Champs quantiques et création de particules

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'expliquer le processus de création de particules à partir du vide par un champ électrique en considérant deux méthodes différentes. La première méthode est basée sur la formulation canonique de la théorie quantique des champs en présence d'un champ électrique tandis que la deuxième est basée sur la dérivation de l'amplitude vide-vide par les intégrales fonctionnelle.

Pour la première méthode, nous commençons d'abord par une brève description de la quantification canonique d'un champ complexe libre. Ensuite, nous considérons le cas d'un champ scalaire complexe en présence d'un champ extérieur de nature électromagnétique. Après avoir montré comment quantifier un champ scalaire complexe en présence d'un champ électrique, nous montrons comment exprimer la probabilité de création d'une paire particule-antiparticule à partir du vide et le nombre de particules crées en termes des coefficients de Bogoliubov.

Pour la deuxième méthode, nous définissons en premier lieu l'amplitude de transition en mécanique quantique en théorie quantique des champs. Ensuite, nous montrons que l'amplitude de transition vide-vide porte une phase complexe, dont la partie imaginaire s'interprète comme une probabilité de création de particules.

2.2 Champs quantiques libres

Avant de considérer la création de particules, rappelons d'abord les principales étapes de la quantification du champ scalaire complexe libre. Partons de la densité lagrangienne de ce problème qui s'écrit

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi. \tag{2.1}$$

A partir de cette densité nous obtenons l'équation de Klein Gordon qui régie la dynamique de ce champ

$$(\Box + m^2)\varphi(x,t) = 0. \tag{2.2}$$

Ici, l'opérateur $\Box$ est donné par

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle. \tag{2.3}$$

Les deux solutions linéairement indépendantes sont notées $f_k(\vec{r},t)$ et $f_k^*(\vec{r},t)$ avec

$$f_k(\vec{r},t) = N e^{i\left(k_0 t - \vec{k}\,\vec{r}\right)}, \tag{2.4}$$

où $k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ et la constante de normalisation N se détermine à partir de la condition

$$f_k^* \dot{f}_k - \dot{f}_k^* f_k = 2i, \tag{2.5}$$

qui exprime la conservation du courant. En utilisant les solutions $f_k(\vec{r},t)$ et $f_k^*(\vec{r},t)$, nous pouvons construire la solution générale de l'équation de Klein Gordon [36]

$$\varphi(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[A_k f_k(\vec{r},t) + B_k^* f_k^*(\vec{r},t)\right] \tag{2.6}$$

$$\varphi^*(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[B_k f_k(\vec{r},t) + A_k^* f_k^*(\vec{r},t)\right]. \tag{2.7}$$

Pour quantifier le champ scalaire libre nous calculons d'abord les moments conjugués de $\varphi(\vec{r},t)$ et $\varphi^*(\vec{r},t)$. Il est facile de montrer que ces moments sont donnés par

$$\hat{\pi}_\varphi(\vec{r},t) = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_0 \left[A_k\; e^{i\left(k_0 t - \vec{k}\,\vec{r}\right)} - B_k^*\; e^{-i\left(k_0 t - \vec{k}\,\vec{r}\right)}\right] \tag{2.8}$$

$$\hat{\pi}_{\varphi^*}(\vec{r},t) = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_0 \left[B_k\; e^{i\left(k_0 t - \vec{k}\,\vec{r}\right)} - A_k^*\; e^{-i\left(k_0 t - \vec{k}\,\vec{r}\right)}\right]. \tag{2.9}$$

La procédure de quantification canonique nous impose de considérer les champs $\varphi(\vec{r},t)$ et $\hat{\pi}_{\varphi}(\vec{r},t)$ comme des opérateurs satisfaisant les relations de commutations suivantes

$$[\hat{\varphi}(\vec{r},t)\ ,\ \hat{\pi}(\vec{r}',t)] = i\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right) \tag{2.10}$$

et

$$[\hat{\varphi}(\vec{r},t)\ ,\ \hat{\varphi}(\vec{r}',t)] = [\hat{\pi}(\vec{r},t)\ ,\ \hat{\pi}(\vec{r}',t)] = 0. \tag{2.11}$$

Ainsi, les coefficients A_k, B_k, A_k^* et B_k^* deviennent des opérateurs et les champs $\varphi(\vec{r},t)$ et $\varphi^+(\vec{r},t)$ s'écrivent sous la forme

$$\varphi(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\hat{a}_k f_k(\vec{r},t) + \hat{b}_k^+ f_k^*(\vec{r},t)\right] \tag{2.12}$$

$$\varphi^+(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\hat{b}_k f_k(\vec{r},t) + \hat{a}_k^+ f_k^*(\vec{r},t)\right]. \tag{2.13}$$

A partir des relations de commutation (2.10) et (2.11), nous pouvons obtenir des relations de commutation pour les opérateurs $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^+$, $\hat{b}_k$ et $\hat{b}_k^+$

$$\left[\hat{a}_k\ ,\ \hat{a}_{k'}^+\right] = \left[\hat{b}_k\ ,\ \hat{b}_{k'}^+\right] = (2\pi)^3\,\delta\left(\vec{k}-\vec{k}'\right) \tag{2.14}$$

et

$$\left[\hat{a}_k\ ,\ \hat{b}_{k'}^+\right] = \left[\hat{a}_k\ ,\ \hat{b}_k\right] = 0. \tag{2.15}$$

Cherchons maintenant le spectre du Hamiltonien du système qui est défini par la transformation de Legendre

$$H = \int d^3x\ \left(\pi_{\varphi}\dot{\varphi} + \pi_{\varphi^*}\dot{\varphi}^* - \mathcal{L}\right). \tag{2.16}$$

Après un calcul simple comprenant des intégrations des fonctions exponentielles et des fonctions deltas, nous obtenons

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_0 (\hat{a}_k^+\ \hat{a}_k\ + \hat{b}_k^+\ \hat{b}_k). \tag{2.17}$$

Avec presque les mêmes calculs, nous obtenons pour l'opérateur de de charge

$$Q = e\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}(\hat{a}_k^+\ \hat{a}_k\ - \hat{b}_k^+\ \hat{b}_k). \tag{2.18}$$

Ici, nous remarquons que H et Q sont diagonals, ce qui nous permet d'interpréter les opérateurs $\hat{a}_k^+$ et a_k comme les opérateurs de création et d'annihilation de particules et les opérateurs b_k^+ et b_k comme les opérateurs de création et d'annihilation des antiparticules. Les opérateurs $N_a = \frac{1}{(2\pi)^3}\hat{a}_k^+\ \hat{a}_k$ et $N_b = \frac{1}{(2\pi)^3}\hat{b}_k^+\ \hat{b}_k$ représentent, respectivement, le nombre de particules et le nombre d'antiparticules. L'état qui vérifie la condition $N_a\left|0\right\rangle = N_b\left|0\right\rangle$ est dit l'état du vide.

2.3 Champs quantiques en présence d'un champ électrique

Ayant montré comment quantifier le champ scalaire libre, considérons maintenant la quantification du champ scalaire complexe en présence d'un champ électrique décrit par le potentiel vecteur $\vec{A}(t)$, avec $\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(t)$. La densité Lagrangienne de ce système est donnée par [36]

$$\mathcal{L} = \dot{\varphi}^*\dot{\varphi} - \left[\vec{\nabla}\varphi - ie\ \vec{A}\varphi\right]^* \left[\vec{\nabla}\varphi - ie\ \vec{A}\varphi\right] - m^2\varphi^*\varphi, \tag{2.19}$$

d'où nous dérivons, pour le champ φ, l'équation de Klein Gordon en présence d'un potentiel vecteur $\vec{A}(t)$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\vec{\nabla} - ie\ \vec{A}\right)^2 + m^2\right]\varphi = 0, \tag{2.20}$$

Pour des raisons de simplicité, nous considérons un champ électrique dirigé suivant l'axe (OZ). i.e.

$$\vec{A}(t) = (0, 0, A_z(t)) \tag{2.21}$$

Alors, en écrivant $\varphi(t, \vec{r})$ sous la forme

$$\varphi(t, \vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}}\chi_{\vec{k}}(t), \tag{2.22}$$

nous obtenons pour $\chi_{\vec{k}}(t)$ l'équation suivante

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + k_\perp^2 + (k_z - eA_z(t))^2 + m^2\right]\chi_{\vec{k}}(t) = 0, \tag{2.23}$$

où $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Remarquons d'abord que que si $\chi_{\vec{k}}(t)$ est une solution de l'équation (2.23), alors $\chi_{\vec{k}}^*(t)$ est aussi une solution. De plus, nous pouvons montrer que si le champ $\varphi(t, \vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}}\chi_{\vec{k}}(t)$ est une solution à l'équation (2.20) pour la charge e, le champ $\varphi^*(t, \vec{r}) = e^{-i\vec{k}\vec{r}}\chi_{\vec{k}}^*(t)$ est une solution pour la charge $(-e)$. Nous en déduisons alors que les fonctions $\chi_{\vec{k}}(t)$ et $\chi_{\vec{k}}^*(t)$ sont, respectivement, associées aux états d'énergie positive et d'énergie négative.

Dans ce qui suit, nous utilisons la notation $\chi_{\vec{k}}^+(t)$ et $\chi_{\vec{k}}^-(t)$ au lieu de $\chi_{\vec{k}}(t)$ et $\chi_{\vec{k}}^*(t)$. L'opérateur de champ s'écrit alors sous la forme

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(a_k\chi_{\vec{k}}^+(t)\ e^{i\vec{k}\vec{r}} + b_k^+\chi_{\vec{k}}^-(t)\ e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right), \tag{2.24}$$

avec la condition de normalisation

$$\chi_k^* \dot{\chi}_k - \chi_k \dot{\chi}_k^* = 2i. \tag{2.25}$$

Ici, les opérateurs $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^+$, $\hat{b}_k$ et $\hat{b}_k^+$ satisfont les mêmes relations de commutation que dans le cas du champ libre, mais leur interprétation n'est pas aussi simple. L'interprétation de ces opérateurs dépend de la définition d'un état du vide. Pour obtenir un état du vide, nous devons calculer, d'abord, le Hamiltonien du système $H = \int d^3x \; (\pi_\varphi \dot{\varphi} + \pi_{\varphi^*} \dot{\varphi}^* - \mathcal{L})$. Comme il a été montré dans [36], le Hamiltonien H peut prendre la forme

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[E_k(t)(\hat{a}_k^+ \; \hat{a}_k \; + \hat{b}_k^+ \; \hat{b}_k) + F_k^*(t) \; \hat{b}_k \; \hat{a}_k + F_k(t) \; \hat{a}_k^+ \; \hat{b}_k^+ \right] \tag{2.26}$$

avec

$$\begin{aligned} E_k(t) &= |\dot{\chi}_k \; (t) \; |^2 + \omega^2 \; |\chi_k(t)|^2 & (2.27) \\ F_k(t) &= \dot{\chi}_k^2(t) \; + \omega^2 \; \chi_k^2(t). & (2.28) \end{aligned}$$

Il est bien clair que H n'est pas diagonal car il contient les termes mixtes $\hat{a}_k^+ \hat{b}_k^+$ et $\hat{b}_k \hat{a}_k$.

2.3.1 L'équation d'Hamilton-Jacobi et les états "in" et "out"

Le fait que H n'est pas diagonal montre que le système n'a pas un vide bien déterminé et la notion de particule n'est pas toute à fait claire. Ils existent cependant des instants à lesquels l'interprétation en terme de particules est possible. Généralement ces instants sont le passé et le futur lointains. Il est bien évident que pour un champ électrique qui s'annule à $\pm\infty$, le système du champ complexe se comporte comme libre dont l'état du vide est bien déterminé. Nous avons alors un vide à $(-\infty)$, noté $|0_{in}\rangle$ et un vide à $(+\infty)$, noté $|0_{out}\rangle$. Les états de particules engendrés à partir de ces deux vides sont dits les états "in" et "out". Ces états ne sont rien d'autres que les solutions de l'équation de Klein Gordon en présence du champ électrique. En admettant que les états d'énergie positive et négative se comporte comme les solutions semi-classique de l'équation d'Hamilton-Jacobi, les solutions exactes de l'équation de Klein Gordon peuvent être classées en états "in" et "out" par leur comparaison aux solutions semi-classiques.

Partons de l'équation de Klein Gordon en presence d'un champ électrique qui peut s'écrire sous la forme

$$\left[\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 \left(\vec{\nabla} - i \frac{e}{\hbar} \; \vec{A} \right)^2 + m^2 \right] \varphi = 0, \tag{2.29}$$

et posons

$$\varphi = \exp\left[\frac{i}{\hbar} S\right] \tag{2.30}$$

pour obtenir l'équation

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \left(\vec{\nabla} S - e\ \vec{A}\right)^2 + m^2 - i\hbar \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0. \tag{2.31}$$

En prenant la limite $\hbar \to 0$, nous obtenons l'équation d'Hamilton-Jaccobi

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\vec{\nabla} S - e\ \vec{A}\right)^2 - m^2 = 0. \tag{2.32}$$

Pour un champ électrique dépendant du temps, la solution S est de la forme

$$S = \vec{k}.\vec{x} + G\,(t) \tag{2.33}$$

avec

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sqrt{\left(\vec{k} - e\ \vec{A}\right)^2 + m^2}, \tag{2.34}$$

ou bien

$$G = \int dt \sqrt{\left(\vec{k} - e\ \vec{A}\right)^2 + m^2}. \tag{2.35}$$

Les états "in" et "out" ont donc les comportements

$$\chi^{\pm}_{\vec{k},in}(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} \exp\left[\mp i\ G\,(t)\right] \tag{2.36}$$

et

$$\chi^{\pm}_{\vec{k},out}(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \exp\left[\mp i\ G\,(t)\right] \tag{2.37}$$

2.3.2 Interprétation en termes de particules

Comme l'équation (2.23) est de l'ordre deux, elle admet plusieurs ensembles $\left\{\chi^{+}_{\vec{k}}(t), \chi^{-}_{\vec{k}}(t)\right\}$ de solutions linéairement indépendantes. Donc la decomposition (2.24) n'est pas unique. Les seules décompositions physiques sont les deux décompositions suivant les états "in" et "out" qui rendent H diagonal,

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(a_{k,in} \chi^{+}_{\vec{k},in}(t)\ e^{i\vec{k}\vec{r}} + b^{+}_{k,in} \chi^{-}_{\vec{k},in}(t)\ e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right), \tag{2.38}$$

et

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(a_{k,out} \chi^{+}_{\vec{k},out}(t)\ e^{i\vec{k}\vec{r}} + b^{+}_{k,out} \chi^{-}_{\vec{k},out}(t)\ e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right), \tag{2.39}$$

Pour le premier ensemble $\left\{\chi^{+}_{\vec{k},in}(t), \chi^{-}_{\vec{k},in}(t)\right\}$, nous avons

$$H_{t\to-\infty} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_{in}\ \left[\hat{a}^{+}_{k,in}\ \hat{a}_{k,in}\ + \hat{b}^{+}_{k,in}\ \hat{b}_{k,in}\right] \tag{2.40}$$

où

$$2\omega_{in} = E_k(t \to -\infty).$$

Pour le deuxième ensemble $\left\{\chi^{+}_{\vec{k},out}(t), \chi^{-}_{\vec{k},out}(t)\right\}$, nous obtenons

$$H_{t\to+\infty} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_{out}\ \left[\hat{a}^{+}_{k,out}\ \hat{a}_{k,out}\ + \hat{b}^{+}_{k,out}\ \hat{b}_{k,out}\right] \tag{2.41}$$

avec

$$2\omega_{out} = E_k(t \to +\infty)\ . \tag{2.42}$$

Le Hamiltonien H est donc diagonal pour deux états du vide $|0_{in}\rangle$ et $|0_{out}\rangle$, avec $\hat{a}_{k,in}\ |0_{in}\rangle = \hat{b}_{k,in}\,|0_{in}\rangle = 0$ et $\hat{a}_{k,out}\ |0_{out}\rangle = \hat{b}_{k,out}\,|0_{out}\rangle = 0$.

Nous concluons que l'interprétation en termes de particules pour un champ quantique en présence d'un champ électrique n'est possible qu'à des instants particulièrs pour lesquels H est diagonal. Cela montre que la notion de particule en theorie quantique des champs en présence d'un champ extérieur n'est pas complètement claire. A un instant t quelconque, la matière se comporte comme des ondes.

2.3.3 Création de particules à partir du vide

Comme l'ensemble $\left\{\chi^{+}_{\vec{k},out}(t), \chi^{-}_{\vec{k},out}(t)\right\}$ forme une base pour l'espace des solutions de l'équation (**??**), nous pouvons écrire les éléments du deuxième ensemble$\left\{\chi^{+}_{\vec{k},in}(t), \chi^{-}_{\vec{k},in}(t)\right\}$ comme combinaisons linéaires des fonctions $\chi^{+}_{\vec{k},out}(t)$ et $\chi^{-}_{\vec{k},out}(t)$

$$\chi^{+}_{\vec{k},in}(t) = \alpha\ \chi^{+}_{\vec{k},out}(t) + \beta\ \chi^{-}_{\vec{k},out}(t) \tag{2.43}$$

$$\chi^{-}_{\vec{k},in}(t) = \alpha^*\ \chi^{-}_{\vec{k},out}(t) + \beta^*\ \chi^{+}_{\vec{k},out}(t). \tag{2.44}$$

Cette écriture est dite transformation de Bogoliubov où α et β sont les coefficients de Bogoliubov qui vérifient la condition

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1. \tag{2.45}$$

Cette transformation nous permet d'écrire

$$a_{out} = \alpha\ a_{in} + \beta\ b_{in}^{+} \tag{2.46}$$

$$b_{out}^{+} = \beta^{*}\ a_{in} + \alpha^{*}\ b_{in}^{+}. \tag{2.47}$$

En utilisant ces deux dernières relations nous arrivons au résultat suivant

$$\langle 0_{in}|\ \hat{a}_{k,out}^{+}\ \hat{a}_{k,out}\ |0_{in}\rangle = \langle 0_{in}|\ b_{k,out}^{+}\ b_{k,out}\ |0_{in}\rangle = |\beta|^{2}, \tag{2.48}$$

ce qui montre que le vide $|0_{in}\rangle$ contient des particules "out". L'explication de ce résultat est que la présence du champ électrique perturbe le vide $|0_{in}\rangle$ et produit des paires de particules. Selon les principes généraux de la théorie quantique des champs, l'amplitude de transition de l'état $|0_{in}\rangle$ à l'état $a_{out}^{+} b_{out}^{+}\ |0_{out}\rangle$ est donnée par

$$A = \langle 0_{out}|\ \hat{b}_{k,out}\ \hat{a}_{k,out}\ |0_{in}\rangle\ . \tag{2.49}$$

Compte tenu des équation (2.46) et (2.47), b_{out} peut s'écrire en fonction de b_{in} et a_{out}^{+}

$$b_{out} = \frac{1}{\alpha^{*}} b_{in} + \frac{\beta^{*}}{\alpha^{*}} a_{out}^{+} \tag{2.50}$$

et l'amplitude A se réduit à

$$A = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^{2} \langle 0_{out}|\ 0_{in}\rangle\ . \tag{2.51}$$

La probabilité de création d'une paire dans l'état $\vec{k}$ est alors donné par

$$P_{\vec{k}} = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^{2}. \tag{2.52}$$

2.4 Méthode de l'action effective

Maintenant nous nous proposons d'étudier la création de particules en suivant la méthode développée dans [37]. Cette méthode consiste à écrire d'abord l'amplitude de transition vide-vide en termes du déterminant de l'opérateur de Klein Gordon et extraire, ensuite, à partir de ce déterminant la probabilité de création de particules qui est dans ce cas la partie imaginaire de l'action éffective de Schwinger. L'action effective de Schwinger définit l'amplitude de transition vide-vide comme suit

$$\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle = \exp\left(iS_{eff}\right) = \exp\left(i \int d^D x \mathcal{L}_{eff}\right) \tag{2.53}$$

où $\mathcal{L}_{eff}$ est dit le Lagrangien effectif de Schwinger. La probabilité de transition vide-vide est alors

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{vac-vac} &= |\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle|^2 \\ &= \exp\left(-2 \operatorname{Im} S_{eff}\right) \\ &= \exp\left(-\int d^D x \; 2 \operatorname{Im} L_{eff}\right). \end{aligned} \tag{2.54}$$

Dans ce cas, la probabilité de création des particules peut être donc extraite de la partie imaginaire de S_{eff}

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{Creat.} &= 1 - \mathcal{P}_{vac-vac} \\ &= 1 - \exp\left(-\int d^D x \; 2 \operatorname{Im} L_{eff}\right) \\ &\simeq \int d^D x \; 2 \operatorname{Im} L_{eff}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

2.4.1 Amplitude de transition vide-vide en mécanique quantique

Commençons par la définition de l'amplitude vide-vide en mécanique quantique. En physique quantique, l'état fondamental d'un système est l'état qui correspond à la plus basse énergie. Cette état est appelé aussi état du vide. Supposons, maintenant que le système physique est initialement, à l'instant t_i est dans son état fondamental.

L'amplitude de transition vide-vide est l'amplitude de probabilité pour que le système soit encore dans son état fondamental à l'instant t_f. Suivant cette définition, nous avons, pour $T = t_f - t_i$,

$$\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle = \langle 0 | \exp\left(-iHT\right) | 0 \rangle = \exp\left(-iE_0 T\right). \tag{2.56}$$

D'autre part, le propagateur du système est l'amplitude de transition de l'état $\psi(x, t_i)$ à l'état $\psi(y, t_f)$ qui vérifie

$$\psi(y, t_f) = \int dx \; D_F(x_f, t_f; x_i, t_i)\, \psi(x, t_i) \tag{2.57}$$

L'expression du propagateur en fonction de l'opérateur d'évolution est

$$D_F\left(x_f, t_f; x_i, t_i\right) = \langle x_f | \, e^{-iH\left(t_f - t_i\right)} \, | x_i \rangle = \int Dx \; e^{iS_{cl}[x]} \tag{2.58}$$

avec

$$S_{cl}\left[x\right] = \int_{t_i}^{t_f} dt \; L\left(x, \dot{x}\right) \tag{2.59}$$

Considérons les vecteurs $|\phi_n\rangle$ états propres à H,

$$H\left|\phi_n\right\rangle = E_n\left|\phi_n\right\rangle . \tag{2.60}$$

Ces vecteurs vérifient les relations suivantes

$$\sum_n \; \left|\phi_n\right\rangle\left\langle\phi_n\right| = 1 \tag{2.61}$$

et

$$\left\langle\phi_m \middle| \phi_n\right\rangle = \delta_{nm} \tag{2.62}$$

Le propagateur peut s'écrire alors comme suit

$$D_F\left(x_f, t_f; x_i, t_i\right) = \sum_n \; \phi_n\left(x_f\right) \phi_n^*\left(x_i\right) e^{-iE_n T} \tag{2.63}$$

avec

$$\phi_n\left(x\right) = \langle x | \, \phi_n \rangle. \tag{2.64}$$

Maintenant, nous effectuons une rotation de Wick $T \longrightarrow -i\tau$ et nous prenons la limite $\tau \longrightarrow \infty$, pour avoir

$$D_F\left(x_f, -i\frac{\tau}{2}; x_i, i\frac{\tau}{2}\right) \overset{\tau \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \; \phi_0\left(x_f\right) \phi_0^*\left(x_i\right) e^{-E_0 \tau} \; . \tag{2.65}$$

L'amplitude de transition vide-vide en mécanique quantique se détermine alors à partir du propagateur en faisant la limite $T \longrightarrow \infty$

$$\left\langle 0_{out} \middle| 0_{in} \right\rangle \overset{T \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \; N \int Dx \exp\left(i \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} L\left(x, \dot{x}\right) dt \right), \tag{2.66}$$

où N est une constante.

2.4.2 Amplitude de transition vide-vide en TQC

Champ scalaire

En théorie quantique des champs, une expression identique peut être obtenue en remplaçant la somme sur les chemins par une sommation sur toutes les configurations de champ. Les changements à faire sont donc

$$Dx \to D\phi D\phi^*,$$
$$\lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} L(x,\dot{x}) \longrightarrow \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{2.67}$$

et

$$\int Dx \exp\left(i \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} L(x,\dot{x})\, dt\right) \longrightarrow \int D\phi D\phi^* \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)\right) \tag{2.68}$$

où $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ est la densité Lagrangien du champ

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \phi^*(x)\, \mathcal{O} \phi(x) \tag{2.69}$$

avec

$$\mathcal{O} = (i\partial_\mu - eA_\mu(x))^2 - m^2. \tag{2.70}$$

L'amplitude de transition du vide au vide devient

$$\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle = N \int D\phi\ D\phi^* \exp i \int d^4x \phi^*(x)\, \mathcal{O} \phi(x) \tag{2.71}$$

Pour calculer cette amplitude, nous introduisons la base des fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{O}$

$$\mathcal{O} \chi_n(x) = \lambda_n \chi_n(x) \tag{2.72}$$

et nous developpons $\phi(x)$ sur cette base

$$\phi(x) = \sum_n a_n \chi_n(x). \tag{2.73}$$

En utilisant la relation d'orthonormalisation des fonctions $\chi_n(x)$

$$\int d^4x \chi_n^*(x)\, \chi_l(x) = \delta_{nl} \tag{2.74}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle &= C \prod_{ij} \int da_i \int da_j^* \exp i \int d^4x \sum_{n,l} a_l^* a_n \chi_l^* (x) \mathcal{O} \chi_n (x) && (2.75) \\
&= C \prod_{ij} \int da_i \int da_j^* \exp i \sum_{n,l} \lambda_n a_l^* a_n \int d^4x \chi_l^* (x) \chi_n (x) \\
&= C \prod_{ij} \int da_i \int da_j^* \exp i \sum_{n} \lambda_n |a_n|^2 \\
&= \frac{C}{\prod\limits_n \lambda_n} && (2.76)
\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle = \frac{C}{\det \mathcal{O}}$$

Maintenant nous utilisons la propriété du déterminant

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\det \mathcal{O}} &= \exp \left[- \ln \left(\det \mathcal{O} \right) \right] = \exp \left[- \ln \prod_n \lambda_n \right] && (2.77) \\
&= \exp \left[- \sum_n \ln \lambda_n \right] = \exp \left[-tr \ln \mathcal{O} \right] && (2.78)
\end{aligned}$$

pour écrire

$$\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle = C \exp \left[-tr \ln \mathcal{O} \right] . \tag{2.79}$$

Compte tenu du fait que la fonction $\ln(x)$ admet la représentation intégrale suivante

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x + i\epsilon} &= -i \int_0^\infty ds \exp (isx) \\
\ln (x + i\epsilon) &= - \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp (is (x + i\epsilon)) + \mathrm{C^{ste}}
\end{aligned}$$

$$\ln A = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp (isA) + \mathrm{C^{ste}}, \tag{2.80}$$

nous arrivons à l'expression

$$S_{eff} = i \,\mathrm{tr} \left(\ln \mathcal{O} \right) = -i \,\mathrm{tr} \sum_n \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp \left(i \mathcal{O} s \right) . \tag{2.81}$$

$$m^2 \to m^2 - i\epsilon$$

Champ spinoriel

Pour un champ de Dirac la densité Lagrangienne s'écrit

$$\mathcal{L} = \overline{\psi} \left(i\not{D} - m \right) \psi \equiv \overline{\psi} \mathcal{O} \psi \tag{2.82}$$

avec

$$\mathcal{O} = i\not{D} - m = \gamma^{\mu} \left(i\partial_{\mu} - eA_{\mu} \right) - m \tag{2.83}$$

Dans ce cas l'amplitude vide-vide est définie par

$$\langle 0_{out} \left| 0_{in} \right\rangle \sim \int d\psi \; d\overline{\psi} \; \exp \left(i \int d^4 x \overline{\psi} \mathcal{O} \psi \right) \tag{2.84}$$

où ψ et $\overline{\psi}$ sont cette fois-ci des variales de Grassmann. L'intégrale fonctionnelle est gaussienne et donc intégrable. Le résultat est

$$\det \mathcal{O} = \prod_i \lambda_i = \det \mathcal{O}^{\dagger} = \left[\det \mathcal{O} \mathcal{O}^{\dagger} \right]^{1/2} \tag{2.85}$$

avec

$$\mathcal{O}^{\dagger} = -\gamma^{\mu} \left(i\partial_{\mu} - eA_{\mu} \right) - m. \tag{2.86}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\mathcal{O}^{\dagger} &= \left[\gamma^{\mu} \left(i\partial_{\mu} - eA_{\mu} \right) - m \right] \left[-\gamma^{\mu} \left(i\partial_{\mu} - eA_{\mu} \right) + m \right] && (2.87) \\ &= - \left(i\partial_{\mu} - eA_{\mu} \left(x \right) \right)^2 + m^2 - \frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. && (2.88) \end{aligned}$$

Dans ce cas nous obtenons

$$S_{eff} = -\frac{i}{2} \operatorname{tr} \left(\ln \mathcal{O}\mathcal{O}^{\dagger} \right) = i \operatorname{tr} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \exp \left(-i \mathcal{O}\mathcal{O}^{\dagger} s \right) \tag{2.89}$$

où nous avons utilisé l'intégrale

$$\ln \left(x - i\epsilon \right) = - \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \exp \left(-is \left(x - i\epsilon \right) \right) + \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}. \tag{2.90}$$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exposé la théorie quantique des champs en présence d'un champ électrique où nous avons montré que l'Hamiltonien de ce système n'est pas toujours diagonal.

Ainsi, nous avons défini en premier lieu les modes "in" et "out" qui rendent l'Hamiltonien diagonal et nous permettent donc une interprétation en termes de particules. A partir de la relation entre les modes "in" et "out" nous avons pu exprimer la probabilité de création d'une paire en termes de coefficients de Bogoliubov. En deuxième partie, nous montré comment définir l'amplitude de transition vide-vide pour le champ scalaire complexe et le champ spinoriel et comment extraire de cette amplitude la probabilité de création de particules.

Chapitre 3

Création de particules scalaires par un champ électrique constant et homogène

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'illustrer les méthodes présentées dans le chapitre précédent en considérant la création de particules par un champ électrique constant et homogène dans un espace de Minkowski à (3+1) dimensions.

Pour la première méthode, nous considérons l'équation de Klein Gordon en présence d'un champ électrique qui peut s'écrire sous la forme

$$\left[\left(\hat{p}_\mu - eA_\mu\left(x\right)\right)^2 - m^2\right]\psi\left(t,x\right) = 0, \tag{3.1}$$

où $\psi\left(t,x\right)$ est le champ de la matière de masse m et de charge e et A_μ est le vecteur potentiel qui décrit le champ éléctrique. Ensuite, nous utilisons les solutions semi-classiques de l'équation d'Hamilton-Jacobi pour classer les solutions de Klein Gordon en état "in" et "out". A partir de la relation de Bogoliubov qui liée ces états nous calculons la probabilité de création d'une paire et la densité des particules crées. Il est à noter que le champ éléctrique constant peut être décrit par deux jauges ; la jauge dépendant de la position $A_\mu = (-Ex, 0, 0, 0)$ et la jauge dépendant du temps $A_\mu = (0, 0, 0, Et)$. Dans ce chapitre nous effectuons les calculs dans les deux jauges en montrant ainsi l'invariance de jauge du problème.

Pour la deuxième méthode, nous cherchons d'abord, les valeurs propres des opérateurs de Klein Gordon et de Dirac. Ensuite nous calculons directement l'action effective de Schwinger qui définie l'amplitude vide-vide. La probabilité de création des particules dans ce cas est la partie imaginaire de cette action effective.

3.2 Création des particuels par un champ électrique

3.2.1 La jauge dépendant du temps

En présence d'un champ électrique constant et homogène E, décrit par la jauge

$$A_z(t) = -Et, \tag{3.2}$$

l'équation de Klein Gordon se réduit à

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + (k_z + eEt)^2 + m_\perp^2\right]\chi(t) = 0 \tag{3.3}$$

avec $m_\perp^2 = m^2 + k_x^2 + k_y^2$ et $\psi(t,x) = e^{i\vec{k}\vec{x}}\,\chi(t)$.

Solutions exactes de l'équation de Klein Gordon

Pour résoudre cette équation nous faisons le changement de variable $t \to Z$ avec

$$Z = \sqrt{eE}\left(t + \frac{k_z}{eE}\right). \tag{3.4}$$

Dans ce cas nous avons

$$\frac{d^2}{dt^2} = eE\frac{d^2}{dZ^2} \tag{3.5}$$

l'équation résultante de ce changement prend la forme

$$\left[\frac{d^2}{dZ^2} + Z^2 + \lambda\right]\chi(t) = 0 \tag{3.6}$$

avec

$$\lambda = \frac{m_\perp^2}{eE}. \tag{3.7}$$

Suivant [39] l'équation (3.6) a deux ensembles de solutions. Le premier ensemble est donné par

$$\chi_1(t) = D_\nu((1+i)\,Z) \tag{3.8}$$

$$\chi_2(t) = D_\nu(-(1+i)\,Z) \tag{3.9}$$

où $D_\nu(x)$ sont les fonctions de Weber et

$$\nu = -\frac{1+i\,\lambda}{2}. \tag{3.10}$$

Pour le deuxième ensemble nous avons

$$\chi_3(t) = D_{\nu^*}((1-i)\,Z) \tag{3.11}$$

$$\chi_4(t) = D_{\nu^*}(-\,(1-i)\,Z). \tag{3.12}$$

Equation d'Hamilton-Jacobi et états "in" et "out"

Pour un champ constant qui ne s'annule pas a ∞, la définition des états "in" et "out" n'est pas triviale. Ces états, cependant, peuvent être définies à l'aide de la solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi, en admettant que les états d'énergie négative et positive se comporte a $\pm\infty$ comme les solutions semi-classiques. Ainsi, nous commençons d'abord par résoudre l'équation semi-classique d'Hamilton-Jacobi. Puis, nous comparons ces solutions avec les solutions semi-classiques $\varphi\,(t,x) \sim e^{\pm is}$. Cela nous permet de classer nos solutions en états "in" et "out".

L'équation relativiste d'Hamilton-Jacobi s'écrit

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\vec{\nabla} S - e\,\vec{A}\right)^2 - m^2 = 0. \tag{3.13}$$

En séparant la partie dépendante de $\vec{x}$,

$$S = \vec{k}.\vec{x} + G(t), \tag{3.14}$$

nous obtenons pour $G(t)$ l'équation suivante

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 = m_\perp^2 + (k_z - eA_z(t))^2, \tag{3.15}$$

dont la solution formelle est

$$G(t) = \pm \int \sqrt{m_\perp^2 + (k - eA_z(t))^2} dt. \tag{3.16}$$

Quand $|t| \to \infty$, nous pouvons voir que la solution $G(t)$ se comporte comme

$$G(t) = \pm\frac{1}{2} eEt^2. \tag{3.17}$$

Par conséquent, les états $\chi_{in}^{\pm}\,(t)$ et $\chi_{out}^{\pm}\,(t)$ doivent se comporter comme suit

$$\lim_{t\to\,-\infty} \chi_{in}^{\pm}\,(t) \simeq\; e^{\;\mp i\frac{1}{2}eEt^2} \tag{3.18}$$

et

$$\lim_{t\to +\infty} \chi_{out}^{\pm}(t) \simeq e^{\mp i\frac{1}{2}eEt^2}. \tag{3.19}$$

D'autre part, en tenant compte du comportement des fonctions $D_\nu(Z)$, [39]

$$D_\nu(Z) \underset{|Z|>>|\nu|}{\simeq} Z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}} \qquad \text{avec} \qquad |\arg(Z)| < \frac{3\pi}{4} \tag{3.20}$$

nous obtenons

$$\chi_1(t)_{t\to +\infty} \simeq e^{-i\frac{1}{2}eEt^2} \tag{3.21}$$
$$\chi_2(t)_{t\to -\infty} \simeq e^{+i\frac{1}{2}eEt^2} \tag{3.22}$$
$$\chi_3(t)_{t\to +\infty} \simeq e^{+i\frac{1}{2}eEt^2} \tag{3.23}$$
$$\chi_4(t)_{t\to -\infty} \simeq e^{-i\frac{1}{2}eEt^2}. \tag{3.24}$$

En faisant une comparaison de (3.18) et (3.19) d'une part et (3.21)-(3.24) de l'autre part, nous déduisons que les états $\chi_{in}^{\pm}(t)$ et $\chi_{out}^{\pm}(t)$ sont donnés par

$$\chi_{out}^{+}(t) = \frac{1}{(2eE)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{i\pi}{4}\nu} D_\nu((1+i)\,Z) \tag{3.25}$$
$$\chi_{out}^{-}(t) = \frac{1}{(2eE)^{\frac{1}{4}}} e^{\frac{i\pi}{4}\nu^*} D_{\nu^*}((1-i)\,Z) \tag{3.26}$$
$$\chi_{in}^{+}(t) = \frac{1}{(2eE)^{\frac{1}{4}}} e^{\frac{i\pi}{4}\nu^*} D_{\nu^*}(-(1-i)\,Z) \tag{3.27}$$
$$\chi_{in}^{-}(t) = \frac{1}{(2eE)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{i\pi}{4}\nu} D_\nu(-(1+i)\,Z), \tag{3.28}$$

où les constantes de normalisation $(2eE)^{-\frac{1}{4}}\, e^{\pm\frac{i\pi}{4}\nu}$ et $(2eE)^{-\frac{1}{4}}\, e^{\pm\frac{i\pi}{4}\nu^*}$ sont déterminés à partir de la condition

$$\chi^*\dot{\chi} - \chi\dot{\chi}^* = 2i. \tag{3.29}$$

Création de particules

Pour obtenir la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particules crées nous utilisons la transformation [39]

$$D_\nu(z) = e^{-i\pi\,\nu} D_\nu(-Z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{-i\frac{\pi}{2}(\nu+1)} D_{-\nu-1}(iZ) \tag{3.30}$$

qui nous permet d'écrire

$$\chi_{in}^{+}(t) = \alpha\ \chi_{out}^{+}(t) + \beta\ \chi_{out}^{-}(t) \tag{3.31}$$

$$\chi_{in}^{-}(t) = \beta^{*}\ \chi_{out}^{+}(t) + \alpha^{*}\ \chi_{out}^{-}(t). \tag{3.32}$$

Cette écriture est dite transformation de Bogoliubov où les coefficients de Bogoliubov α et β, donnés par

$$\alpha = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu^{*})} e^{\frac{i\pi}{2}(\nu^{*}+\frac{1}{2})} \tag{3.33}$$

et

$$\beta = \ e^{i\pi\nu^{*}}, \tag{3.34}$$

avec la condition

$$|\alpha|^{2} - |\beta|^{2} = 1. \tag{3.35}$$

Cette transformation nous permet d'écrire

$$a_{k,out} = \alpha\ a_{k,in} + \beta\ b_{k,in}^{+} \tag{3.36}$$

$$b_{k,out}^{+} = \beta^{*}\ a_{k,in} + \alpha^{*}\ b_{k,in}^{+}. \tag{3.37}$$

En utilisant ces deux dernières relations nous arrivons au résultat suivante

$$\langle 0_{in}|\ \hat{a}_{k,out}^{+}\ \hat{a}_{k,out}\ |0_{in}\rangle = \langle 0_{in}|\ b_{k,out}^{+}\ b_{k,out}\ |0_{in}\rangle = |\beta|^{2}, \tag{3.38}$$

ce qui montre que le vide $|0_{in}\rangle$ contient des particules "out". L'explication de ce résultat est que la présence du champ électrique perturbe le vide $|0_{in}\rangle$ et produit des paires de particules.

Pour la probabilité de création d'une paire, nous avons

$$P_{\vec{k}} = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^{2} \tag{3.39}$$

$$= \left|\frac{\Gamma(-\nu)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i\pi}{2}\nu}\right|^{2}, \tag{3.40}$$

en utilisant la formule

$$\left|\Gamma(\frac{1}{2} + ix)\right|^{2} = \frac{\pi}{\cosh \pi x}, \tag{3.41}$$

nous obtenons pour la probabilité de création d'une paire

$$P_{\vec{k}} = \frac{e^{-\pi\frac{m_{\perp}^{2}}{2e\ E}}}{2\cosh\pi\left(\frac{m_{\perp}^{2}}{2eE}\right)} = \frac{\exp\left(-\pi\frac{m_{\perp}^{2}}{eE}\right)}{1+\exp\left(-\pi\frac{m_{\perp}^{2}}{eE}\right)} \tag{3.42}$$

et pour la densité des particules crées dans l'état $\vec{k}$,

$$n\left(\vec{k}\right) = \left|e^{i\pi\nu^*}\right|^2 = \exp\left(-\pi\frac{m_\perp^2}{eE}\right). \tag{3.43}$$

3.2.2 La jauge dépendant de la position

Considérons maintenant la jauge suivante

$$A^\mu \equiv (-Ex, 0, 0, 0)\,. \tag{3.44}$$

Pour ce potentiel vecteur l'équation de Klein Gordon est exactement soluble. L'identification des états "in" et "out" cependant n'est pas tout à fait claire. Il existe dans la littérature deux choix pour ces états, à savoir, le choix de Hansen et Ravandal [35, 40] et ce de Nikishov [28]. Dans ce mémoire nous prenons le choix de Nikishov. Commençons d'abord par la solution de l'équation de Klein Gordon.

Solutions exactes de l'équation de Klein Gordon

Pour résoudre l'équation de Klein Gordon, nous écrivons la solution sous la forme

$$\psi\left(t, \vec{x}\right) = \exp\left[-i\left(\omega t - k_x x - k_y y\right)\right]\varphi\left(x\right). \tag{3.45}$$

L'équation résultante est

$$\left[\left(\omega + eEx\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m_\perp^2\right]\varphi\left(x\right) = 0, \tag{3.46}$$

en faisant le changement de variable

$$\xi = \sqrt{2ieE}\left(x + \frac{\omega}{eE}\right), \tag{3.47}$$

nous obtenons l'équation différentielle

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4}\xi^2 + \gamma + \frac{1}{2}\right]\tilde{\varphi}\left(\xi\right) = 0, \tag{3.48}$$

où $\tilde{\varphi}\left(\xi\right) \equiv \varphi\left(x\right)$ et

$$\gamma = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\frac{m_\perp^2}{eE}. \tag{3.49}$$

L'équation (3.48) admet deux ensembles de solutions exactes qui peuvent être écrites en termes de fonctions de Weber (PCF_s) [39]. Selon [28] la classification de ces solutions comme des états "in" et "out" est comme suit

$$\begin{aligned}
\varphi_{in}^{-}(x) &= D_{\gamma^*}\left[(1-i)\sqrt{eE}\left(x+\frac{\omega}{eE}\right)\right], && (3.50)\\
\varphi_{in}^{+}(x) &= D_{\gamma}\left[-(1+i)\sqrt{eE}\left(x+\frac{\omega}{eE}\right)\right], && (3.51)\\
\varphi_{out}^{-}(x) &= D_{\gamma}\left[(1+i)\sqrt{eE}\left(x+\frac{\omega}{eE}\right)\right], && (3.52)\\
\varphi_{out}^{+}(x) &= D_{\gamma^*}\left[-(1-i)\sqrt{eE}\left(x+\frac{\omega}{eE}\right)\right]. && (3.53)
\end{aligned}$$

Création des particules

Nous utilisons la transformation de Bogoliubov reliant les états "in" et "out" pour déterminer la probabilité de création de particules et la densité des particules crées. Comme l'ensemble $\left\{\varphi_{out}^{+}(x), \varphi_{out}^{-}(x)\right\}$ forme une base pour l'espace des solutions de l'équation (3.48) , nous pouvons écrire l'ensemble $\left\{\varphi_{in}^{+}(x), \varphi_{in}^{-}(x)\right\}$ comme une combinaison linéaire des fonctions $\varphi_{out}^{+}(x)$ et $\varphi_{out}^{-}(x)$. En tenant compte du fait que $\gamma^* = -\gamma - 1$ et en utilisant la formule [39]

$$D_{\gamma}(\xi) = \exp\{i\pi\gamma\} D_{\gamma}(-\xi) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\gamma)}\exp\left\{\frac{i\pi\gamma}{2}\right\} D_{-\gamma-1}(-i\xi) \qquad (3.54)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
\varphi_{in}^{+}(x) &= \alpha\varphi_{out}^{+}(x) + \beta\varphi_{out}^{-}(x) && (3.55)\\
\varphi_{in}^{-}(x) &= \beta^*\varphi_{out}^{+}(x) + \alpha^*\varphi_{out}^{-}(x), && (3.56)
\end{aligned}$$

où les coefficients de Bogoliubov α et β, sont cette fois ci donnés par

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\gamma)}\exp\left\{\frac{i\pi\gamma}{2}\right\} && (3.57)\\
\beta &= \exp\{i\pi\gamma\}. && (3.58)
\end{aligned}$$

Par conséquent la probabilité pour créer une paire de particules avec l'énergie ω du vide est donnée par

$$p_{\omega} = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^2, \qquad (3.59)$$

en utilisant la formule (3.41) nous obtenons

$$p_\omega = \frac{\exp\left(-\pi\frac{m_\perp^2}{eE}\right)}{1+\exp\left(-\pi\frac{m_\perp^2}{eE}\right)}. \tag{3.60}$$

La densité des particules crées dans un état ω (le nombre moyen de particules crées par état) est donnée par

$$n(\omega) = |\beta|^2 = \exp\left(-\pi\frac{m_\perp^2}{eE}\right). \tag{3.61}$$

Les équations (3.60) et (3.61) prouvent en premier lieu l'invariance de jauge de la théorie et montre que le présent choix des modes "in" et "out" mène aux résultats exacts de la création de particules.

3.3 Méthode de l'action effective

3.3.1 Particules de spin 0

Pour un champ électrique décrit par la jauge

$$A^\mu(t) = (0,0,0,-Et\ ) \tag{3.62}$$

l'équation aux valeurs propres

$$\mathcal{O}_{KG}\chi(x) = \lambda\chi(x) \tag{3.63}$$

se réduit à l'équation de Klein Gordon (3.3) avec $m_\perp^2 - \lambda$ au lieu de $m_\perp^2$

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + (k_z + eEt)^2 + m_\perp^2 - \lambda\right]\chi(t) = 0 \tag{3.64}$$

En faisant les changements

$$\tau = t + \frac{k_z}{eE} \tag{3.65}$$

$$\varpi = -ieE \tag{3.66}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(m_\perp^2 - \lambda\right) \tag{3.67}$$

Nous obtenons une équation qui se ressemble à l'équation de l'oscillateur harmonique

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\varpi^2\tau^2\right]\tilde{\chi}(\tau) = \mathcal{E}\tilde{\chi}(\tau) \tag{3.68}$$

où l'*énergie* complexe est donnée par

$$\mathcal{E} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\varpi. \tag{3.69}$$

Les valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{O}_{KG}$ sont donc données par

$$\begin{aligned} \lambda &= m_\perp^2 + (2n+1)\,ieE \\ &= m^2 + k_x^2 + k_y^2 + i\,(2n+1)\,eE. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Nous avons alors

$$S_{eff} = i\,\mathrm{tr}\left(\ln \mathcal{O}_{KG}\right) = -iL^3 \int \frac{dk_x dk_y dk_z}{(2\pi)^3} \sum_n \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp\left[i\left(m^2 + k_x^2 + k_y^2\right)s\right] \exp\left[-\left(2n+1\right)eEs\right]. \tag{3.71}$$

L'intégrale $\int dk_z$ peut être remplacer par eET. Nous avons également la somme

$$\sum_n \exp\left[-\left(2n+1\right)eEs\right] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2neEs} e^{-eEs} = \frac{1}{1 - e^{-2eE_0 s}} e^{-eEs} \tag{3.72}$$

qui se réduit à

$$\sum_n \exp\left[-\left(2n+1\right)eEs\right] = \frac{1}{2\sinh eE_0 s}. \tag{3.73}$$

L'intgration sur k_x et k_y est directe

$$\int \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \exp\left[i\left(k_x^2 + k_y^2\right)s\right] = i\frac{1}{4\pi}\frac{1}{s}. \tag{3.74}$$

Nous obtenons alors

$$S_{eff} = L^3 T \frac{eE}{8\pi^2} \int dk_z \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \frac{1}{2\sinh eE_0 s} \exp\left(im^2 s\right). \tag{3.75}$$

La partie imaginaire de S_{eff} peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Im}\, S_{eff} &= \frac{1}{2i}\left(S_{eff} - S_{eff}^*\right) \\ &= \frac{1}{i} L^3 T \frac{eE}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{s^2} \frac{1}{\sinh eEs} \exp\left(im^2 s\right) \end{aligned} \tag{3.76}$$

Pour calculer l'intégrale sur s nous choisissons la fonction complexe

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{\sinh eEz} \exp\left(im^2 z\right)$$

et nous utilisons le théorème des résidues

$$\int_C f(z)dz = 2i\pi \sum_k \operatorname{Res}(f, z_k) \tag{3.77}$$

où

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = \lim_{z\to z_k} (z - z_k) f(z). \tag{3.78}$$

Nous fermons le contour d'intégration à l'infini par un demi-cercle dans le demi-plan supérieur. Dans ce cas les poles sont donnés par

$$z_k = i\frac{k\pi}{eE} \tag{3.79}$$

et les résidues se calculent

$$\lim_{z\to z_k} (z - z_k) f(z) = \frac{(-1)^k}{eE\left(ik\frac{\pi}{eE}\right)^2} \exp\left(-k\pi\frac{m^2}{eE}\right) \tag{3.80}$$

Nous avons finalement

$$2\operatorname{Im} S_{eff} = L^3 T \frac{e^2E^2}{(2\pi)^3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \exp\left(-k\pi\frac{m^2}{eE}\right). \tag{3.81}$$

3.3.2 Particules de spin $\frac{1}{2}$

Pour les particules de Dirac nous avons

$$\mathcal{O}_D\mathcal{O}_D^\dagger = [\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\,[-\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) + m] \tag{3.82}$$

$$= -(i\partial_\mu - eA_\mu(x))^2 + m^2 - \frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{3.83}$$

Pour la jauge (3.62), le $\frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ qui exprime l'intéraction spin champ se réduit à

$$\frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = e\sigma_{0i}F^{0i} = e\sigma^{0i}(\partial_0 A_i) = ie\gamma^0\gamma^i(\partial_0 A_i) = -ie\vec{\alpha}.\vec{E} \tag{3.84}$$

Dans ce cas nous avons

$$\left(\frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)^2 = \left(-ie\vec{\alpha}.\vec{E}\right)^2 = -e^2E^2 \tag{3.85}$$

ce qui montre que les valeurs propres de $\frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ sont donc $a_\nu = i\nu eE$, avec $\nu = \pm 1$. Nous avons alors l'équation aux valeurs propres

$$\mathcal{O}_D\mathcal{O}_D^\dagger\chi = \lambda\chi \tag{3.86}$$

qui se réduit à

$$(-\mathcal{O}_{KG} + i\nu eE)\,\tilde{\chi} = \lambda\tilde{\chi} \tag{3.87}$$

Dans ce cas λ ce calcule à partir des valeurs propres de l'opérateur de Klein Gordon

$$\lambda = m^2 + k_x^2 + k_y^2 + i\left(2n+1\right)eE + i\nu eE. \tag{3.88}$$

Nous avons alors

$$S_{eff} = i\int \frac{dk_x dk_y dk_z}{\left(2\pi\right)^3}\sum_n \sum_{\nu=\pm 1}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\exp\left[-i\left(-m^2 - k_x^2 - k_y^2 - i\left(2n+1\right)eE + i\nu eE\right)s\right] \tag{3.89}$$

Ici, nous avons

$$\sum_{\nu=\pm 1}\exp\left(-\nu eEs\right) = 2\cosh\left(eEs\right). \tag{3.90}$$

Après avoir effectué l'intégration sur k_x, k_y et k_z et fait la somme sur n nous obtenons

$$S_{eff} = -L^3 T\frac{eE}{2\left(2\pi\right)^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\coth\left(eEs\right)\exp\left(im^2 s\right) \tag{3.91}$$

et par conséquent

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = iL^3 T\frac{eE}{2\left(2\pi\right)^2}\int_{-\infty}^\infty \frac{ds}{s}\coth\left(eEs\right)\exp\left(im^2 s\right). \tag{3.92}$$

Comme dans le cas de l'équation de Klein Gordon, nous utilisons le théorème de résidues pour obtenir l'expression finale

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = L^3 T\frac{2e^2E^2}{\left(2\pi\right)^3}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\exp\left(-k\pi\frac{m^2}{eE}\right). \tag{3.93}$$

3.4 Equivalence entre les deux méthodes

L'équivalence entre les deux méthodes peut se montrer comme suit :

Partons des résultats de la première méthode et considérons la probabilité $C_{\vec{k}}$ pour qu'il n'y ait pas de création de particules dans l'état $\vec{k}$. La probabilité de avoir crée seulement n paires dans l'état $\vec{k}$ est donc donnée par $C_{\vec{k}}\left(P_{\vec{k}}\right)^n$. Suivant la normalisation des probabilité, nous avons

$$\sum_n C_{\vec{k}}\left(P_{\vec{k}}\right)^n = 1, \tag{3.94}$$

ce qui nous donne

$$C_{\vec{k}} = 1 - P_{\vec{k}} = \frac{1}{1+\left|c_2\right|^2} \tag{3.95}$$

La probabilité de transition vide-vide est donc

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\ 2\,\mathrm{Im}\,S_{eff}\right) &= \prod_k C_{\vec{k}} \\
&= \prod_k \exp\left[-\ln\left(1+|c_2|^2\right)\right] \\
&= \exp\left[-\sum_k \ln\left(1+|c_2|^2\right)\right]. \qquad (3.96)
\end{aligned}$$

Par conséquent la partie imaginaire de l'action effective de Schwinger est

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = \sum_k \ln\left(1+|c_2|^2\right). \qquad (3.97)$$

Utilisons le developpement de Taylor

$$\ln\left(1+\sigma\right) = \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} |c_2|^{2n} \qquad (3.98)$$

et remplaçons la sommation sur k par l'intégrale $\int \frac{L^3 d^3k}{(2\pi)^3}$. Ici la mésure $\frac{L^3 d^3k}{(2\pi)^3}$ représente le nombre d'états dans l'intervale $\left[\vec{k}, \vec{k}+d\vec{k}\right]$ dans le volume L^3. L'action effective de Schwinger devient

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = \int \frac{Vd^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp\left(-n\pi\frac{m^2+k_\perp^2}{eE}\right). \qquad (3.99)$$

Nous avons alors

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = L^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp\left(-n\pi\frac{m^2+k_\perp^2}{eE}\right). \qquad (3.100)$$

En effectuant l'intégration sur k_x et k_y nous obtenons

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = L^3 \int dk_z \frac{eE}{(2\pi)^3} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \exp\left(-n\pi\frac{m^2}{eE}\right). \qquad (3.101)$$

En remplaçant l'intégrale $\int dk_z$ par eET nous obtenons

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = L^3 T \frac{e^2E^2}{(2\pi)^3} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \exp\left(-n\pi\frac{m^2}{eE}\right). \qquad (3.102)$$

3.5 Inclusion d'un champ magnétique

Pour insérer un champ magnétique parallèle à l'axe (OZ), nous choisissons pour le potentiel A_μ la jauge suivante

$$A_\mu = (0, By, 0, Et) \tag{3.103}$$

ce qui conduit à l'équation de Klein Gordon suivante

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(-i\frac{\partial}{\partial x} + eBy\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(-i\frac{\partial}{\partial z} + eEt\right)^2 - m^2\right] \Phi\left(t, x, y, z\right) = 0 \tag{3.104}$$

Pour résoudre cette équation, nous décomposons $\Phi\left(t, x, y, z\right)$ comme

$$\Phi\left(t, x, y, z\right) = \exp\left[i(k_x x + k_z z)\right] \chi(t) F(y) \tag{3.105}$$

où les fonctions $F(y)$ et $\chi(t)$ obéissent respectivement aux équations suivantes

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (eBy + k_x)^2\right] F(y) = AF(y) \tag{3.106}$$

et

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (k_z + eEt)^2 - A - m^2\right] \chi(t) = 0 \tag{3.107}$$

où A est une constante résultant de la séparation des variables. Il est clair qu'en effectuant le changement $y \to y - \frac{k_x}{eB}$, l'équation (3.106) devient similaire à l'équation d'onde associée à l'oscillateur harmonique,

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial Y^2} + e^2B^2Y^2\right] F(Y) = AF(Y) \tag{3.108}$$

où la solution est donnée en termes de polynômes Hermit $\mathcal{H}_n\left(x\right)$

$$\chi(y) = \left(\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{eB}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{eB}{2}\left(y + \frac{k_x}{eB}\right)^2\right] \mathcal{H}_n\left[\sqrt{eB}\left(y + \frac{k_x}{eB}\right)\right] \tag{3.109}$$

avec les niveaux Landau

$$A = eB\left(2n + 1\right). \tag{3.110}$$

Pour la fonction $\chi(t)$ nous avons

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (k_z + eEt)^2 - eB\left(2n + 1\right) - m^2\right] \chi(t) = 0 \tag{3.111}$$

La dernière équation est similaire à (3.3) avec le changement $m_\perp^2 \to m^2 + eB\left(2n+1\right)$, ce qui nous donne la probabilité

$$P = \frac{\exp\left(-\pi\frac{m^2+eB(2n+1)}{eE}\right)}{1+\exp\left(-\pi\frac{m^2+eB(2n+1)}{eE}\right)} \tag{3.112}$$

et la densité des particules crées

$$n = \exp\left(-\pi\frac{m^2+eB\left(2n+1\right)}{eE}\right). \tag{3.113}$$

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons voulu étudier la création à partir du vide des particules scalaires sous l'action d'un champ électrique constant et homogène suivant deux méthodes :

1) La technique des transformations de Bogoliubov reliant les états "in" aux états "out". Dans ce cas, pour déterminer ces états "in" et "out" il nous a fallu résoudre l'équation relativiste d'Hamilton-Jacobi. La relation entre les états "in" et "out" nous a permis de calculer la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particule crées. A travers les résultats de cette partie nous concluons que le processus de création des particules par un champ électrique ne dépend pas de la jauge choisie.

2) La méthode de l'action effective de Schwinger dans laquelle la probabilité de création des particules n'est rien d'autre que la partie imaginaire de l'action effective de Schwinger.

Nous avons montré que les deux méthodes sont équivalentes.

En dernière étape nous avons considéré l'addition d'un champ magnétique.