Cosmologie avec torsion

"Cosmology is among the oldest subjects to captivate our species. And it's no wonder. We're storytellers, and what could be more grand than the story of creation ?"
Brian Green

5.1 Introduction

La cosmologie est la branche de l'astrophysique qui décrit la formation et l'évolution de l'univers à travers le modèle standard de la cosmologie ou le modèle ΛCDM qui suppose que l'univers a été créé dans le "Big Bang ". Ce modèle a prouvé une certaine concordance avec les résultats obtenus par les collaborations PLANCK [7] et WMAP [8]. Cependant, malgré le succé qu'il a connu, ce modèle souffre de plusieurs problèmes comme par exemple le problème de l'énergie noire et de sa nature.

L'objectif de ce chapitre est de montrer que l'introduction de la torsion constitue une alternative à l'inflation. La prise en compte de la torsion est une simple généralisation pour implémenter des concepts comme le spin dans la relativité générale. Cependant, il est vite apparu que la torsion, telle que considérée par exemple dans la théorie d'Einstein-Cartan-Sciama-Kibble (ECKS), ne semble pas donner d'effets pertinents sur les structures astrophysiques observées. Néanmoins, il a été constaté que pour des densités de l'ordre de $10^{44}\mathrm{Kg/cm}^3$ pour les électrons et de $10^{51}\mathrm{Kg/cm}^3$ pour les protons et les neutrons, la torsion pouvait donner des conséquences observables si tous les spins des particules sont alignés. Ces énormes densités ne peuvent être atteintes que dans l'univers primordial, de sorte que la cosmologie est la seule approche viable pour tester les effets de torsion. Cependant aucun test confirmant l'existence de la de torsion n'a été réalisé jusqu'à présent et il reste encore à débattre si l'espace temps est Riemannien ou non. Compte tenu du point de vue cosmologique et, en particulier des transitions de phase primordiales et de l'inflation, il semble très probable que, dans certaines régions du premier univers, la présence de champs magnétiques locaux aurait pu aligner les spins de particules. A des densités très élevées, cet effet pourrait influencer l'évolution des perturbations primordiales restant comme une empreinte dans les structures à grande échelle observées aujourd'hui. En d'autres termes, un objectif principal pourrait être de sélectionner des échelles de perturbation liées à la présence de torsion aux premières époques qui donnent des effets cosmologiques observables aujourd'hui.

5.2 Modèle standard de la cosmologie

5.2.1 Principe cosmologique

Le principe cosmologique sur lequel est basé le modèle standard de Friedmann-Robertson-Walker stipule que l'univers est localement homogène, isotrope et en expansion, ce qui a pour conséquence mathématique l'existence d'un système de coordonnées comobiles (t, r, θ, ϕ) dans lequel la métrique à quatre dimensions de l'espace-temps s'écrit

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin\theta d\phi^2\right] \tag{5.1}$$

où t est le temps cosmique. C'est la métrique générale qui nous permet de décrire la géométrie et la dynamique de l'univers. La fonction $a(t)$ est dite facteur d'echelle qui représente l'expansion de l'univers. La constante K représente la courbure spatiale et elle ne peut prendre que l'une des trois valeurs suivantes :

$$\begin{array}{lcl} \text{pour un univers fermé} & ; & K = +1 \\ \text{pour un univers plat} & ; & K = 0 \\ \text{pour un univers ouvert} & ; & K = -1 \end{array}$$

5.2.2 Equations de Friedmann

En relativité générale, les connexions affines (symboles de Christoffel) liées à la métrique (5.1) sont définies par

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\kappa} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda}\left(g_{\lambda\nu,\kappa} + g_{\lambda\kappa,\nu} - g_{\nu\kappa,\lambda}\right). \tag{5.2}$$

Les symboles de Christoffel non nulles sont

$$\Gamma^{0}{}_{ij} = a\dot{a}\tilde{g}_{ij} \tag{5.3}$$

$$\Gamma^{i}{}_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij} \tag{5.4}$$

$$\Gamma^{i}{}_{jl} = K\tilde{g}_{ij}x^{i} \tag{5.5}$$

avec

$$\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij} + K\frac{x^i x^j}{1-Kr^2},\ x^i \equiv (r, \theta, \phi). \tag{5.6}$$

En présence du fluide cosmique, les équations d'Einstein s'écrivent

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\kappa} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{5.7}$$

où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion du fluide cosmique.

Les différentes composantes de $R_{\mu\nu}$ sont, dans ce cas

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a} \quad , \quad R_{ij} = -(2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2K)\tilde{g}_{ij}. \tag{5.8}$$

En prenant la trace des équations d'Einstein nous arrivons à

$$R = 8\pi G T, \tag{5.9}$$

ce qui donne

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \tag{5.10}$$

Par analogie avec un gaz parfait de pression P et de densité ρ, le fluide cosmique a le tenseur energie-impulsion suivant

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (p + \rho)\, u_\mu u_\nu$$

où $u_\mu = (-1, 0, 0, 0)$. Les composantes du tenseur d'énergie-impulsion sont alors données par

$$T^{00} = \rho\,(t) \quad , \ T^{0i} = 0 \ \ , \ \ T^{ij} = \delta_{ij} a^{-2} p\,(t) \tag{5.11}$$

et

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = -\rho + 3p. \tag{5.12}$$

En substituant les équations (5.8), (5.11) et (5.12) dans l'équation d'Einstein (5.10), nous obtenons les deux équations

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G\,(\rho + 3p) \tag{5.13}$$

et

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{K}{a^2} = 4\pi G\,(\rho - p)\,. \tag{5.14}$$

En combinant ces deux dernières équations, nous obtnons l'équation

$$8\pi G \rho(t) = 3\left[\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2}\right]. \tag{5.15}$$

Cette équation est l'équation fondamentale de Friedmann qui régit l'expansion de l'univers. Elle permet de déterminer la dynamique de l'univers en fonction de son contenu.

5.2.3 Solutions pour quelques cas particuliers

A partir de la loi de conservation de l'énergie $\nabla_\mu T^{\mu 0} = 0$, nous obtenons l'équation differentielle du premier ordre

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(p + \rho\right) = 0, \tag{5.16}$$

qui peut être facilement résolue pour une équation d'état de la forme

$$p = \omega\rho, \tag{5.17}$$

où ω c'est le paramètre d'état indépendant du temps, dans ce cas nous obtenons

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\omega)} \tag{5.18}$$

où $\rho_0 = \rho(t_0)$ et $a_0 = a\left(t_0\right)$ sont respectivement la densité du fluide cosmique et le rayon de l'univers observé actuellement (l'indice 0 indique l'instant présent).

Suivant la valeur de ω on déstingue différentes situations :

Univers dominé par le rayonnement

Le rayonnement est constitué de photons (rayonnement électromagnétique), de neutrinos (pour $k_B T \geq mc^2$) et des ondes gravitationnelles. Il est caractérisé par l'équation d'état $\omega = \frac{1}{3}$. Dans ce cas, nous avons

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} \tag{5.19}$$

Pour un univers plat dominé par le rayonnement, l'équation (5.15) devient

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho_0}{3}\frac{a_0^4}{a^4}.$$

Nous obtenons ainsi

$$\dot{a}a = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}}a_0^2, \tag{5.20}$$

où la solution est de la forme

$$a(t) \sim \sqrt{t}. \tag{5.21}$$

Univers dominé par la matière

En cosmologie, la matière non relativiste est souvent appelée "poussière". Sa pression est considérée comme négligeable. Elle se compose de la matière baryonique et probablement de la matière non baryonique de nature encore inconnue. Comme la pression de la matière est négligeable, nous avons l'équation l'équation d'état $\omega = 0$ et

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}. \tag{5.22}$$

Dans ce cas, nous avons l'équation de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho_0}{3} \frac{a_0^3}{a^3}, \tag{5.23}$$

où la solution est e la forme

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3}}. \tag{5.24}$$

Univers dominé par la constante cosmologique

La constante cosmologique Λ est l'énergie du vide caractérisée par $\omega = -1$ et

$$\rho = \Lambda = cste. \tag{5.25}$$

Dans un univers plat dominé par la constante cosmologique, l'équation de Fiedmann s'écrit

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \Lambda}{3} \tag{5.26}$$

et le facteur d'échelle est donc $a(t) = e^{Ht}$, où $H = \sqrt{\frac{8\pi G \Lambda}{3}}$ est le paramètre de Hubble qi est dans ce cas constant.

5.2.4 Problèmes du modèle standard

Le modèle standard de la cosmologie suppose que l'univers a été créé dans le "Big-Bang ". La découverte du fond cosmique des micro-ondes était une énorme victoire pour la théorie du Big-Bang et l'origine chaude de l'univers. Cependant, il y a quelques questions laissées sans réponse dans le modèle standard.

Problème de la platitude Si nous prenons en compte la courbure dans la métrique et les équations de Friedmann, la densité de la courbure est donnée par [43]

$$\Omega_K(t) = \frac{1}{1 + \frac{\sum_i \Omega_i}{\Omega_K}}$$

Au début de l'univers, il était dominé par les rayonnements c'est à dire $\sum_i \Omega_i \sim \Omega_{rad}$, nous trouvons

$$\Omega_K = \frac{\Omega_K^0}{\Omega_{rad}^0} \left(\frac{1}{1+z}\right)^2$$

Le résultat est qu'il faut avoir un univers proche du plat qui était encore plus plat dans le passé. au temps de Planck $t_{Pl} = 10^{-43}s$, la courbure doit être $|\Omega_K(t_{Pl})| < 10^{-62}$, cette petite valeur est la cause du problème de platitude.

Problème de l'horizon La distance χ (comoving distance) est donnée par **??**

$$\chi = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^a \frac{d\ln a}{aH}, \ H = \frac{\dot{a}}{a} \tag{5.27}$$

Pendant l'univers primordial où il est dominé par des rayonnements et da matière, le rayon de Hubble $\frac{1}{H}$ augmente plus vite que le facteur d'échelle, c'est à dire $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a(t)H(t)}\right) > 0$. L'intégrale (5.27) est donc dominé par des contributions tardives, Dans de tels cas, le temps conforme entre le CMB et nous est beaucoup plus long que le temps entre le CMB et la singularité initiale, qui ne laisse pas se dérouler les processus causaux.

Problème d'origine de structure Le modèle standard de la cosmologie basé sur l'homogénéité et l'isotropie de l'univers ne fournit aucun mécanisme capable de les prédire les petites inhomogénéités dans l'univers.

5.2.5 L'inflation

Devant ces problèmes, plusieurs scénarios ont été proposés, mais aucun n'a encore été approuvé à l'unanimité. Les modèles les plus intéressants sont les modèles d'inflation. L'idée de l'inflation est de supposer que l'univers ait subi dans son passé lointain, une courte période d'expansion très accélérée. Ici, nous nous trouvons devons une autre question ; Quel type de matière peut provoquer une telle d'expansion très accélérée. Certainement, ce ne peut être de la matière ordinaire. Par ailleurs, il a été constaté l'évolution de l'univers primordial en présence d'un champ scalaire peut suivre une phase d'inflation.

Alan Guth était le premier à modéliser un scénario inflationniste par un champ scalaire, en 1981. Il proposa le champ de Higgs des théories de la grande unification pour guidé une période d'inflation. Néanmoins, il a été constaté le scénario basé sur les champs scalaires issus des théories de la grande unification n'est pas viable. En 1983, Linde suggéra l'existence d'un champ scalaire libre et massif, appelé inflaton. C'est le champ responsable de l'inflation.

Bien entendu, le scénario de Linde peut être amélioré en considérant un potentiel plus complexe, plusieurs inflatons ...etc.

L'idée principale de l'inflation est de postuler que le rayon de Hubble $\frac{1}{H}$ en mouvement diminue même si la taille physique de l'univers est croissante, dans ce cas l'intégrale (5.27) est dominée par les contributions des premiers temps, étend le temps conforme aux valeurs négatives [43]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a(t)H(t)}\right) = -\frac{1}{a(t)}\left(\frac{\dot{H}}{H^2}+1\right) \prec 0,$$

cela permet au processus causal de se produire et donc les objets, informations, perturbations sortent de l'horizon. Le mécanisme permet donc un lissage de l'univers décrivant l'homogénéité à grande échelle de notre univers. Nous introduisons

$$\epsilon \equiv \frac{\dot{H}}{H^2}, \tag{5.28}$$

pour qu'une phase de transition se soit produite il faut avoir $\epsilon \prec 1$, la condition de roulis lent est $\epsilon << 1$ et la limite $\epsilon = 0$ correspond à l'espace de de-sitter, l'espace dans ce cas augmente de façon exponentielle $a(t) = \exp(Ht)$.

En tenant en compte les équations de Friedmann représentés dans (5.14) , (5.15) nous supposons que $K = 0$, nous obtenons

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

et

$$\frac{3}{4\pi G}\left(\dot{H} + H^2\right) = -\left(\rho + 3P\right).$$

A partir de ces deux derniers résultats et (5.28), nous trouvons

$$\epsilon = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{P}{\rho}\right). \tag{5.29}$$

Donc pour que l'inflation se produise, il faut que $P < -\frac{1}{3}\rho$.C'est à dire qu'un fluide parfait dans une métrique FLRW plate aurait besoin d'avoir une pression négative.

Durant une phase d'expansion accélérée, la courbure deviendra une fonction du temps décroissante et donnant lieu au réchauffage, l'inflation devrait durer à moins autant de temps conforme que le temps de réchauffage à nous.

Si nous définissons [43]

$$\frac{|\Omega_K(t_f)|}{|\Omega_K(t_i)|} = \left(\frac{a_f}{a_i}\right)^{-2} \equiv e^{-2N}$$

t_i et t_f représentent le temps initiale et finale de la phase d'expansion accélérée, N repésente le nombre de e-fold il caractérise la durée de l'inflation, pour résoudre le problème de la platitude nous devons supposer que $\Omega_K(t_i) \sim O(1)$ et $|\Omega_K(t_f)| \sim 10^{-62}$ cela arriverait si $N > 71$.

L'expansion accélérée éliminerait tout défaut topologique qui conduisant à un effet presque homogène et univers isotrope. Après une période d'inflation suffisamment longue, le seul phénomène physique non trivial est les fluctuations quantiques étendues à de grandes échelles causé par l'accélération de l'expansion. Ces fluctuations correspondent aux petites perturbations observées dans le CMB et finira par s'effondrer en galaxies, galaxies d'amas. Ce qui implique la résolution de l'origine du problème d'origine de strusture [43].

L'inflation agit comme une force répulsive, en opposition à la force gravitationnelle, alors qu'une force attractive tend à freiner l'expansion de l'univers, une force répulsive tend à l'accélérer. L'expansion peut devenir exponentielle.

5.3 Equations de mouvement en présence de torsion

Nous allons chercher les équations de mouvement par la méthode de Palatini en deux cas, pour le premier cas dans le vide et dans le deuxième cas en présence de la matière. Pour cela nous écrivons l'action S sous la forme

$$S = \int d^4x\sqrt{|g|}\mathcal{L}\left(g_{\mu\nu}, Q^{\lambda}{}_{\mu\nu}, R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}\right) + S_M \tag{5.30}$$

où S_M représente l'action de la matière et

$$\mathcal{L}\left(g_{\mu\nu}, Q^{\lambda}{}_{\mu\nu}, R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}\right) = g^{\mu\nu}\delta^{\rho}{}_{\alpha}R^{\alpha}{}_{\mu\rho\nu} + G_{\rho\lambda}{}^{\mu\sigma\nu\alpha\gamma\beta}R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu}R^{\lambda}{}_{\alpha\gamma\beta} + \widetilde{G}_{\sigma\gamma}{}^{\rho\mu\alpha\beta}Q_{\mu\alpha\beta}Q_{\rho}{}^{\sigma\gamma} \tag{5.31}$$

avec

$$G_{\rho\lambda}{}^{\mu\sigma\nu\alpha\gamma\beta} = b_1\delta^{\sigma}{}_{\rho}\delta^{\gamma}{}_{\lambda}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + b_3\delta^{\gamma}{}_{\rho}\delta^{\sigma}{}_{\lambda}g^{\nu\alpha}g^{\mu\beta} + b_6\delta^{\sigma}{}_{\rho}\delta^{\gamma}{}_{\lambda}g^{\nu\alpha}g^{\mu\beta}$$

et

$$\widetilde{G}_{\sigma\gamma}{}^{\rho\mu\alpha\beta} = a_1g^{\rho\mu}\delta^{\alpha}{}_{\sigma}\delta^{\beta}{}_{\gamma} + a_2g^{\rho\alpha}\delta^{\beta}{}_{\sigma}\delta^{\mu}{}_{\gamma} + a_3g^{\beta\mu}\delta^{\alpha}{}_{\sigma}\delta^{\rho}{}_{\gamma}$$

le terme $G_{\rho\lambda}{}^{\mu\sigma\nu\alpha\gamma\beta}R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu}R^{\lambda}{}_{\alpha\gamma\beta}$ représente le terme de Gauss-Bonnet généralisé.

L'avantage d'écrire le lagrangien (5.31) en fonction du tenseur métrique $g^{\mu\nu}$, du tenseur de Riemann $R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu}$ et de tenseur de torsion qui sont en fonction de la connexion $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ $\left(\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu} + T^{\alpha}{}_{\mu\nu}\right)$, est pour simplifier le calcul surtout nous utiliserons la méthode du formalisme de Palatini.

5.3.1 Equations de mouvement dans le vide

Calcul de la variation $\frac{\delta\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}}$

Nous avons

$$\frac{\delta\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} = \frac{1}{2}\frac{\delta\,|g|}{|g|}$$

et

$$\frac{\delta|g|}{|g|} = g^{\varepsilon\theta}\delta g_{\varepsilon\theta} = -g_{\varepsilon\theta}\delta g^{\varepsilon\theta},$$

il vient alors

$$\frac{\delta\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{5.32}$$

Calcul de la variation de $R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu}$

Nous avons le tenseur de Riemann

$$R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}. \tag{5.33}$$

La variation de $\delta R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu}$ est par définition

$$\delta R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu}(\Gamma + \delta\Gamma) - R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu}(\Gamma)$$

dans ce cas, nous écrivons

$$\begin{aligned}
\delta R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu} \;\; = \;\; & \partial_\sigma \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \partial_\sigma \delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} - \partial_\nu \delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} \\
& + \left(\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\right)\left(\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma} + \delta\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma}\right) - \left(\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} + \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}\right)\left(\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu} + \delta\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}\right) \\
& -\partial_\sigma \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \partial_\nu \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}
\end{aligned}$$

en ajoutant et en soustraiyant le terme $\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\delta R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu} \;\; = \;\; & \partial_\sigma \delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda} \\
& - \left(\partial_\nu \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma}\right) + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}.
\end{aligned}$$

Maintenant, nous écrivons $\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}$ sous la forme

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda} = \left(\Gamma^{\lambda}{}_{(\nu\sigma)} + \Gamma^{\lambda}{}_{[\nu\sigma]}\right)\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}$$

pour avoir le résultat final

$$\delta R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu} = \nabla_\sigma \delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + 2Q^{\kappa}{}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\kappa}. \tag{5.34}$$

Ici, nous avons utilisé la dérivé covariante de $\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$

$$\nabla_\sigma \delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = \partial_\sigma \delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}.$$

Calcul de la variation de $Q^{\lambda}{}_{\mu\nu}$

Le calcul de $\delta Q^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ est direct. En fait, à partir de

$$2Q^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}$$

il vient directement

$$\delta Q^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}. \tag{5.35}$$

La dérivée covariante $\nabla_\mu\left(\sqrt{|g|}V^\mu\right)$

A partir d la propriété

$$\ln\left(\det A\right)=tr\left(\ln A\right)$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\ln\left(\det g\right) &= tr\left(\ln g\right)\\ \partial_\mu\ln\left(\det g\right) &= \partial_\mu tr\left(\ln g\right)\\ \partial_\mu\ln\left(\det g\right) &= \mathrm{tr}\,\partial_\mu\left(\ln g\right),\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\sqrt{|g|}=\frac{1}{2}\frac{1}{\det g}\partial_\mu\det g=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\mu g_{\alpha\beta}. \tag{5.36}$$

La même procedure, nous donne également

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\nabla_\mu\sqrt{|g|}=\frac{1}{2}\frac{1}{\det g}\nabla_\mu\det g=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\nabla_\mu g_{\alpha\beta} \tag{5.37}$$

en soustrayant $\partial_\mu\sqrt{|g|}$ de $\nabla_\mu\sqrt{|g|}$ et tenant compte du fait que

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta}=\partial_\mu g_{\alpha\beta}-\Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}g_{\lambda\beta}-\Gamma^\lambda{}_{\beta\mu}g_{\alpha\lambda}$$

nous obtenons

$$\nabla_\mu\sqrt{|g|}=\partial_\mu\sqrt{|g|}-\sqrt{|g|}\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu},$$

d'une autre part, à partir de la définition de la dérivé covariante d'un vecteur

$$\nabla_\mu V^\alpha=\partial_\mu V^\alpha+\Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu}V^\lambda$$

nous écrivons

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\left(\sqrt{|g|}V^\alpha\right) &= V^\alpha\nabla_\mu\left(\sqrt{|g|}\right)+\sqrt{|g|}\nabla_\mu\left(V^\alpha\right)\\ &= \partial_\mu\left(\sqrt{|g|}V^\mu\right)-\sqrt{|g|}V^\mu\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}+\sqrt{|g|}V^\lambda\Gamma^\mu{}_{\lambda\mu}\\ &= \partial_\mu\left(\sqrt{|g|}V^\mu\right)-\sqrt{|g|}V^\nu\Gamma^\lambda{}_{\lambda\nu}+\sqrt{|g|}V^\nu\Gamma^\lambda{}_{\nu\lambda}.\end{aligned}$$

Il vient alors

$$\nabla_\mu\left(\sqrt{|g|}V^\mu\right)=\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}V^\mu\right)+2\sqrt{|g|}V^\nu Q^\tau{}_{\nu\tau} \tag{5.38}$$

et, par conséquent,

$$\sqrt{|g|}\nabla_\mu V^\mu=\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}V^\mu\right)+2\sqrt{|g|}V^\mu Q^\tau{}_{\mu\tau}-V^\mu\left(\nabla_\mu\sqrt{|g|}\right). \tag{5.39}$$

Variation de $\nabla_\rho g_{\mu\nu}$

Comme

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} g_{\mu\lambda}$$

nous pouvons facilement voir que

$$\delta\left(\nabla_\rho g_{\mu\nu}\right) = \partial_\rho\left(\delta g_{\mu\nu}\right) - \left(\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}\right) g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}\left(\delta g_{\lambda\nu}\right) - \left(\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\rho}\right) g_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho}\left(\delta g_{\mu\lambda}\right). \quad (5.40)$$

Variation de l'action S

Nous avons la variation de l'action (5.30)

$$\delta S = \int d^4x \left[\left(\delta\sqrt{|g|}\right)\mathcal{L}\left(g_{\mu\nu}, Q^\lambda{}_{\mu\nu}, R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}\right) + \sqrt{|g|}\left(\delta\mathcal{L}\left(g_{\mu\nu}, Q^\lambda{}_{\mu\nu}, R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}\right)\right)\right]$$

nous définissons

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \\
K_\kappa{}^{\lambda\mu\nu} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}} \Rightarrow K_\kappa{}^{\lambda\mu\nu} = -K_\kappa{}^{\lambda\nu\mu} \\
P_\lambda{}^{\mu\nu} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^\lambda{}_{\mu\nu}} \Rightarrow P_\lambda{}^{\mu\nu} = -P_\lambda{}^{\nu\mu}.
\end{aligned}$$

Il vient

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{|g|}\left(\frac{\delta\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}}\mathcal{L}\left(g_{\mu\nu}, Q^\lambda{}_{\mu\nu}, R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}\right) + H_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + K_\kappa{}^{\lambda\mu\nu}\left(\delta R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}\right) + P_\lambda{}^{\mu\nu}\delta Q^\lambda{}_{\mu\nu}\right)$$

à partir de $(5.32), (5.34)$ et (5.35) nous trouvons

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x\sqrt{|g|}\left(\left(H_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}\right)\delta g^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{2}P_\lambda{}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}P_\lambda{}^{\nu\mu} - 2K_\lambda{}^{\mu\alpha\beta}Q^\nu{}_{\alpha\beta}\right)\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\right) \\
&\quad + \int d^4x\sqrt{|g|}\left(K_\kappa{}^{\lambda\mu\nu} - K_\kappa{}^{\lambda\nu\mu}\right)\nabla_\mu\delta\Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x\sqrt{|g|}\left(\left(H_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}\right)\delta g^{\mu\nu} + \left(P_\lambda{}^{\mu\nu} - 2K_\lambda{}^{\mu\alpha\beta}Q^\nu{}_{\alpha\beta}\right)\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\right) \\
&\quad +2\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\mu\left[K_\kappa{}^{\lambda\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu}\right] - 2\int d^4x\sqrt{|g|}\left[\nabla_\mu\left(K_\kappa{}^{\lambda\mu\nu}\right)\right]\delta\Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu}
\end{aligned}$$

en tenant en compte la relation (5.39)

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\sqrt{|g|}\left(\left(H_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}\right)\delta g^{\mu\nu}+\left(P_\lambda{}^{\mu\nu}-2K_\lambda{}^{\mu\alpha\beta}Q^\nu{}_{\alpha\beta}\right)\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\right)\\ &+\int d^4x\sqrt{|g|}\left(4K_\kappa{}^{\lambda\mu\nu}Q^\tau{}_{\mu\tau}-2K_\kappa{}^{\lambda\mu\nu}\frac{\left(\nabla_\mu\sqrt{|g|}\right)}{\sqrt{|g|}}-2\nabla_\mu K_\kappa{}^{\lambda\mu\nu}\right)\delta\Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu}\end{aligned}$$

finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\sqrt{|g|}\left(H_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}\right)\delta g^{\mu\nu}\\ &+\int d^4x\sqrt{|g|}\left(P_\lambda{}^{\mu\nu}-2K_\lambda{}^{\mu\alpha\beta}Q^\nu{}_{\alpha\beta}+4K_\lambda{}^{\mu\alpha\nu}Q^\tau{}_{\alpha\tau}\right.\\ &\left.-2K_\lambda{}^{\mu\alpha\nu}\frac{\left(\nabla_\alpha\sqrt{|g|}\right)}{\sqrt{|g|}}-2\nabla_\alpha K_\lambda{}^{\mu\alpha\nu}\right)\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}+\delta S_M. \qquad (5.41)\end{aligned}$$

Equations de mouvement dans le vide

Dans le vide $S_M = 0$, nous obtenons les équations de mouvement à partir de la variation de l'action par rapport à la métrique et à la connexion nous suivons le formalisme de Palatini, il vient

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = H_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}=0$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}} &= P_\lambda{}^{\mu\nu}-2K_\lambda{}^{\mu\alpha\beta}Q^\nu{}_{\alpha\beta}+4K_\lambda{}^{\mu\alpha\nu}Q^\tau{}_{\alpha\tau}-2K_\lambda{}^{\mu\alpha\nu}\frac{\left(\nabla_\alpha\sqrt{|g|}\right)}{\sqrt{|g|}}\\ &-2\nabla_\alpha K_\lambda{}^{\mu\alpha\nu}=0\ .\end{aligned}$$

5.3.2 Equations de mouvement en présence de la matière

Dans le cas où $S_M \neq 0$, nous ajoutons au lagrangien un terme $f^{\rho\mu\nu}\nabla_\rho g_{\mu\nu}$ (multiplicateur de lagrange)

$$S=\int d^4x\sqrt{|g|}\left[\mathcal{L}\left(g_{\mu\nu},Q^\lambda{}_{\mu\nu},R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}\right)+f^{\rho\mu\nu}\nabla_\rho g_{\mu\nu}\right]+S_M$$

il suffit de calculer la variation de multiplicateur de lagrange

$$\delta\left(\sqrt{|g|}f^{\lambda\mu\nu}\nabla_\lambda g_{\mu\nu}\right)=\sqrt{|g|}\left[\frac{\delta\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}}f^{\lambda\mu\nu}\nabla_\lambda g_{\mu\nu}+\left(\delta f^{\lambda\mu\nu}\right)\nabla_\lambda g_{\mu\nu}+f^{\rho\mu\nu}\delta\left(\nabla_\rho g_{\mu\nu}\right)\right]$$

à partir de (5.32) et (5.40) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\delta\left(\sqrt{|g|}f^{\lambda\mu\nu}\nabla_\lambda g_{\mu\nu}\right) &= -\sqrt{|g|}\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f^{\lambda\alpha\beta}\nabla_\lambda g_{\alpha\beta}+f^{\rho\kappa}{}_\nu\Gamma_{\mu\kappa\rho}+f^\rho{}_\mu{}^\kappa\Gamma_{\nu\kappa\rho}\right)\delta g^{\mu\nu}\\ &+\sqrt{|g|}\nabla_\lambda g_{\mu\nu}\left(\delta f^{\lambda\mu\nu}\right)-\sqrt{|g|}\left(f^{\nu\mu\kappa}g_{\lambda\kappa}+g_{\kappa\lambda}f^{\nu\kappa\mu}\right)\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\\ &+\partial_\rho\left(\sqrt{|g|}f^{\rho\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\right)-\delta g^{\mu\nu}\partial_\rho\left(\sqrt{|g|}f^\rho{}_{\mu\nu}\right)\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\delta\left(\sqrt{|g|}f^{\lambda\mu\nu}\nabla_\lambda g_{\mu\nu}\right) &= -\sqrt{|g|}\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f^{\lambda\alpha\beta}\nabla_\lambda g_{\alpha\beta}+f^{\rho\kappa}{}_\nu\Gamma_{\mu\kappa\rho}+\right.\\ &\left.+f^\rho{}_\mu{}^\kappa\Gamma_{\nu\kappa\rho}+\frac{\partial_\rho\left(\sqrt{|g|}f^\rho{}_{\mu\nu}\right)}{\sqrt{|g|}}\right)\delta g^{\mu\nu}\\ &+\sqrt{|g|}\nabla_\lambda g_{\mu\nu}\left(\delta f^{\lambda\mu\nu}\right)-\sqrt{|g|}\left(f^{\nu\mu\kappa}g_{\lambda\kappa}+g_{\kappa\lambda}f^{\nu\kappa\mu}\right)\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\end{aligned}\tag{5.42}$$

La variation de l'action est donc

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\sqrt{|g|}\left(H_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\mathcal{L}+f^{\lambda\alpha\beta}\nabla_\lambda g_{\alpha\beta}\right)-f^{\rho\kappa}{}_\nu\Gamma_{\mu\kappa\rho}\right.\\ &\left.-f^\rho{}_\mu{}^\kappa\Gamma_{\nu\kappa\rho}-\frac{\partial_\rho\left(\sqrt{|g|}f^\rho{}_{\mu\nu}\right)}{\sqrt{|g|}}\right)\delta g^{\mu\nu}\\ &+\int d^4x\sqrt{|g|}\left(\begin{array}{c}P_\lambda{}^{\mu\nu}-K_\lambda{}^{\mu\alpha\beta}Q^\nu{}_{\alpha\beta}+4K_\lambda{}^{\mu\alpha\nu}Q^\tau{}_{\alpha\tau}-2K_\lambda{}^{\mu\alpha\nu}\frac{\left(\nabla_\alpha\sqrt{|g|}\right)}{\sqrt{|g|}}\\ -2\nabla_\alpha K_\lambda{}^{\mu\alpha\nu}-f^{\nu\mu\kappa}g_{\lambda\kappa}-g_{\kappa\lambda}f^{\nu\kappa\mu}\end{array}\right)\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\\ &+\sqrt{|g|}\nabla_\lambda g_{\mu\nu}\left(\delta f^{\lambda\mu\nu}\right)+\delta S_M.\end{aligned}\tag{5.43}$$

Les équations de mouvement sont alors

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} &= \sqrt{|g|}\left(H_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\mathcal{L}+f^{\lambda\alpha\beta}\nabla_\lambda g_{\alpha\beta}\right)-f^{\rho\kappa}{}_\nu\Gamma_{\mu\kappa\rho}\right.\\ &\left.-f^\rho{}_\mu{}^\kappa\Gamma_{\nu\kappa\rho}-\frac{\partial_\rho\left(\sqrt{|g|}f^\rho{}_{\mu\nu}\right)}{\sqrt{|g|}}\right)+\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}=0\end{aligned}$$

et

$$\frac{\delta S}{\delta \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}} = \sqrt{|g|}\left(\begin{array}{c} P_{\lambda}{}^{\mu\nu} - 2K_{\lambda}{}^{\mu\alpha\beta}Q^{\nu}{}_{\alpha\beta} + 4K_{\lambda}{}^{\mu\alpha\nu}Q^{\tau}{}_{\alpha\tau} - 2K_{\lambda}{}^{\mu\alpha\nu}\frac{\left(\nabla_{\alpha}\sqrt{|g|}\right)}{\sqrt{|g|}} \\ -2\nabla_{\alpha}K_{\lambda}{}^{\mu\alpha\nu} - f^{\nu\mu\kappa}g_{\lambda\kappa} - g_{\kappa\lambda}f^{\nu\kappa\mu} \end{array}\right)$$
$$+\frac{\delta S_M}{\delta \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}} = 0$$

aussi

$$\frac{\delta S}{\delta f^{\lambda\mu\nu}} = \sqrt{|g|}\nabla_{\lambda}g_{\mu\nu} = 0$$

la dernière équation nous donne la condition de la compatibilité métrique.

Bien que

$$\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}T_{\mu\nu}$$

et

$$\frac{\delta S_M}{\delta \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}} = -\sqrt{|g|}I_{\lambda}{}^{\mu\nu}$$

$T_{\mu\nu}$ est le tenseur d'energie-impulsion, $I_{\lambda}{}^{\mu\nu}$ représente la densité de spin.

Nous obtenons les équations de mouvement finales suivantes

$$H_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\mathcal{L} + f^{\lambda\alpha\beta}\nabla_{\lambda}g_{\alpha\beta}\right) - f^{\rho\kappa}{}_{\nu}\Gamma_{\mu\kappa\rho} - f^{\rho}{}_{\mu}{}^{\kappa}\Gamma_{\nu\kappa\rho} - \frac{\partial_{\rho}\left(\sqrt{|g|}f^{\rho}{}_{\mu\nu}\right)}{\sqrt{|g|}} = \frac{1}{2}T_{\mu\nu} \quad (5.44)$$

et

$$\begin{aligned} &P_{\lambda}{}^{\mu\nu} - 2K_{\lambda}{}^{\mu\alpha\beta}Q^{\nu}{}_{\alpha\beta} + 4K_{\lambda}{}^{\mu\alpha\nu}Q^{\tau}{}_{\alpha\tau} - \left[\frac{2}{\sqrt{|g|}}\nabla_{\alpha}\left(\sqrt{|g|}K_{\lambda}{}^{\mu\alpha\nu}\right)\right] \\ &-f^{\nu\mu\kappa}g_{\lambda\kappa} - g_{\kappa\lambda}f^{\nu\kappa\mu} = I_{\lambda}{}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.45)$$

5.4 Univers de Friedmann avec torsion

Dans une cosmologie de type FRW, nous avons

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2}{1-Kr^2}dr^2 + a^2r^2d\theta^2 + a^2r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

c'est à dire

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

nous allons chercher les solutions des équations de Friedmann en présence de torsion afin de voir l'effet de la torsion, il faut tout d'abord trouver les champs de torsion correspondants.

5.4.1 Champ de torsion

Dérivation du champ de torsion à partir de la dérivée de Lie

La géométrie de Riemann-Cartan est défini par la métrique et la torsion, par conséquant il y a un champ cosmique de tenseur supplémentaire qui est la champ de tenseur de torsion, nous allons donc chercher les composantes de ce champ supplémentaire.

Dans cette partie nous suivons la référence[44]. Il a été mentionné précédemment que le principe cosmologique est basé sur l'homogénéité et l'isotropie de l'univers, la formulation mathématique de ce principe et comme suit ;

-Il existe des sous-espaces tridimensionnels d'espace-temps à symétrie maximale qui sont identifiés comme les hypersurfaces du temps cosmique constant, six vecteurs de Killing générant ces isométries spacio-temporelles tangentes à ces hypersurfaces.

-L'invariance de tous les champs de tenseurs cosmiques $g_{\mu\nu}$, $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}$...etc par rapport à toutes les isométries. Nous supposons que le principe cosmologique est étendu à un espace-temps de Riemann-Cartan et nous examinons les restrictions imposées au tenseur de torsion, ces restrictions relient à la condition

$$L_{\xi^{\mu}} Q^{\mu}{}_{\nu\alpha} = 0 \tag{5.47}$$

avec L est la dérivée de Lie, ξ^{μ} champ de vecteurs (6 vecteurs de Killing), $Q^{\mu}{}_{\nu\alpha}$ champ de tenseur de torsion.

Le principe cosmologique implique que la métrique doit être la métrique de Robertson-Walker en raison qu'ils sont de même nature qui ceux imposés à la métrique.

Soit M une variété symétrique à n dimensions dotée d'une métrique $g_{\mu\nu}$,et $\overline{M}$ une sous-variété symétrique de M de dimensions $m\,(3 \preceq m \preceq n)$, la notation utilisée est $i, j, k, l = 1, 2, 3, ..., m$ et $a, b, c, d = m+1, m+2, ..., n$ et soit u^{i} des fonctions de coordonnées dans $\overline{M}$ et v^{α} des fonctions de coordonnées dans $M/\overline{M}$.

Le choix des coordonnées u^{i} est toujours possibles, telle que la métrique $g_{\mu\nu}$ de M a la forme

$$g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{ab}(v)\, dv^{a} dv^{b} + \phi(v)\, \overline{g}_{ij}(u)\, du^{i} du^{j} \tag{5.48}$$

$\overline{g}_{ij}(u)$ est la métrique de la symétrie maximale d'espace $\overline{M}$. $\phi(v)$ est une fonction scalaire, nous avons aussi

$$g_{ai} = 0, \ \frac{\partial \xi^{i}}{\partial v^{a}} = 0 \tag{5.49}$$

Théorème Soit le tenseur de torsion $Q^{\mu}{}_{\nu\alpha}$ un champ de tenseur dans M qui est au maximum invariant de forme dans $\overline{M}$, c'est à dire

$$L_{\xi^i} Q^{\mu}{}_{\nu\alpha} = 0$$

dans le cadre de coordonnées dans lequel la métrique a la forme (5.48), les composantes du tenseur de torsion non-nulles sont

(i) $m = 3$, $n \succeq 4$

$Q_{abc}(v)$, $Q_{[ijk]}$, $Q^1{}_{1a} = Q^2{}_{2a} = ... = Q^m{}_{ma}$ (pas de sommation sur m)

(ii) $3 \prec m \prec n$

$Q_{abc}(v)$, $Q^1{}_{1a} = Q^2{}_{2a} = ... = Q^m{}_{ma}$ (pas de sommation sur m)

(iii) $n = m \succ 3$ tout disparaît.

Preuve Considérons un système de coordonnées spatiales dans lequel la métrique a la forme (5.48) , il est clair que

$$L_{\xi^i} Q_{\mu\nu\alpha} = g_{\mu\sigma} L_{\xi^i} Q^{\sigma}{}_{\nu\alpha} = 0$$

en tenant en compte les six cas suivants

$$\begin{aligned} L_{\xi^s} Q_{ijk} &= 0 \\ L_{\xi^s} Q_{ija} &= 0 \\ L_{\xi^s} Q_{iab} &= 0 \\ L_{\xi^s} Q_{abc} &= 0 \\ L_{\xi^s} Q_{abi} &= 0 \\ L_{\xi^s} Q_{aij} &= 0, \end{aligned} \tag{5.50}$$

en raison de l'isotropie de $\overline{M}$ on choisit ξ^i à tout moment $p \in \overline{M}$ tel que $\xi^i(p) = 0$, $\xi_{[i,j]}(p)$ est arbitraire, ensuite (5.50) implique

$$\xi_{s;r}\left[\delta^r{}_i Q^s{}_{jk} + \delta^r{}_j Q_i{}^s{}_k + \delta^r{}_k Q^s{}_{ij}\right] = 0$$

puisque $\xi_{[s;r]} = \xi_{[r;s]}$ est arbitraire, il vient

$$\delta^r{}_i Q^s{}_{jk} + \delta^r{}_j Q_i{}^s{}_k + \delta^r{}_k Q^s{}_{ij} = \delta^s{}_i Q^r{}_{jk} + \delta^s{}_j Q_i{}^r{}_k + \delta^s{}_k Q^r{}_{ij}$$

nous contractons r avec i

$$m Q^s{}_{jk} + \delta^r{}_j Q_r{}^s{}_k + \delta^r{}_k Q^s{}_{rj} = \delta^s{}_r Q^r{}_{jk} + \delta^s{}_j Q_r{}^r{}_k + \delta^s{}_k Q^r{}_{rj} \tag{5.51}$$

encore une fois nous contractons s avec j

$$Q^r{}_{rs} = 0$$

(5.51) implique

$$\begin{aligned} Q_{ijk} &= \phi\,(v)\,\epsilon_{ijk}, \text{ pour } m = 3 \\ &= 0 \qquad\qquad \text{pour } m \neq 3 \end{aligned}$$

de la même manière nous prouvons que

$$\begin{aligned} Q^1{}_{1a} &= Q^2{}_{2a} = ... = Q^m{}_{ma} \\ Q_{iab} &= 0,\ Q_{abc} = Q_{abc}\,(v) \\ Q_{abi} &= 0,\ Q_{aij} = 0 \end{aligned} \tag{5.52}$$

considérons maintenant l'espace-temps de Riemann-Cartan à $4D$ qui est rempli par la congruence tangente au champ de $4-$vitesses $u_a\,(-1,0,0,0)$, la torsion prend la forme[45]

$$Q_{abc} = 2\phi h_{a[b}u_{c]} \tag{5.53}$$

avec ϕ est une fonction scalaire dépend du temps seulement $\phi \equiv \phi(t)$

et

$$g_{ab} = h_{ab} - u_a u_b \tag{5.54}$$

h_{ab} est symétrique et orthogonal à u^b

$$\begin{aligned} h_{ab} &= h_{(ab)} \\ h_{ab}u^b &= 0 \\ h_a{}^a &= 3 \end{aligned}$$

nous touvons finalement

$$\begin{aligned} Q^a{}_{bc} &= 2\phi h^a{}_{[b}u_{c]} = \phi\,(h^a{}_b u_c - h^a{}_c u_b) \\ Q^a{}_{ba} &= \phi\,(h^a{}_b u_a - h^a{}_a u_b) = -3\phi u_b. \end{aligned} \tag{5.55}$$

5.4.2 Tenseurs de Ricci

En présence de torsion les composantes du tenseur de Ricci sont données par

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= -3\left[\frac{\ddot{a}}{a}+2\dot{\phi}+2\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\right] && (5.56)\\
R_{11} &= \frac{2a^2}{1-Kr^2}\left[\frac{\ddot{a}}{2a}+\dot{\phi}+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+5\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)+4\phi^2+\frac{K}{a^2}\right] && (5.57)\\
R_{22} &= 2a^2r^2\left[\frac{\ddot{a}}{2a}+\dot{\phi}+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+5\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)+4\phi^2+\frac{K}{a^2}\right] && (5.58)\\
R_{33} &= 2a^2r^2\sin^2\theta\left[\frac{\ddot{a}}{2a}+\dot{\phi}+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+5\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)+4\phi^2+\frac{K}{a^2}\right] && (5.59)
\end{aligned}
$$

à partir du tenseur de Ricci nous trouvons le scalaire de Ricci

$$
R = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a}+2\dot{\phi}+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+6\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)+4\phi^2+\frac{K}{a^2}\right] \quad (5.60)
$$

5.4.3 Solutions des équations de Friedmann dans le vide

Dans le vide nous avons $R_{\alpha\beta}=0$, donc à partir de (5.59) nous avons

$$
\begin{aligned}
3\frac{\ddot{a}}{a}+6\dot{\phi}+6\phi\frac{\dot{a}}{a} &= 0 && (5.61)\\
\frac{\ddot{a}}{a}+2\dot{\phi}+2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+10\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)+8\phi^2+2\frac{K}{a^2} &= 0 && (5.62)
\end{aligned}
$$

faisons (5.62) – (5.61) nous obtenons

$$
\frac{\ddot{a}}{a} = -2\dot{\phi}-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2-4\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)-2\phi^2-\frac{1}{2}\frac{K}{a^2} \quad (5.63)
$$

dans le cas particulier si nous posons $\phi(t)=Cte \Rightarrow \dot{\phi}=0$, l'équation (5.61) devient

$$
\ddot{a}+2\phi\dot{a}=0
$$

nous définissons $X=\dot{a}$

$$
\begin{aligned}
\dot{X}+2\phi X &= 0\\
\int\frac{\dot{X}}{X}dt &= -2\phi\int dt\\
&\Rightarrow \quad X=e^{-2\phi t}
\end{aligned}
$$

il vient

$$\frac{da}{dt} = e^{-2\phi t}$$

et donc

$$a = -\frac{a_0}{2\phi} e^{-2\phi t} = ce^{-2\phi t},$$

nous avons alors une solution de type de-Sitter avec une expansion accéléré exponentiellement, ce qui montre que la torsion constante $\phi < 0$, joue le rôle d'une constante cosmologique.

5.4.4 Solutions des équations de Friedmann en présence de la matière

En présence de la matière nous avons

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{5.64}$$

avec

$$T_{00} = \rho, \; T_{ii} = P g_{ii}$$

nous remplaçons (5.46), (5.59) et (5.60) dans (5.64) ce qui nous donne les équations suivantes

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} - 4\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) - 4\phi^2 \tag{5.65}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G P - 2\dot{\phi} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 4\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) - 2\phi^2 - \frac{1}{2}\frac{K}{a^2} \tag{5.66}$$

nous remplaçons (5.65) dans (5.66), nous obtenons

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) - 2\dot{\phi} - 2\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \tag{5.67}$$

les équations (5.65) et (5.67) sont appelées les équations de Friedmann en présence de la matière.

En utilisant la loi de conservation d'impulsion-énergie en présence de torsion[46]

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = -4\phi T^{\nu\mu} u_\mu \tag{5.68}$$

avec

$$T^{00} = \rho, \; T^{11} = \left(\frac{1 - Kr^2}{a^2}\right) P, \; T^{22} = \frac{1}{a^2 r^2} P \text{ et } T^{33} = \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2\theta} P$$

et

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\mu} T^{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu} T^{\mu\alpha}$$

pour $\nu = 0$ nous trouvons

$$\nabla_\mu T^{\mu 0} = \dot{\rho}(t) + 3(H + 2\phi)(\rho + P) = -4\phi T^{0\mu} u_\mu \tag{5.69}$$

avec $P = w\rho$, nous obtenons finalement l'équation de continuité

$$\dot{\rho}(t) + 3(H + 2\phi)(1 + w)\rho = 4\phi\rho \tag{5.70}$$

dans ce cas

$$\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho} = -3(1 + w)\left(\frac{\dot{a}}{a} + 2\phi\right) + 4\phi.$$

la solution de cette dernière équation est donnée par

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)} e^{-2(1+3w)\int_0^t \phi\left(t'\right)dt'},$$

ces résultats nous montre qu'une sorte d'énergie noire (un terme de torsion) peut être obtenue sans considérer des champs scalaires supplémentaires dans la dynamique mais en supposant seulement que l'espace-temps est de Riemann-Cartan.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résolu les équations d'Einstein en présence de torsion, pour un univers en expansion. Nous avons montré que l'effet de la torsion est l'introduction d'un terme supplémentaire dans la densité et la pression de matière fluide qui est capable de donner lieu à un comportement accéléré du fluide cosmique.