

---

## Cadre théorique, problématique et méthodologie de la recherche

### Sommaire du chapitre :

|                                                                                        |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Problématisation dans le cadre théorique choisi .....                                  | 53        |
| <b>A. Le cadre théorique .....</b>                                                     | <b>53</b> |
| 1. La théorie de l'activité .....                                                      | 54        |
| 1.1. Le cadre général de la théorie de l'activité .....                                | 55        |
| 1.2. Distinction « tâche / activité » .....                                            | 55        |
| 1.3. Adaptation de la théorie de l'activité à la didactique des<br>mathématiques ..... | 56        |
| 1.4. Les activités : catégorisation, dimensions .....                                  | 57        |
| 1.5. Les aides .....                                                                   | 59        |
| 1.6. Les proximités .....                                                              | 59        |
| 1.6.1. Les proximités - en-acte .....                                                  | 59        |
| 1.6.2. Types de proximités .....                                                       | 60        |
| 2. Cadres, registres et points de vue .....                                            | 61        |
| 2.1. Notions de cadre et registre .....                                                | 61        |
| 2.2. Le statut « outil / objet » des concepts mathématiques .....                      | 62        |
| 2.3. Les registres .....                                                               | 63        |
| 2.4. Les points de vue .....                                                           | 65        |

|                                                                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3. Notion de « Relief » d'une notion mathématique, « Niveaux de conceptualisation » et « domaine de travail associé » ..... | 66 |
| 4. La notion d'ingénierie didactique .....                                                                                  | 68 |
| 5. L'approche instrumentale .....                                                                                           | 69 |
| 6. La double approche des pratiques enseignantes .....                                                                      | 71 |
| <b>B. Problématique</b> .....                                                                                               | 73 |
| <b>C. Méthodologie de la recherche</b> .....                                                                                | 77 |

## Problématisation dans le cadre théorique choisi

Rappelons que notre recherche consiste en la conception et l'expérimentation d'une ingénierie didactique intégrant les TIC et permettant d'introduire la définition formalisée de la continuité d'une fonction numérique à variable réelle<sup>1</sup> en un point de son domaine de définition, pour les élèves de la troisième année secondaire en Tunisie. Il y aura ainsi, conception, réalisation, observation et analyse de séquences d'enseignement ce qui nous amène à nous placer dans un cadre théorique adéquat (de base) tout en faisant appel à d'autres éléments théoriques : nous ferons références à des travaux en rapport avec le sujet de notre recherche et qui contribueront à nos analyses tels que ceux de A. Robert (1998) sur les notions FUG, A. Kuzniak (2014) sur les paradigmes de l'analyse standard, aux travaux sur « l'ingénierie didactique » de M. Artigue (1989), à l'approche instrumentale (P. Rabardel, 1996), à la théorie des changements de cadre et la dialectique « outil/objet » de Douady (1986), à la théorie des changements de registres de Duval (1996) et enfin à la double approche (Robert et Rogalski, 2002).

### A. Le cadre théorique

Nous allons nous placer dans le cadre général de la théorie de l'activité développée au LDAR par Robert, Rogalski et plus modestement Vandebrouck (2008, 2017), basée essentiellement sur les travaux de Piaget et Vergnaud pour ce qui concerne la conceptualisation dans l'action et Vygotsky pour ce qui concerne l'importance des médiations et la ZPD pour l'enseignement et l'apprentissage.

Dans ce cadre, nous reprenons les outils théoriques proposés par Robert (2008) qui spécifie divers éléments des théories de l'apprentissage aux mathématiques et à la situation scolaire : les apprentissages des élèves et des étudiants sont appréhendés par l'intermédiaire d'analyses de leurs activités en classe, elles-mêmes caractérisées par les mises en fonctionnement de connaissances mathématiques qu'ils sont amenés à faire, à partir des tâches qui leurs sont proposées, des modes de travail et

---

<sup>1</sup> On s'intéresse aux fonctions du programme.

des aides de l'enseignant (Robert 2008). Les apprentissages sont référés à la conceptualisation visée, elle-même définie à partir des spécificités des notions mathématiques, des programmes d'enseignement et des difficultés des élèves.

### 1. La théorie de l'activité

Selon J. Rogalski, l'objet de la théorie de l'activité est bien une activité finalisée et motivée : le sujet vise l'atteinte de buts d'action, et ce sont les mobiles de son activité qui sont le moteur de ses actions. La théorie vise l'analyse des processus en jeu chez le sujet agissant, et les processus par lesquels son activité évolue et par lesquels il se développe. Elle s'appuie sur deux notions clés : celle de sujet et celle de situation. Elle différencie par ailleurs tâche et activité, qui sont respectivement « du côté de la situation » et « du côté du sujet ». Elle permet de questionner les phénomènes de diversité et l'influence des déterminants personnels dans l'activité et le développement des acteurs.

Du point de vue didactique, l'orientation retenue est l'analyse des mises en fonctionnement de connaissances mathématiques telles qu'elles sont organisées par l'enseignant lorsqu'il propose aux élèves des tâches mathématiques. Plus précisément, pour chaque énoncé, une analyse didactique est effectuée à partir du contenu mathématique de l'énoncé étant donné le niveau scolaire considéré. Elle permet d'associer un ensemble de tâches possibles de la part des élèves, mettant en jeu des connaissances anciennes, récentes ou en cours d'acquisition.

Cette analyse initiale *a priori* de tâches est insuffisante pour appréhender les activités possibles des élèves et particulièrement les mises en fonctionnement de connaissances sur lesquelles on s'interroge. Un élément essentiel dans l'approche didactique développée est l'analyse des déroulements effectifs qui, à partir des analyses *a priori* précédentes, précise les activités effectivement possibles des élèves dans la classe.

### 1.1. Le cadre général de la théorie de l'activité

Notre positionnement en théorie de l'activité suppose une étude de l'activité définie du point de vue des sujets (pour nous : les élèves) en prenant en compte l'ensemble du contexte en jeu, en premier lieu les mathématiques et le cadre scolaire - ce que nous appelons la situation, avec ses contraintes et ses ressources - et en étant particulièrement sensibles aux médiations entre les sujets et l'objet de leur activité.

### 1.2. Distinction « tâche / activité »

La tâche correspond au but que le sujet doit atteindre sous certaines conditions (Leplat, 1997). Elle se situe du côté de l'objet de l'activité, et donc de la situation.

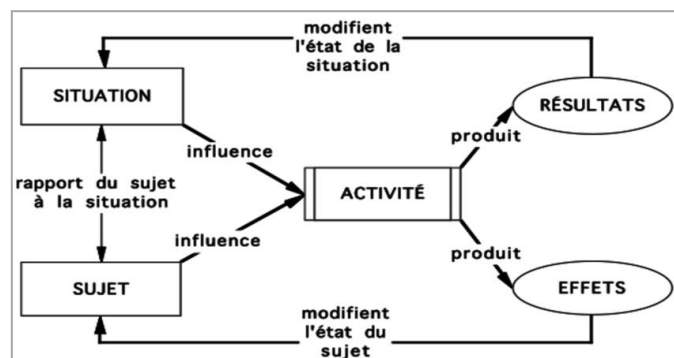
L'activité de l'élève c'est ce qu'il développe lors de la réalisation d'une tâche (dans un exercice, ou pendant l'écoute d'un cours, ou pendant la correction d'un exercice) en situation (en classe ou à la maison), ses actes mathématiques extériorisés (le dit, le fait, l'écouté, l'entendu, l'écrit) mais aussi les hypothèses, les décisions dans ce qu'il fait (dit) ou non. ... : l'activité est inaccessible mais laisse des traces observables.

L'activité est ainsi une activité « située » - i.e. en situation - et finalisée par l'existence de la tâche, qu'il s'agit donc en premier lieu de bien analyser pour comprendre l'activité.

L'ergonomie cognitive a permis un centrage sur la dimension constructive de l'activité du sujet (Samurcay et Rabardel 2004, Pastré et Rabardel 2005). C'est par exemple en ce sens que Rabardel (1995), en reprenant l'idée de médiation de l'activité par des outils (Vygotsky 1934/1997), a introduit la notion de genèse instrumentale, définissant ainsi une distinction entre l'artefact et l'instrument.

Nous nous référons plus globalement au schéma de double régulation de l'activité proposé par Leplat (1997) et donné en figure 1.

**Figure 1.** « Schéma de double régulation de l'activité »



L'activité (des élèves) a ainsi deux dimensions indissociables :

- Une dimension productive, tournée vers la résolution de la tâche, de façon générale tournée vers la transformation de la situation d'apprentissage
- Une dimension constructive, tournée vers l'élève lui-même, c'est un vecteur d'évolution de ses connaissances

L'enseignant doit sans cesse ménager les deux dimensions de l'activité des élèves.

Ce cadre général fait référence aux travaux de Piaget et Vygotsky (Vandebrouck et Robert, 2017).

- De Piaget et Vergnaud (1991) qui fut son élève, sont retenus principalement la définition de conceptualisation et de champs conceptuels en mathématiques, ainsi que les rôles de l'action et de la résolution de problème dans cette conceptualisation.
- De Vygotsky (1997), sont retenues l'importance des médiations de l'activité et la prise en compte de la ZPD (zone proximale de développement, Ibid. p.270) dans le processus d'acquisition des connaissances. Cette ZPD est associée à des connaissances que l'élève n'a pas encore mais qu'il peut mettre en fonctionnement en étant aidé, ce qui peut contribuer à son apprentissage, cela nous amène à parler de la ZPD de ces connaissances.

### **1.3. Adaptation de la théorie de l'activité à la didactique des mathématiques (A. Robert)**

Dans le même mouvement que l'adaptation de la théorie de l'activité à la didactique professionnelle (Pastré, 1999), on trouve une adaptation à la didactique des mathématiques. Dès son article sur les analyses de tâches par exemple, Robert (1998, 2008) met en évidence l'importance des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances – disponibles, mobilisables - et de ce qu'elle appelle les différentes adaptations des connaissances repérées dans les tâches : introduire des intermédiaires, des étapes, faire des choix... par opposition aux applications immédiates, sans adaptation (à un moment donné de la scolarité).

Ces développements en didactique des mathématiques intègrent aussi des concepts déjà utilisés en didactique des mathématiques : par exemple la notion de cadre et la dialectique outil-objet de Douady (1986), les registres de représentations sémiotiques de Duval (1995), que nous développons dans le paragraphe suivant.

Les développements de la théorie en didactique des mathématiques mettent aussi en avant la dimension constructive de l'activité, en référence à la conceptualisation, avec une importance des médiations et de la ZPD (Rogalski, 2008).

#### 1.4. Les activités : catégorisation, dimensions

Robert (2008) propose d'introduire le mot « activités » - pluriel - pour des segments de l'activité, directement associés à une tâche mathématique précisée. Plusieurs « sous-activités mathématiques », liées à différentes mises en fonctionnement des connaissances à l'œuvre, sont distinguées, permettant de caractériser l'activité mathématique des élèves dans sa globalité. Il s'agit des sous-activités de reconnaissances, d'organisation et de traitement interne qui actualisent dans le cas de l'activité mathématique et de l'environnement scolaire les fonctions proposées par Galpérine : orientation, exécution et contrôle (Vandebrouck et Robert, 2017). Les tâches complexes<sup>2</sup> sont alors définies comme les tâches qui activent et imbriquent plusieurs de ces sous-activités mathématiques, à partir de diverses adaptations de connaissances à mettre en fonctionnement, repérées dans l'analyse a priori.

- Activités de reconnaissance d'outils ou d'objets mathématiques à mettre en fonctionnement : ce sont les théorèmes ou propriétés concernés, supposés disponibles ou non, ou/et l'identification des modalités d'application de ces théorèmes ou propriétés à mettre en fonctionnement. Cela peut comprendre des choix de connaissances, forcés ou non, selon les alternatives existantes. Il y a plusieurs niveaux de disponibilité (objet, outil), selon que l'on considère la reconnaissance du fait que la connaissance doit être utilisée (comme outil) ou que c'est la définition ou une propriété, à adapter au contexte, qui est uniquement en jeu (comme objet),

---

<sup>2</sup>Ce mot ne réfère pas aux tâches complexes définies par l'Institution comme *mobilisant des ressources internes et externes pour former à gérer des situations concrètes*, même si ces dernières conduisent à des tâches complexes

- Activités d'organisation du raisonnement global : il s'agit de repérer les différents raisonnements mathématiques à mener, avec les étapes éventuelles et leur ordre, les reprises des questions précédentes, les interprétations.
- Activités de traitement interne : il s'agit des constructions de figures, des calculs à effectuer, du travail sur les formules, simple remplacement des données par leurs valeurs ou transformations, équivalences, implications, mais aussi de l'introduction d'intermédiaires, notations ou expressions, des changements de registres ou de points de vue (imposés ou choisis) et des mélanges de cadres éventuels (imposés ou choisis) .

En relation avec une tâche complexe (comportant diverses adaptations de diverses connaissances), travaillée en classe et supposée contribuer à l'apprentissage d'une connaissance visée, tous les types de sous-activités à développer ne sont pas réalisés de la même manière par les élèves compte tenu des déroulements organisés.

Certains sont investis par tous les élèves (pour tous), alors que certains restent le fait de certains élèves seulement (sous-activités a maxima). Puis selon les cas, reprise ou non avec une réduction (alors sous-activités a minima). Ainsi :

- Sous-activités a maxima : celles investies d'emblée par des élèves, certains élèves, sans aide de l'enseignant
- Sous-activités a minima : sous-activités alternatives, complémentaires, proposées après les premières, sur les mêmes sous-tâches, qui peuvent être investies par les autres élèves, souvent réduites par rapport aux précédentes, avec des aides supplémentaires...

### 1.5. Les aides

Robert utilise aussi la distinction entre aides « procédurales » et aides « à visée constructive » en référence au schéma de double régulation. Les premières sont orientées vers la situation (notamment les tâches prescrites) en modifiant strictement les activités par rapport à celles prévues à partir de l'énoncé. Elles correspondent surtout à des indications que peut donner l'enseignant, directement ou indirectement, avant ou pendant l'activité des élèves. Les secondes sont orientées vers les élèves et visent à ajouter « quelque chose », qui s'appuie sur

l'activité stricte des élèves pour amorcer la construction (espérée) de connaissance, par des reprises, des reformulations, des distanciations, des généralisations...

### 1.6. Les proximités

Plus récemment, Robert et Vandebrouck (2014), ont aussi introduit l'intérêt d'étudier les « proximités », repérables (ou non) dans les décisions et les discours de l'enseignant, dans lesquelles ce n'est pas la dialectique procédurale/constructive qui est mise en avant mais le fait que les apports de l'enseignant peuvent (ou veulent) prendre en compte les ZPD en jeu des élèves.

#### 1.6.1 Les proximités - en-acte

Robert et Vandebrouck (2014) ont introduit la notion de proximité-en-acte pour qualifier ce qui, dans les discours ou même dans les décisions des enseignants pendant les déroulements des séances, peut être interprété par les chercheurs comme une tentative de rapprochement avec les élèves.

Les proximités – en – acte traduisent ainsi une activité de l'enseignant (souvent discursive mais pas seulement) visant à provoquer et/ou à exploiter une proximité avec les activités (possibles, et supposées effectives) et/ou les connaissances des élèves ; cela est sans doute voulu par l'enseignant, mais plus ou moins explicitement, peut-être même automatiquement<sup>3</sup>. Cette proximité est d'ordre cognitif ou non, et concerne ou non tous les élèves. Même si l'enseignant a explicitement conçu une activité préalable à un cours, pour préparer l'introduction de certaines connaissances visées, ce n'est pas pour autant que le passage de l'activité aux connaissances qui vont être dégagées soit automatiquement perçu comme proche par (tous) les élèves. Ainsi ce complément « en-actes » spécifie, dans notre idée, une qualité de l'activité de l'enseignant en classe, qui accompagne le développement des contenus, ni nécessairement consciente ni exprimable, tout comme chez Vergnaud (1990), dans l'expression concept-en-actes, où ce complément qualifie une connaissance qui se manifeste dans l'activité d'un sujet sans être toujours consciente ni exprimable.

---

<sup>3</sup>Si un élève semble perdu, on lui pose une question.

### 1.6.2 Types de proximités

Robert distingue trois types de proximités qui précisent la notion de proximités en actes définies dans Robert et Vandebrouck (2014) et qui sont attachées aussi bien à des décisions qu'à des discours, y compris parfois pendant les moments de travail des élèves.

- soit de généralisations à partir des activités (possibles) sur une tâche et qui aboutissent à l'expression, la définition, voire la démonstration d'une propriété mathématique générale (proximité ascendante),
- soit de la manière dont on peut utiliser dans un exercice, voire dans une démonstration, une propriété (ou définition) générale sur lesquelles les élèves ont déjà développé de l'activité (proximité descendante),
- soit du travail local sur une formule par exemple ou sur le sens d'un théorème, qui n'amènent pas de changement de niveau de généralité (proximités horizontales).

Il y a des proximités ayant une portée plus directement cognitive, mettant en jeu des liens portant sur des contenus (par l'intermédiaire de commentaires méta mais pas seulement), ou révélant des relations portant sur diverses tâches, ou sur diverses sous-activités entre elles, ou leurs liens avec le cours...

D'autres proximités sont non strictement mathématiques : affectives (encouragements), langagières (jouant sur divers niveaux de langue, du familier au symbolique, ou sur des images, etc.) ; des proximités interactives, comme l'appui sur des réponses d'élèves (souvent locales), les questions venant ou non de l'enseignant, permettant de préciser, de continuer, de vérifier que les élèves suivent. Ce peut être avec ou sans changement dans le niveau de langage ou le niveau de généralité adopté dans le discours.

Dans cette recherche, nous faisons le choix de nous limiter à l'étude de ces proximités cognitives car les autres ne mettent pas seulement en jeu des concepts de didactique des mathématiques et nous échappent quelque peu.

## 2. Cadres, registres et points de vue

### 2.1. Notions de cadre

Le cadre est « *constitué des objets d'une branche mathématique, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations* » Douady (1996).

Le fonctionnement global d'un concept mathématique se fait à l'intérieur d'un (ou de plusieurs) cadre(s) mathématique(s).

Un même concept mathématique est amené à fonctionner dans différents cadres<sup>4</sup>. Chacun de ces cadres détermine un environnement conceptuel et technique spécifique qui y caractérise le fonctionnement du concept. Le mathématicien, dans son activité de résolution de problèmes, a recours à des changements de cadres. Il effectue un changement de cadres pour un problème donné, à chaque fois qu'il le transporte d'un cadre à un autre. La traduction du problème d'un cadre dans un autre permet de le poser autrement :

*« Le changement de cadres est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui, sans être nécessairement équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et de technique qui ne s'imposaient pas dans la première formulation. [...] Quoi qu'il en soit, les traductions d'un cadre dans un autre aboutissent souvent à des résultats non connus, à des techniques nouvelles, à la création d'objets mathématiques nouveaux, en somme à l'enrichissement du cadre origine et des cadres auxiliaires de travail. »* (ibid., p.11).

L'introduction en didactique des mathématiques de cette notion de cadre est due à Douady (1986) qui s'interroge sur l'activité du mathématicien dans un souci didactique. De son analyse épistémologique, il ressort que « une part importante de l'activité du mathématicien consiste à poser des questions et à résoudre des problèmes » et, de cette activité, elle retient deux points en particulier « le double statut de tout concept mathématique (statut outil / objet) ».

<sup>4</sup> Algébrique, numérique, graphique, fonctionnel ... etc.

## 2.2. Le statut « outil / objet » des concepts mathématiques

Le mathématicien résout les problèmes à l'aide d'outils mathématiques. Ces outils sont généralement implicites au départ, c'est-à-dire qu'ils correspondent à une procédure qui se justifie par un concept en cours d'élaboration, ils deviennent ensuite explicites. Ils correspondent alors à la mise en œuvre intentionnelle d'un concept pour résoudre le problème. Peu à peu, et pour les besoins de la transmission à la communauté scientifique, les outils mathématiques ainsi créés sont décontextualisés, formulés de la façon la plus générale possible. Le concept acquiert alors le statut d'objet et va pouvoir s'intégrer au corps des connaissances déjà constituées.

Une distinction des statuts outil et objet d'un même concept se réfère à la précision suivante basée sur la théorie de l'équilibration de Piaget: *« un concept est outil lorsque l'intérêt est focalisé sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème ou poser des questions. [...] un concept est objet lorsqu'il est considéré d'un point de vue culturel, qu'il a une place dans l'édifice structuré des connaissances d'un moment reconnues socialement »* (Douady, 1986 ; Perrin-Glorian, 1989, p. 388) ».

Dans ses travaux, Douady développe cette distinction pour un concept mathématique entre son caractère outil et son caractère objet.

Outil : un concept est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un élève, en activité mathématique, peut recourir à un outil de manière implicite ou explicite.

Objet : « le concept mathématique considéré comme objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement » ;

Selon elle, un concept joue souvent le rôle d'outil implicite avant de devenir un objet du savoir constitué. Un concept peut être mobilisé en général dans plusieurs cadres (physique, géométrique, graphique) entre lesquels s'établissent des correspondances, numériques, graphiques... qui peuvent être des moteurs de la progression du savoir.

D'où les notions de dialectique « outil/objet » et de jeux de cadres sur lesquelles se fonde la structure « Activité – Institutionnalisation - Exercices » que construit Douady.

L'utilisation d'une notion mathématique dans la résolution d'un problème ou exercice peut concerner

- soit une notion déjà introduite en cours (outil explicite),
- soit une notion pas encore introduite en cours (outil implicite).

Dans cette structure, l'élève est confronté, dans une première étape, à un problème pour lequel la mise en œuvre d'un objet connu comme outil explicite permet d'engager une procédure de résolution mais ne permet pas d'aboutir. Au cours d'une phase d'action, il va donc mettre en œuvre implicitement de nouveaux outils, pour tenter de résoudre le problème posé. L'intégration de ces outils nouveaux aux savoirs anciens s'effectue au cours d'une seconde étape, dans des processus dialectiques de formulation et de validation. La troisième étape est une phase d'explicitation au cours de laquelle certains éléments nouveaux sont identifiés comme objets de savoir. A ces trois étapes qui constituent le pôle «activités» de la structure s'ajoutent nécessairement, pour des raisons d'efficacité, une phase d'institutionnalisation et une phase «exercices» où l'élève a l'occasion de faire fonctionner et de mettre à l'épreuve les nouvelles connaissances acquises. Dès lors, celles-ci sont susceptibles de jouer le rôle d'ancien à appliquer, transformer ou réorganiser dans un nouveau cycle de la dialectique outil-objet.

### 2.3. Les registres

La notion de registre sémiotique introduit par Duval (1993) est associée à l'hypothèse que la conceptualisation mathématique passe par la capacité d'identifier un concept dans diverses représentations sémiotiques et qu'elle nécessite un travail spécifique sur l'articulation de ces registres.

Nous retiendrons principalement qu'il apparaît important de coordonner la notion de cadre avec celle de registre de représentation sémiotique au sens de Duval. Par rapport à la notion de registre, qui concerne plus particulièrement la façon de

travailler les différentes représentations symboliques associées à un concept, celle de cadre concerne globalement le fonctionnement d'un concept dans ses relations avec d'autres concepts du même cadre ou de cadres différents.

*« Un registre se détermine par rapport à un système sémiotique permettant de remplir les trois fonctions cognitives fondamentales. Un cadre se détermine par rapport à des objets théoriques, en l'occurrence des objets mathématiques. Il peut y avoir changement de cadre sans changement de registre et changement de registre sans changement de cadre, car un cadre peut exiger la mobilisation de plusieurs registres<sup>5</sup>. »* (Duval, 1996, p.357)

En plus de ces notions de cadre et registre, Duval souligne l'importance des activités de représentation, de vision et de visualisation qui présentent des fonctions cognitives dans la pensée mathématique.

La représentation et la visualisation sont au cœur de la compréhension des notions mathématiques. Selon Duval (1995), la visualisation peut être produite dans n'importe quel registre de représentation car elle fait référence à des processus liés à la perception visuelle puis à la vision. Chaque nouveau système sémiotique fournit des moyens de représentation et de traitement spécifiques pour le raisonnement mathématique. D'ailleurs, c'est pour cette raison qu'il les a appelés « registres de représentation ».

Ainsi, il y a plusieurs registres pour la représentation discursive et plusieurs systèmes pour la visualisation. Cela implique une interaction cognitive complexe sous-jacente à toute activité mathématique.

Du point de vue de l'apprentissage, toujours selon Duval, la visualisation qui demeure une modalité cognitive pertinente en mathématiques, ne peut pas être utilisée comme un moyen immédiat ou un processus évident pour la compréhension. Il rejoint l'idée de Piaget sur l'« intuition » qu'il considère un moyen de compréhension en liens étroits avec la représentation et la visualisation

---

<sup>5</sup> Des énoncés uniquement en langue naturelle, des formules littérales, des expressions algébriques, des graphiques, des figures ... et, à fortiori des représentations mixtes.

## 2.4. Les points de vue

L'idée de points de vue est à associer à des manières différentes d'aborder un problème mathématique, liées à des types de stratégies de portée variable. Plus flou que les cadres et registres, les points de vue permettent d'identifier différentes manières d'aborder la même propriété par exemple. Changer de point de vue pour faire une démonstration revient à adopter une certaine flexibilité (Gagatsis et al. 2010). Non seulement les mathématiciens font spontanément ces changements de points de vue, mais encore, ils savent bien que c'est une méthode générale de recherche.

Pour démontrer une égalité en arithmétique, en algèbre ou en analyse, on peut commencer par transformer le terme de gauche, ou celui de droite, ou transformer les deux, en montrant qu'ils sont égaux à un même troisième, ou en démontrant que leur différence est nulle ou de rapport égal à 1, ou en montrant que la valeur absolue de leur différence peut être rendue inférieure à n'importe quel réel positif donné : autant de points de vue enclenchant des stratégies différentes. De même lorsqu'on travaille sur différentes formes d'une expression algébrique, factorisée, développée, etc.

### 3) Notion de « Relief » d'une notion mathématique, « Niveaux de conceptualisation » et « Domaine de travail associé »

Robert introduit aussi « les *niveaux de conceptualisation* » d'une notion mathématique, en référence à une opérationnalisation de la conceptualisation et aux champs conceptuels de Vergnaud (1991), mais dans un sens plus modeste ; et elle introduit enfin plus récemment l'idée de « *relief* » d'une notion mathématique (Robert et al. 2012).

Il s'agit d'une étude épistémologique et mathématique de la notion mathématique, croisée avec une étude curriculaire et didactique, incluant les difficultés connues des élèves. L'étude du relief de la notion permet en particulier de définir différents domaines de travail de la notion, associés à différents niveaux de conceptualisation, conformes aux programmes d'enseignement. A l'instar des champs conceptuels qui sont des espaces de problèmes, les domaines de travail sont décrits par le corps des problèmes qui peuvent être résolus en leur sein (donc des tâches), en suivant des modes de raisonnements et des démarches caractéristiques du domaine, avec des fondements mathématiques et un niveau de rigueur spécifique, en utilisant un arsenal de définitions, théorèmes et propositions bien délimité (Robert, 2003).

Les niveaux de conceptualisation sont ainsi définis à partir des spécificités de la notion mathématique, à partir des programmes, en précisant les cadres (Douady, 1986) et les registres (Duval, 1995) à convoquer, et les niveaux de rigueur attendus (types de raisonnements, formalisme et démonstrations). Ils intègrent un ensemble d'activités mathématiques mettant en jeu la notion concernée, par la disponibilité des caractères objets et outils de la notion (Douady, 1986), associés aux mises en fonctionnement attendues sur des tâches caractéristiques du niveau. Cette disponibilité inclut l'organisation des connaissances impliquées, nouvelles et anciennes, toujours en référence à la notion de champ conceptuel (Vergnaud, 1991).

La conversion d'un niveau de conceptualisation visé (ou domaine de travail) en un ensemble d'activités mathématiques attendues pour les élèves n'a rien

d'automatique. Elle suppose un ensemble de tâches prescrites, associé à un déroulement prévu, concrétisé par un scénario, plus ou moins accessible mais qu'il convient d'apprécier, en termes d'itinéraire cognitif (suite d'activités attendues). Le lien avec les apprentissages des élèves n'est pas non plus transparent et suppose d'aller regarder jusqu'au niveau des réalisations en classes, c'est-à-dire les actions et les activités possibles des élèves, voire les activités effectives (mais inobservables), compte tenu des déroulements. Les analyses à ce niveau mettent en jeu un certain nombre de variables qui orientent l'élaboration d'indicateurs méthodologiques (Robert et Vandebrouck, 2014 ; Vandebrouck et Robert, 2017).

Ces variables tiennent à la fois

- à la qualité de l'introduction de la notion visée, compte tenu du relief de la notion et du niveau de conceptualisation visé, les relations et les proximités entre le nouveau et les connaissances anciennes déjà enseignées ou supposées disponibles ;
- à la quantité, la qualité, la variété et l'ordre précis des tâches prescrites aux élèves (exercices et problèmes), ainsi qu'à leur robustesse (elles sont plus ou moins déformables par les déroulements),
- aux dynamiques prévues entre ces tâches, les formes de travail et notamment les moments collectifs en classe (moments d'exposition des connaissances par exemple), en relation avec les difficultés connues des élèves,

#### 4) La notion d'ingénierie didactique

*« La notion d'ingénierie didactique a émergé en didactique des mathématiques au début des années 1980. Il s'agissait d'étiqueter par ce terme une forme du travail didactique : celle comparable au travail de l'ingénieur qui, pour réaliser un projet précis, s'appuie sur les connaissances scientifiques de son domaine, accepte de se soumettre à un contrôle de type scientifique mais, dans le même temps, se trouve obligé de travailler sur des objets beaucoup plus complexes que les objets épurés de la science et donc de s'attaquer pratiquement, avec tous les moyens dont il dispose, à des problèmes que la science ne veut ou ne peut encore prendre en charge ». (Artigue 1990, p. 283).*

« L'ingénierie didactique, vue comme méthodologie de recherche, se caractérise en premier lieu par un schéma expérimental basé sur des « réalisations didactiques » en classe, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement. [...] » (Ibid., p. 286)

L'ingénierie didactique est donc une situation d'enseignement élaborée par le chercheur, une forme du travail didactique semblable à celui de l'ingénieur : elle s'appuie sur les connaissances scientifiques de son domaine pour travailler sur des objets beaucoup plus complexes que les objets épurés de la science.

L'ingénierie didactique permet :

- une action sur le système d'enseignement, basée sur des études didactiques préalables.
- une mise à l'épreuve d'hypothèses ou de questions élaborées par la recherche par leur réalisation dans un système d'enseignement.

Elle a donc une double fonction : méthodologique, et productrice de questions didactiques nouvelles.

### 5) L'approche instrumentale (P. Rabardel 1995, 1999)

Après son introduction par Rabardel (1995), l'approche instrumentale a été introduite en didactique des mathématiques Guin et Trouche (2002) où elle a constitué un cadre riche pour l'étude de l'intégration de divers outils technologiques et informatiques (calculatrices, logiciel de calcul formel, logiciel de géométrie, tableurs).

D'après cette théorie, nos connaissances et activités dépendent des instruments qui sont mis en œuvre. Vygotsky (1985) affirme que les instruments constituent des formes qui médiatisent nos rapports à notre environnement et aux savoirs, ils ont une influence qui doit nécessairement être prise en compte.

Rabardel (1995) considère que les instruments sont subjectifs. Ils se construisent par le sujet à partir d'un artefact ou d'un ensemble d'artefacts, le mot artefact désignant les dispositifs matériels (calculatrice, ordinateur ou logiciel, livres, compas ...), mais aussi symboliques (langage, etc.) utilisés comme moyen d'action. L'approche instrumentale distingue l'artefact et l'instrument que cet artefact devient au service de l'activité d'un individu donné. La transition artefact-instrument se produit via une genèse instrumentale, en général complexe. Cette genèse met en jeu des processus d'instrumentalisation, dirigés vers l'artefact, et des processus d'instrumentation, dirigés vers le sujet. Ces derniers se traduisent par le développement de schèmes d'utilisation qui sont mobilisés lors de la résolution des tâches proposées au sujet. La construction des schèmes comporte une dimension collective, Rabardel (ibid.) parle alors de schèmes sociaux d'utilisation.

Un schème d'utilisation (SU) -d'un artefact- est un schème qui émerge par le processus d'instrumentation de la genèse instrumentale. Il est défini comme « *l'ensemble structuré des caractères généralisables des activités d'utilisation des instruments. Il permet au sujet d'engendrer les activités nécessaires à la réalisation des fonctions qu'il attend de l'usage de l'instrument* » (Rabardel 1999).

Les SU comportent deux dimensions :

- une *dimension individuelle*, propre à un sujet ;

- une *dimension sociale* car les SU, d'une part, se développent par un processus de conception dialogique entre l'usage et la conception de l'artefact et, d'autre part, font l'objet de processus sociaux de transmission.

Un instrument est donc formé de deux composantes : une partie de l'artefact ou un ensemble d'artefacts exploités par le sujet et un schème d'utilisation avec ses composantes privées et sociales. On peut ainsi dire que l'instrument est élaboré par le sujet au cours d'une genèse qui prend en compte l'artefact et les schèmes. La mise en œuvre de l'instrument consiste à mobiliser les deux processus d'instrumentation et d'instrumentalisation, tandis que sa construction consiste, tout d'abord, dans l'appropriation de l'artefact.

Sur le plan didactique, le développement d'un nouvel instrument suppose une réflexion, dans la durée, sur son impact sur le système déjà construit et sur la réorganisation de la reconstruction du système existant.

L'approche instrumentale utilisée dans la majorité des travaux de recherche s'intéressant à l'utilisation des nouvelles technologies en mathématiques, nous permet d'avoir un regard plus attentif quant à l'utilisation de l'outil informatique, en tenant compte à la fois de l'appropriation technique de l'outil et de son impact dans la construction de connaissances et la conceptualisation.

Dans l'objectif de penser les questions d'intégration d'artefacts informatiques à l'enseignement, Haspekian (2005) introduit la notion de distance instrumentale pour qualifier les décalages introduits par l'artefact informatique dans l'enseignement traditionnel. De manière générale, pour un artefact informatisé (calculatrice, logiciel dédié, tableur, etc.) utilisé pour enseigner des mathématiques, la distance instrumentale résulte de différents facteurs dont au moins les deux suivants (Artigue et Haspekian, 2007) :

- la transposition informatique, au sens de Balacheff : elle est génératrice de distance, dans le sens d'une plus ou moins grande transparence des objets définis dans les deux environnements, papier-crayon et informatique
- la légitimité institutionnelle et culturelle conférée par les programmes officiels et par le statut épistémologique de l'instrument : la distance instrumentale est consécutive de la considération des normes et valeurs de la culture de

référence (Artigue et Haspekian, 2007). Dès lors, la légitimité des artefacts issus de milieux professionnels est plus problématique que ceux, comme les logiciels de géométrie dynamique, à visée éducative.

## 6) La double approche des pratiques enseignantes

A. Robert et J. Rogalski ont élaboré une démarche théorique pour étudier les pratiques en classe, appelée « double approche (DA) »<sup>6</sup>, pour souligner le fait qu'elles imbriquaient des analyses des activités des élèves à des analyses des activités de l'enseignant liées à l'exercice du métier.

La double approche vise l'étude des pratiques du professeur, en lien bien sûr avec les activités des élèves mais à partir de l'étude de diverses formes de son activité dans diverses situations, en classe et pour la classe.

Elle s'appuie sur la théorie de l'activité dans laquelle est ancrée sur les deux notions clés de sujet et de situation. Elle différencie aussi tâche et activité, qui sont respectivement « du côté de la situation » et « du côté du sujet ». Elle permet aussi de questionner les phénomènes de diversité et l'influence des déterminants personnels dans l'activité et le développement des acteurs – ici spécifiquement les enseignants.

En effet, du point de vue de la psychologie ergonomique, c'est l'enseignant dont on considère l'activité réelle en tant que sujet cette fois et non sous l'angle de sa position dans le triangle didactique // savoir – élève - enseignant //.

En référence à « la double approche<sup>7</sup> » des pratiques enseignantes que nous présentons à la fin de ce cadre théorique nous ne tiendrons compte que de ses deux composantes : « cognitive » et « médiative » (c'est-à-dire qu'on ne s'intéresse pas aux composantes du métier) du fait que nous allons focaliser sur les activités des élèves et celles de l'enseignant en classe:

---

<sup>6</sup> Raccourci pour « double approche didactique et ergonomique » pour l'analyse des pratiques enseignantes.

<sup>7</sup> Les différentes composantes retenues pour caractériser les pratiques enseignantes dans le cadre de la double approche : Cognitive (en lien avec les choix de contenus), médiative (en lien avec les choix de déroulement), institutionnelle et sociale (en lien avec les programmes et autres contraintes) et personnelle (Robert & Rogalski 2002, Robert 2008a).

La **composante cognitive** traduit ce qui correspond aux choix de l'enseignant sur les contenus, les tâches, leur organisation, leur quantité, leur ordre, leur insertion dans une progression qui dépasse la séance, et les prévisions de gestion pour la séance. Elle renseigne donc sur l'itinéraire cognitif choisi par l'enseignant.

Les choix correspondants aux déroulements, les improvisations, les discours, l'enrôlement des élèves, la dévolution des consignes, l'accompagnement des élèves dans la réalisation de la tâche, les validations, les expositions de connaissances, incrémentent la **composante médiative**. Elle renseigne sur les cheminements organisés pour les différents élèves.

## B. Problématique

Ce cadre théorique nous permet maintenant de revenir sur notre questionnement initial :

Nous souhaitons faire travailler la notion de continuité des fonctions aux élèves de 3<sup>ème</sup> année en fin du cycle secondaire pour mieux les préparer à l'université. Nous devons donc tout d'abord définir un domaine de travail associé à un niveau de conceptualisation visé pour les élèves, tenant compte des programmes, des manuels, voire des pratiques dans la mesure du possible. Cela signifie que nous devons mener une étude du relief de la notion de continuité, c'est-à-dire une étude historique, épistémologique, curriculaire et didactique de la notion. Nous verrons très vite que la définition d'un niveau de conceptualisation visé ne peut pas être envisagée sans discuter des paradigmes de l'analyse, que nous n'avons pas introduits dans notre cadre théorique car ils sont très spécifiques de la notion en jeu (la continuité).

La première question est donc : quels sont les niveaux de conceptualisation de la notion de continuité (en lien avec les paradigmes de l'analyse notamment) et surtout quel niveau de conceptualisation peut-être attendu dans le cadre du programme – compte tenu aussi du manuel et des pratiques ordinaires ? Le relief de la notion sera étudié en chapitre IV. Il s'agira d'en extirper des tâches emblématiques, avec les activités élèves associées (reconnaisances, organisations et traitements), que l'on souhaite faire développer aux élèves à ce niveau d'enseignement. Ces tâches peuvent être regroupées en un corps de problèmes que l'on souhaite que les élèves puissent résoudre, en suivant des modes de raisonnements spécifiques que l'on doit décrire et des démarches caractéristiques. Nous devons en particulier préciser les cadres et les registres qui seront en jeu et ce que l'on attend des élèves en termes de changements de registres ou de cadres. Les connaissances qui doivent être disponibles ou seulement mobilisables devront être pointées dans la mesure du possible, en même temps que les statuts outils et objet de ces connaissances. Concevoir la notion de continuité comme objet mathématique suppose d'en maîtriser une définition et d'être capable de le voir comme inséré dans une théorie où il intervient dans la constitution d'autres objets et

la validation de propriétés. Nous devons préciser dans nos analyses le statut outil/objet du concept de continuité dans les tâches et les activités proposées.

La deuxième question porte sur le volet ingénierie et enseignement avec le logiciel pour atteindre, ou du moins valider que les élèves sont sur la voie du niveau de conceptualisation visé (« entrent » dans ce niveau), même si on tient compte du fait que la conceptualisation est un processus très long, on se restreint donc à parler de niveau de conceptualisation pour rendre réaliste les objectifs de notre ingénierie. La question peut donc être formulée ainsi : quelle ingénierie didactique et quelles caractéristiques d'un enseignement et d'un logiciel favoriserait l'accès – un premier accès - des élèves au niveau de conceptualisation attendu ? (tâches, activités, aides et proximités de l'enseignant...) – cf. chapitre V. A travers le mot caractéristiques, nous considérons qu'il faut prendre en compte dans l'ingénierie (et donc dans le logiciel et l'enseignement associé) certaines avancées de la recherche antérieure sur ce sujet : nous pensons spécifiquement aux travaux de Robert avec la bande – qu'il s'agit cependant d'adapter puisque dans le cas de Robert, il s'agissait d'introduire la limite de suite - aux trois points de vues synthétisés par Trouche (cinématique, approximation et algébrique) et aussi à d'autres résultats de recherche qui émergeront de l'étude du relief (en particulier des travaux de Tall et Vinner et la notion de paradigme de l'analyse Standard de Kuzniak et al.). Nous devons également jouer sur les différents registres de représentations mais aussi sur l'aspect outil et objet de la continuité et de sa définition formalisée. Dans sa formulation, cette problématique tient aussi compte du fait que l'enseignant doit avoir un rôle fondamental étant donné la complexité de la connaissance en jeu, la continuité avec sa définition formalisée (aspect FUG de la définition formelle en particulier). C'est-à-dire qu'on ne peut espérer permettre à l'élève que des activités sur la notion de continuité, favorisant l'introduction de la définition formelle par le professeur sous forme de proximités et ainsi un premier accès au niveau de conceptualisation visé.

La question de l'intégration de cette ingénierie dans les pratiques ordinaires des enseignants, et la question des genèses instrumentales et des genèses d'usages du côté des enseignants – même si nous savons qu'elles ne doivent pas être minorées – ne sont pas développées dans le cadre de la thèse compte tenu de contrainte de

longueur et de temps. C'est dans cette partie notamment que la double approche des pratiques s'avèrerait pleinement utile. Ces questions sont plus prospectives et nous les repoussons pour l'instant dans la conclusion de la thèse.

Nos questions de recherche sont donc :

- 1) Quels sont les niveaux de conceptualisation de la notion de continuité (en lien avec les paradigmes de l'analyse notamment) et quel niveau de conceptualisation est attendu dans le cadre du programme – compte tenu du manuel et des pratiques ordinaires – (cf. chapitre IV) ?
- 2) Quelle ingénierie didactique et quelles caractéristiques d'un enseignement et d'un logiciel favoriseraient l'accès des élèves au niveau de conceptualisation attendu ? (tâches, activités, aides et proximités de l'enseignant...) – cf. chapitre V ?

Pour ce travail, nous avons donc défini les hypothèses suivantes :

- (H1)** : L'enseignement tel qu'il est conçu ne permet pas aux élèves de développer une conceptualisation du concept de continuité telle qu'on vient de la définir à l'issue du relief (notamment coordination graphique – algébrique - formel).
- (H2)** : En développant un outil informatique qui permet de mettre en fonctionnement la notion de continuité *comme outil et objet, dans les différents registres de représentation*, à la fois de façon cinématique (que nous appellerons dynamique dans le logiciel) et de façon formelle, et en connectant ces deux approches, on va permettre à l'élève des activités sur la notion de continuité, favorisant l'introduction de la définition formelle par le professeur sous forme de proximités et l'accès au niveau de conceptualisation visé.
- (H3)** : l'utilisation du logiciel favorise la mise en place par l'enseignant de proximités des 3 types (ascendantes, descendantes et horizontales). Ces proximités sont plus difficiles à faire par l'enseignant en classe ordinaire à partir des tâches proposées par le manuel.

L'ingénierie didactique que nous proposons est basée sur le logiciel « TIC\_Analyse » que nous avons conçu en prenant appui sur les résultats de l'étude

du relief sur la notion de continuité, en ce qui concerne les emplois de différents registres de représentation ; les tâches proposées aux élèves ; les types de fonctions en jeu mais aussi les paramétrages qui sont laissés à la charge de l'élève, permettant ainsi de favoriser le processus d'instrumentalisation de l'artefact logiciel par les élèves. Des pré-tests ont été réalisés pour accompagner la conception du logiciel.

Les étapes de notre ingénierie :

- Etude du relief sur la notion de continuité (épistémologique, didactique et curriculaire)
- Développement du logiciel « TIC\_Analyse »,
  - Implémentation des deux approches « cinématique » et « formelle », l'approche « algébrique » apparaissant à partir des formules des fonctions en jeu qui sont explicites ;
  - Accent sur les différents registres de représentation des fonctions (graphique, algébrique, numérique, formel) ;
  - Choix des fonctions sur le logiciel (directement importées des travaux de Tall & Vinner, mais celles qui sont conformes au programme et au manuel) ;
  - Choix des tâches avec les « bandes » (adaptations de l'ingénierie sur les limites de suites de Robert) ;
  - Favoriser les nombreuses occasions de proximités pour l'enseignant pour lier approche cinématique et approche formelle : par exemple le lien entre le  $\beta$  et le saut ;
  - Choix techniques et mathématique pour ne pas mettre en difficulté les élèves et les enseignants : éviter l'origine, variétés de « hauteurs de sauts »...
- Formation des enseignants qui vont se charger de l'expérimentation de notre ingénierie, une formation **technique** (prise en main du logiciel « TIC\_Analyse »), **didactique** (l'enseignement de la continuité : un nouveau concept à enseigner pour des élèves qui souffrent d'insuffisance en

connaissance de logique et théorie des ensembles) et **disciplinaire**, et *l'élaboration d'un projet de scénario didactique*,

- Expérimentation en classe,
- Analyse des données :
  - Traces d'activités des élèves dans le logiciel,
  - Enregistrements filmés de séances TIC + captures écran pour quelques binômes (3 classes),
  - Une classe ordinaire (enregistrement filmé)
  - Post test avec quelques exercices papier-crayon mettant en jeu le niveau de conceptualisation attendu (tâches du domaine de travail)

Dans l'ingénierie didactique que nous proposons, nous avons aussi tenu compte de la sensibilité à la distance entre pratiques ordinaires et pratiques avec les TICE (Abboud Blanchard, 2008) notamment au cours de la conception des scénarios pédagogique et didactique et nous avons essayé lors de la conception du logiciel « TIC\_Analyse » de réduire la distance instrumentale, par exemple :

- ✓ nous avons fait le choix de faire un environnement semi ouvert avec des tâches embarquées ; le mot « activité » dans le logiciel renvoie aux pratiques habituelles (ce sont des « tâches » pour le chercheur).
- ✓ Nous avons adopté les mêmes notations que le manuel scolaire en vigueur «  $\beta$  et  $\alpha$  » au lieu de «  $\varepsilon$  et  $\eta$  » même si cette dernière est la plus utilisée dans les ouvrages.
- ✓ Nous avons respecté les directives des programmes qui interdisent l'usage des symboles pour les quantificateurs universel et existentiel et nous nous sommes restreints aux usages de « pour tout » et « il existe ».

Le cadre théorique étant ainsi précisé, nous pouvons décrire notre méthodologie :

### C. Méthodologie de la recherche

(1) Passation de questionnaires (Cf. chapitre II et annexe)

- un premier pour les nouveaux étudiants et ce pour voir ce qu'ils retiennent de la notion de continuité,

- un deuxième pour les enseignants pour des classes de troisièmes années qui utilisent l'unique manuel scolaire mis à leur disposition pour analyser leurs choix didactiques, les contraintes et les difficultés rencontrées dans leurs pratiques enseignantes ainsi que leurs savoirs même sur le concept de continuité.
- (2) Etude du relief de la notion de continuité et précision du niveau de conceptualisation visé ainsi que le domaine de travail associé (chapitre IV)
- (3) Élaboration d'une ingénierie didactique et conception de l'application logicielle « TIC\_Analyse » (chapitre V)
- (4) Analyse *a priori* : étude des tâches proposées aux élèves (chapitre VI)
- Les tâches prescrites dans le manuel en rapport avec l'introduction de la définition formelle de la continuité,
  - Les tâches proposées par le logiciel « TIC\_Analyse » pour introduire la définition formelle ainsi que les exercices proposés.
- (5) Encadrement des enseignants qui vont se charger de l'expérimentation en classe : prise en main du logiciel « TIC\_Analyse », nous ne développons pas cette partie dans la thèse étant donné que nous avons choisi de ne pas nous disperser et ne pas aborder les pratiques enseignantes et les genèses instrumentales du côté enseignant.
- (6) Expérimentation de l'ingénierie et analyse à postériori : étude des déroulements, aides, proximités, analyse des post - tests (chapitres VII et VIII).
- (8) Résultats (confrontation, comparaison avec des pratiques ordinaires) - Conclusions, limites et perspectives de la recherche (chapitre IX).

Le schéma de la construction de l'ingénierie associée à la conception du logiciel :

