

Instabilité magnéto-elliptique

Sommaire

3.1	Introduction	99
3.2	Équations de la magnétohydrodynamique	102
3.3	Modèle numérique	108
3.4	Validations du modèle	112
3.5	Application à l'instabilité elliptique MHD	118
3.6	Expériences d'induction dans un cylindre	129
3.7	Dynamo synthétique expérimentale	137
3.8	Synthèse du chapitre 3 et publications	143

La plupart des objets astrophysiques (planètes, étoiles, galaxies...) ont un champ magnétique, généré soit par induction d'un champ externe, soit par mécanisme auto-entrenu, dit de dynamo. Jusqu'à présent, l'effet dynamo n'a été prouvé que pour deux forçages naturels : la *convection thermo-solutale* (Glatzmaier & Roberts, 1995b), hypothèse retenue dans la plupart des cas, et la *précession* (Tilgner, 2005), un forçage purement mécanique qui pourrait exciter une dynamo dans certaines planètes ou lunes (Malkus, 1968) en dépit d'une célèbre controverse sur sa viabilité énergétique. En effet, cette hypothèse a été sévèrement critiquée dans les années 70 par Rochester *et al.* (1975) et Loper (1975) qui montrent qu'un écoulement de précession laminaire au sein du noyau terrestre dissiperait environ $O(10^7)$ W, ce qui est négligeable devant la puissance nécessaire pour maintenir la géodynamo, estimée à $10^{10}/10^{11}$ W. Plus tard, l'étude de Kerswell (1996) sur la puissance dissipée par un écoulement de précession turbulent lui permet d'établir qu'il est possible qu'un tel écoulement dissipe jusqu'à 10^{14} fois plus que l'écoulement laminaire. Kerswell conclut alors qu'il n'est en fait pas possible d'écarter la possibilité d'une telle dynamo sur des arguments purement énergétiques, comme l'avaient déjà remarqué Roberts & Gubbins (1987). Cependant, par défaut, la présence d'un champ magnétique sur un astre est généralement associée à la présence de convection thermo-solutale dans une couche fluide de l'astre. Ainsi, le champ magnétique terrestre est très probablement généré par les mouvements de convection thermo-solutale au sein du noyau conducteur liquide. Cependant, l'origine du champ magnétique sur la Terre primitive, la Lune, Ganymède

ou Mars est plus incertaine et motive l'étude de mécanismes dynamos alternatifs (Jones, 2003, 2011). La découverte récente de renversements rapides du champ magnétique sur l'étoile extra-solaire Tau-boo est également surprenante (Donati *et al.*, 2008; Fares *et al.*, 2009), et il a été suggéré un lien entre ces renversements et les effets de marées importants dus à la présence d'une planète très massive orbitant à très courte distance de Tau-boo (Fares *et al.*, 2009, 2010), ce qui mène également à réévaluer le modèle classique de dynamo convective. En effet, même si la dynamo est d'origine convective, le rôle des autres mécanismes de forçage peut être très important pour l'organisation de l'écoulement, et donc son efficacité dynamo.

Outre la convection et la précession, deux forçages mécaniques naturels ont également été proposés comme ingrédients importants pour les écoulements dans les noyaux, donc pour les champs magnétiques planétaires : la libration et les marées (e.g. Malkus, 1989). En effet, comme nous l'avons vu en section 2, ces deux forçages sont capables, via l'instabilité elliptique, de puiser de l'énergie dans le mouvement de rotation de la planète pour créer des mouvements tridimensionnels complexes. Jusqu'à présent, les simulations magnétohydrodynamiques de dynamos planétaires ou stellaires ont été menées en géométrie sphérique, ou plus récemment sphéroïdale, ce qui facilite et accélère le calcul, mais interdit le développement d'instabilité elliptique. Du fait des faibles déformations de marées, cette approximation a longtemps été adoptée. Cependant, l'instabilité elliptique est une instabilité paramétrique, et même une déformation infinitésimale peut mener à une modification de premier ordre de l'écoulement. Afin d'étudier ses conséquences MHD, nous avons donc développé les premières simulations numériques MHD dans un ellipsoïde fluide triaxial.

En section 3.1, après avoir introduit l'effet dynamo et son lien historique avec le champ magnétique terrestre, l'état de l'art est rapidement décrit. En section 3.2, les équations régissant la magnétohydrodynamique sont rappelées. Le modèle numérique est ensuite décrit en section 3.3, validé en section 3.4 puis utilisé en section 3.5 pour étudier la magnétohydrodynamique de l'instabilité elliptique. En section 3.6, une étude expérimentale MHD menée en collaboration avec W. Herreman est présentée. Cette étude en géométrie cylindrique permet notamment d'observer l'interaction d'un champ magnétique imposé avec la dynamique non-linéaire de l'instabilité elliptique en régime turbulent. Enfin, en section 3.7, un travail expérimental développé avec G. Verhille sur la dynamo synthétique d'instabilité elliptique est décrit et les premiers résultats obtenus analysés.

3.1 Introduction

3.1.1 Le champ magnétique terrestre et l'effet dynamo

Bien que les aimants soient connus depuis l'Antiquité, les premiers à les utiliser pour s'orienter sont les chinois, vers l'an 1000-1100 (Shu-hua, 1954; Needham & Lu, 1985). Le premier lien historique entre les aimants et l'existence d'un champ magnétique terrestre global n'apparaît que plusieurs siècles plus tard, en 1600, date à laquelle William Gilbert¹ publie *de Magno Magnete Tellure* (Du Grand Aimant de la Terre). Ce dernier propose d'assimiler la Terre à un aimant, expliquant ainsi le comportement des boussoles, que l'on pensait jusqu'alors attirées par l'étoile polaire ou par une grande île magnétique au pôle nord. Un siècle plus tard, Haley réalise les premières cartes du champ magnétique terrestre, montrant ainsi qu'il est principalement dipolaire comme les aimants. Enfin, Gauss prouve en 1839 que la source du champ magnétique terrestre se trouve à l'intérieur de la Terre, apportant une dernière confirmation à l'hypothèse de William Gilbert. Cependant, les travaux de Curie, au début du XX^{ème} siècle montrent qu'aucun aimant permanent ne peut exister aux températures et pressions du centre de la Terre : il faut donc trouver une autre explication. Une autre hypothèse, proposée par H. Lamb au XIX^{ème} siècle, suppose que des courants électriques, créés lors de la formation de la Terre, existent encore dans la Terre et créent le champ magnétique par induction. En effet, il est connu depuis les travaux d'Oersted en 1820 qu'un courant électrique crée un champ magnétique (De Vuyst, 1965). Supposant une conductivité électrique égale à celle du cuivre, Lamb (1883) montre que ces courants diminuent lentement par effet Joule, atteignant 37% de leur valeur initiale au bout de 10^5 ans. Or les études paléomagnétiques montrent que le champ magnétique existe depuis au moins 3 milliards d'années, voire 3,45 milliards d'années selon des travaux récents (Tarduno *et al.*, 2007, 2010). Le champ magnétique terrestre ne peut donc pas être une relique du passé et un mécanisme générateur de champ magnétique doit donc être trouvé. Ces études paléomagnétiques montrent également que l'orientation du champ magnétique terrestre s'est inversé dans le passé. En effet, Bernard Brunhes, directeur de l'observatoire du Puy de Dôme, découvre en 1905 que certaines roches mémorisant la direction du champ magnétique de la Terre indiquent clairement qu'autrefois une boussole aurait pointé non pas vers le Nord mais vers le Sud. A la même époque, le japonais Matuyama date diverses coulées de laves et conclut à l'existence d'inversions multiples à travers les temps géologiques. Leurs conclusions tombent dans l'oubli mais, à partir des années 50, et surtout suite à la publication retentissante de Vine & Matthews (1963), l'existence de séries d'inversions globales de l'orientation du champ magnétique terrestre s'est non seulement imposée mais s'est trouvée être au cœur de la confirmation de la théorie de la dérive des continents de Wegener. En effet, ces études mettent en évidence le phénomène de dérive des continents à partir de l'étude de la variation du champ magnétique terrestre enregistrée dans le plancher océanique, perpendiculairement à la dorsale (fig. 3.1). Ces mêmes études montrent que l'orientation du champ magnétique change de sens de manière chaotique, avec un temps moyen d'attente de 250 000 ans. La dernière inversion, nommée inversion Brunhes-Matuyama, s'est produite il y a 750 000 ans. De même, l'étude du magnétisme solaire montre que le champ à sa surface suit des cycles

1. Physicien anglais et médecin de la reine Élisabeth I^{re}.

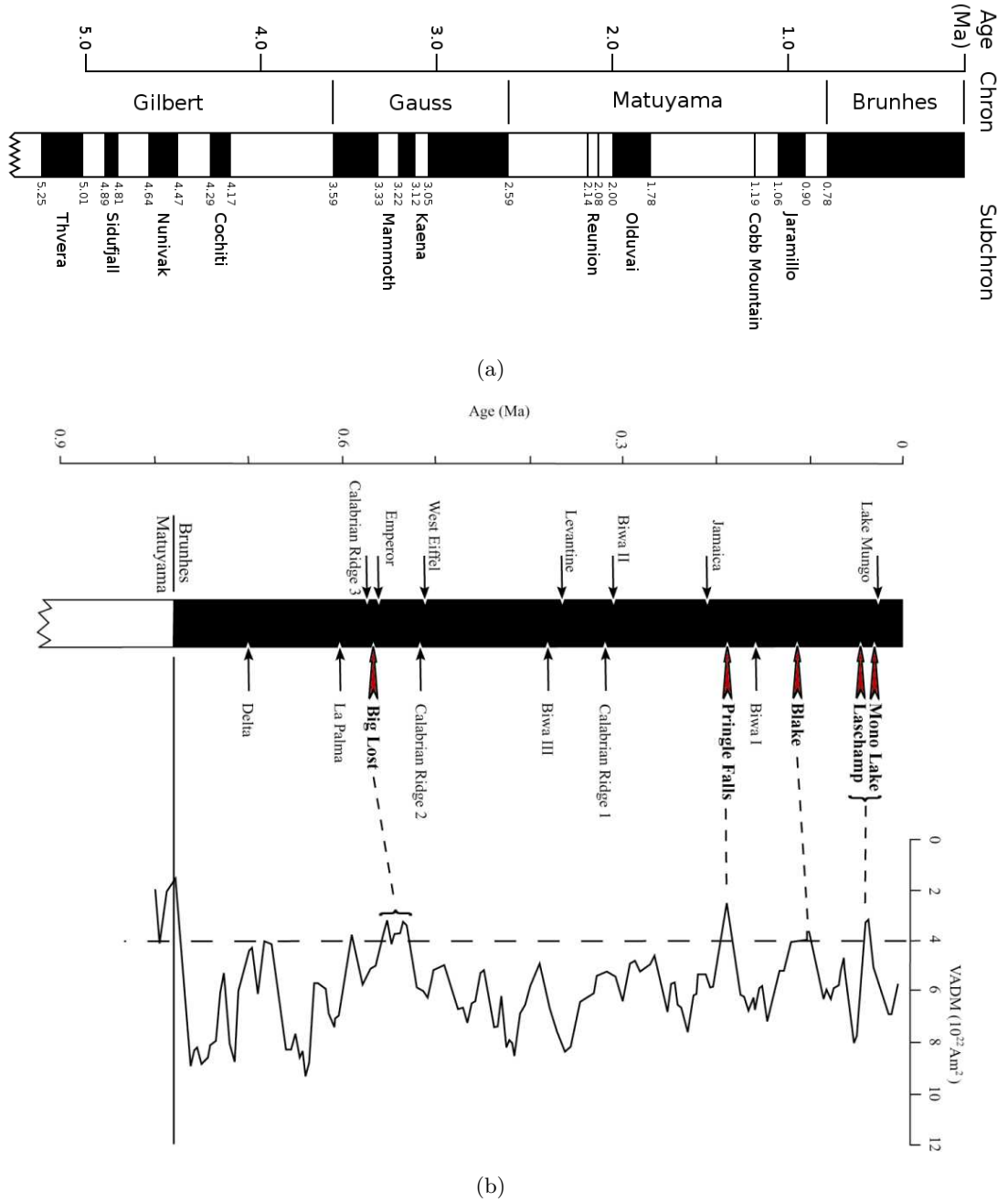


FIGURE 3.1 – Données paléomagnétiques (Source : U.S. Geological Survey Open-File Report 03-187). (a) Évolution temporelle de la direction du champ magnétique terrestre. Les périodes pendant lesquelles le champ magnétique terrestre ne s'inverse pas, appelées chrons, sont représentées par des plages noires (resp. blanches) lorsque sa direction est semblable (resp. opposée) à aujourd'hui. (b) Dates estimées des principales excursions géomagnétiques du chron de Bruhnes et corrélations possibles avec les variations du moment dipolaire axial virtuel estimées par Guyodo & Valet (1999a,b); Guyodo et al. (1999).

réguliers de 22 ans. Cherchant à expliquer ce phénomène, Larmor propose en 1919 que le champ magnétique terrestre provient des mouvements d'un fluide conducteur en son sein. En effet, R. D. Oldham a montré en 1906 à partir d'études sismologiques qu'une partie du noyau terrestre devait être liquide. Ce qui paraissait quelque peu improbable à l'époque, est aujourd'hui une certitude grâce aux études géophysiques menées depuis : la sismologie a confirmé que le noyau terrestre est en grande partie fluide, et la géochimie a prouvé qu'il était constitué de fer. Ce mécanisme de génération spontanée et entretenue d'énergie magnétique à partir de l'énergie cinétique du fluide est appelé *effet dynamo*. Cette appellation provient de l'abréviation de *machine dynamoélectrique*, terme désignant une machine à courant continu fonctionnant en générateur électrique. En effet, le noyau terrestre, comme ces machines, convertit une énergie mécanique en une énergie électromagnétique. Cependant, une différence fondamentale les distingue : du fait des températures et pressions en jeu, aucun aimant n'existe dans le noyau, ce qui impose que le courant électrique, généré par la combinaison d'un écoulement de fluide conducteur et d'un champ magnétique, doit servir à amplifier le champ qui lui a donné naissance. Un tel effet ne prend place que lorsqu'une perturbation de champ magnétique est plus advec-tée par l'écoulement qu'elle ne diffuse. Dans ce cas, si l'organisation tridimensionnelle de l'écoulement le permet, la perturbation croît exponentiellement au lieu de décroître exponentiellement par diffusion : c'est l'effet dynamo. La croissance du champ magnétique est alors stoppée lorsque le champ magnétique est assez fort pour rétroagir sur l'écoulement qui lui a donné naissance, et ainsi trouver une saturation.

3.1.2 L'effet dynamo : une étude récente

L'étude de cet effet se trouve au croisement entre la mécanique des fluides et l'électromagnétisme : on parle de magnétohydrodynamique (MHD). Dans ce cadre, l'effet dynamo correspond à une instabilité MHD, susceptible de se manifester pour certains écoulements dès lors que le rapport entre le terme source de champ magnétique et sa dissipation, i.e. le nombre de Reynolds magnétique, passe au-dessus d'une certaine valeur : c'est le seuil dynamo. L'étude de l'instabilité dynamo est complexe, et les premiers résultats obtenus, dus à Cowling (1934), sont des théorèmes anti-dynamo qui montrent que des symétries imposées peuvent empêcher la création de champ magnétique. Il faut attendre Bullard & Gellman (1954) qui mettent en évidence numériquement un effet dynamo dans une sphère en se basant sur les travaux pionniers de Elsasser (1946). En réalité, on découvrira plus tard que leurs résultats n'étaient pas convergés (e.g. Dudley & James, 1989). Les premiers exemples de dynamos sont en fait obtenus théoriquement un peu plus tard en ajoutant à un champ de vitesse fluide donné de l'intermittence spatiale (Herzenberg, 1958) ou temporelle (Backus, 1958). Quelques années plus tard, en s'inspirant de la dynamo théorique de Herzenberg (1958), Lowes & Wilkinson (1963, 1968) construisent à partir de solides conducteurs la première dynamo expérimentale², qui porte désormais leurs noms. Peu de temps après, de nouveaux écoulements théoriques capables d'exciter l'instabilité dynamo sont découverts : Lortz (1968), puis les célèbres dynamos de Roberts

2. Au sens entendu ici, i.e. sans utiliser aucun aimant permanent ou électro-aimant. Naturellement, les dynamos avec aimants (comme celles des bicyclettes) sont connues depuis plus longtemps puisque les premières dynamos de ce type ont été fabriquées par Henry Wilde (1868) et Zénobe Gramme (1869).

(1972) et Ponomarenko (1973). Ces deux derniers modèles théoriques mèneront aux premières dynamos expérimentales fluides, plusieurs dizaines d'années plus tard : en 1999, à quelques semaines d'intervalle, une dynamo de type Ponomarenko sera obtenue pendant quelques dizaines de secondes à Riga (Gailitis *et al.*, 2001) juste avant une fuite de sodium liquide qui stoppe net l'expérience, tandis qu'une dynamo de type Roberts sera obtenue à Karlsruhe (Stieglitz & Müller, 2001) pendant plusieurs heures. Pour donner une idée des contraintes pesant sur ce type d'expérience, l'ensemble du dispositif de Karlsruhe a nécessité cinq ans d'élaboration, coûté quelques sept millions d'euros et occupait trois étages d'un bâtiment dédié. Notons qu'un effet dynamo avait été suggéré pour expliquer les arrêts du réacteur à neutrons rapides Phénix en 1989 et 1990, ce qui en aurait fait la première réalisation indirecte de dynamo fluide. Cependant, les travaux de Alemany *et al.* (2000) sur le sujet ne vont pas dans le sens de cette hypothèse. Enfin, l'expérience VKS (Von Karman Sodium, collaboration ENS-Paris, ENS-Lyon et CEA-Saclay) a produit en septembre 2006 la première dynamo basée sur un écoulement libre et turbulent, créé par des disques tournants, et non pas contraint et imposé a priori à l'aide d'une tuyauterie (Monchaux *et al.*, 2007). C'est à ce jour la seule réalisation expérimentale de ce type de dynamo, dite *homogène*, même si des projets sont actuellement en cours, par exemple à l'université du Maryland, ainsi qu'à celle du Madison, aux États-Unis, ou à Dresden en Allemagne.

Du point de vue géophysique, l'étude de l'effet dynamo nécessite de comprendre l'écoulement complexe qui peut exister au sein du noyau terrestre. La première description de cet écoulement est donnée par Busse (1970) : la convection s'organise en une kyrielle de tourbillons dont les axes sont parallèles à l'axe de rotation de la Terre, désormais appelés *colonnes de Busse* ou de *Taylor-Busse* (voir section 1.3.1). Cet écoulement sera confirmé numériquement par Glatzmaier (1988). Il faudra encore une dizaine d'années pour que le code numérique soit étendu au problème complet, couplant température, écoulement fluide et champ magnétique. Après plus d'un an de calcul sur l'un des plus gros ordinateurs Cray de l'époque, Glatzmaier & Roberts (1995b) réussissent à produire un champ magnétique du même type que le champ terrestre, c'est-à-dire essentiellement dipolaire comme celui d'un aimant, approximativement orienté selon l'axe de rotation, et présentant parfois des inversions de polarité comme il en existe dans l'histoire de la Terre. Ces résultats encourageants ont été tempérés depuis : les codes numériques, même les plus récents, ne permettent pas d'atteindre les gammes de paramètres du noyau terrestre, et le lien entre leurs résultats et la réalité reste à expliciter.

3.2 Équations de la magnétohydrodynamique

Ces équations sont connues depuis un certain temps. En effet, les équations régissant le mouvement d'un fluide non-visqueux ont été données par L. Euler et J. d'Alembert (XVIII^{ème} siècle) avant d'être étendues aux fluides visqueux par Navier et Stokes (XIX^{ème} siècle). Quant à la partie magnétique, les équations fondamentales la régissant dans un milieu continu matériel ont été formulées par Maxwell (XIX^{ème} siècle).

3.2.1 Électromagnétisme des milieux continus

Cette section présente les équations fondamentales de l'électromagnétisme dans les milieux matériels continus. Une présentation relativement complète du sujet peut être trouvée dans l'ouvrage de référence de Jackson (1975).

3.2.1.1 Équations de Maxwell des milieux

Dans la matière, le champ électromagnétique est régi par des équations appelées *équations de Maxwell des milieux* :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (3.4)$$

Les deux premières équations, parfois appelées *équations aux sources*, traduisent respectivement que l'induction électrique d'une charge ponctuelle décroît avec le carré de la distance (formule de Green) et l'inexistence de charge ou monopôle magnétique. Notons que les équations de Maxwell sont linéaires vis-à-vis des sources, ce qui permet l'application du principe de superposition pour $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$. Les deux dernières équations, parfois appelées *équations intrinsèques des champs*, sont identiques à leur formulation dans le vide car elles sont indépendantes des sources des champs. Pour fermer ce système d'équations, des équations constitutives (phénoménologiques) doivent être ajoutées afin de lier $\mathbf{H}$ à $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ à $\mathbf{E}$ et $\mathbf{j}$ à $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$. Pour ce faire, le milieu considéré est souvent supposé linéaire, ce qui permet d'écrire :

$$\mathbf{D} = \bar{\bar{\epsilon}} : \mathbf{E}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{B} = \bar{\bar{\mu}} : \mathbf{H}, \quad (3.6)$$

où $:$ représente un produit tensoriel. Le milieu est souvent supposé homogène isotrope, et les tenseurs $\bar{\bar{\epsilon}}$ et $\bar{\bar{\mu}}$ peuvent alors être remplacés par le scalaire associé (multiplié par le tenseur identité). Ainsi, les équations de Maxwell dans un milieu linéaire homogène isotrope (LHI) s'écrivent donc :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon}, \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.10)$$

Ainsi, dans le cas des LHI, $\mathbf{D}$ et $\mathbf{H}$ ne sont qu'une écriture différente de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$, et les équations de Maxwell sont formellement équivalentes à leur formulation dans le vide. Notons que l'équation de conservation de la charge se déduit de l'équation (3.10) :

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial_t \rho_e. \quad (3.11)$$

La dernière équation constitutive permettant de fermer le système d'équations est la loi d'Ohm, liant $\mathbf{j}$ à $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$. Considérant un milieu conducteur à plusieurs porteurs de charges en mouvement à vitesse $\mathbf{V}$, la *loi d'Ohm généralisée* s'écrit (Kemp & Petschek, 1958; Sutton & Sherman, 1965; Parent *et al.*, 2010) :

$$\mathbf{j} = \sigma_e (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \underbrace{\frac{\beta_e}{\|\mathbf{B}\|} \mathbf{j} \times \mathbf{B}}_{\text{courant Hall}} + \underbrace{\frac{\beta_e \beta_i}{B^2} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}_{\text{courant de dérive des ions}} \quad (3.12)$$

avec σ_e la conductivité du milieu, β_e et β_i les paramètres de Hall des électrons et des ions, respectivement³. Dans les métaux, l'effet Hall est négligeable, et la MHD des métaux liquides considère donc la loi d'Ohm simplifiée $\mathbf{j} = \sigma_e (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$. Combinée avec l'équation de conservation de la charge (3.11), cette forme de la loi d'Ohm donne l'équation d'évolution de la charge :

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_e \quad (3.13)$$

3.2.1.2 Relations de passage, conditions aux limites

Dans le cadre d'une modélisation volumique de charges ou de courants, les champs électriques et magnétiques sont spatialement continus en tout point de l'espace. En revanche, des discontinuités peuvent apparaître lorsque la modélisation implique des interfaces. Dans ce cas, les équations de Maxwell imposent aux champs de vérifier certaines conditions, appelées relation de passage, lors du franchissement de ces interfaces. Ainsi, les équations fondamentales de Maxwell dans les milieux (3.7),(3.8),(3.9),(3.10) imposent qu'à l'interface entre un milieu 1 et un milieu 2, les champs vérifient

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j}_{ls}, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_{ls}, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (3.17)$$

où $\mathbf{n}_{12}$ est la normale à l'interface orientée de 1 vers 2, et $\mathbf{j}_{ls}$ et ρ_{ls} représentent respectivement la densité superficielle de courant libre, et la densité superficielle de charge libre, qui peuvent exister à l'interface séparant les deux milieux. Ainsi, la composante normale de $\mathbf{B}$ et la composante tangentielle de $\mathbf{E}$ sont continues au passage de l'interface, au contraire de la composante normale de $\mathbf{D}$ et de la composante tangentielle de $\mathbf{H}$ qui peuvent être discontinues.

Les relations de passage données ci-dessus sont les conditions aux limites naturelles de passage d'un milieu à un autre. Cependant, dans les simulations numériques basées sur des méthodes locales, des conditions doivent être imposées sur les bords du domaine numérique. En simulation numérique, ces conditions sont en général catégorisées en trois types : les conditions aux limites de type Dirichlet, Neumann et de type Robin. Ce dernier

3. En physique des plasmas, un terme supplémentaire est parfois ajouté pour tenir compte du gradient de pression des électrons. Généralement beaucoup plus petit que les autres termes, il est ici négligé.

type de condition sert en électromagnétisme à étudier les courants de surface au voisinage des matériaux très conducteurs, et l'interface est alors modélisée par une condition aux limites d'impédance (e.g. Zaglmayr, 2006). Ce type de conditions aux limites ne sera pas utilisé dans ce travail, et nous nous contentons donc de présenter les conditions aux limites de Dirichlet et Neumann usuelles.

Conducteurs électriques parfaits (ou supraconducteurs)

À l'interface avec un milieu de conductivité électrique infinie (supraconducteur), une couche limite de courant surfacique apparaît (e.g. Roberts, 1967). Les relations de passage montrent alors que le champ électrique au sein du supraconducteur doit être nul pour que le courant reste fini. La relation (3.14) montre alors que le milieu supraconducteur peut être remplacé par une condition aux limites de Dirichlet sur $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}_{12} = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

Notons que les relations de passage montrent également que le champ magnétique ne rentre pas dans le conducteur parfait. Ainsi, à l'interface, le champ magnétique est parallèle à l'interface et le courant électrique perpendiculaire à celle-ci.

Conducteurs magnétiques parfaits (ou conditions de pseudo-vide)

À l'interface avec un milieu de perméabilité magnétique infinie (ferromagnétique pur), le milieu ferromagnétique pur est remplacé par une condition aux limites de Dirichlet sur $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n}_{12} = \mathbf{0}. \quad (3.19)$$

Notons que cette relation peut être remplacée par la condition $\mathbf{H} \times \mathbf{n}_{12} = \mathbf{j}_{imp}$ si une distribution de courant $\mathbf{j}_{imp}$ est imposée sur l'interface.

Distribution de charges imposée

Si la distribution de charges sur l'interface est connue, la relation de passage (3.16) se réduit à une condition aux limites de Neumann sur $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_{12} = \rho_{ls} \quad (3.20)$$

3.2.1.3 Formulation en potentiels (vecteur et scalaire)

L'équation (3.8) implique que $\mathbf{B}$ dérive d'un potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$: $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. L'équation de Maxwell-Faraday (3.9) montre alors l'existence d'un potentiel scalaire $\phi(\mathbf{x}, t)$ vérifiant :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3.21)$$

Ainsi, l'équation de Maxwell-Ampère (3.10) s'écrit :

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}) + \sigma_e \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mathbf{j}_{ext} - \sigma_e \nabla\phi - \varepsilon \frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} \quad (3.22)$$

avec $\mathbf{j}_{ext}$ un éventuel courant électrique externe imposé. Notons que pour toute fonction scalaire ψ , les potentiels

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\psi, \quad (3.23)$$

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (3.24)$$

donnent les mêmes champs électrique et magnétique. En choisissant le potentiel vecteur $\mathbf{A}^*$ donné par

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \tilde{\phi} = \mathbf{A} + \int_{t_0}^{t_1} \nabla\phi \, dt, \quad (3.25)$$

le champ électrique est donné par $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}^*$ et $\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}^*$. Finalement l'équation (3.22) se réduit à l'équation :

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}^*) + \sigma_e \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}^*}{\partial t^2} = \mathbf{j}_{ext}, \quad (3.26)$$

uniquement fonction de $\mathbf{A}^*$. Une fois $\mathbf{A}^*$ déterminé, le champ électrique est donné par $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}^*$ et le champ magnétique est donné par $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}^*$. Les conditions aux limites vues en section 3.2.1.2 peuvent alors être formulées en terme de potentiel : par exemple, la condition aux limites de type supraconducteur s'écrit $\mathbf{A}^* \times \mathbf{n}_{12} = \mathbf{0}$ et la condition de pseudo-vide s'écrit $(\nabla \times \mathbf{A}^*) \times \mathbf{n}_{12} = \mathbf{0}$.

3.2.1.4 L'équation d'induction

Même si le système des quatre équations de Maxwell est à présent fermé, sa résolution en l'état est un problème extrêmement difficile. L'hypothèse d'une dynamique non-relativiste permet de le simplifier considérablement. En effet, la limite non-relativiste permet de négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction :

$$\frac{\|\varepsilon\mu\partial_t \mathbf{E}\|}{\|\nabla \times \mathbf{B}\|} \sim \frac{U^2}{c^2} \quad (3.27)$$

où U est la vitesse typique du milieu et c la vitesse de la lumière dans le milieu. L'équation (3.13) montre que cette approximation revient à ne considérer uniquement que des échelles de temps grandes devant le temps de relaxation des porteurs de charges. L'ensemble de ces hypothèses permet de ne considérer qu'une seule inconnue, à savoir le champ magnétique $\mathbf{B}$, défini de façon unique par son rotationnel et sa divergence :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B}, \quad (3.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.29)$$

où $\nu_m = 1/(\mu\sigma)$ est la diffusivité magnétique du fluide. La première équation résulte de l'ensemble des hypothèses précédentes, souvent regroupées sous le terme *approximation MHD*, et est appelée *équation d'induction*. Elle correspond à une équation de diffusion, avec un terme source $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$, et est invariante par changement de référentiel si le

référentiel est animé d'un mouvement solide à vitesse constante i.e. translation et/ou rotation à vitesse constante (e.g. Pétrélis, 2002). La formulation potentielle de l'équation d'induction s'obtient en négligeant les phénomènes propagatifs dans l'équation (3.26), qui s'écrit alors

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}^*) + \sigma_e \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} = \mathbf{j}_{ext}. \quad (3.30)$$

Une fois $\mathbf{A}^*$ et $\mathbf{B}$ obtenus, il est possible d'en déduire l'ensemble des autres grandeurs en jeu :

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B}, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\mu\sigma} \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad (3.32)$$

$$\rho_e = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = -\varepsilon \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (3.33)$$

Notons que ρ_e est la distribution de charges générées par le mouvement du milieu conducteur dans le champ magnétique : elle permet de conserver la charge, par compensation du champ électromoteur $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$.

3.2.2 Équation du mouvement

Pour les fluides conducteurs, la force de Laplace doit être ajoutée à l'équation de Navier-Stokes considérée en section 2 :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + E \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\mu\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \mathbf{f}, \quad (3.34)$$

où $\mathbf{f}$ correspond aux forces massiques éventuellement présentes : pesanteur, flottabilité, force de Coriolis, accélération de Poincaré, etc. Notons que la force de Laplace peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) + \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}. \quad (3.35)$$

Le premier terme correspond à la pression magnétique, isotrope, tandis que le second est un terme de tension anisotrope. Notons que la pression magnétique $p_m = B^2/(2\mu)$ est associée à un réseau d'ondes, dites d'Alfvén, qui se propagent à la vitesse d'Alfvén $c_A = \sqrt{2p_m/\rho}$. Ces ondes de pression magnétique sont l'analogue des ondes acoustiques qui se propagent à la vitesse $c_s = \sqrt{\gamma p/\rho}$ pour un polytrope d'indice γ .

Enfin, le rapport entre la force de Laplace et la force de Coriolis (resp. le terme d'inertie) définit le *nombre d'Elsasser* $\Lambda = \sigma_e B^2/(\rho\Omega)$ (resp. le *paramètre d'interaction* $N = \sigma_e L B^2/(\rho U)$), analogue du nombre d'Ekman (resp. de l'inverse du nombre de Reynolds) pour les forces visqueuses.

3.2.3 L'effet dynamo : une instabilité MHD

L'évolution du champ magnétique est régie par l'équation d'induction obtenue en section 3.2.1.4 :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B} + \nu_m \Delta \mathbf{B} \quad (3.36)$$

car $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ et $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Dans cette équation, le terme $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B}$ représente l'advection du champ magnétique par l'écoulement, $\nu_m \Delta \mathbf{B}$ la diffusion du champ magnétique, et $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u}$ est un terme source lié à l'organisation de l'écoulement. Afin de comparer le terme source et le terme diffusif, on utilise le nombre de Reynolds magnétique $Rm = UL/\nu_m$, rapport entre les ordres de grandeurs de ces deux termes (U et L étant respectivement une vitesse et une longueur typique). Pour certains écoulements, lorsque Rm est supérieur à une certaine valeur appelée nombre de Reynolds magnétique critique Rm_c , un champ magnétique peut être créé par le champ de vitesse, résultant d'une conversion de l'énergie cinétique de l'écoulement en énergie magnétique : cette instabilité MHD est l'effet dynamo. Les conditions nécessaires pour qu'un écoulement mène à un effet dynamo, i.e. pour qu'il soit *dynamogène*, sont encore mal caractérisées en dépit de nombreux travaux sur le sujet. Notons que l'invariance de l'équation d'induction par changement de référentiel en mouvement solide à vitesse constante, déjà notée en section 3.2.1.4, permet de choisir avec pertinence le référentiel à utiliser pour résoudre l'écoulement fluide sans modifier le champ magnétique dynamo et sa croissance (e.g. Pétrélis, 2002).

Le nombre de Reynolds hydrodynamique Re est relié au nombre de Reynolds magnétique par le Prandtl magnétique $Pm = \nu/\nu_m$, rapport de la viscosité cinématique du fluide à la diffusivité magnétique : $Rm = Pm Re$. Ce nombre dépend uniquement du matériau conducteur considéré, et vaut typiquement 10^{-6} pour les métaux liquides. Le nombre de Reynolds magnétique critique étant en général entre 10 et 10^4 (Christensen & Aubert, 2006; Tilgner, 2005; Wu & Roberts, 2009), les écoulements de métaux liquides susceptibles d'engendrer un champ dynamo sont nécessairement turbulents. Il est aussi possible de jouer sur Pm en utilisant des matériaux différents. Ainsi, l'expérience MPDX (pour *Madison Plasma Dynamo Experiment*), du groupe de Cary Forest, utilise des plasmas conducteurs, avec un Pm dix fois plus grand que ceux des métaux liquides.

3.3 Modèle numérique

3.3.1 Méthodes locales pour les simulations MHD

Depuis le travail pionnier de Glatzmaier & Roberts (1995a,b, 1996b), les simulations numériques ont permis de détailler de plus en plus précisément comment un mécanisme dynamo pouvait générer un champ magnétique au sein d'une coquille sphérique. Ces premières simulations numériques considéraient un fluide incompressible sous l'hypothèse de Boussinesq : on parle alors parfois de *codes géodynamos*. Par la suite, ces simulations ont été étendues aux fluides compressibles sous l'hypothèse anélastique (Glatzmaier & Roberts, 1996a,c, 1997), plus légitime (voir Anufriev *et al.*, 2005, pour une discussion sur ces deux approximations), en particulier pour les dynamos stellaires. À présent, il existe un certain nombre de codes géodynamos (voir par exemple Christensen *et al.*, 2001, pour

une description et une comparaison des différents codes géodynamo existants), ainsi que quelques codes MHD anélastiques tels que ASH, pour *Anelastic Spherical Harmonic* (e.g. Brun *et al.*, 2004), ou le code de l'université de Leeds. De nombreuses comparaisons des résultats numériques obtenus avec les mesures, principalement terrestres, ont été faites pour confirmer la pertinence de ces simulations (e.g. Dormy *et al.*, 2000, pour une revue). Certains aspects clés tels que l'aspect dipolaire du champ, la dérive vers l'Ouest du champ ou des renversements occasionnels sont retrouvés par la plupart des codes. Cependant, du fait du coût de calcul important, les paramètres adimensionnels utilisés dans les simulations sont très différents des valeurs réalistes estimées dans les noyaux planétaires (Busse, 2002). Afin de se rapprocher des valeurs réelles, les codes numériques sont donc optimisés et massivement parallèles. Généralement, ces simulations numériques MHD exploitent l'hypothèse de géométrie sphérique en utilisant des méthodes spectrales, rapides et précises. Cependant, les communications globales alors requises (e.g. Clune *et al.*, 1999) rendent ces méthodes difficiles à paralléliser. Depuis le travail précurseur de Kageyama & Sato (1997) utilisant les différences finies, quelques études ont été menées avec des méthodes locales, plus facilement adaptables aux architectures parallèles : les éléments finis ont été utilisés (Chan *et al.*, 2001; Matsui & Okuda, 2004*a,b*, 2005), de même que les volumes finis (Hejda & Reshetnyak, 2003, 2004; Harder & Hansen, 2005) ou les éléments spectraux (Fournier, 2004; Fournier *et al.*, 2005). Même si toutes ces études ont été menées en géométrie sphérique, les méthodes locales ont l'avantage de pouvoir simuler des géométries plus complexes telle que des ellipsoïdes triaxiaux. Notons que c'est un point crucial, car jusqu'à présent, tous les codes dynamo existants basés sur des méthodes spectrales sont limités à des géométries axisymétriques, au mieux sphéroïdales ou des géométries cylindriques (Wu & Roberts, 2009; Nore *et al.*, 2011).

3.3.2 Équations MHD résolues

Nous considérons un volume fini de fluide conducteur de viscosité cinématique ν , densité ρ , diffusivité magnétique ν_m et conductivité électrique γ , en rotation à la vitesse angulaire typique Ω au sein d'un conteneur rigide de taille typique R . Avec R comme échelle de longueur, Ω^{-1} comme échelle de temps, et $\Omega R\sqrt{\rho\mu_0}$ comme échelle de champ magnétique, où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, les équations MHD non-relativistes s'écrivent

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + E \Delta \mathbf{u} - 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_{\text{tot}}, \quad (3.37)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_{\text{tot}}) + \frac{1}{Rm} \Delta \mathbf{B}, \quad (3.39)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.40)$$

où $(\mathbf{u}, p, \mathbf{B})$ sont respectivement la vitesse, la pression et le champ magnétique, $\mathbf{B}_{\text{tot}} = \mathbf{B} + \mathbf{B}_0$ est le champ magnétique total tenant compte d'un possible champ constant et uniforme $\mathbf{B}_0$ qui représente le champ externe imposé dans les problèmes d'induction. Les nombres sans dimension sont le nombre d'Ekman $E = \nu/(\Omega R^2)$, et le nombre de Reynolds magnétique $Rm = Pm/E$, où $Pm = \nu/\nu_m$ est le nombre de Prandtl magnétique.

Dans ce travail, une condition d'adhérence est systématiquement utilisée pour le fluide. Notons qu'une force de Coriolis $-2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$, où $\boldsymbol{\Omega}$ est le vecteur rotation du référentiel considéré, est introduite ici de façon générale, et sera utilisée en section 3.4.3. Une fois le champ magnétique résolu, le système d'équations de Maxwell permet d'en déduire la densité de courant électrique de conduction $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}/\mu_0$ et la distribution de charges $\rho_e = -\epsilon \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$, où ϵ est la permittivité électrique du fluide.

Généralement, les simulations MHD des intérieurs fluides planétaires exploitent la géométrie sphérique avec des méthodes spectrales. Dans notre cas cependant, l'étude de l'instabilité elliptique impose une géométrie non-axisymétrique. Nos calculs sont donc menés avec une méthode standard éléments finis. Cependant, résoudre le champ magnétique avec des méthodes locales soulève certaines difficultés. Dans la communauté utilisant les éléments finis, les simulations MHD sont souvent menées avec une formulation en terme de potentiel vecteur magnétique $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ (e.g. Plunian & Masse, 1996; Soto *et al.*, 1998; Matsui & Okuda, 2005), ce qui permet de s'assurer que le champ magnétique reste à divergence nulle à chaque instant. Utilisant le potentiel vecteur $\mathbf{A}^*$ défini en section (3.2.1.3), et omettant l'exposant $*$ par la suite, les équations (3.39-3.40) sont donc remplacées par

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_{\text{tot}}) + \frac{1}{Rm} \Delta \mathbf{A}, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{B}_{\text{tot}} = \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{B}_0 = \mathbf{B} + \mathbf{B}_0. \quad (3.42)$$

Naturellement, les deux équations MHD (3.39, 3.40) peuvent être retrouvées à partir des équations (3.41-3.42). L'absence de jauge, généralement introduite dans la formulation potentielle (e.g. Matsui & Okuda, 2005), interdit la présence de domaine purement isolant. En effet, dans ce type de domaine, le champ électrique est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ (e.g. Guermond *et al.*, 2007). Cela impose d'utiliser la variable supplémentaire ϕ , multiplicateur de Lagrange permettant d'assurer la jauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. La variable ϕ joue alors le même rôle que la pression pour un champ de vitesses incompressible ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$). Par conséquent, nous ne pouvons pas avoir de matériau parfaitement isolant dans nos simulations. Afin d'éviter le recours à une jauge ϕ , nous modélisons donc de tels matériaux par des domaines très faiblement conducteurs en comparaison de la conductivité des domaines devant être conducteurs⁴.

3.3.3 Conditions aux limites

La nature non-locale des conditions aux limites magnétiques est un problème de longue date dans les modèles numériques dynamos. En général, avec les méthodes spectrales, le raccordement à la paroi du champ magnétique induit avec un champ extérieur potentiel est imposé analytiquement. Cependant, les méthodes locales mettent en exergue le conflit entre la discrétisation locale et les conditions à l'infini de décroissance des conditions aux limites magnétiques naturelles. Comme le rappellent Iskakov *et al.* (2004), différentes solutions ont été proposées dans la littérature pour résoudre ce problème : (i) la condition aux limites de pseudo-vide $\mathbf{n} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, qui est une condition locale représentant par exemple un domaine extérieur fait d'un conducteur magnétique parfait, a été utilisé par

4. Notons que dans le cas d'un problème stationnaire, COMSOL permet d'imposer une jauge.

Kageyama & Sato (1997) et Harder & Hansen (2005) ; (ii) l'immersion du domaine fluide confiné au sein d'un domaine plus large où le problème magnétique est également résolu a été utilisé par Chan *et al.* (2001) en résolvant le champ magnétique, et amélioré par Matsui & Okuda (2004*a,b*) avec une formulation en potentiel vecteur ; (iii) la combinaison de méthode locale avec une méthode d'intégrales de frontières (BEM) a été introduite par Iskakov *et al.* (2004) en couplant une méthode volumes finis avec une méthode BEM (voir aussi Giesecke *et al.*, 2008, 2010, à ce sujet).

De même que Matsui & Okuda (2004*a,b*), nous choisissons les solutions (i) ou (ii), selon le problème considéré. Quand la solution (ii) est utilisée, nous imposons sur une paroi sphérique externe distante la condition magnétique $\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$, qui correspond à $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$.

3.3.4 Méthode numérique

Pour résoudre le problème MHD complet, nous utilisons, comme précédemment pour le problème hydrodynamique, le logiciel commercial COMSOL Multiphysics®. Pour les variables fluides, l'élément de maillage utilisé est l'élément standard de Lagrange $P1 - P2$, linéaire pour la pression et quadratique pour le champ de vitesses. Les éléments de Lagrange sont des éléments nodaux, bien adaptés pour résoudre le champ de vitesses. Cependant, comme le rappellent Hesthaven & Warburton (2004), l'utilisation de ce type d'élément dans une approche standard de type éléments finis continus nodaux de Galerkin peut générer des solutions parasites non-physiques (e.g. Sun *et al.*, 1995; Jiang *et al.*, 1996, pour une revue). Leur origine admet différentes interprétations telles qu'une mauvaise représentation du noyau de l'opérateur impliqué (e.g. Bossavit, 1988) ou la génération de solutions parasites violant les conditions de divergence, qui ne sont typiquement pas imposées directement (Paulsen & Lynch, 1991). Une autre difficulté émerge dans le cas où l'interface entre un milieu conducteur et un milieu isolant n'est pas lisse : la composante singulière de la solution peut alors ne pas être calculée (voir le lemme de Costabel, 1991). Finalement, des difficultés apparaissent également sur le couplage des champs au travers d'une telle interface. Une première façon de résoudre ces problèmes est de développer des méthodes spécifiques permettant de continuer à utiliser des éléments nodaux, telles que par exemple les méthodes de pénalisation Galerkin discontinue (e.g. Guermond *et al.*, 2007, pour des applications MHD). Une seconde approche consiste à construire des éléments adaptés à l'opérateur considéré. Un travail pionnier de Bossavit (1988, 1990) montre que l'utilisation des éléments conformes de l'espace⁵ $H(\mathbf{rot})$ contruits par Nédélec (1980, 1986) permet de résoudre le problème des modes parasites et rend le couplage des champs naturel. Les méthodes éléments finis basées sur ce type d'éléments conformes (voir Bossavit, 1994, 2008, pour plus de détails), aussi appelés éléments d'arête de Nédélec (ou vectoriel), constituent à présent l'approche dominante pour résoudre les problèmes électromagnétiques avec des géométries complexes (e.g. Jin *et al.*, 1993; Volakis *et al.*, 1998). Un avantage important des éléments d'arête est d'assurer la continuité des composantes tangentielles du champ à travers une interface entre deux milieux, tandis que les

5. Pour plus de détails sur ces éléments et les espaces vectoriels associés tels que $H(\mathbf{div})$ et $H(\mathbf{rot})$, espaces pertinents en électromagnétisme, se reporter à Dautray & Lions (1985) ou Girault & Raviart (1986).

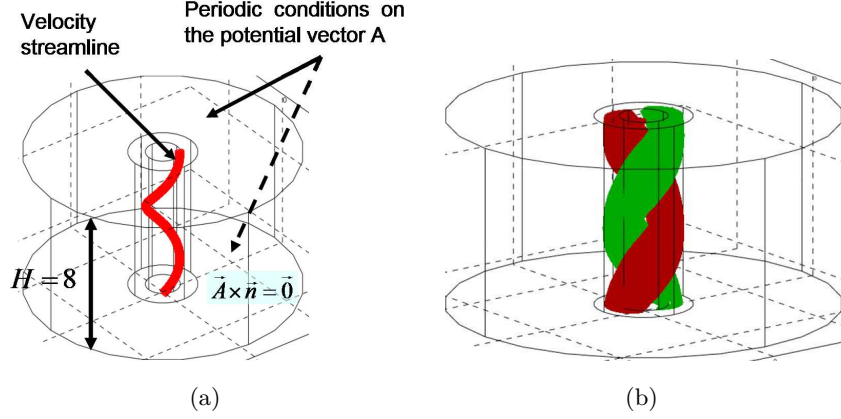


FIGURE 3.2 – (a) Schéma du problème du type Ponomarenko résolu numériquement. Dans le domaine $r \leq 1$, l'écoulement hélicoïdal (3.43) est imposé, dans le domaine $r \in [1; 2]$ le fluide est au repos, et le domaine $r \in [2; 8]$ est considéré comme isolant. (b) Iso-surface de la composante axiale du champ magnétique pour 25 % du champ maximum (rouge) et 25 % du champ minimum (vert) pour $R_m = 20$.

composantes normales du champ sont libres de s'inverser au passage de l'interface, ce qui est une propriété typique des problèmes électromagnétiques (voir aussi Monk, 2003, pour plus de détails). Cela implique aussi que le rotationnel du champ vectoriel est une fonction intégrable, ce qui rend ces éléments bien adaptés pour des équations comportant un rotationnel, telles que les équations régissant un potentiel vecteur. Dans ce travail, l'élément de maillage utilisé pour le potentiel vecteur magnétique est donc un élément d'arête de Nédélec, linéaire ou quadratique selon le problème considéré. Le nombre de degrés de liberté (DoF) utilisé dans la plupart des simulations se situe entre $5 \cdot 10^4$ DoF pour les dynamos cinématiques et $8 \cdot 10^5$ DoF pour les problèmes MHD complets avec un nombre de Reynolds magnétique autour de 10^3 . Jusqu'à présent, le logiciel commercial COMSOL Multiphysics® n'était pas parallèle, et toutes les simulations ont donc été menées sur une unique station de travail avec 96 Go de RAM, et deux processeurs Intel® Xeon® E5520 (2.26 GHz, 8MB Cache). Notons cependant que la version de COMSOL Multiphysics® qui sera délivrée durant l'été 2011 devrait permettre des calculs parallèles et nous espérons pouvoir accéder alors à une puissance de calcul significativement supérieure.

3.4 Validations du modèle

3.4.1 Une dynamo cinématique de type Ponomarenko

Nous considérons dans cette section une configuration de type Ponomarenko, qui est une célèbre dynamo cinématique. Dans sa formulation originale, Ponomarenko (1973) considère l'écoulement d'un fluide électriquement conducteur au sein d'un cylindre de rayon R , immergé au sein d'un milieu conducteur au repos. L'écoulement est un écoule-

ment de vissage de solide rigide, défini en coordonnées cylindriques (r, θ, z) par

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega r \\ R_b \Omega R \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

où R_b est le rapport entre la vitesse axiale et la vitesse de rotation à la paroi $r = R$ (i.e. le pas de l'écoulement de vissage). Nous choisissons R et Ω^{-1} comme échelles respectives de longueur et de temps. Avec cet écoulement imposé, le problème de dynamo cinématique peut être résolu analytiquement et le mode propre critique associé au nombre de Reynolds magnétique minimum $R_m^c = 17.73$ correspond alors à $R_b = 1.3$, $k = -0.39$ et $m = 1$, où k et m sont respectivement les nombres d'ondes axiaux et azimutaux.

Comme le montre le schéma 3.2a, nous considérons ici le cas légèrement différent d'un écoulement hélicoïdal immergé au sein d'un milieu conducteur, de même conductivité, au repos sur le domaine $r \in [1; 2]$, et d'une région isolante $2 \leq r \leq 8$. Considérant $R_b = 1$, et une hauteur $H = 8$ pour cette configuration cylindrique, nous définissons le nombre de Reynold magnétique par $R_m = \Omega R_i^2 / \nu_m$, ce qui nous permet une comparaison directe de nos résultats avec Kaiser & Tilgner (1999) et Laguerre (2006). Les conditions aux limites sont $\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ sur la paroi latérale externe, et la périodicité du potentiel vecteur est imposée sur les parois supérieure et inférieure du cylindre. Du point de vue de la validation numérique, la comparaison avec les résultats de la littérature nous permet d'estimer (i) l'influence d'une conductivité externe non-nulle (ii) la capacité du code à résoudre des discontinuités d'écoulement et de conductivités électriques (iii) la pertinence de nos conditions aux limites.

Un résultat typique du champ magnétique excité au-dessus du seuil dynamo est montré en figure 3.2b. Cette topologie du champ est en excellent accord avec la structure attendue (e.g. Laguerre, 2006). Afin d'étudier plus précisément le seuil dynamo, nous considérons l'évolution temporelle de la moyenne quadratique en volume du champ magnétique

$$B_{rms} = \sqrt{\frac{1}{V_s} \int_{V_s} B^2 dV}, \quad (3.44)$$

où V_s est le volume du cylindre de rayon 1, adimensionné par R^3 . Quelques exemples sont montrés en figure 3.3a, en-dessous, proche, et au-dessus du seuil dynamo. Le taux de croissance/décroissance σ du champ magnétique montré en figure 3.3b est alors donné par le taux de croissance/décroissance σ de B_{rms} , déterminé par un ajustement exponentiel de son évolution temporelle. Le seuil dynamo, donné par $\sigma = 0$, est alors obtenu par interpolation pour $Rm_c \approx 18.3$, en excellent accord avec le seuil $Rm_c \approx 18.5$ trouvé par Laguerre (2006). Notons que dans ce cas particulier, l'ordre d'interpolation des éléments de Nédélec utilisés ne semble pas vraiment important (fig. 3.3b).

3.4.2 Une dynamo cinématique de type VKS

Afin de valider les conditions aux limites *pseudo-vides* $\mathbf{n} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, nous considérons une dynamo cinématique Von Karman dans un cylindre de rayon R et de rapport d'aspect

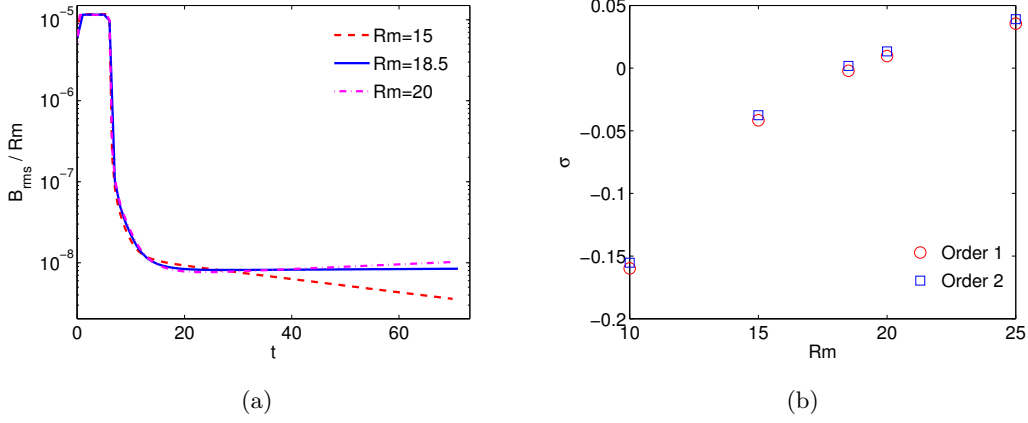


FIGURE 3.3 – Résultats numériques pour la dynamo cinématique de type Ponomarenko. (a) Évolution temporelle de la moyenne quadratique du champ magnétique divisé par Rm en-dessous du seuil dynamo ($Rm = 15$), proche du seuil ($Rm = 18.5$), et au-dessus du seuil dynamo ($Rm = 20$). (b) Évolution du taux de croissance de la dynamo avec le nombre de Reynolds magnétique pour des éléments de Nédélec linéaires et quadratiques. Le maillage utilisé est le même dans les deux cas, avec 43 162 éléments tétraédriques, ce qui donne un modèle avec 52239 DoF pour les éléments linéaires, et 279560 DoF pour les éléments quadratiques.

$H/R = 2$. L'écoulement de base adimensionnel est donné par Gissinger (2009)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_r \\ U_\theta \\ U_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2} r (1-r)^2 (1+2r) \cos(\pi z) \\ \frac{8}{\pi} r (1-r) \arcsin(z) \\ (1-r)(1+r-5r^2) \sin(\pi z) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Le nombre de Reynolds magnétique est défini par $Rm = U_{max} R/\nu_m$, avec U_{max} la vitesse maximale de l'écoulement moyen (Gissinger, 2009). En figure 3.4a, le champ magnétique et l'écoulement de base (3.45) sont représentés. Comme attendu, le champ magnétique induit par l'écoulement est un dipôle équatorial (e.g. Gissinger, 2009). Notons que le champ magnétique observé sur la dynamo expérimentale VKS est, lui, un dipôle axial, ce qui a été attribué à la composante non-axisymétrique de l'écoulement (Gissinger, 2009). En figure 3.4, le taux de croissance/décroissance de la dynamo pour différents maillages et ordres d'éléments est représenté. Avec les éléments de second ordre, le nombre de Reynolds magnétique critique obtenu par interpolation est $Rm = 79.2 \pm 0.1$, avec $U_{max} = 1.0755$, atteint en $(r, z) = (0.4842, \pm 1)$. Ce résultat est en excellent accord avec le seuil $Rm = 79$ obtenu numériquement par C. Nore et A. Giesecke (communications personnelles) avec deux autres codes différents, mais en désaccord avec la valeur $Rm = 60$ obtenue numériquement par Gissinger (2009), ce qui reste à expliquer. La figure 3.4 montre également que l'ordre des éléments utilisés a une influence avec ce type de conditions aux limites,

même si les valeurs obtenues restent proches. En fait, l'observation du champ magnétique à la paroi montre que les conditions aux limites sont beaucoup mieux respectées avec des éléments de second ordre qu'avec des éléments linéaires. Dans tous les cas, cette validation montre que le code est capable de reproduire correctement des conditions aux limites de pseudo-vide.

3.4.3 Une dynamo convective

Les sections précédentes ont montré que le code donnait des résultats satisfaisants pour des études de dynamos cinématiques. Cette section étend la validation aux dynamos dynamiques, en considérant le benchmark numérique usuel de Christensen *et al.* (2001), basé sur un mouvement de convection thermique dans une coquille sphérique en rotation. Jusqu'à présent, ce benchmark, défini grâce à des méthodes spectrales, n'a été reproduit que deux fois par des méthodes locales. Matsui & Okuda (2004a, 2005) l'ont reproduit sur le Earth Simulator avec une méthode éléments finis. Harder & Hansen (2005) utilisent un code volumes finis et considèrent un cas légèrement différent du benchmark, en utilisant des conditions de pseudo-vide à la paroi externe pour limiter le coût de calcul. Dans cette section, le cas considéré par Harder & Hansen (2005) est reconsidéré avec COMSOL, basé sur des éléments de Nédélec. Nous résolvons donc également l'équation de température et ajoutons une force de flottabilité dans les équations de Navier-Stokes, de même qu'en section 2.6. On adopte l'approximation de Boussinesq, et la gravité varie linéairement avec le rayon. Pour une comparaison directe, nous reprenons ici l'adimensionnement de Christensen *et al.* (2001). La géométrie considérée correspond à une coquille sphérique en rotation d'un rapport d'aspect $\eta = 0.35$, avec un rayon externe $r_0 = 20/13$ et un rayon interne $r_i = 7/13$, où l'échelle de longueur est l'épaisseur de la coquille D . Les températures sont fixées à T_o et $T_o + \Delta T$, respectivement sur les parois externe et interne. L'échelle de temps retenue est D^2/ν , et la température adimensionnelle est définie par $(T - T_o)/\Delta T$. Les températures adimensionnelles sur les parois externe et interne sont donc respectivement 0 et 1. L'induction magnétique B est adimensionnée par $\sqrt{\rho\mu\nu_m\Omega}$, et la pression par $\rho\nu\Omega$. Les paramètres de contrôle adimensionnels sont le nombre de Rayleigh modifié $Ra = \alpha g_0 \Delta T D / (\nu \Omega) = 100$, où α est le coefficient de dilatation thermique et g_0 la gravité à la paroi externe, le nombre d'Ekman $E_k = \nu / (\Omega D^2) = 10^{-3}$ et le nombre de Prandtl thermique $Pr = 1$. Le problème est résolu dans le référentiel en rotation avec la coquille sphérique, de sorte que l'adhérence aux parois se traduit par une vitesse nulle. Les parois internes et externes tournent à la même vitesse de rotation. Le coût important de calcul des méthodes locales nous impose d'utiliser la condition locale de pseudo-vide $\mathbf{n} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, déjà utilisée par Harder & Hansen (2005). Cette condition est différente de celle du benchmark, où un raccordement à un champ potentiel est utilisé, ce qui implique que la solution obtenue peut différer quelque peu. Comme le rappelle Christensen *et al.* (2001), les conditions initiales ont ici une certaine importance dans la mesure où la convection thermique considérée est stable pour de petites perturbations magnétiques, et les solutions dynamos semblent n'avoir qu'un petit bassin d'attraction. Nous choisissons donc d'utiliser les conditions initiales du benchmark, que nous transcrivons en terme de

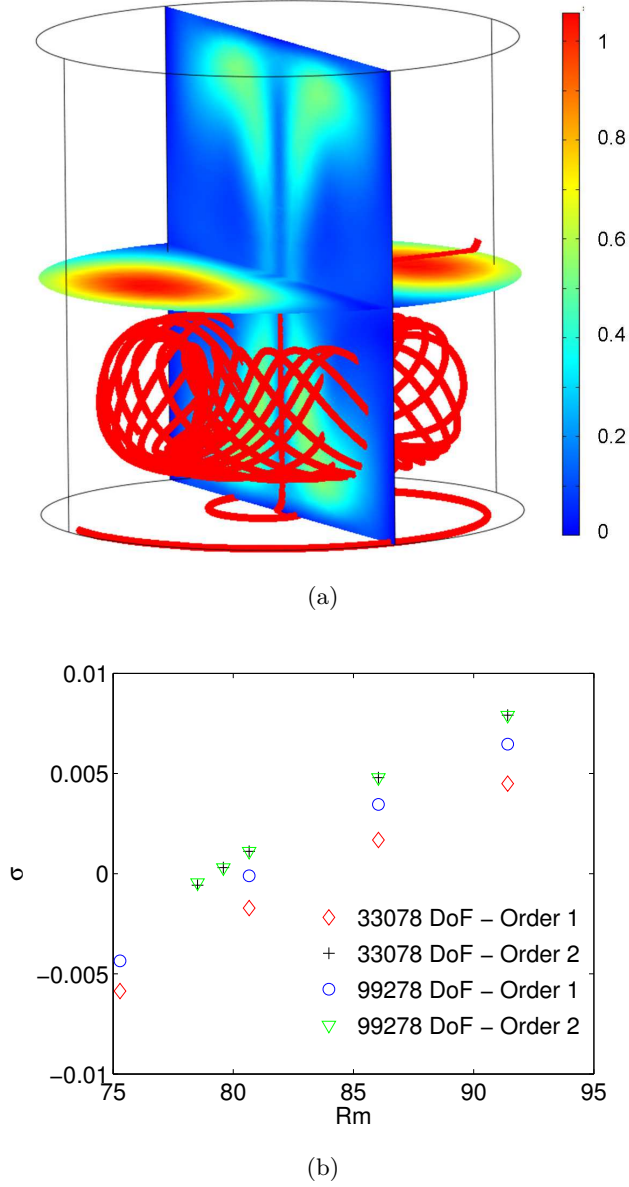


FIGURE 3.4 – Résultats numériques pour la dynamo cinématique de Von Karman, avec des conditions aux limites de pseudo-vide. (a) Les coupes montrent la norme du champ magnétique (normalisée par sa valeur maximale) durant sa croissance exponentielle, lors d'une simulation au-dessus du seuil dynamo ($Rm = 80.6$, 99278 DoF, avec des éléments de Nédélec quadratiques). Des lignes de courant du champ de vitesse utilisé, donné par (3.45), sont aussi représentées. (b) L'évolution du taux de croissance/décroissance de la dynamo cinématique est représentée en fonction du nombre de Reynolds magnétique pour deux maillages différents, avec des éléments de Nédélec linéaires et quadratiques. La valeur du seuil dynamo $Rm_c = 79.2$ est obtenue par interpolation.

potentiel magnétique. Le calcul donne :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} r \sin[\pi(r - r_i)] \cos(2\theta) + f_1(r) + \int (A_\theta + r \partial_r A_\theta) d\theta \\ f_2(r, \theta) \\ \frac{5}{8} \left[4r_0 r - 3r^2 - \frac{r_i^4}{r^2} \right] \sin \theta + \frac{K}{r \sin \theta} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

avec les fonctions arbitraires $f_1(r)$, $f_2(r, \theta)$ et la constante arbitraire K . Comme Christensen *et al.* (2001), nous définissons la densité d'énergie magnétique moyenne dans la coquille par

$$E_m = \frac{1}{2 V_s E Pm} \int_{V_s} \mathbf{B}^2 dV \quad (3.47)$$

où V_s est le volume adimensionnel de la coquille de fluide. La moyenne quadratique du champ magnétique utilisée par Harder & Hansen (2005) est une quantité équivalente définie par $B_{rms} = \sqrt{2 E_m}$. L'énergie magnétique adimensionnelle initiale (à $t = 0$) est donc $E_m = 868$, i.e. $B_{rms} = 41.7$.

Nous considérons tout d'abord le cas 0 du benchmark, qui est un cas non-magnétique. Cela permet de vérifier la validité de l'écoulement de convection nécessaire à la dynamo. Les résultats sont montrés en figure 3.5 en fonction de la résolution spatiale N , définie par la racine troisième du nombre de degrés de liberté pour chaque variable scalaire, comme dans Matsui & Okuda (2005). Les grandeurs considérées sont la moyenne quadratique de la vitesse

$$E_{kin} = \frac{1}{2 V_s} \int_{V_s} u^2 dV \quad (3.48)$$

et la vitesse de dérive ω des colonnes convectives de grande échelle. Comme l'ont déjà remarqué Matsui & Okuda (2005), la convergence est beaucoup plus lente avec les méthodes locales qu'avec les méthodes spectrales, en particulier pour la vitesse de dérive. Cependant, nos résultats sont en accord avec ceux de Matsui & Okuda (2005) et Harder & Hansen (2005). Les deux variables considérées (E_{kin}, ω) semblent converger vers les valeurs attendues lorsque N augmente.

Nous considérons à présent le cas 1 du benchmark, en résolvant le problème MHD complet. Dans ce cas, les simulations sont très coûteuses en temps de calcul⁶ et nous nous limitons donc à une résolution $N \approx 42$, avec des éléments de Nédélec quadratiques. La figure 3.5a montre que, dans ce cas, l'énergie cinétique est sous-estimée d'un facteur d'environ 5%, ce qui signifie que l'écoulement est légèrement moins efficace pour soutenir le mécanisme dynamo. Nous nous attendons donc à avoir un seuil dynamo légèrement supérieur à celui du benchmark. Nous trouvons effectivement un seuil dynamo autour de $Pm \approx 7$, supérieur à la valeur de référence $Pm = 5$ du benchmark. Notons cependant que nos résultats sont cohérents avec ceux de Harder & Hansen (2005), qui trouvent un

6. Il faut typiquement deux semaines sur une unique station de travail, du moins quand tout se passe bien...

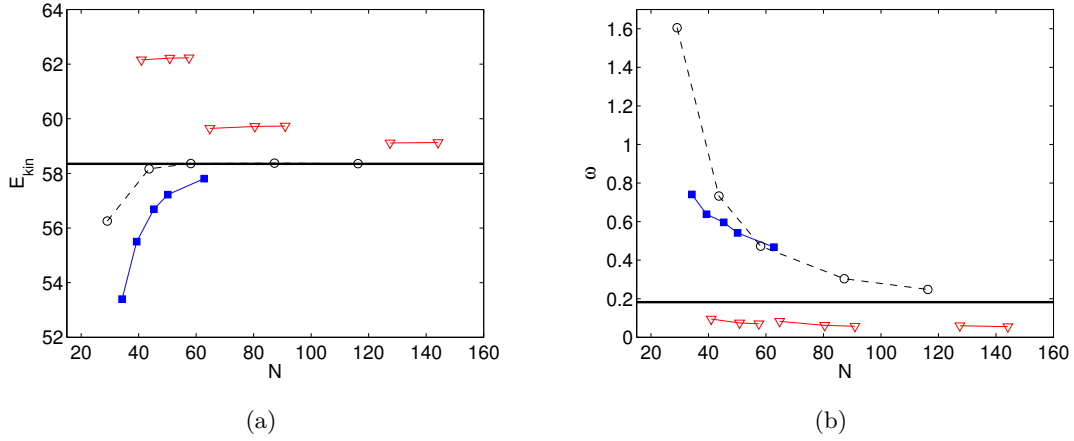


FIGURE 3.5 – Évolution de (a) la moyenne quadratique de l'énergie cinétique et (b) de la vitesse angulaire de dérive dans nos simulations numériques (carrés) dans le cas non-magnétique du benchmark de Christensen et al. (2001), en fonction de la résolution spatiale N . Les résultats sont comparés avec les solutions suggérées (ligne noire continue) par Christensen et al. (2001), avec les résultats de Harder & Hansen (2005) représentés par les cercles noirs vides, et avec les résultats numériques de Matsui & Okuda (2005) donnés par les triangles rouges.

champ magnétique diminuant lentement pour $Pm = 5$ (leur figure 8) mais une dynamo clairement stable pour $Pm = 8$. Les auteurs suggèrent que le champ en décroissance lente obtenu pour $Pm = 5$ correspond au seuil dynamo, et proposent de comparer la dernière valeur atteinte dans leur simulation par le champ magnétique en décroissance avec la valeur du benchmark. Ils comparent donc le champ moyen $B_{rms} \approx 42$ avec la valeur de référence $B_{rms} \approx 35$ du benchmark. Dans nos simulations numériques, proche de notre seuil dynamo $Pm \approx 7$, nous obtenons un champ moyen autour de $B_{rms} \approx 10$. Cette valeur basse est encore une fois à relier à notre sous-estimation de l'énergie cinétique de l'écoulement. Notons également que rien n'exclut qu'une valeur similaire aurait été obtenue par Harder & Hansen (2005) une fois l'état permanent atteint dans leur simulation. Avec les ressources de calcul dont nous disposons, nous ne pouvons pas approfondir ces investigations. Néanmoins, cela démontre la capacité du code à simuler des dynamos dynamiques.

3.5 Application à l'instabilité elliptique MHD

Cette étude se place dans la continuité de nos études numériques précédentes de l'instabilité elliptique en géométrie non-axisymétrique. Considérant un ellipsoïde triaxial d'axes (a, b, c) avec $a > b$, dans le référentiel lié à (Ox, Oy, Oz) , nous imposons une vitesse tangentielle constante le long de la paroi déformée, dans chaque plan perpendiculaire à

l'axe de rotation, choisi ici selon (Oz) . Une telle configuration est un modèle de noyau planétaire sans graine solide interne (par exemple la lune jovienne Io ou la Terre primitive), au sein d'un manteau solide déformé par les forces de marées d'un corps compagnon. La longueur c , fixant l'aplatissement de l'ellipsoïde, peut être choisie indépendamment de la longueur des autres axes. Dans cette section, nous utilisons le rayon équatorial moyen R comme échelle de longueur et Ω^{-1} comme échelle de temps, donnée par la vitesse ΩR imposée à la paroi dans le plan équatorial. Outre les deux paramètres adimensionnels E et Rm , deux paramètres adimensionnels, géométriques, supplémentaires sont alors nécessaires pour caractériser le système : l'ellipticité $\beta = (a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$ de la déformation elliptique et le rapport d'aspect c/a .

3.5.1 Induction magnétique du mode de spin-over

Dans cette section, l'ellipsoïde triaxial (a, b, c) est immergé au sein d'une sphère de rayon $8 \sqrt[3]{abc}$ de conductivité électrique γ_v . Un champ magnétique constant et uniforme $\mathbf{B}_0$ est imposé, orienté selon l'axe de rotation. Ce modèle numérique représente par exemple le noyau liquide d'une lune déformée par les forces de marées, au sein d'un champ magnétique externe, comme par exemple les lunes galiléennes Io et Europa, soumises au champ magnétique de Jupiter. Nous considérons tout d'abord le mode de spin-over (figure 3.6a), avec une longueur d'axe polaire $c = (a + b)/2$ (voir section 2.3.1). Le nombre de Prandtl magnétique du fluide est fixé à $Pm = 10^{-4}$. De même que Herreman *et al.* (2009), le champ magnétique est adimensionné par B_0 . Par rapport aux équations (3.37-3.40), cela modifie simplement la force de Laplace dans l'équation (3.37), qui s'écrit à présent :

$$\frac{\Lambda}{Rm} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_{\text{tot}} \quad (3.49)$$

avec $\mathbf{B}_{\text{tot}} = \mathbf{B} + \mathbf{B}_0$, où $\mathbf{B}_0 = (0, 0, 1)$ et où le nombre d'Elsasser associé au champ magnétique imposé est défini par $\Lambda = \gamma B_0^2 / (\rho \Omega)$. Cette configuration a déjà été étudiée théoriquement et expérimentalement par Lacaze *et al.* (2006), Thess & Zikanov (2007) et Herreman *et al.* (2009) dans le cas d'un milieu extérieur isolant.

Une première validation visuelle est obtenue en comparant les résultats numériques obtenus (figure 3.6a) avec les calculs théoriques de Lacaze *et al.* (2006). La figure 3.6b montre l'influence de la conductivité externe sur le taux de croissance du mode de spin-over. Comme attendu, pour de faibles rapports de conductivités $\gamma_v/\gamma \lesssim 10^{-3}$, le taux de croissance n'est plus affecté par la faible conductivité du milieu extérieur : le milieu extérieur se comporte alors comme un isolant électrique. Dans la suite, nous fixons $\gamma_v/\gamma = 10^{-4}$.

En combinant les résultats de Lacaze *et al.* (2004) et Thess & Zikanov (2007), Herreman *et al.* (2009) proposent de modéliser l'évolution non-linéaire du mode de spin-over dans le référentiel du laboratoire par le système non-linéaire (voir aussi section 2.3.4) :

$$\dot{\omega}_x = -\alpha_1 (1 + \omega_z) \omega_y - (\nu_{so} + \Lambda/4) \omega_x, \quad (3.50)$$

$$\dot{\omega}_y = -\alpha_2 (1 + \omega_z) \omega_x - (\nu_{so} + \Lambda/4) \omega_y, \quad (3.51)$$

$$\dot{\omega}_z = \beta \omega_x \omega_y - \nu_{ec} \omega_z + \nu_{nl} (\omega_x^2 + \omega_y^2) \quad (3.52)$$

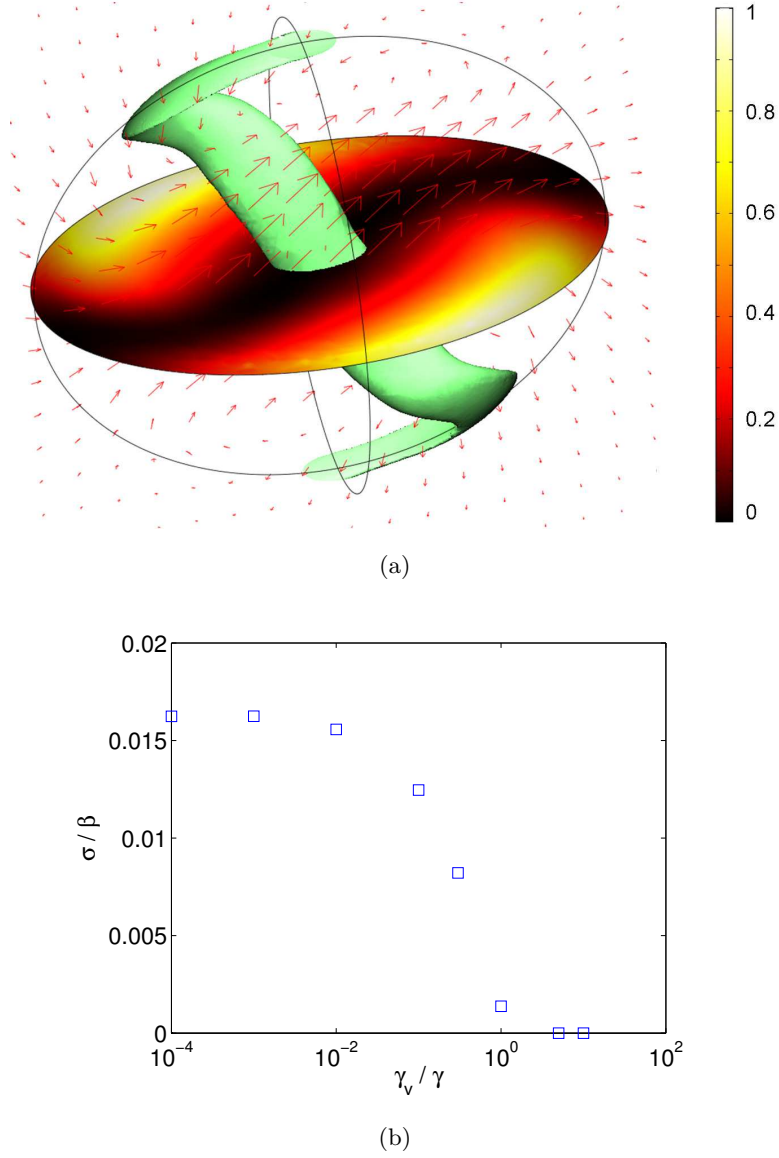


FIGURE 3.6 – *Simulations numériques MHD du mode de spin-over dans un ellipsoïde triaxial, avec un champ magnétique uniforme imposé selon l'axe de rotation (calcul mené dans le référentiel du laboratoire, où la déformation est fixe). Paramètres : $Pm = 10^{-4}$, $\beta = 0.317$, $c = (a + b)/2$ et $\Lambda = 0.02$. (a) Le mode de spin-over est représenté pour $E = 1/500$ par l'iso-surface de vitesse $||\mathbf{u}|| = 0.12$, et le champ magnétique induit est représenté par des flèches (en volume) dont la taille est proportionnelle à la valeur locale du champ magnétique. Dans le plan équatorial, la dissipation Joule est montrée, normalisée par sa valeur maximale. (b) Évolution du taux de croissance σ de l'instabilité elliptique avec le rapport de la conductivité externe γ_v sur la conductivité du fluide γ .*

où $\alpha_1 = \beta/(2 - \beta)$, $\alpha_2 = \beta/(2 + \beta)$ et $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur rotation du mode de spin-over. Dans la limite $\beta \ll 1$, les termes d'amortissement sont connus analytiquement depuis Greenspan (1968) : $\nu_{so} = \alpha\sqrt{E} = 2.62 \sqrt{E}$ est l'amortissement linéaire visqueux du mode de spin-over, $\nu_{ec} = 2.85 \sqrt{E}$ est l'amortissement linéaire visqueux de la rotation axiale et $\nu_{nl} = 1.42 \sqrt{E}$ représente l'effet de la couche visqueuse sur l'interaction non-linéaire du mode de spin-over avec lui-même. Par rapport au système étudié en section 2.3.4, le champ magnétique n'ajoute qu'un terme linéaire correspondant à la dissipation Joule $\Lambda/4$ dans les directions normales au champ imposé. Même si ce modèle ne prend pas en compte tous les termes visqueux d'ordre $\sqrt{E}$, ni les corrections non-linéaires des couches internes de cisaillement, il est en bon accord avec les mesures expérimentales, que ce soit sur le taux de croissance prédit ou le champ de vitesse à saturation et le champ magnétique induit (Lacaze *et al.*, 2004; Herreman *et al.*, 2009).

En linéarisant le système autour du point fixe trivial $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, le taux de croissance linéaire du mode de spin-over pour $\beta \ll 1$ est donné par (Herreman *et al.*, 2009)

$$\sigma = \frac{\beta}{\sqrt{4 - \beta^2}} - \tilde{\nu}_{so}, \quad (3.53)$$

où $\tilde{\nu}_{so} = \nu_{so} + \frac{\Lambda}{4}$. Au-dessus du seuil de l'instabilité donné par $\beta/\sqrt{4 - \beta^2} \geq \tilde{\nu}_{so}$, un état stationnaire non-trivial est obtenu, donné par

$$\omega_x = \pm \sqrt{\frac{\nu_{ec} [\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} - \tilde{\nu}_{so}]}{\alpha_2 \beta - \nu_{nl} [\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} + \alpha_2^2 / \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}]}} \approx \pm \sqrt{\frac{\nu_{ec} [\beta - 2 \tilde{\nu}_{so}]}{\beta^2 - 2 \nu_{nl} \beta}}, \quad (3.54)$$

$$\omega_y = \mp \sqrt{\frac{\nu_{ec} [\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} - \tilde{\nu}_{so}]}{\alpha_1 \beta - \nu_{nl} [\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} + \alpha_1^2 / \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}]}} \approx \mp \sqrt{\frac{\nu_{ec} [\beta - 2 \tilde{\nu}_{so}]}{\beta^2 - 2 \nu_{nl} \beta}} \approx \mp \omega_x, \quad (3.55)$$

$$\omega_z = \frac{\tilde{\nu}_{so}}{\beta} \sqrt{4 - \beta^2} - 1 \approx \frac{2 \tilde{\nu}_{so}}{\beta} - 1, \quad (3.56)$$

où les approximations sont données pour $\beta \ll 1$. Ces expressions permettent de retrouver l'amplitude équatoriale du mode spin-over (Herreman *et al.*, 2009) :

$$\Omega_{so} = \sqrt{4 \frac{\nu_{ec}}{\beta} \frac{\sigma}{\beta - 4\nu_{nl}/\sqrt{4 - \beta^2}}}. \quad (3.57)$$

Selon Lacaze *et al.* (2006) et Herreman *et al.* (2009), le champ induit par le mode de spin-over non-visqueux dans la limite des faibles nombres de Reynolds magnétique Rm est un dipôle avec un axe transverse au champ imposé, en quadrature avec l'axe de rotation du mode de spin-over. L'axe de longueur a étant ici le grand axe de l'ellipsoïde, l'angle polaire dans le plan (x, y) du spin-over à saturation peut être estimé par (Herreman *et al.*, 2009) :

$$\phi_{so} = \pm \left| \arctan \left[\sqrt{\frac{2 - \beta}{2 + \beta}} \right] \right| \quad (3.58)$$

de sorte que la vorticité du mode de spin-over n'est pas exactement alignée avec la direction de l'élongation maximale, à -45° . Au sein de l'ellipsoïde, ainsi qu'à l'extérieur, l'expression

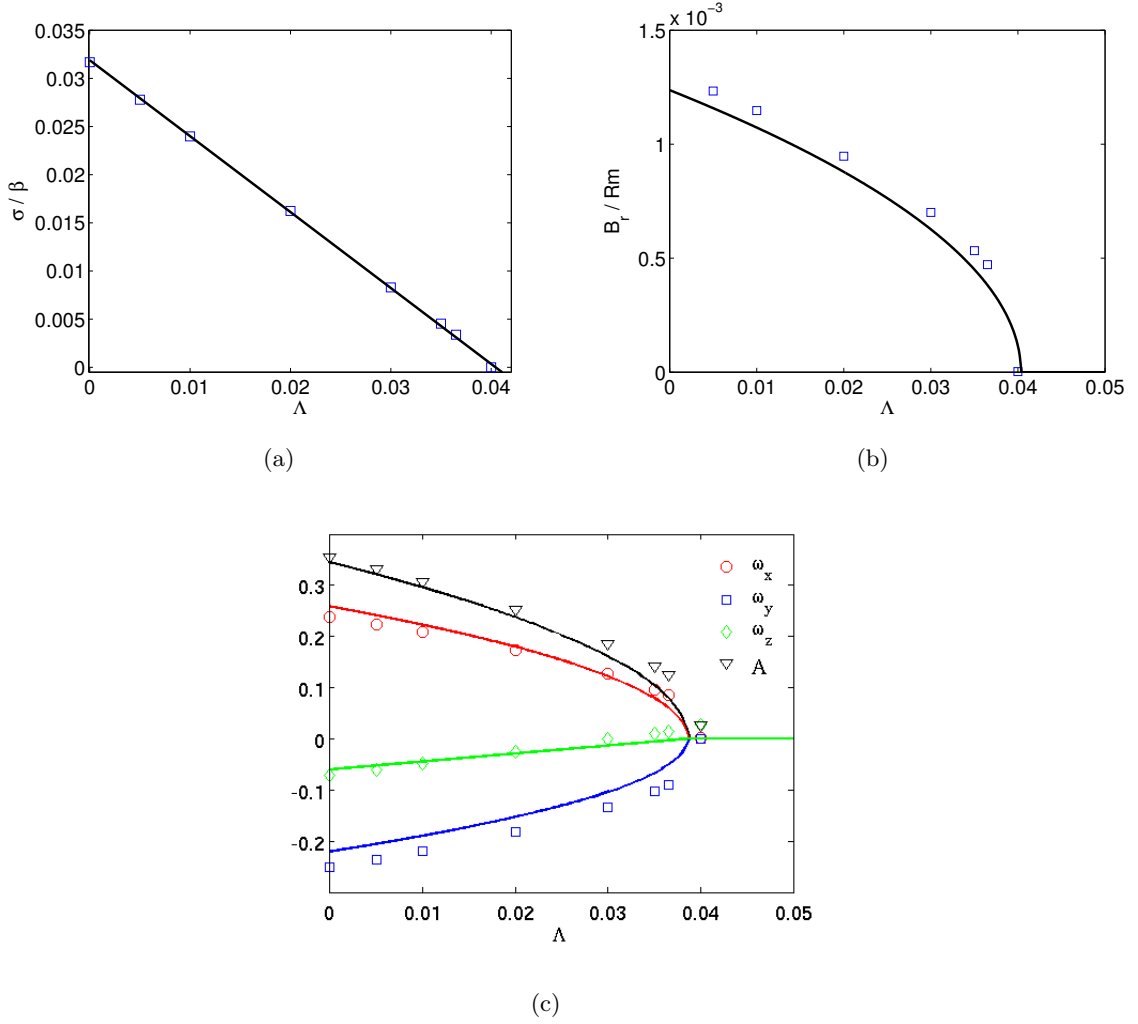


FIGURE 3.7 – Simulations numériques MHD (carrés bleus) et résultats théoriques (lignes continues) du mode de spin-over dans un ellipsoïde triaxial, avec un champ magnétique uniforme imposé le long de l'axe de rotation. Paramètres : $E = 1/344$, $\beta = 0.317$, $c = (a+b)/2$, $Pm = 10^{-4}$ pour l'ellipsoïde fluide, immergé dans une sphère de rayon $8\sqrt[3]{abc}$, avec une conductivité de rapport $\gamma_v/\gamma = 10^{-4}$. Évolution avec le nombre d'Elsasser Λ (a) du taux de croissance de l'instabilité elliptique (b) de l'amplitude adimensionnelle du champ magnétique (radial) induit au point de rayon $r = 2.3$ et de longitude $\phi = 45^\circ$ dans le plan équatorial ($\theta = \pi/2$), et (c) des composantes numériques (symboles) et théoriques (lignes) de la rotation solide associée au mode de spin-over. La composante selon x est représentée par des cercles rouges, la composante selon y par des carrés bleus et la composante selon z par des losanges verts. La théorie est donnée par (3.54), (3.55) et (3.56), avec $\nu_{so} \approx 2.80 \sqrt{E}$.

générale du champ induit par le spin-over est donnée par Lacaze *et al.* (2006) pour un Rm arbitraire. Dans la limite des faibles Rm , les composantes cylindriques (B_ρ, B_ϕ, B_z) du champ magnétique induit peuvent être exprimées en fonction des variables sphériques (r, θ, ϕ) :

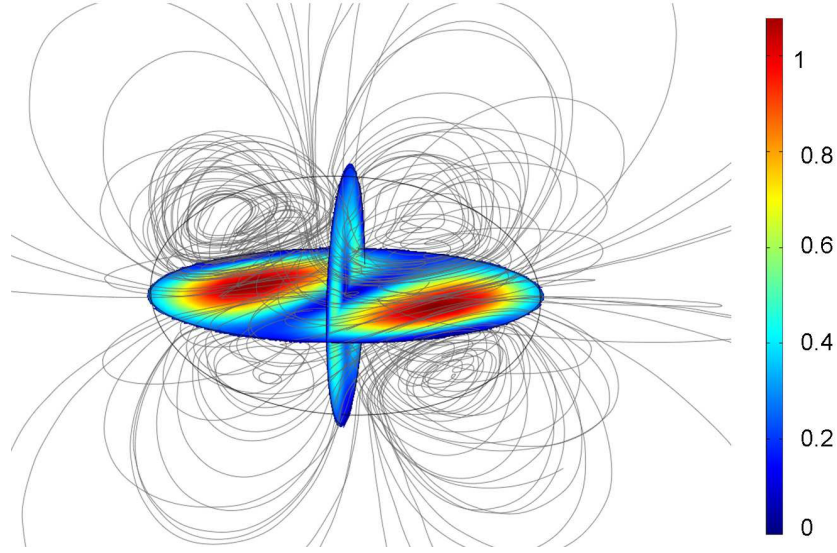
$$\mathbf{B}_i(r, \theta, \phi) = Rm \Omega_{so} \begin{bmatrix} -\frac{1-r^2}{10} \sin(\phi \pm \phi_{so}) + \frac{r^2}{140} (3 \cos(2\theta) - 1) \sin(\phi \pm \phi_{so}) \\ \frac{1-r^2}{10} \cos(\phi \pm \phi_{so}) + \frac{r^2}{70} \cos(\phi \pm \phi_{so}) \\ -\frac{3}{140} r^2 \sin(2\theta) \sin(\phi \pm \phi_{so}) \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

où ϕ est l'angle polaire dans le plan (x, y) et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ le rayon polaire. Le champ induit dans le domaine extérieur isolant est simplement donné par $\mathbf{B}_e = r^{-3} \mathbf{B}_i(1, \theta, \phi)$.

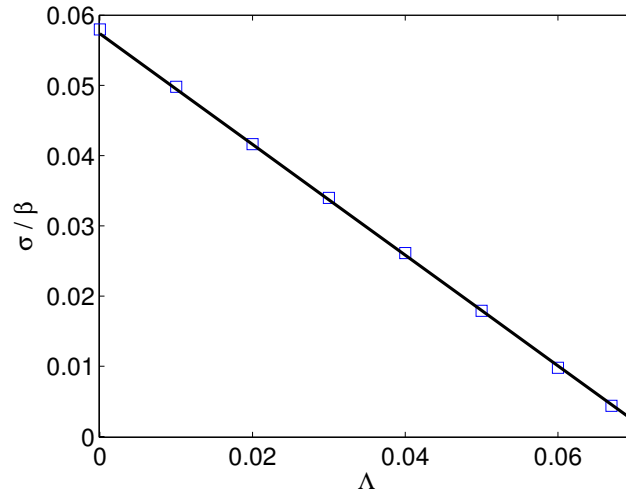
En figure 3.7a, le rôle de la dissipation Joule sur le taux de croissance du mode de spin-over est étudié en comparant les résultats numériques avec le résultat de l'analyse linéaire de stabilité (3.53). Le taux de croissance numérique est obtenu par ajustement d'une croissance initiale exponentielle sur la grandeur $W = 1/V_s \cdot \iiint_{V_s} |w| dV$, avec w la vitesse axiale adimensionnelle et V_s le volume de l'ellipsoïde. Le seul paramètre d'ajustement considéré ici est le coefficient d'amortissement visqueux α , déterminé en l'absence de champ magnétique : on obtient ainsi $\alpha = 2.80$ au lieu de la valeur théorique $\alpha = 2.62$, probablement du fait des valeurs finies de l'ellipticité β utilisées dans nos simulations. Aucun paramètre d'ajustement n'est introduit pour la dépendance du taux de croissance avec le champ magnétique imposé, et la loi d'échelle théorique est donc confirmée. Remarquons que, pour des champs magnétiques externes suffisamment forts, la dissipation Joule empêche l'instabilité elliptique de se développer (l'ellipticité et le nombre d'Ekman étant maintenus constants). La précision de la solution numérique est confirmée en figure 3.7b, où l'évolution de l'amplitude du champ magnétique $\mathbf{B}_r$, radial au point considéré, avec le nombre d'Elsasser est comparée avec l'équation théorique (3.59). Finalement, une dernière grandeur est intéressante à étudier : l'amplitude de l'écoulement à saturation. Notons que cette grandeur est difficile à obtenir expérimentalement, et n'a donc pas encore été étudiée sous champ magnétique. Dans les simulations numériques, l'amplitude A de l'écoulement généré par l'instabilité à saturation est obtenue en déterminant la vorticité additionnelle moyenne de l'écoulement dans l'intérieur fluide (le bulk), par rapport à la vorticité imposée $2 \mathbf{e}_z$ de la rotation de base. Cette valeur est ensuite comparée au vecteur rotation du spin-over donné par (3.54-3.56). Les résultats sont montrés en figure 3.7c pour les trois composantes du mode de spin-over, ainsi que l'amplitude i.e. la norme du vecteur. L'excellent accord obtenu pour les trois tests donnés en figure 3.7 confirme que le modèle numérique simule correctement le champ induit et sa rétroaction sur l'écoulement. Nous sommes donc à présent en mesure d'aller plus loin et d'étudier l'induction magnétique de modes plus complexes de l'instabilité elliptique. Notons que ces modes sont difficiles à étudier par des approches théoriques et expérimentales.

3.5.2 Induction magnétique du mode (1,3) de l'instabilité elliptique

Excepté pour le mode de spin-over, l'induction magnétique des autres modes de l'instabilité elliptique est difficilement accessible dans la mesure où le champ de vitesses obtenu



(a)



(b)

FIGURE 3.8 – Simulations numériques MHD du mode $(1,3)$ de l'instabilité elliptique dans un ellipsoïde triaxial, avec un champ magnétique uniforme imposé selon l'axe de rotation. (a) La norme du champ magnétique, normalisée par sa valeur maximale $B = 6.9 \cdot 10^{-4}$, est représentée sur les coupes à la saturation du mode $(1,3)$; les lignes de champ magnétiques sont aussi représentées. Paramètres : $\beta = 0.317$, $E = 1/700$, $c/a = 0.65$ et $\Lambda = 0.02$. (b) Évolution du taux de croissance de l'instabilité elliptique avec le nombre d'Elsasser Λ . Les résultats numériques (carrés bleus) sont en excellent accord avec l'analyse linéaire de stabilité (ligne noire continue) donnée par (3.60), en utilisant $\alpha = 4.24$, déterminé en absence de champ magnétique.

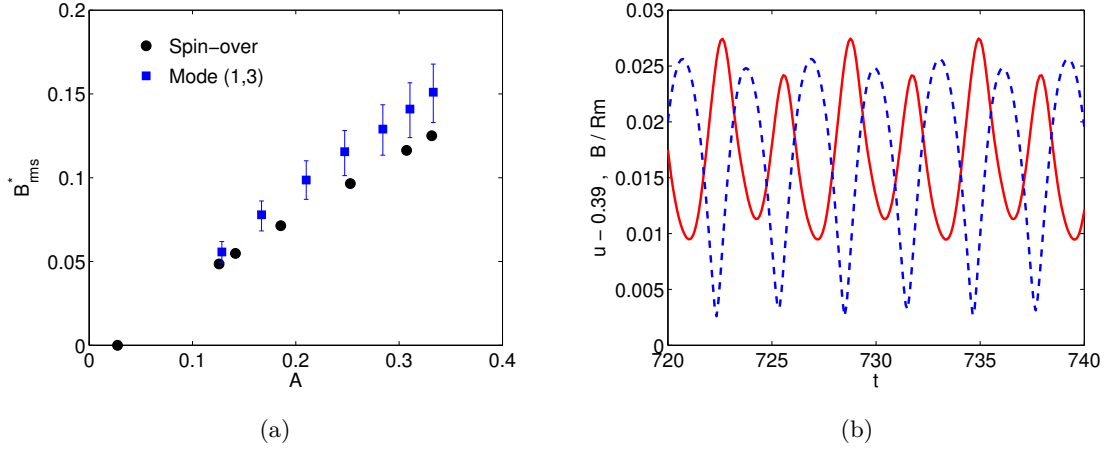


FIGURE 3.9 – (a) Évolution de B_{rms}^* avec l'amplitude du mode A . Pour le mode (1,3), les barres d'erreurs indiquent les valeurs extrêmes atteintes par B_{rms}^* , montrant que l'amplitude des oscillations du champ magnétique induit augmente avec la distance au seuil. (b) Le champ magnétique $\|\mathbf{B}\|/Rm$ et la quantité $\|\mathbf{u}\| - 0.39$ (pour des raisons de lisibilité) sont comparées, pour le point situé à la moitié du grand axe dans le plan équatorial. Le déphasage obtenu est de 1.13, valeur proche de la prédiction théorique $\pi/2 \approx 1.57$.

à saturation n'est pas connu. Afin d'obtenir des informations génériques sur la MHD de l'instabilité elliptique, l'approche WKB est pertinente dans la mesure où elle permet de s'affranchir de la connaissance du mode excité. Les perturbations à l'écoulement de base sont recherchées sous la forme d'ondes planes dans la limite $k \gg 1$ et $\beta \ll 1$. Supposant une force de Laplace d'ordre β , l'analyse WKB (Herreman *et al.*, 2009) donne le taux de croissance (voir aussi l'annexe E.1)

$$\sigma = \frac{9}{16} \beta - \alpha \sqrt{E} - \frac{\Lambda}{4}, \quad (3.60)$$

où α est un coefficient d'amortissement visqueux d'ordre 1, et le champ magnétique induit $\mathbf{B}$ est lié à la vitesse typique du mode excité $\mathbf{u}_0$ (dans le référentiel du laboratoire) par :

$$\mathbf{B} = i \frac{Rm}{2k} \mathbf{u}_0, \quad (3.61)$$

où k est la norme du vecteur d'onde du mode excité. Cette expression générique montre que le champ magnétique induit dû à l'instabilité elliptique est systématiquement proportionnel et en quadrature avec le champ de vitesse associé à l'instabilité. Notons que les solutions (3.60) et (3.61) sont toutes deux en accord avec les résultats analytiques obtenus par une méthode globale pour le cas particulier du mode de spin-over (voir section 3.5.1).

Nous validons ici ces résultats en considérant le mode (1, 3) de l'instabilité elliptique, qui oscille 2 fois plus vite que la vitesse angulaire de rotation de l'écoulement. Ce mode est excité en fixant la longueur de l'axe polaire à $c/a = 0.65$ (voir section 2.3.1). Le champ

magnétique typique induit par le mode (1,3) est représenté en figure 3.8a. En figure 3.8b, l'excellent accord entre les taux de croissance théoriques et numériques confirme la validité générique de l'amortissement Joule en $-\Lambda/4$. Comme précédemment, le coefficient d'amortissement visqueux, qui dépend de l'ellipticité, est obtenu à champ magnétique nul : $\alpha \approx 4.24$. Le coefficient d'amortissement visqueux vaut $\alpha = 4.24$ pour les simulations présentées, ce qui est de l'ordre de grandeur attendu. L'expression (3.61) est comparée aux données des simulations numériques en figure 3.9a pour le mode de spin-over et le mode (1,3). Pour ce faire, nous avons défini $B_{rms}^* = 2 k B_{rms}/Rm$, où $k = 2\pi/\lambda$, avec une longueur d'onde λ égale à $\lambda = 2$ pour le mode de spin-over et $\lambda = 1$ pour le mode (1,3). La vitesse typique u_0 correspond en fait à l'amplitude A du mode (1,3), qui est déterminé par $A = \langle \max_V \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_b\| \rangle$, où $\langle . \rangle$ indique une moyenne en temps, et $\mathbf{u}_b$ est l'écoulement de base avant déstabilisation par l'instabilité elliptique. Cette méthode est moins précise que celle utilisée en section 3.5.1 pour le spin-over mais plus générique car utilisable pour chaque mode. La proximité des points en figure 3.9a confirme la validité de l'équation (3.61). Finalement, en figure 3.9b, la quadrature de phase suggérée par l'équation (3.61) entre la vitesse et le champ magnétique induit est validée.

3.5.3 Induction magnétique de la LDEI

De même qu'en section 2.4, on considère ici l'instabilité elliptique dans un ellipsoïde rigide triaxial d'axes (a, b, c) en libration i.e. oscillant à la vitesse angulaire

$$\Omega(t) = \Omega + \Delta\phi f \sin(ft) \quad (3.62)$$

où $\Delta\phi$ et f sont respectivement l'amplitude et la fréquence angulaire de la libration. Avec le rayon équatorial moyen $R = \sqrt{(a^2 + b^2)}/2$ comme échelle de longueur, et Ω^{-1} comme échelle de temps, la vitesse angulaire adimensionnelle s'écrit $1 + \varepsilon \sin(\omega t)$, avec la fréquence angulaire adimensionnelle $\omega = f/\Omega$ et le paramètre de forçage $\varepsilon = \Delta\phi \omega$. Dans ce cas, nous avons vu qu'une instabilité elliptique forcée par libration, dite LDEI, est susceptible de croître pour certaines gammes de fréquence ω . En présence d'un champ magnétique imposé $\mathbf{B}_0$, parallèle à l'axe de rotation, une analyse WKB donne alors le taux de croissance théorique de la LDEI dans la limites des grands nombres d'ondes $k \gg 1$ et pour $\beta, \varepsilon \ll 1$ (voir annexe E.2) :

$$\sigma = \frac{16 + \omega^2}{64} \varepsilon \beta - \alpha \sqrt{E} - \frac{\omega^2}{16} \Lambda, \quad (3.63)$$

avec le nombre d'Elsasser $\Lambda = \gamma B_0^2/(\rho\Omega)$ et un coefficient d'amortissement visqueux $\alpha \in [1; 10]$. Dans un contexte astrophysique, l'amortissement Joule peut significativement modifier les propriétés de stabilité de l'écoulement, et le champ induit peut participer aux fluctuations magnétiques mesurées par exemple au voisinage d'Europe, qui est probablement la plus instable des lunes galiléennes (voir section 4.2).

Notre objectif ici est de valider nos prédictions théoriques. Pour ce faire, nous nous plaçons dans le référentiel lié à l'ellipsoïde. Un champ magnétique uniforme est imposé le long de l'axe de rotation, et l'ellipsoïde est immergé au sein d'une sphère de rayon $6 \sqrt[3]{abc}$, ce milieu environnant étant 10^{-4} fois moins conducteur d'électricité que le fluide.

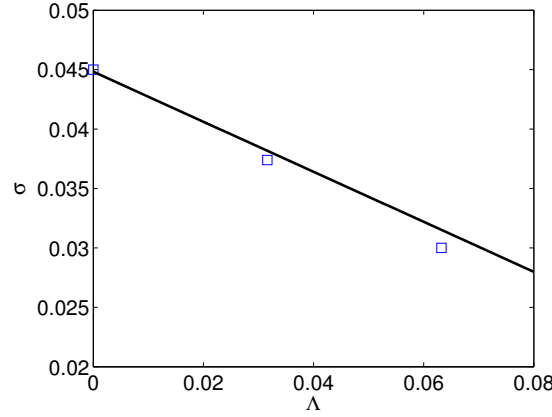


FIGURE 3.10 – Évolution du taux de croissance de la LDEI avec le nombre d'Elsasser Λ associé au champ magnétique uniforme imposé le long de l'axe de rotation pour $\varepsilon = 1$, $\omega = 1.835$, $\beta = 0.44$, $c = 1$ et $E = 5 \cdot 10^{-4}$. Les résultats numériques (carrés bleus) sont en accord avec l'analyse linéaire de stabilité (ligne continue noire) donnée par l'équation (3.63), en utilisant $\alpha = 3.95$, déterminé en absence de champ magnétique.

De même qu'en section 3.5.1, nous fixons le nombre de Prandtl magnétique à $Pm = 10^{-4}$. Afin de favoriser l'apparition de la LDEI, nous choisissons $\varepsilon = 1$, $\omega = 1.835$, $\beta = 0.44$, $c = 1$, et un nombre d'Ekman $E = \nu/(\Omega_0 R^2)$ égal à $E = 5 \cdot 10^{-4}$. L'expression du taux de croissance (3.63) montre qu'un faible nombre d'Ekman est requis pour être au-dessus du seuil de la LDEI car le terme déstabilisant est à présent en $\varepsilon\beta$ au lieu de β . Le coût de calcul supplémentaire imposé par cette valeur du nombre d'Ekman nous a limité à trois simulations, pour $\Lambda = 0$; 0.032; 0.063. Le mode excité de la LDEI dans ces simulations est en fait un mode de type spin-over dont la direction oscille en latitude. Les taux de croissance obtenus sont représentés en figure 3.10 et confirment la validité du terme d'amortissement Joule. Comme précédemment, l'amortissement visqueux est obtenu à champ magnétique nul, donné par $\alpha = 3.95$. Quant à l'amplitude du champ induit, au point de rayon $r = 2$ et de longitude $\phi = 45^\circ$ dans le plan équatorial ($\theta = \pi/2$), déjà considéré en figure 3.7b, le champ magnétique est radial, et égal à $B_r = 0.0013$ pour $\Lambda = 0.032$, et $B_r = 0.001$ pour $\Lambda = 0.063$. Supposant que la théorie présentée en section 3.5.1 reste valide pour ce mode de type spin-over oscillant légèrement, les valeurs théoriques obtenues pour les mêmes paramètres β et E sont respectivement $B_r = 0.0009$ et $B_r = 0.0008$, valeurs très proches des valeurs obtenues numériquement.

3.5.4 Étude en configuration dynamo

Après les études d'induction précédentes, l'étape suivante est naturellement de tester la capacité de l'instabilité elliptique à exciter une dynamo. Afin de répondre à cette question, partant de la configuration utilisée pour les études d'induction, le champ externe imposé est soudainement coupé une fois le régime permanent atteint, et les taux de dé-

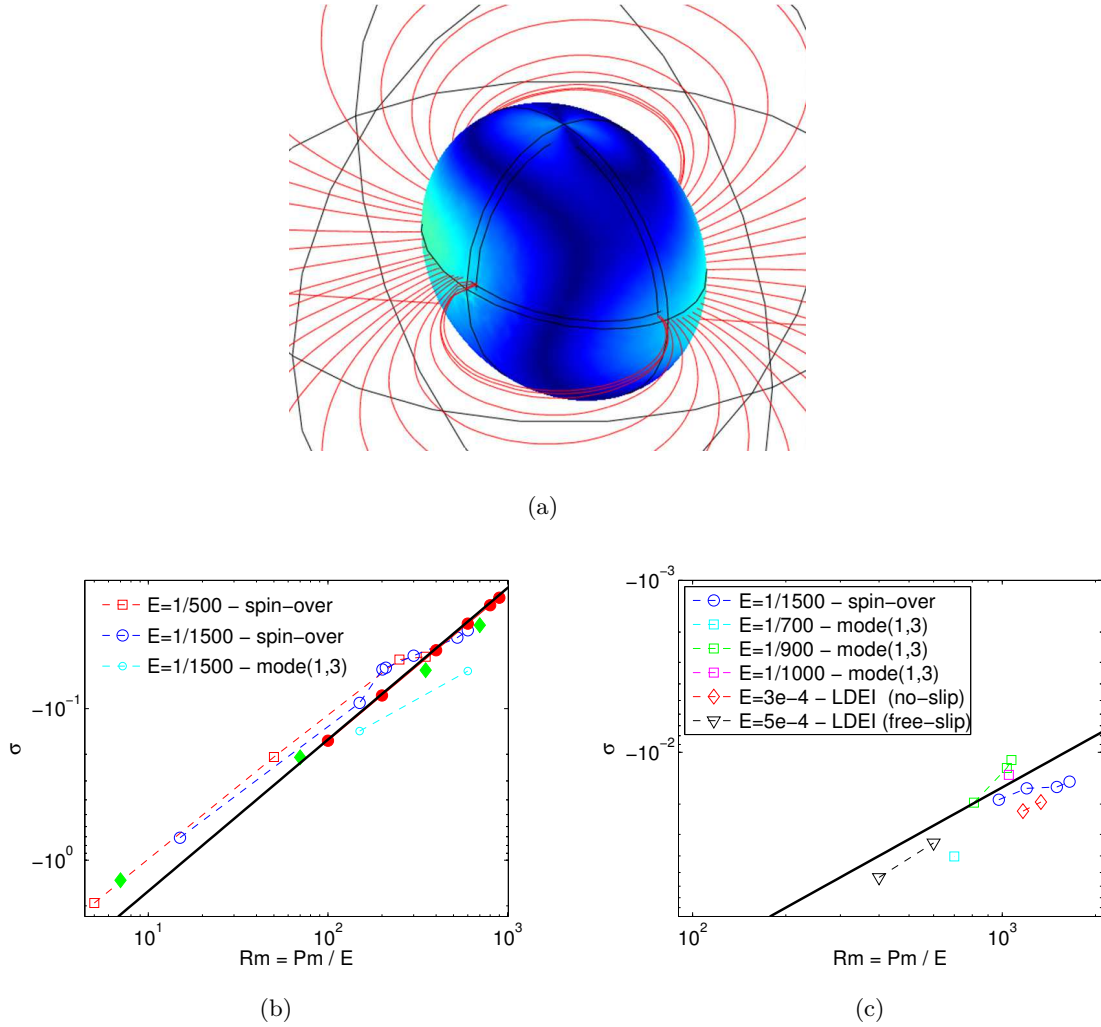


FIGURE 3.11 – *Champ magnétique décroissant lentement dans le temps une fois le champ externe coupé. (a) Norme de la composante radiale cylindrique sortante du champ magnétique (normalisée par sa valeur maximum) représentée sur la paroi externe du domaine fluide ellipsoïdal. Ce champ décroissant est obtenu pour le mode de spin-over pour $\beta = 0.317$, $E = 1/500$, $c = (a + b)/2$ et $Rm = 500$ ($Pm = 1$). (b) L'ellipsoïde fluide est immergé au sein d'une sphère isolante de rayon $10 \sqrt[3]{abc}$ (rapport des conductivités de 10^{-4}). La figure montre les résultats pour l'instabilité elliptique (symboles ouverts) et pour la précession (symboles pleins). La ligne continue noire représente la loi d'échelle $-16/Rm$, i.e. un comportement purement diffusif. Les résultats de Tilgner (1998) sont représentés par des cercles rouges tandis que les losanges verts sont les résultats de nos simulations MHD d'une sphère précessionnant à un angle de 60° et à une vitesse angulaire de $\Omega_p = -0.3$ pour $E = 1/700$. (c) Figure similaire à la figure (b) mais avec des conditions pseudo-vides à la paroi externe. À titre de comparaison, quelques simulations avec l'écoulement à saturation de la LDEI sont aussi représentées dans le cas de parois adhérentes, pour $\varepsilon = 0.92$, $\omega = 1.76$, $\beta = 0.44$, $c = 1$ et $E = 5 \cdot 10^{-4}$; ainsi que dans le cas avec glissement à la paroi pour $\varepsilon = 1$, $\omega = 1.8$, $\beta = 0.44$, $c = 1$ et $E = 3 \cdot 10^{-4}$.*

croissance du champ mesurés pour différents nombres de Reynolds magnétiques. La figure 3.11 montre nos résultats numériques. Nous sommes limités à des nombres de Reynolds magnétique $Rm = Pm/E$ inférieurs à 1000. En effet, le maillage nécessaire pour des nombres de Reynolds magnétique supérieurs mène à des coûts de calcul trop importants. La figure 3.11a montre le champ magnétique dipolaire typique au cours de sa décroissance généré par le mode de spin-over. La figure 3.11b présente l'étude systématique des taux de décroissance du mode de spin-over et du mode (1,3), pour différents nombres d'Ekman, avec un milieu extérieur isolant (rapport des conductivités $\gamma_v/\gamma \leq 10^{-4}$). Les résultats, qui s'alignent sur une loi d'échelle en $1/Rm$, montrent que le paramètre de contrôle est effectivement le nombre de Reynolds magnétique. Cela indique également qu'un comportement diffusif est obtenu dans cette gamme de Rm . Notons que cela n'empêche pas l'écoulement d'être potentiellement capable d'exciter une dynamo. En effet, à titre de comparaison, les taux de décroissance de nos simulations numériques MHD d'une sphère précessant à un angle de 60° et à une vitesse angulaire $\Omega_p = 0.3$ (ce qui correspond au cas étudié par Tilgner, 2005) sont également représentés pour $E = 1/700$. Selon Tilgner (2005), le seuil dynamo est alors obtenu pour $Pm/E \approx 7000$, du moins si la présence de la graine interne solide présente dans ses simulations est négligeable. Cependant, les points représentés en figure 3.11b pour ce cas de précession sont proches des points correspondant à l'instabilité elliptique et ne permettent pas de prédire que l'écoulement est effectivement capable d'exciter une dynamo. Notons que ces résultats sont également proches des taux de décroissance donnés par Tilgner (1998) dans son étude de la dynamo cinématique de l'écoulement de Poincaré dans un sphéroïde en précession d'un rapport d'aspect $c/a = 0.9$. La figure 3.11c est semblable à la figure 3.11b, mais avec des conditions de pseudo-vide à la paroi externe. La plupart des points suivent la tendance diffusive. Néanmoins, le mode (1,3) semble quitter cette tendance pour les grands Rm , ce qui est très encourageant. Une telle tendance laisse penser qu'une dynamo excitée par les marées n'est pas impossible, alors même qu'un travail récent de Herreman & Lesaffre (2011) montre qu'une unique onde inertielle ne peut exciter de dynamo, du moins dans une gamme large de paramètres⁷.

3.6 Expériences d'induction dans un cylindre

Après les études d'induction de l'instabilité elliptique de Lacaze *et al.* (2006) et Herreman *et al.* (2009), le dispositif a été modifié pour étudier l'induction associée à la dynamique, plus riche, de l'instabilité elliptique en géométrie cylindrique. J'ai ainsi collaboré à cette étude expérimentale, publiée dans *Journal of Fluid Mechanics* (Herreman *et al.*, 2010), dont une partie des résultats expérimentaux obtenus est présentée ici.

3.6.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental *IMAGINE* (une abréviation pour *Instabilité MAGnéto INEr-tielle*) a été spécialement conçu pour étudier l'évolution non linéaire de l'instabilité ellip-

7. Ce qui est toutefois différent des écoulements générés par nos instabilités paramétriques à trois ondes.

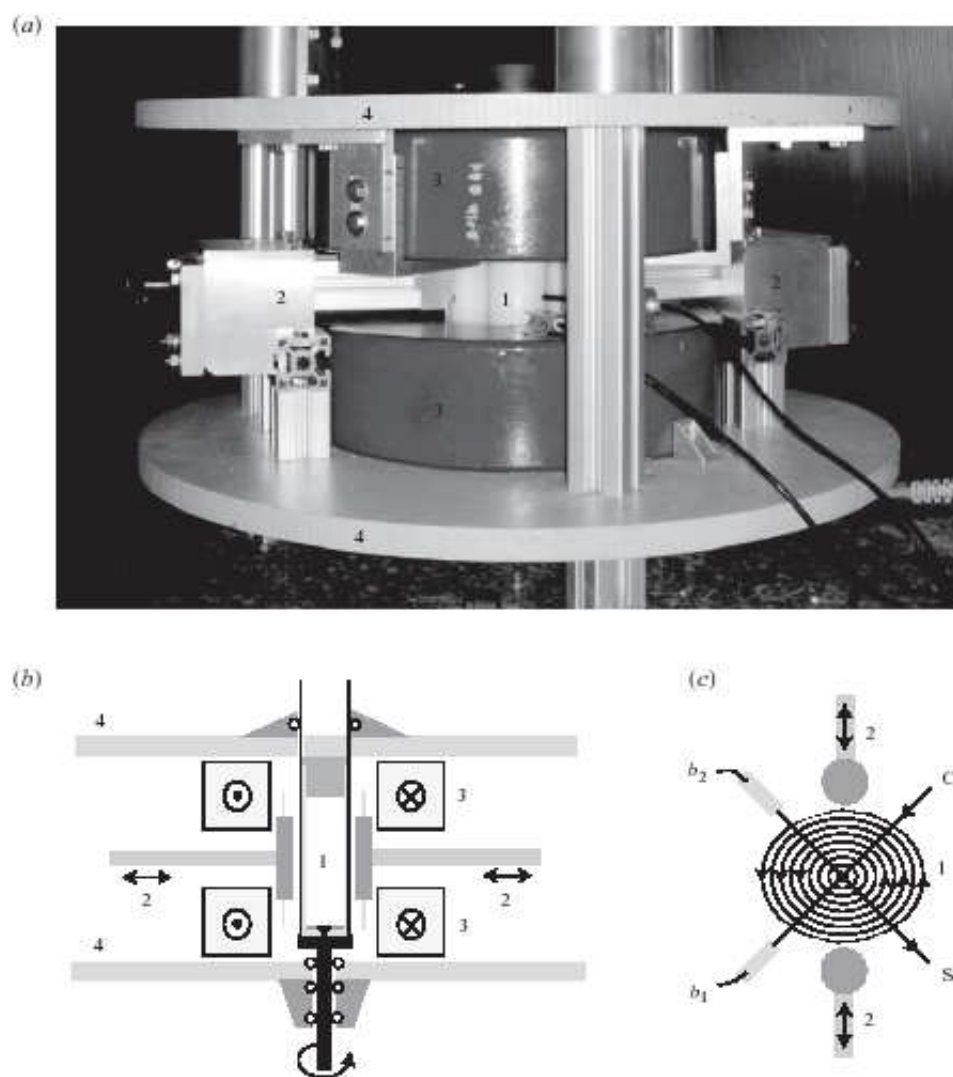


FIGURE 3.12 – (a) Photographie et (b, c) représentations schématiques du dispositif IMA-GINE, vu respectivement de côté et de dessus. (1) Cylindre déformé elliptiquement, rempli de Galinstan. (2) Rouleaux pour déformation elliptique. (3) Bobines de Helmholtz. (4) Plaques de fer. Les sondes à effet Hall b_1 et b_2 sont placées dans le plan équatorial et mesurent les composantes radiales du champ dans les directions C et S.

tique sous champ magnétique (figure 3.12). Il est semblable au dispositif classique d'étude hydrodynamique de l'instabilité elliptique développé tout d'abord par Malkus (1989), et utilisé au laboratoire depuis plusieurs années (e.g. Eloy *et al.*, 2003; Lacaze *et al.*, 2005b; Le Bars *et al.*, 2007). La nouveauté réside dans l'utilisation des effets magnétiques pour étudier les phénomènes d'induction dans un métal liquide en vertu de l'application d'un champ magnétique homogène aligné le long de l'axe de rotation. En effet, les ondes inertielles excitées par l'instabilité elliptique sont accompagnées par des champs magnétiques induits, qui sont détectés en dehors du cylindre par des sondes à effet Hall d'une sensibilité maximale de $300 \mu\text{V}/\text{mV}$ (FW - Bel-Sypris - Model 7030). Le fluide conducteur utilisé est du Galinstan, un eutectique de gallium-indium-étain liquide à température ambiante. Ses propriétés physiques sont : une masse volumique $\rho = 6440 \text{ kg. m}^{-3}$, une viscosité cinématique $\nu = 0.93 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, et une conductivité électrique $\sigma_e = 3.41 \pm 0.5 \cdot 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (valeur corrigée : voir Herreman *et al.*, 2010). Le fluide est contenu dans un récipient cylindrique déformable (voir le numéro 1 sur la figure 3.12) avec un rayon intérieur $R = 25 \pm 0.5 \text{ mm}$ et une hauteur H qui peut être ajustée entre 120 et 160 mm. Le cylindre tourne à une vitesse angulaire Ω entre 0 et 5 Hz, entraîné par un moteur AC de 600 W, avec un contrôle sur la vitesse angulaire d'une précision inférieure à 1 %. L'ellipticité β de la déformation elliptique peut être modifiée lors de l'expérience dans l'intervalle $[0; 0.3]$. Le cylindre est monté entre deux bobines de Helmholtz refroidies à l'eau (notées 3 sur la figure 3.12) et alimentées par une alimentation continue stabilisée d'une puissance de 3 kW. Nous pouvons imposer l'intensité B_0 du champ dans l'intervalle $[0; 0.12] \text{ T}$. L'amplitude typique du champ induit par l'instabilité est de l'ordre d'un dix millièème de B_0 . Par conséquent, des sondes à effet Hall très sensibles sont utilisées, avec une soustraction systématique du champ axial appliqué. Le signal restant est ensuite amplifié par un facteur 100 à 200 et filtré par un filtre passe-bas (fréquence de coupure entre 4 et 20 Hz), avant d'être enregistré par l'unité d'acquisition de données.

Les résultats présentés dans cette section sont adimensionnés par l'échelle de longueur R , l'échelle de temps Ω^{-1} et l'échelle de champ magnétique $B_0 Rm$. Ainsi, le champ induit reflète l'amplitude de l'écoulement perturbé.

3.6.2 Amortissement de l'instabilité elliptique par effet Joule

Deux cas de figures se présentent suivant les valeurs du champ imposé B_0 . À champ faible, la force de Lorentz est insuffisante pour modifier l'instabilité elliptique. Dans ce cas, le champ magnétique induit par le mode instable est une simple image de l'hydrodynamique. En particulier, la croissance exponentielle du mode de spin-over a pu être mesurée en fonction de l'amplitude de la déformation elliptique à proximité du seuil de l'instabilité. Dans le cas où la force de Lorentz n'est plus négligeable, nous avons montré qu'une partie de l'énergie cinétique est dissipée sous forme d'effet Joule, ce qui ralentit la croissance de l'instabilité. En figure 3.13, les résultats obtenus à partir des mesures expérimentales sont donnés pour le mode stationnaire principal $(-1, 1, 1)$ en fonction du nombre d'Elsasser. Ainsi, en figure 3.13a, les taux de croissance mesurés sur les croissances initiales exponentielles sont représentés. Les barres d'erreurs sont calculées à partir de l'écart à chaque ajustement exponentiel. L'amortissement du taux de croissance par effet Joule est parfaitement visible et un ajustement linéaire donne un amortissement en

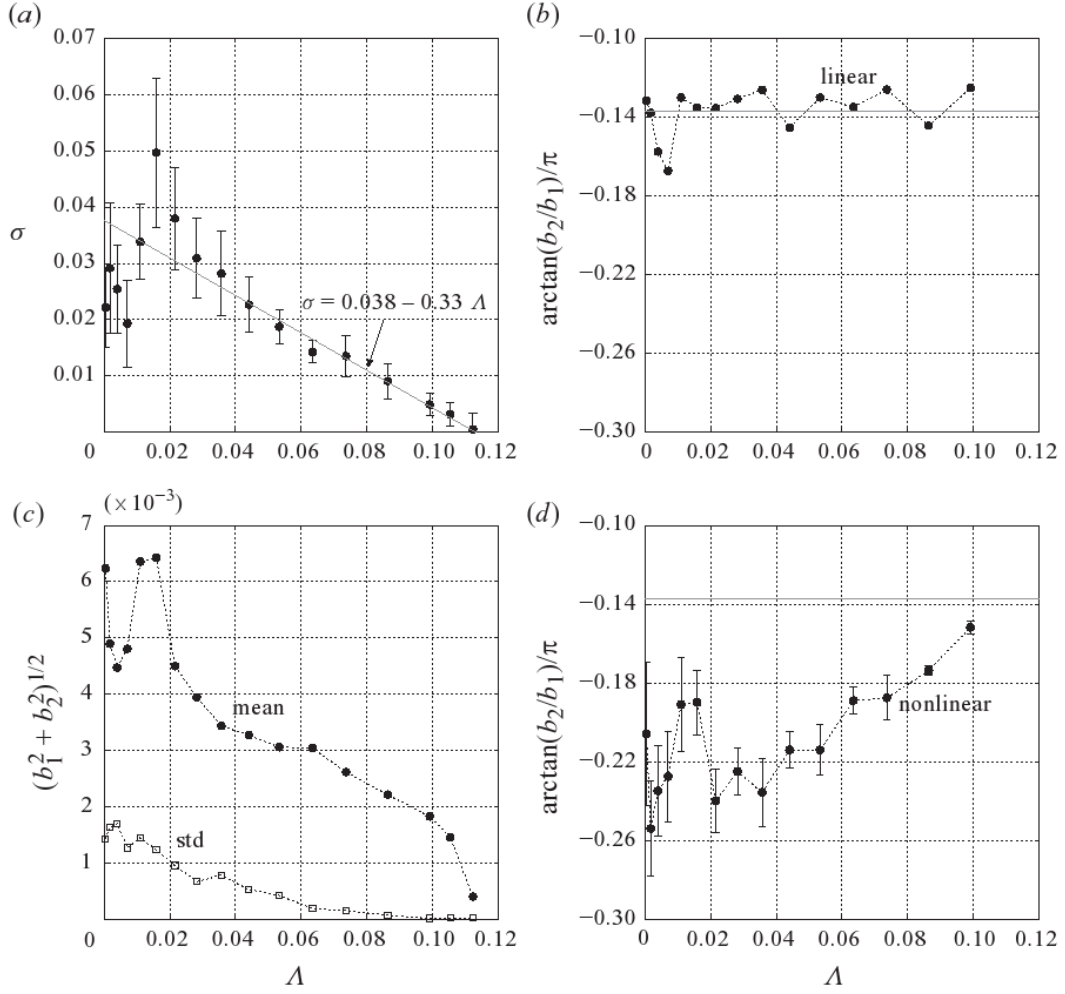


FIGURE 3.13 – Résultats expérimentaux pour le mode stationnaire principal $(-1, 1, 1)$ en fonction du nombre d'Elsasser. (a) Taux de croissance linéaire σ . Un ajustement linéaire pour $\Lambda > 0.02$ est également représenté par une ligne continue. (b) Déphasage angulaire des signaux mesurés par les deux sondes radiales durant l'étape de croissance exponentielle initiale. La ligne continue correspond à l'angle théorique prédit par l'analyse linéaire. (c) Valeurs moyennes (ronds) et écart-types (carrés) du champ radial $\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$. (d) Déphasage angulaire moyen des signaux mesurés par les deux sondes radiales en régime non-linéaire.

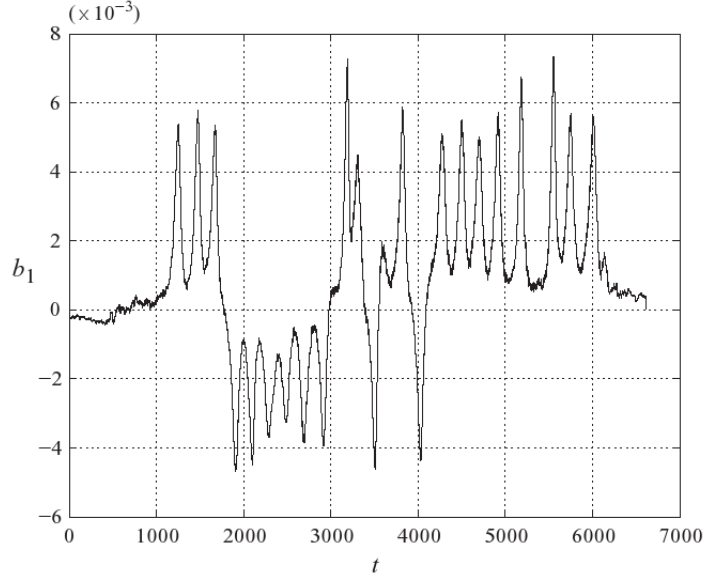


FIGURE 3.14 – Observation de cycles de croissance/décroissance avec des renversements chaotiques. Cette série temporelle a été mesurée par b_1 pour un rapport d'aspect $h = 147/25$, $\beta = 0.156$, $E = 1.18 \cdot 10^{-4}$ et $\Lambda = 4.9 \cdot 10^{-3}$.

-0.33Λ , ce qui est à comparer à la valeur théorique $-\Lambda/4$ (voir section 3.5.2). Notons que les taux de croissance mesurés sont typiquement inférieurs aux valeurs théoriques d'un facteur 2. Cet écart n'est pas dû au champ magnétique puisqu'il avait déjà été observé par Eloy *et al.* (2003). Nous pensons qu'il pourrait provenir de la non-homogénéité de la déformation elliptique, appliquée sur environ 2/3 de la hauteur du cylindre (voir Le Bars *et al.*, 2007). En effet, cet effet n'a pas été observé en géométrie sphérique (Herreman *et al.*, 2009). La figure 3.13b montre que le champ magnétique imposé ne modifie pas le déphasage angulaire durant l'étape de croissance exponentielle initiale, en accord avec les prédictions théoriques (voir Herreman *et al.*, 2010). La figure 3.13c montre que l'amplitude du mode, donnée par $(b_1^2 + b_2^2)^{1/2}$, décroît progressivement lorsque Λ augmente, et une bifurcation fourche apparaît à proximité du seuil. Enfin, la figure 3.13d confirme que le déphasage angulaire en régime non-linéaire tend vers la valeur prédite par la théorie linéaire lorsque la distance au seuil diminue.

D'autres expériences ont été réalisées et des transitions similaires dans les séries temporelles ont généralement été observées lorsque Λ est modifié. Toutefois, dans certaines séries, des cycles de croissance/décroissance apparaissent de façon plus organisée, peut-être contrôlée par un attracteur chaotique de basse dimension (voir Herreman *et al.*, 2010, pour plus de détails). La figure 3.14 présente un exemple typique où de telles inversions intermittentes peuvent être observées.

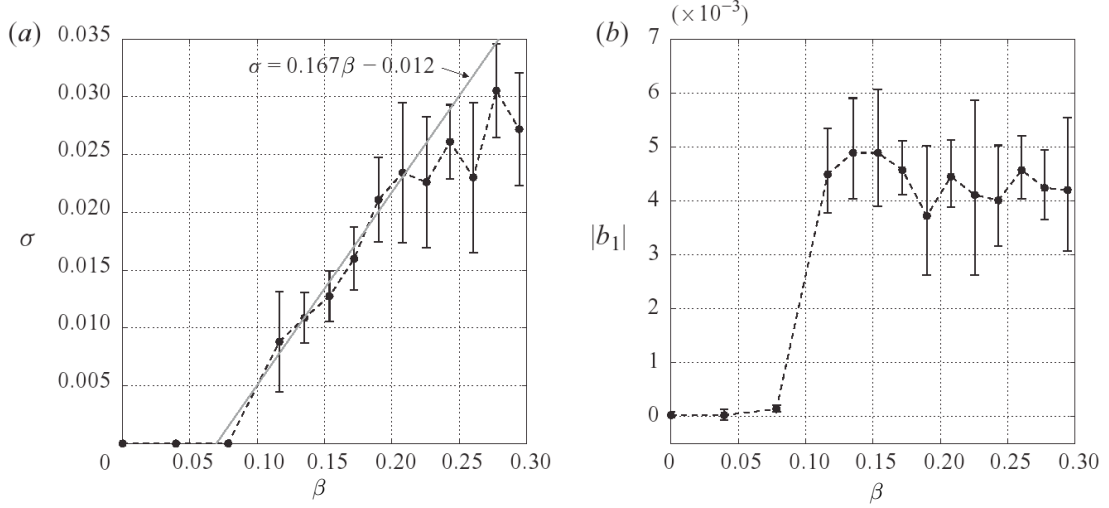


FIGURE 3.15 – (a) Taux de croissance linéaire σ et (b) amplitudes de saturation moyennes avec leurs amplitudes typiques d'oscillations (barres) en fonction de l'ellipticité de la déformation β . Paramètres : $h = 145/25$, $E = 1.18 \cdot 10^{-4}$ et $\Lambda = 0.0057$. En (a), la ligne continue représente un ajustement linéaire des six premiers taux de croissance non-nuls à partir du seuil.

3.6.3 Effet de l'ellipticité et du nombre d'Ekman

Nous avons vu en section 2.3.4 que l'amplitude de l'instabilité elliptique dépendait uniquement de la distance au seuil en nombre d'Ekman. Ce point peut également être étudié expérimentalement en variant la déformation et la vitesse de rotation du fluide. Nous avons donc mené une série d'expériences pour $h = 145/25$, $E = 1.18 \cdot 10^{-4}$ et une faible valeur du nombre d'Elsasser $\Lambda = 0.0057$. La figure 3.15a montre que le taux de croissance mesuré varie linéairement avec β , en accord avec l'analyse linéaire de stabilité. Cependant, un ajustement linéaire donne une pente de 0.167 au lieu de la valeur prédite par l'analyse globale de stabilité linéaire 0.531. Ce désaccord a déjà été mentionné en section 3.6.2, et provient probablement de l'incertitude sur la déformation elliptique imposée expérimentalement. En figure 3.15b, l'amplitude de saturation moyenne de b_1 ainsi que l'écart-type sont représentés. Le passage du seuil de l'instabilité elliptique est clairement visible autour de $\beta \geq 0.1$. Une fois le seuil franchi, la valeur de saturation semble relativement indépendante de la valeur de la déformation. Notons que des comportements similaires ont déjà été rapportés par Mason & Kerswell (2002) dans le cas d'une couche de fluide plane en précession : les énergies cinétiques des écoulements à faible et forte précessions semblent indépendantes de l'amplitude du forçage de précession dans les régimes loin du seuil linéaire.

Si la déformation ne contrôle pas l'amplitude de l'instabilité, on peut se demander ce qui la contrôle. Afin de répondre à cette question, nous avons mené une nouvelle série de mesures avec un champ magnétique imposé de $B_0 = 110 \cdot 10^{-4}$ T et une ellipticité de

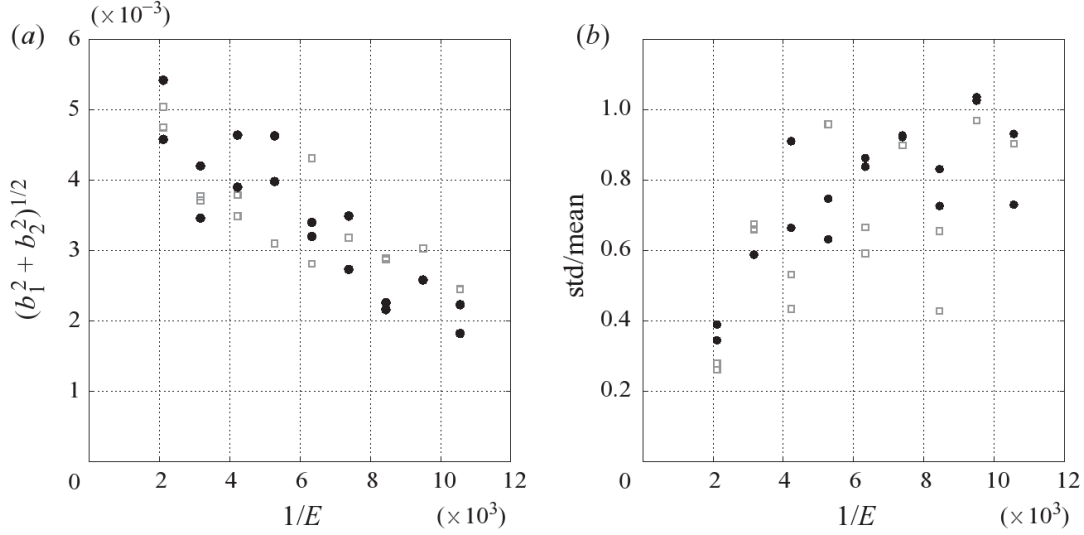


FIGURE 3.16 – (a) Valeur moyenne et (b) rapport de l'écart-type à la valeur moyenne de $(b_1^2 + b_2^2)^{1/2}$ pour des vitesses de rotation croissantes, représentées par $1/E$. Paramètres : $\beta = 0.15$ et $h = 145/25$. Les ronds (resp. les carrés) représentent une vitesse de rotation positive (resp. négative).

$\beta = 0.15 \pm 0.1$ pour différentes vitesses de rotation Ω dans la gamme $[0.5, 2.5] \times 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$. Pour ces vitesses de rotation, le nombre d'Ekman et le nombre de Reynolds magnétique associés varient respectivement dans les intervalles $[0.95, 4.73] \times 10^{-4}$ et $[0.007, 0.036]$. Le nombre d'Elsasser reste faible, variant dans la gamme $[0.0041, 0.0201]$. Chaque série temporelle a été répétée plusieurs fois et la rotation inversée dans certains cas. Cette inversion de la rotation échange les axes d'étirement et de compression, et donc les signaux b_1 et b_2 . Considérant le signal $\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, la valeur moyenne et le rapport de l'écart-type à la valeur moyenne sont respectivement représentés en figure 3.16a et 3.16b. Comme attendu, l'inversion de la rotation ne semble pas modifier les mesures, et l'amplitude moyenne semble diminuer lorsque la vitesse de rotation augmente, contrairement à ce qui a été observé en section 2.3.4. Ce comportement est peut-être dû aux instabilités secondaires (Kerswell, 1999; Eloy *et al.*, 2003; Lagrange *et al.*, 2008) qui diminuent l'amplitude du mode stationnaire lorsque E augmente. La figure 3.16b montre que ce régime pourrait être accompagné d'une augmentation du niveau des fluctuations dans la mesure où l'écart type des fluctuations mesurées augmente progressivement avec $1/E$ jusqu'à des valeurs comparables à l'amplitude moyenne. Cependant, il est difficile d'être catégorique sur ce point à partir de nos mesures de champs magnétiques.

3.6.4 Dynamique non-linéaire

La figure 3.17 illustre la richesse de la dynamique non-linéaire de l'instabilité elliptique lorsque l'on s'éloigne de son seuil de stabilité, par exemple ici en décroissant progressive-

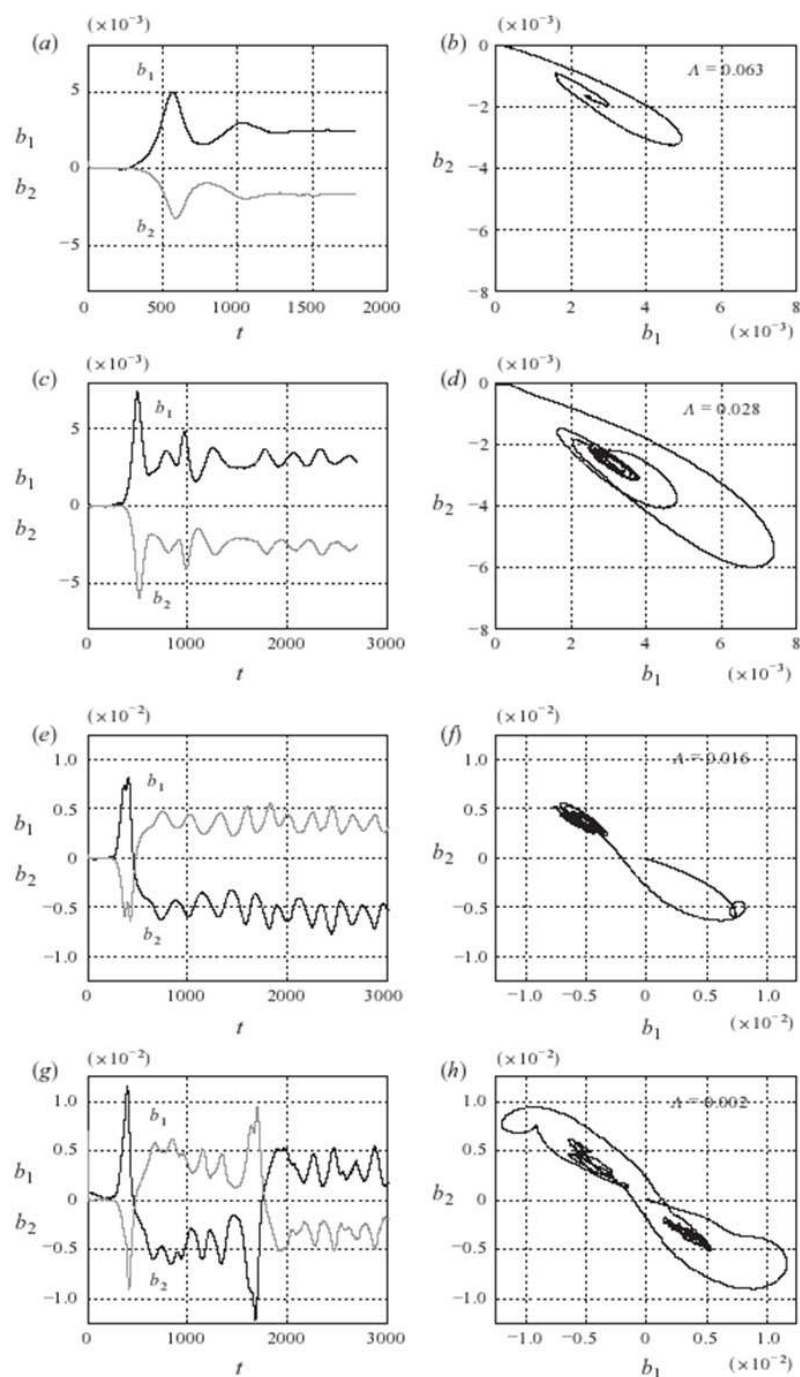


FIGURE 3.17 – Exemples de séries temporelles des champs magnétiques b_1 et b_2 déterminées expérimentalement et diagrammes de phase correspondants pour différentes valeurs du nombre d'Elsasser Λ . Ici, le rapport d'aspect du cylindre vaut $h = 148/25$, le nombre d'Ekman $E = 1.58 \cdot 10^{-4}$ et l'excentricité $\beta = 0.15$.

ment le champ imposé. Pour des champs relativement forts ($\Lambda = 0.063$), la saturation a lieu le long d'une spirale dans le plan (b_1, b_2) . Les trajectoires semblent quitter l'origine vers le bas, comme ce serait le cas pour une bifurcation supercritique. Pour un champ modérément fort ($\Lambda = 0.028$), la structure en spirale dans le plan (b_1, b_2) est toujours présente, mais le système ne sature plus et évolue lentement vers une modulation de cycle limite. Un changement radical est observé pour des champs plus faibles ($\Lambda = 0.016$) : après la croissance initiale le long d'une direction fixe dans le plan de phase, un changement soudain de direction est observé conduisant à un changement de signe des deux composantes magnétiques. Après ce renversement, les champs magnétiques restent dans un domaine près d'un point fixe, avec de petites oscillations irrégulières. Pour un champ magnétique imposé faible ($\Lambda = 0.002$), les oscillations deviennent suffisamment grandes pour entraîner plusieurs inversions. Lorsque ces renversements se produisent, les champs magnétiques induits disparaissent presque complètement, de telle sorte qu'une phase de croissance linéaire peut de nouveau être observée.

3.7 Dynamo synthétique expérimentale

Il est aujourd'hui irréaliste de construire une expérience de dynamo par instabilité elliptique du fait des contraintes expérimentales que cela impliquerait. Cependant, combinant le savoir-faire acquis au cours du travail expérimental présenté en section 3.6 et celui de G. Verhille, une première étape est déjà en cours de développement sur la base du dispositif IMAGINE, permettant de tester la dynamique de saturation de l'écoulement sous champ magnétique. Dans ce modèle de dynamo synthétique (voir par exemple Verhille *et al.*, 2010, pour une approche similaire de l'écoulement de von Karman), une partie du cycle dynamo est générée par une source externe de rétroaction, mais l'écoulement chaotique entraîné par l'instabilité conserve un rôle majeur. Ainsi, à partir d'un champ magnétique axial B^a , nous mesurons le champ magnétique radial induit B_r^i par l'instabilité elliptique, qui, à son tour, contrôle l'intensité du champ magnétique axial appliqué, et est donc capable de modifier l'écoulement. Par conséquent, cette expérience permet d'aborder certaines questions en suspens concernant la dynamique d'une dynamo de marées, en fonction du gain externe dans la boucle de rétroaction. De plus, par rapport au dispositif von Karman de Verhille *et al.* (2010), IMAGINE permet d'inhiber l'instabilité elliptique par le champ magnétique, permettant ainsi de saturer une telle dynamo synthétique par modification de l'écoulement, et non par la puissance finie de l'alimentation des bobines.

3.7.1 Boucle de rétroaction expérimentale

Reprenant le dispositif IMAGINE, la boucle de rétroaction a été initialement constituée en connectant la sonde b_1 sur l'alimentation des bobines à travers un amplificateur : le courant circulant dans les bobines est alors proportionnel au champ induit, qui est lui-même proportionnel au courant induit (schéma 3.18). Le seuil de l'instabilité est alors déterminé par l'induction et le gain γ de la boucle. Cependant, outre les offsets des appareils électroniques, le bruit environnant et les courants dans les plaques ferromagnétiques

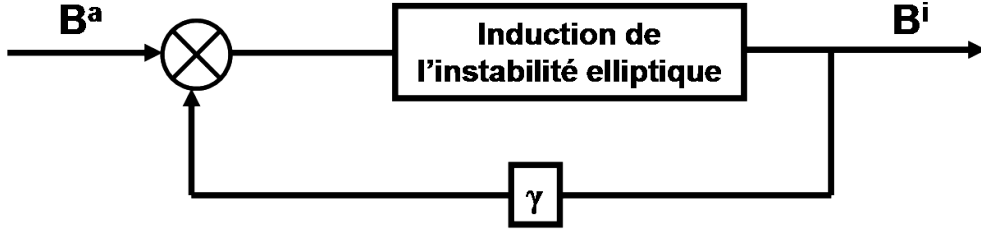


FIGURE 3.18 – Schéma de la rétroaction du signal induit B^i sur le champ appliqué B^a . L'induction de l'instabilité elliptique représente la fonction de transfert, tandis que le gain γ correspond au gain total de la boucle.

du dispositif⁸ induisent un bruit dans la boucle susceptible d'être amplifié. Le problème des offsets, qui dépendent légèrement de la température, a été en partie réglé en thermalisant les appareils, qui restent allumés en continu, et en compensant ces écarts avec l'amplificateur. Le problème du bruit a été plus difficile à régler du fait de la faible induction de l'instabilité elliptique (un dix millième du champ appliqué !). Deux modifications principales ont été apportées pour régler ce problème. Tout d'abord, la sonde b_2 a été positionnée à l'opposée de la sonde b_1 de sorte que $b_1 - b_2$ permet de mesurer uniquement la composante anti-symétrique du champ radial induit et ainsi de s'affranchir du bruit axisymétrique : le signal mesuré provient alors majoritairement de l'induction de l'instabilité elliptique. Ensuite, un micro-manipulateur (optique) a été adapté pour régler l'horizontalité des sondes radiales le plus précisément possible, ce qui minimise la composante du champ axial dans la mesure des sondes. L'horizontalité est ainsi réglée avec une précision de l'ordre de 10^{-5} rad.

Finalement, en s'affranchissant des offsets et du bruit, le champ appliqué à l'instant t_0 est donné par $B^a = B_0^a$, tandis que le champ (radial) induit est donné par $B_r^i = Rm_{eff} B_0^a$, où Rm_{eff} est un nombre de Reynolds magnétique effectif. À l'instant $t_0 + dt$, le champ appliqué est donné par $B^a = B_0^a + \gamma Rm_{eff} B_0^a = (1 + \gamma Rm_{eff}) B_0^a$, avec γ le gain total du bouclage. La série est donc géométrique, et le champ appliqué est donc donné en dessous du seuil ($\gamma Rm_{eff} < 1$) par :

$$B^a = \frac{B_0^a}{1 - \gamma Rm_{eff}}. \quad (3.64)$$

Au-dessus du seuil, i.e. pour $\gamma Rm_{eff} > 1$, la série diverge, et l'instabilité prend place dans la boucle. Cette instabilité est appelée *dynamo synthétique*. Comparé aux expériences déjà menées sur l'écoulement de Von Karman à Lyon, le champ magnétique est ici capable d'inhiber l'instabilité hydrodynamique lui donnant naissance. La saturation d'une telle dynamo est donc ici contrôlée par l'écoulement.

8. Ces plaques ont été mises en place pour obtenir un champ magnétique imposé le plus homogène et uniforme possible dans les mesures d'induction présentées en section 3.6.

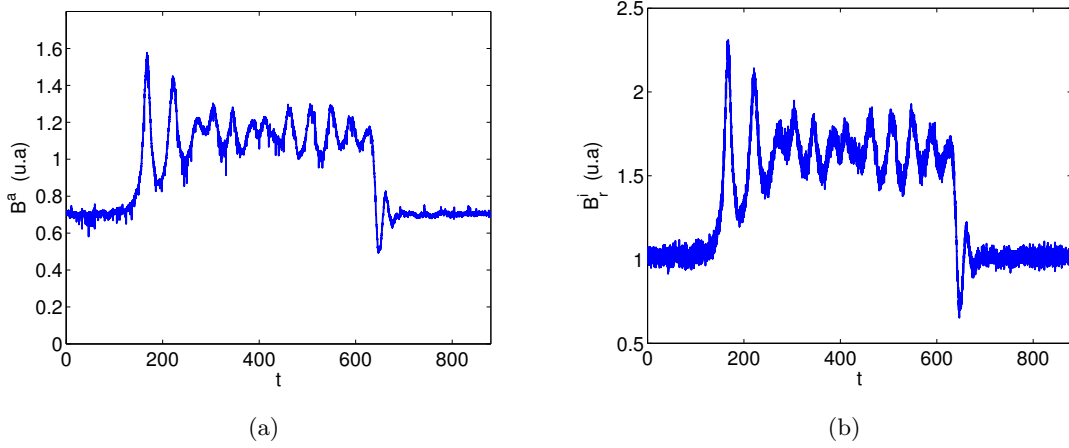


FIGURE 3.19 – Évolution temporelle typique des champs appliqués B^a (fig. a) et du signal B_r^i donné par $b_1 - b_2$ (fig. b). Paramètres : $\beta = 0.14$, $E = 4.7 \cdot 10^{-4}$, avec un champ initial axial d'environ 70 G. Le temps est ici adimensionné par la vitesse angulaire de rotation Ω du fluide, tandis que les champs sont donnés en unités arbitraires. Notons que le régime hydrodynamique dans cette gamme de paramètres donne des cycles similaires à ceux qui sont représentés sur ces figures.

3.7.2 Premiers résultats expérimentaux

La figure 3.19 montre l'évolution temporelle typique des mesures de champs appliqué et induit. Il est tout d'abord satisfaisant de noter que les modifications apportées au système permettent effectivement d'obtenir des signaux beaucoup moins bruités que ceux obtenus en section 3.6. En effet, les signaux présentés en figure 3.19 sont les signaux bruts, sans filtrage numérique *a posteriori*. Notons également l'offset initial des signaux, montrant qu'un champ constant est initialement appliqué au système afin d'initier le bouclage. Notons que cet offset n'est ici pas un problème dans la mesure où l'alimentation utilisée pour les mesures présentées ici est unipolaire : en l'absence de possibilité d'inverser le courant, il n'est donc pas possible d'étudier de dynamo synthétique avec renversement du champ. Ce type d'étude est en cours grâce à l'acquisition d'une alimentation bipolaire, capable d'amplifier le champ axial dans un sens ou dans l'autre.

3.7.2.1 Étude systématique en fonction de la vitesse de rotation

Une première étude systématique en fonction de la vitesse de rotation a été effectuée (fig. 3.20). Afin de savoir si le seuil de la dynamo est franchi, il faut déterminer le gain de la boucle. La formule (3.64) montre que B_r^i/B^a représente le nombre de Reynolds magnétique effectif Rm_{eff} (fig. 3.20a), tandis que $1 - B_0^a/B_a$ permet d'obtenir γRm_{eff} , et donc γ (fig 3.20b). Le nombre de Reynolds magnétique effectif variant en première approximation linéairement avec la vitesse de rotation, l'évolution linéaire de B_r^i/B^a aux

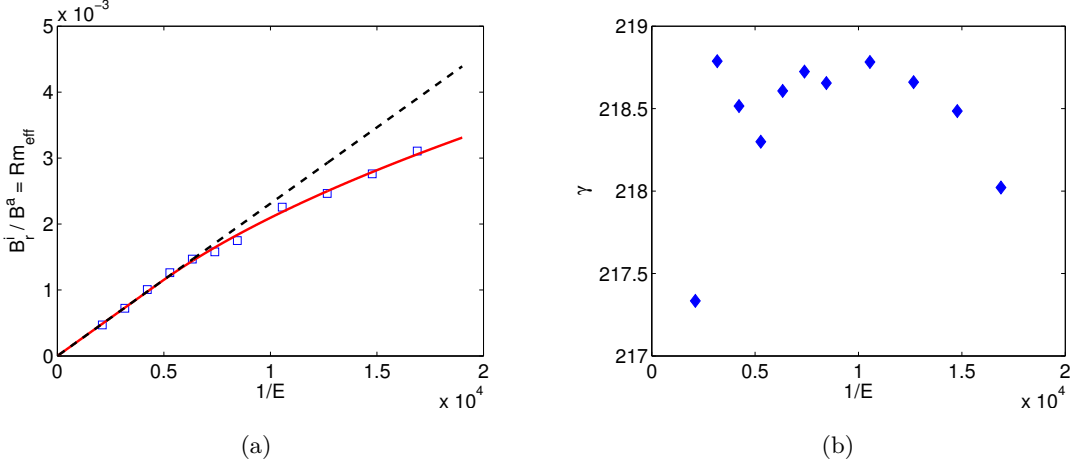


FIGURE 3.20 – Étude systématique en fonction de la vitesse de rotation du rapport du signal B_r^i , donné par $b_1 - b_2$, au champ appliqué (fig. a), et du gain γ de la boucle (fig. b). Paramètres : $\beta = 0.14$, avec un champ initial axial d'environ 70 G. La ligne continue correspond à l'ajustement de la fonction (3.65), tandis que la ligne interrompue est un simple ajustement linéaire des 5 premiers points.

grands nombres d'Ekman est satisfaisante. Pour expliquer l'écart à la tendance linéaire aux faibles nombres d'Ekman, Verhille (2010) propose de considérer le volume de fluide créant le champ magnétique. Lorsque la longueur de diffusion du champ magnétique est plus petite que le rayon du cylindre, le volume utile est donné par $\pi[R^2 - (R - l_d)^2] h$, où $l_d \sim 1/\sqrt{\mu\sigma\Omega}$ est la longueur de diffusion dans le matériau. Une autre façon de voir cela est de considérer l'expulsion du champ magnétique par un écoulement en rotation solide à fort Rm . La figure 3.20a montre ainsi un ajustement sur les points expérimentaux de la fonction associée à ce mécanisme :

$$B_r^i / B^a = \begin{cases} a R^2 \Omega & \text{si } R < b/\sqrt{\Omega} \text{ (longueur de diffusion supérieure à } R) \\ a \Omega \left[R^2 - \frac{1+\text{sgn}(R-b/\sqrt{\Omega})}{2} (R - b/\sqrt{\Omega})^2 \right] & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.65)$$

où a et b sont deux paramètres ajustables. Une telle écriture permet de corriger le volume utile de fluide uniquement dans le cas où $l_d < R$ (effet de peau). Le bon ajustement est satisfaisant et le paramètre b issu de l'ajustement permet de remonter à une conductivité électrique de $\sigma_e = (\mu\Omega b^2)^{-1} \approx 7 \cdot 10^5 \text{ S.m}^{-1}$, cohérent avec la valeur expérimentale $\sigma_e = 3.41 \pm 0.5 \cdot 10^6 \text{ S.m}^{-1}$. L'écart peut s'expliquer par le fait que le vortex du mode excité de l'instabilité elliptique est incliné, ce dont notre estimation du volume utile ne tient pas compte.

Le gain théorique de la boucle est donné par le produit de la sensibilité du gaussmètre, le gain de l'amplificateur et le facteur entre la tension délivrée par l'amplificateur et le champ magnétique alors créé par l'alimentation. Dans le cas de la figure 3.20b, le gaussmètre est réglé sur 10 G/V, le gain de l'amplificateur est de 30 dB, et le facteur

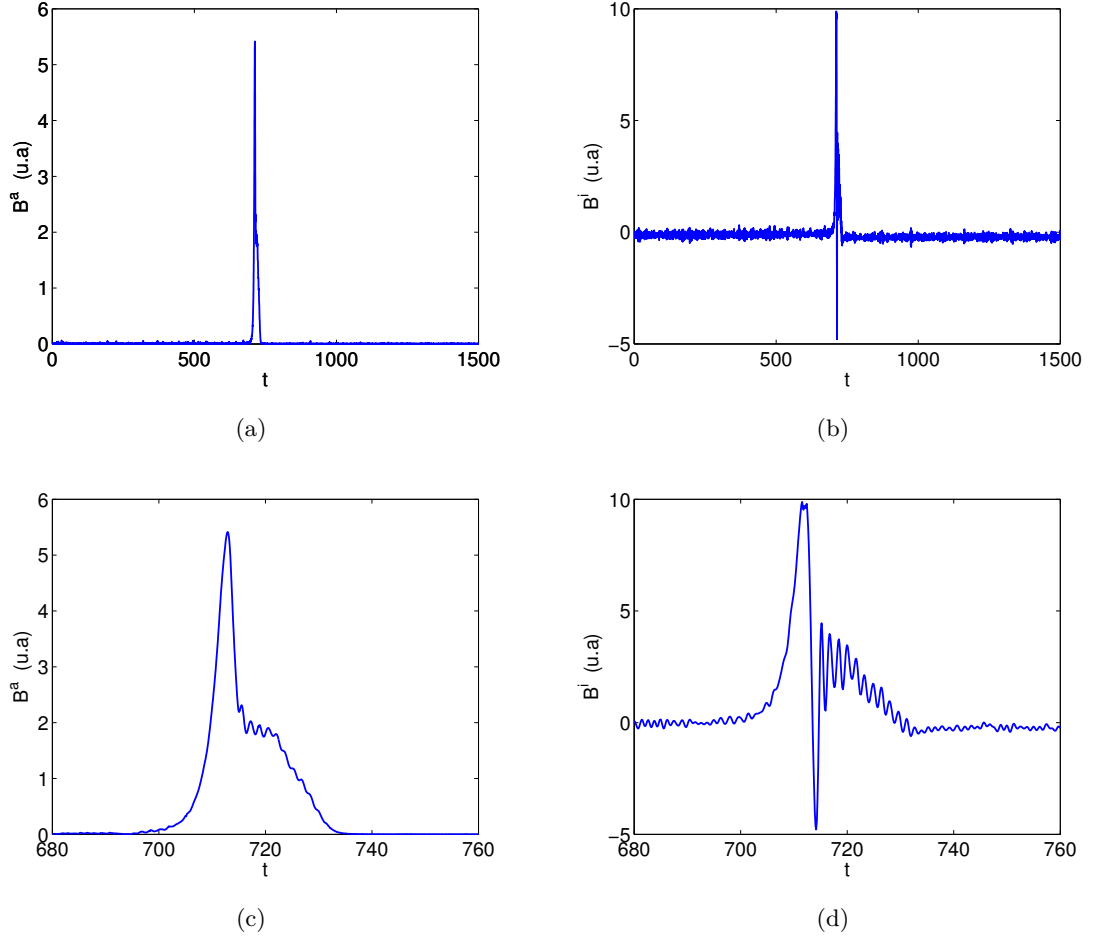


FIGURE 3.21 – Évolution temporelle typique des champs appliqués B^a (fig. a et zoom en fig. c) et du signal B^i donné par $b_1 - b_2$ (fig. b et zoom en fig. d). Paramètres : $\beta = 0.14$, $E = 1.18 \cdot 10^{-4}$, avec un champ initial nul.

entre la tension en entrée de l'alimentation et le champ magnétique créé est d'environ 66 G/V, ce qui donne un gain total de $0.1 \cdot 10^{3/2} \cdot 66 \approx 209$. La figure 3.20b montre que les mesures sont cohérentes entre elles, fournissant $\gamma \approx 220$, soit 5 % d'écart. Pour l'étude systématique en fonction de la vitesse de rotation effectuée ici, la raison de la suite géométrique γRm est ainsi comprise entre 0.1 et 0.7, et nous sommes donc bien sous le seuil de la dynamo synthétique.

3.7.2.2 Dynamo synthétique

Afin de passer au-dessus du seuil de la dynamo synthétique, le gain de la boucle de rétroaction est augmenté. Cependant, cela demande de placer le dispositif expérimental dans des limites de sensibilités, de gains et de réglages difficiles à mettre en place. Jusqu'à présent, elle n'a donc été obtenue qu'une unique fois avec un fort gain (fig. 3.21), restabilisant l'écoulement brutalement. Ainsi, sur cette mesure, le champ magnétique créé et amplifié à partir de l'écoulement fluide a rapidement rétroagi, inhibant la source qui lui avait donné naissance. Notons qu'au cours de cette mesure, l'amplificateur n'a pas saturé en courant, assurant que la boucle de rétroaction a fonctionné comme prévu, ce qui est encourageant. De nouvelles modifications du dispositif expérimental, actuellement en cours, devraient permettre d'étudier de façon systématique cette dynamo synthétique, et d'obtenir des inversions de champ grâce à l'utilisation d'une alimentation bipolaire.

3.8 Synthèse du chapitre 3 et publications

En section 3.3, nous avons montré que des simulations MHD de dynamo étaient possibles avec le logiciel commercial COMSOL Multiphysics®, basé sur la méthode des éléments finis. Pour ce faire, le code a été validé en section 3.4 sur des cas de dynamos cinématiques, la dynamo de Ponomarenko et un écoulement de Von Karman, mais également sur le benchmark de dynamo dynamique convective proposé par Christensen *et al.* (2001). Les premières simulations numériques de l'instabilité elliptique en géométrie ellipsoïdale sous un champ magnétique imposé ont été présentées en section 3.5. Les résultats sur le taux de croissance en présence de dissipation Joule et sur le champ induit ont été discutés, et des résultats analytiques, obtenus à partir d'études locales, ont été confirmés. Ces travaux ont fait l'objet d'une soumission à *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*.

En section 3.6, nous avons montré que le champ magnétique pouvait être utilisé pour mesurer et contrôler un écoulement de métal liquide soumis à l'instabilité elliptique. De plus, pour le mode stationnaire $(-1, 1, 1)$ de l'instabilité elliptique, nous avons montré que la dissipation Joule peut être utilisée pour contrôler la transition vers des dynamiques complexes, décrites pour la première fois par des portraits de phase expérimentaux. Des cycles limites ont été observés, d'abord réguliers puis irréguliers, ainsi que des renversements lorsque l'amplitude de l'écoulement passe à proximité d'un point selle localisé à l'origine. Nous avons également montré que l'ellipticité n'est pas le paramètre adéquat pour décrire l'amplitude à saturation générée par l'instabilité loin du seuil : un écoulement d'ordre 1 peut être généré par une déformation elliptique très petite devant 1. Ces travaux, dont une partie seulement est présentée ici, ont été publiés dans *Journal of Fluid Mechanics* (Herreman *et al.*, 2010).

Enfin, la section 3.7 présente les modifications apportées au dispositif expérimental pour mettre en place une dynamo synthétique basée sur l'instabilité elliptique. Les premières études systématiques donnent des résultats conformes à ce qui est attendu théoriquement, et une première dynamo synthétique a été obtenue, restabilisant brutalement l'écoulement. Ces travaux sur le problème dynamo de l'instabilité elliptique se poursuivent, aussi bien du point de vue expérimental que du point de vue numérique.