nous impose de prendre

$$\begin{aligned} q &= -2 \\ s &= \frac{d-1}{2} \\ \xi &= \frac{d-1}{4d}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Dans ce cas l'équation de Klein Gordon se simplifie et devient

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \Delta + m^2a^2\right]\left(a^s\Phi\right) = 0. \tag{3.38}$$

Maintenant, nous introduisons le nouveau champ $\psi(\vec{x},\eta) = a^s\Phi$ pour écrire a dernière équation devient

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \Delta + m^2a^2\right]\psi(\vec{x},\eta) = 0 \tag{3.39}$$

Cette équation permet d'étudier le comportement et le mouvement des particules scalaires dans l'univers de FRW. Pour $\xi \neq \frac{d-1}{4d}$, l'équation de Klein Gordon devient

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \Delta + \left(\xi - \frac{d-1}{4d}\right)\left(d\left(d-3\right)\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + 2d\frac{a''}{a}\right) + m^2a^2\right]\psi(\vec{x},\eta) = 0. \tag{3.40}$$

Dans le cas général, le champ $\psi(\vec{x},\eta)$ se décompose de la manière suivante

$$\psi\left(\vec{x},\eta\right) = \int \frac{d^dk}{\left(2\pi\right)^d}\left[A_k \exp\left(i\vec{k}.\vec{x}\right)\varphi_k\left(\eta\right) + B_k^* \exp\left(-i\vec{k}.\vec{x}\right)\varphi_k^*\left(\eta\right)\right] \tag{3.41}$$

où $\varphi_k\left(\eta\right)$ et $\varphi_k^*\left(\eta\right)$ sont solutions à l'équation

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + \Omega_k^2\left(\eta\right)\right]\varphi(\eta) = 0, \tag{3.42}$$

où la fonction $\Omega_k^2\left(\eta\right)$ est donnée par

$$\Omega_k^2\left(\eta\right) = \omega^2\left(\eta\right) + \left(\xi - \frac{d-1}{4d}\right)\left(d\left(d-3\right)\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + 2d\frac{a''}{a}\right), \tag{3.43}$$

avec

$$\omega^2\left(\eta\right) = k^2 + m^2a^2. \tag{3.44}$$

Les solutions $\varphi_k\left(\eta\right)$ et $\varphi_k^*\left(\eta\right)$ vérifient la condition de normalisation

$$\varphi_k^*\varphi_k' - \varphi_k\varphi'^*_k = i. \tag{3.45}$$

3.3.2 Quantification

Passons maintenant à la quantification, en remplaçant les champs $\psi(\vec{x},\eta)$ et $\pi(\vec{x},\eta)$ par les opérateurs $\hat{\psi}(\vec{x},\eta)$ et $\hat{\pi}(\vec{x},\eta)$ qui verifient les relations de commutations suivantes

$$\begin{aligned}\left[\hat{\psi}(\vec{x},\eta),\hat{\psi}(\vec{x}',\eta)\right] &= \left[\hat{\pi}(\vec{x},\eta),\hat{\pi}(\vec{x}',\eta)\right] = 0 \\ \left[\hat{\psi}(\vec{x},\eta),\hat{\pi}(\vec{x}',\eta)\right] &= i\delta^d\left(x-x'\right).\end{aligned} \tag{3.46}$$

En remplaçant les constantes A_k et B_k^* par les opérateurs $\hat{a}_k$ et $\hat{b}_k^+$, nous obtenons les expressions de $\hat{\psi}(\vec{x},\eta)$ et $\hat{\pi}(\vec{x},\eta)$

$$\hat{\psi}(\vec{x},\eta) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\left[\hat{a}_k \exp\left(i\vec{k}.\vec{x}\right)\varphi_k^+(\eta) + \hat{b}_k^+ \exp\left(-i\vec{k}.\vec{x}\right)\varphi_k^-(\eta)\right] \quad (3.47)$$

$$\hat{\pi}(\vec{x},\eta) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\left[\hat{a}_k \exp\left(i\vec{k}.\vec{x}\right)\varphi_k'^+(\eta) + \hat{b}_k^+ \exp\left(-i\vec{k}.\vec{x}\right)\varphi_k^-{}'(\eta)\right] \quad (3.48)$$

avec $\varphi_k^+(\eta) = \varphi_k(\eta)$ et $\varphi_k^-(\eta) = \varphi_k^*(\eta)$. Grâce à (3.46), nous déterminons les relations de commutations des opérateurs $\hat{a}_k^+$,$\hat{b}_k^+$, $\hat{a}_k$ et $\hat{b}_k$

$$\left[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^+\right] = \left[\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^+\right] = (2\pi)^d \delta\left(\vec{k}-\vec{k}'\right). \quad (3.49)$$

Tous les autres commutateurs sont nuls.

Comme l'équation (3.42) est de l'ordre deux, elle admet plusieurs ensembles $\left\{\varphi_k^+(\eta), \varphi_k^-(\eta)\right\}$ de solutions linéairement indépendantes. Donc la décomposition (3.41) n'est pas unique. Pour choisir la bonne décomposition, considérons l'Hamiltonien qui s'écrit en fonction des opérateurs de créations et d'annihilations comme suit

$$H = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\left[E_k(\eta)\left(\hat{a}_k\hat{a}_k^+ + \hat{b}_k^+\hat{b}_k\right) + F_k^*(\eta)\,\hat{b}_k\hat{a}_k + F_k(\eta)\,\hat{a}_k^+\hat{b}_k^+\right] \quad (3.50)$$

avec

$$E_k(\eta) = \left|\varphi_k'(\eta)\right|^2 + \Omega_k^2(\eta)\left|\varphi_k(\eta)\right|^2 \quad (3.51)$$

$$F_k(\eta) = \varphi_k'^2(\eta) + \Omega_k^2(\eta)\,\varphi_k^2(\eta). \quad (3.52)$$

Il est bien clair que le Hamiltonien n'est pas diagonal en fonction des opérateurs de créations et d'annihilations des particules et des antiparticules, il contient des termes de mixtes $\hat{a}_k^+\hat{b}_k^+$ et $\hat{b}_k\hat{a}_k$.

3.3.3 Interprétation en termes de particules

Notons d'abord que pour une métrique de Minkowski, i.e. champ gravitationnel nul, $E_k(\eta)$ doit être constante et $F_k(\eta)$ doit être nul. Pour la métrique de FRW, nous pouvons voir qu'il existe deux couples $\left\{\varphi_k^+(\eta), \varphi_k^-(\eta)\right\}$ qui rendent le Hamiltonien diagonal. Le premier couple se comporte à $(-\infty)$ comme

$$\varphi_k^\pm(\eta) \underset{\eta\to-\infty}{\longrightarrow} e^{\mp i\int \Omega d\eta}, \quad (3.53)$$

En effet, on suppose que $a(\eta)$ prend des valeurs constantes pour $(\eta \to \pm\infty)$, donc tout les dérivées de a sont nulles. Dans ce cas nous avons

$$E_k(\eta \to -\infty) = \Omega_{in} \qquad \text{et} \qquad F_k(\eta \to -\infty) = 0 \tag{3.54}$$

et

$$H = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, \Omega_{in} \left(\hat{a}_{k,in}\hat{a}^+_{k,in} + \hat{b}^+_{k,in}\hat{b}_{k,in} \right). \tag{3.55}$$

avec

$$\Omega_{in} = \sqrt{k^2 + m^2 a_1^2}, \tag{3.56}$$

où $a_1 = a(\eta \to -\infty)$. Le deuxième couple se comporte à $(\eta \to +\infty)$ comme

$$\varphi_k^{\pm}(\eta) \underset{\eta \to +\infty}{\to} e^{\mp i \int \Omega d\eta}, \tag{3.57}$$

Ici, nous obtenons

$$E_k(\eta \to +\infty) = 2\Omega_{out} \qquad \text{et} \qquad F_k(\eta \to +\infty) = 0 \tag{3.58}$$

et

$$H = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, \Omega_{out} \left(\hat{a}_{k,out}\hat{a}^+_{k,out} + \hat{b}^+_{k,out}\hat{b}_{k,out} \right). \tag{3.59}$$

où

$$\Omega_{out} = \sqrt{k^2 + m^2 a_2^2}, \tag{3.60}$$

où $a_1 = a(\eta \to -\infty)$. Nous remarquons que le Hamiltonien est donc diagonal, pour deux états du vide $|0_{in}\rangle$ et $|0_{out}\rangle$, avec $\hat{a}_{k,in}|0_{in}\rangle = \hat{b}_{k,in}|0_{in}\rangle = 0$ et $\hat{a}_{k,out}|0_{out}\rangle = \hat{b}_{k,out}|0_{out}\rangle = 0$, où l'état $|0_{in}\rangle$ est un état du vide initial dans le passé lointain et $|0_{out}\rangle$ est un état du vide final dans le futur lointain. Ceci nous donne deux définitions des particules ; les particules "in" associées au vide $|0_{in}\rangle$ et le particules "out" associées au vide $|0_{out}\rangle$ et ainsi les particules créées spontanément sont des particules "out" par rapport au vide "in".

3.3.4 Création de particules

Nous pouvons passer facilement d'un vide à l'autre grâce à la transformations de Bogoliubov qui établi le lien entre les états in" et "out"

$$\varphi^+_{in}(\eta) = \alpha\varphi^+_{out}(\eta) + \beta\varphi^-_{out}(\eta). \tag{3.61}$$

$$\varphi^-_{in}(t) = \beta^*\varphi^+_{out}(t) + \alpha^*\varphi^-_{out}(\eta). \tag{3.62}$$

où α et β sont les coéfficients de Bogoliubov qui vérifient la condition suivante

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1. \tag{3.63}$$

La relation entre les opérateurs de création et d'annihilation est

$$\hat{a}_{out} = \alpha\hat{a}_{in} + \beta\hat{b}_{in}^{+} \tag{3.64}$$

$$\hat{b}_{out}^{+} = \beta^{*}\hat{a}_{in} + \alpha^{*}\hat{b}_{in}^{+} \tag{3.65}$$

D'aprés ces dernières relations nous pouvons trouver le résultat suivant

$$\begin{aligned} \left\langle 0_{in} \left| \hat{N}_{out} \right| 0_{in} \right\rangle &= \left\langle 0_{in} \left| a_{out}^{+} a_{out} \right| 0_{in} \right\rangle \\ &= |\beta|^2 \end{aligned} \tag{3.66}$$

Ce qui signifie que le vide "in" peut contenir des particules "out" si $\beta \neq 0$. La densité des particules "out" dans l'état du vide "in" est donc $|\beta|^2$ et la probabilité de création d'une paire de particules "out" à partir du vide est

$$\begin{aligned} P_{créat} &= \frac{\left|\left\langle 0_{out} \left| a_{out} b_{out} \right| 0_{in} \right\rangle\right|^2}{\left|\left\langle 0_{out} \right| 0_{in} \right\rangle\right|^2} \\ &= \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^2. \end{aligned} \tag{3.67}$$

3.4 Application : l'espace de de-Sitter

Considérons comme application la création de particules scalaires dans l'espace de de-Sitter. En premier lieu, nous devons résoudre l'équation de Klein-Gordon. Ensuite, nous comparons les solutions obtenues avec les solutions semi-classiques de l'équation d'Hamilton-Jacobie, ce qui nous permet de classer ces solutions Klein Gordon en états "in" et "out". Finalement, à l'aide de la transformation de Bogoliubov nous calculons la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particules créées.

3.4.1 Solutions exactes à l'équation de Klien Gordon

La métrique de de-Sitter représente un univers d'expansion accéléré où le facteur d'échelle est $a(t) = e^{Ht}$ et la métrique associé est définie comme

$$ds^2 = dt^2 - e^{2Ht}(dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_d^2) \tag{3.68}$$

$$= \frac{1}{H^2\eta^2}(d\eta^2 - dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_d^2) \tag{3.69}$$

Dans ce cas l'équation de Klein Gordon se réduit à

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+k^2+\frac{M^2}{H^2}\frac{1}{\eta^2}\right]\varphi_k\left(\eta\right)=0. \tag{3.70}$$

avec

$$M^2=m^2+\left(\xi-\frac{d-1}{4d}\right)d\left(d+1\right)H^2. \tag{3.71}$$

Pour trouver les solutions de cette équation nous faisons d'abord le changement $\rho=c\eta$, où c est un constante.

$$\left(\frac{\partial}{\partial\rho^2}+\frac{M^2}{H^2}\frac{1}{\rho^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\tilde{\varphi}_k\left(\rho\right)=0 \tag{3.72}$$

Maintenant, nous écrivons $\tilde{\varphi}_k\left(\rho\right)$ sous la forme

$$\tilde{\varphi}_k\left(\rho\right)=\rho^s g\left(\rho\right) \tag{3.73}$$

pour obtenir l'équation différentielle

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{2s}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{M^2}{H^2}+s\left(s-1\right)\right]+\frac{k^2}{c^2}\right\}g\left(\rho\right)=0 \tag{3.74}$$

Dans le cas ou $s=\frac{1}{2}$ et $c=-k$, la dernière équation prend la forme de l'équation de Bessel [43]

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\left(1-\frac{\lambda^2}{\rho^2}\right)\right]g\left(\rho\right)=0$$

où le paramètre λ est donné par

$$\lambda=i\sqrt{\frac{M^2}{H^2}-\frac{1}{4}}=i\tilde{\lambda}.$$

L'équation de Bessel admet plusieurs couples de solutions. Le premier ensemble de solutions est formé des fonctions $J_\lambda\left(\rho\right)$ et $J_{-\lambda}\left(\rho\right)$ qui ont le comportement [43]

$$\lim_{\rho\to0}J_\lambda\left(\rho\right)\approx\rho^\lambda, \tag{3.75}$$

$$\lim_{\rho\to0}J_{-\lambda}\left(\rho\right)\approx\rho^{-\lambda}, \tag{3.76}$$

Nous pouvons également écrire les solutions de l'équation de Bessel en termes des fonctions de Hankel $H_\lambda^{(1)}\left(\rho\right)$ et $H_\lambda^{(2)}\left(\rho\right)$ qui se comportent à $\eta\to-\infty$ comme suit [43]

$$H_{\lambda}^{(1)}(-k\eta) \simeq \sqrt{-\frac{2}{\pi k\eta}} e^{i\left(-k\eta-\frac{\pi\lambda}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}, \quad \text{pour} \ -\pi < \arg(-k\eta) < \pi \tag{3.77}$$

$$H_{\lambda}^{(2)}(-k\eta) \simeq \sqrt{-\frac{2}{\pi k\eta}} e^{-i\left(-k\eta-\frac{\pi\lambda}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}, \quad \text{pour} \ -\pi < \arg(-k\eta) < \pi.$$

3.4.2 Les états "in" et "out"

Pour avoir le bon choix des états "in" et "out", nous déterminons d'abord les états semi-classiques solutions de l'équation de Hamilton-Jacobi que l'on obtient à partir de l'équation de Klein Gordon

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\hbar^2\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\upsilon}\partial_\upsilon) + m^2\right]\varphi = 0, \tag{3.78}$$

en écrivant $\varphi = e^{\frac{i}{\hbar}s}$ et en faisant la limite classique $\hbar \to 0$. Nous obtenons alors l'équation de Hamilton-Jacobi

$$-\left(\frac{dS}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dx_2}\right)^2 + ... + \left(\frac{dS}{dx_d}\right)^2 + M^2a^2 = 0. \tag{3.79}$$

L'action S solution de cette équation s'écrit comme

$$S = \vec{k}.\vec{x} + \xi(\eta). \tag{3.80}$$

où la partie temporelle $\xi(\eta)$ vérifie l'équation suivante

$$\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2 = k^2 + M^2a^2. \tag{3.81}$$

La fonction $\xi(\eta)$ est alors donnée par

$$\xi(\eta) = \int \sqrt{k^2 + \frac{M^2}{H^2\eta^2}} d\eta \tag{3.82}$$

Si nous faisons le changement de variable $\eta = \frac{1}{u}$, nous obtenons

$$\xi(\eta) = -\frac{M}{H}\int \frac{\sqrt{\frac{k^2H^2}{M^2} + u^2}}{u^2} du \tag{3.83}$$

A l'aide de l'intégrale suivante [43]

$$\int \frac{\sqrt{b^2+u^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{b^2+u^2}}{u} + \ln(u + \sqrt{b^2+u^2}) + cst \tag{3.84}$$

nous obtenons

$$\xi\left(\eta\right)=-\left[-\frac{\sqrt{k^2+\frac{M^2}{H^2}u^2}}{u}+\frac{M}{H}\ln(u+\sqrt{\frac{k^2H^2}{M^2}+u^2})\right] \tag{3.85}$$

qui s'écrit aussi

$$\xi\left(\eta\right)=\sqrt{k^2\eta^2+\frac{M^2}{H^2}}+\ln\left(\frac{1}{\eta}+\sqrt{\frac{k^2H^2}{M^2}+\frac{1}{\eta^2}}\right)^{-\frac{m}{H}} \tag{3.86}$$

Les états d'énergie positive et négatives doivent alors se comporter comme

$$\varphi_{in}^{\pm} = \lim_{\eta\to-\infty} e^{\mp\frac{i}{\hbar}\xi(\eta)}\sim e^{\pm ik\eta} \tag{3.87}$$

$$\varphi_{out}^{\pm} = \lim_{\eta\to0} e^{\mp\frac{i}{\hbar}\xi(\eta)}\sim \eta^{\mp i\frac{m}{H}} \tag{3.88}$$

Grâce à ces données, nous pouvons écrire les états "in" et "out" comme suit

$$\varphi_{in}^{-} = N_1H_\lambda^1\left(-k\eta\right) \tag{3.89}$$

$$\varphi_{in}^{+} = N_1^*H_\lambda^2\left(-k\eta\right) \tag{3.90}$$

et

$$\varphi_{out}^{+} = N_2J_{-\lambda}\left(-k\eta\right) \tag{3.91}$$

$$\varphi_{out}^{-} = N_2^*J_{\lambda}\left(-k\eta\right) \tag{3.92}$$

3.4.3 Création des particules

Maintenant, pour établir la transformation des Bogoliubov nous utilisons les relation entre les fonctions de Bessel et Hankel [43]

$$\begin{aligned} H_\lambda^{(1)}\left(-k\eta\right) &= \frac{J_{-\lambda}\left(-k\eta\right)-e^{-i\lambda\pi}J_\lambda\left(-k\eta\right)}{i\sin\left(\pi\lambda\right)} \\ H_\lambda^{(2)}\left(-k\eta\right) &= \frac{e^{i\lambda\pi}J_\lambda\left(-k\eta\right)-J_{-\lambda}\left(-k\eta\right)}{i\sin\left(\pi\lambda\right)} \end{aligned} \tag{3.93}$$

Nous obtenons alors

$$\varphi_{k,in}^{+}\left(\eta\right) = \alpha_k\varphi_{k,out}^{+}\left(\eta\right)+\beta_k\varphi_{k,out}^{-}\left(\eta\right) \tag{3.94}$$

$$\varphi_{k,in}^{-}\left(\eta\right) = \beta_k^*\varphi_{k,out}^{+}\left(\eta\right)+\alpha_k^*\varphi_{k,out}^{-}\left(\eta\right) \tag{3.95}$$

où les coefficients de Bogoliubov α_k et β_k sont donnés par

$$\alpha_k = \frac{N_1}{N_2}\frac{1}{i\sin(\pi\lambda)} \tag{3.96}$$

$$\beta_k = -\frac{N_1}{N_2^*}\frac{e^{i\lambda\pi}}{i\sin(\pi\lambda)}. \tag{3.97}$$

La probabilité de créer une paire dans l'état $\vec{k}$ est alors

$$p_k = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^2 = e^{-2\tilde{\lambda}\pi} \tag{3.98}$$

Pour la densité des particules créées nous obtenons l'expression

$$n(k) = |\beta_k|^2 = \frac{1}{e^{2\tilde{\lambda}\pi} - 1} \tag{3.99}$$

qui se ressemble à la distribution de Bose-Einstien.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé la théorie quantique des champs dans l'univers de FRW où nous avons prouvé que l'Hamiltonien d'un champ scalaires complexe en présence d'un champ exterieur n'est pas toujours diagonal. Nous avons montré aussi qu'il existent des modes pour lesquels l'Hamiltonien est diagonal. Ces modes sont appelés les modes "in" et "out". A partir de la relation entre ces modes (transformation de Bogoliubov) nous avons pu exprimer la probabilité de création d'une paire de particule et la densité des particules créees en termes des coefficients de Bogoliubov. Comme application, nous considérons la création des particules dans l'espace de-Sitter où l'équation de Klein Gordon associée admet des solutions exactes bien connues.