Analyse a priori

Sommaire de ce chapitre

1. Introduction

Comme indiqué dans le chapitre III (cf. 1.4), en relation avec les connaissances mathématiques en jeu et en lien avec leurs adaptations attendues (Robert 2008), plusieurs « sous-activités mathématiques », liées à différentes mises en fonctionnement des connaissances à l'œuvre, sont distinguées, permettant de caractériser l'activité mathématique des élèves dans sa globalité. Nous distinguons dans les tâches complexes des sous activités de reconnaissance, d'organisation et de traitement. Comme nous nous focalisons sur l'entrée dans le niveau de conceptualisation visé (en particulier l'introduction de la définition formalisée), on va procéder à des analyses de tâche et activités qui correspondent au début du chapitre du manuel scolaire. Dans le logiciel, on regarde dans le cadre de ce travail les activités introductives (approche cinématique et approche formelle) ainsi que les 5 exercices. L'idée est d'analyser l'activité possible des élèves qui ont le support du manuel et ceux qui auraient le support du logiciel afin de vérifier si les occasions de proximités sont plus grandes avec le logiciel conformément à nos hypothèses de travail.

2. Analyse des activités proposées dans les manuels scolaires [1]

Rappelons tout d'abord que le mot « activité » dans le manuel veut dire pour nous plutôt « tâche » proposée aux élèves. Les activités proposées par le manuel ont déjà été présentées dans le chapitre « relief » quand il s'agit de dégager le niveau de conceptualisation visé par notre ingénierie.

[1] Nous nous sommes intéressés aux manuels de troisièmes sections mathématiques et sciences expérimentales qui proposent les mêmes contenus au début du chapitre « limite et continuité »

2.1. Analyse de l' « activité 1 page 23 »

1. Continuité en un réel

Activité 1

Soit f la fonction définie pour tout réel x par

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x>1 \ ,\\ 3 & \text{si } x=1 \ ,\\ 3x & \text{si } x<1 \ .\end{cases}$$

1. Représenter la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.
2. a. Représenter sur l'axe des ordonnées, l'ensemble des réels y tels que $|y-3|<0.1$.
   b. En déduire graphiquement, une condition suffisante sur x pour que $|f(x)-3|<0.1$.
3. Donner graphiquement une condition suffisante sur x pour que $|f(x)-3|<0.01$.

L'activité précédente suggère que f(x) peut être rendu aussi proche que l'on veut de f(1), dès que x est suffisamment proche de 1.
On dit que f est continue en 1.

(1) Pour la première tâche

1. Représenter la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

La question 1 correspond à un traitement classique de tracé d'une fonction affine donnée algébriquement par morceaux dans le registre graphique. Il y a donc un changement de registre « Représenter » (vers le graphique) qui n'est pas à la charge de l'élève mais demandé par l'énoncé. Les connaissances anciennes sont supposées disponibles, et c'est une application immédiate car les élèves sont déjà familiers avec les fonctions affines par morceaux (les élèves doivent reconnaître que c'est une fonction affine par morceaux). On peut dire qu'il y a aussi un peu d'organisation dans la mesure où il faut choisir la succession de point à prendre pour faire le tracé mais cela fait partie des connaissances anciennes, donc nous ne le relevons pas. En tout état de cause ce n'est pas lié directement à la continuité. Les activités proposées ici sont possibles pour tous les élèves.

(2) Pour la deuxième tâche

- Première sous-tâche :

2. a) Représenter sur l'axe des ordonnées, l'ensemble des réels y tels que $\lvert y-3\rvert < 0.1$

La question 2 est la même que celle rencontrée dans l'activité 2 « pour commencer ».

Comme dans l'activité 2 « pour commencer », les élèves doivent reconnaître l'équivalence « $|x| < r \Leftrightarrow x \in]-r, r[$ » (cette connaissance doit être disponible mais ils l'ont déjà mobilisé avant) avec une adaptation puisqu'il faut l'appliquer avec y-3 dans la valeur absolue. Dans le traitement les élèves doivent transformer $|y-3| < 0.1$ en une double inégalité et représenter graphiquement l'ensemble obtenu sur l'axe des ordonnées. Etant donné que cela correspond à ce qui a été fait dans l'activité « pour commencer », l'activité est encore possible pour tous.

- Deuxième sous-tâche :

b) En déduire graphiquement, une condition suffisante sur x pour que $|f(x)-3| < 0.1$.

Il y a un changement de cadre par rapport à la question a) car l'activité est ici bien dans le cadre fonctionnel. Il faut que l'élève adapte ses connaissances mises en fonctionnement dans le cadre graphique (passage de y à f(x)). On peut considérer aussi que c'est un changement de point de vue. On trouve que 2,9 < f(x) < 3,1. L'activité attendue ressemble à ce qui est demandé dans l'activité 3 de « pour commencer » mais avec plusieurs adaptations : tout d'abord l'expression de la fonction change avant et après x = 1 et ce que l'on demande n'est pas de « représenter graphiquement l'ensemble des abscisses des points » (activité 3 de « pour commencer ») ; dans cette tâche il est demandé une condition suffisante sur x. Il y a un donc un changement de vue demandé aux élèves (adaptation), ce qui rend l'activité possible uniquement *a maxima* (pour les bons élèves).
Les élèves peuvent en outre mobiliser des connaissances anciennes (reconnaissances) dans cette sous-tâche graphique mais cela ne peut-être qu'à maxima (et pas forcément nécessaire)

- Connaissance ancienne sur l'image réciproque → « *activité à maxima* »
- Connaissance ancienne sur « condition » (logique) → « *activité à maxima* »
- Connaissance en cours d'acquisition sur $f(I) \subset J$ dans le registre graphique → « *activité à maxima* »

(3) Pour la troisième tâche :

3. Donner graphiquement une condition suffisante sur x pour que $|f(x)-3| < 0.01$

Il s’agit presque de la même tâche que la précédente (du 2-a), sauf que, dans cette tâche, le degré d’approximation considéré est 0.01 au lieu de 0.1. Les élèves doivent donc juste adapter leurs connaissances mises en fonctionnement à la question précédente mais les étapes ne sont pas données. Il y a donc une petite organisation à développer.

Ainsi, les activités attendues des élèves sont les mêmes que celles relevées précédemment sauf que l’activité de traitement en rapport avec la représentation graphique de l’ensemble trouvé est difficile, voire impossible dans l’environnement papier/crayon vu que la valeur 0.01 n’est pas accessible dans un repère habituel pris généralement avec un carreau (environ 1 cm) sur le cahier de l’élève. On l’a déjà signalé dans la partie « relief » pour dire que le commentaire peut difficilement être alors une proximité ascendante pour les élèves pour faire le lien avec la connaissance nouvelle (la définition formalisée), étant donné aussi le peu d’expérimentation qu’ils ont pu faire avec seulement une fonction et deux valeurs de β.

(4) Le commentaire donné par le manuel à la fin de l’ « activité 1 » du manuel page est le suivant :

L’activité précédente suggère que f(x) peut être rendu aussi proche que l’on veut de f(1), dès que x est suffisamment proche de 1.

Les élèves doivent généraliser et interpréter les résultats précédents à partir de cette formulation, ce qui semble très difficiles à accomplir car le nombre de cas traités (0.1 et 0.01) est très réduit et ne permet pas aux élèves de conjecturer. L’activité de reconnaissance suggérée ici ne nous semble pouvoir être que « *a maxima* » (pour les meilleurs élèves).

Conclusion

De cette analyse a priori des activités des élèves relatives aux tâches proposées par le manuel pour introduire la définition formelle du concept de continuité, il nous semble que :

- Les auteurs proposent une introduction de la définition formelle, en suivant un procédé exploratoire en partant de deux exemples correspondants à deux valeurs particulières supposées génériques : $\beta = 0.1$ et $\beta = 0.01$, sur une seule fonction particulière affine par morceauxx. Cela n'installe pas assez d'activités mathématiques chez les élèves pour que le professeur puisse introduire la définition formalisée avec des proximités ascendantes.
- Le choix de ces valeurs considérées est critique et semble abusif du fait que, réellement, les élèves n'arrivent pas à voir 0.01 sur leurs graphiques dans lesquels ils ont l'habitude de prendre une graduation de pas 1 centimètre ou un carreau de leurs cahiers.

Comme nous avons déjà dit dans la partie relief, le commentaire proposé par le manuel « L'activité précédente suggère que f(x) peut être rendu aussi proche de f(1), dès que x est suffisamment proche de 1», sur lequel l'enseignant va se baser pour introduire la définition formelle de la continuité, nécessite un grand travail didactique de la part de l'enseignant au niveau des deux étapes suivantes:

- Une première concernant le mot « suggère » qui se base sur une vision expérimentale graphique : les élèves doivent reconnaître que les deux seules valeurs considérées sont génériques et l'enseignant doit les aider pour cela ;
- Une deuxième concernant la traduction de ce commentaire dans un langage mathématique formel. En effet les activités sont uniquement dans le registre graphique (associées au graphe de la fonction f particulière qui est demandé à la question 1) et le lien avec le langage formel de la définition ne peut pas du tout être immédiat.

Dans les deux étapes mentionnées, nous pensons que les interventions de l'enseignant (en termes d'aides sur les tâches et de proximités compte tenu des activités possibles) doivent être des éléments importants pour atteindre les objectifs de l'activité (du manuel) en vue d'introduire la définition formelle de la continuité. Mais nous pensons que les reconnaissances à la charge des élèves sont trop grandes (*a maxima*) dans l'activité proposée pour que le discours de l'enseignant puisse être réellement en proximité ascendante avec les activités des élèves sur ce qui leur est proposé. La définition formelle proposée à ce moment-là par le manuel ne semble pas non plus pouvoir se constituer en proximité ascendante à partir des activités des élèves qui relevaient uniquement du registre graphique.

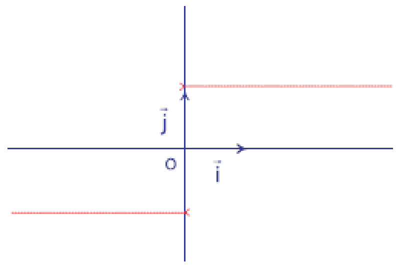
2.2. Analyse de l'activité 2 page 23

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On a représenté la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ -1 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

1. Reproduire la figure.
2. Calculer $|f(x) - f(0)|$.
3. Peut-on rendre la quantité $|f(x) - f(0)|$ aussi petite que l'on veut, en rapprochant x de 0 ?



L'activité précédente illustre le cas d'une fonction non continue en 0.

(1) Pour la première tâche

1. Reproduction de la figure donnée.

C'est une tâche élémentaire. Il y a une succession de traitement. L'activité est possible pour tous et ne met en fonctionnement que des connaissances anciennes disponibles.

(2) Pour la deuxième tâche

2. calcul de $\|f(x) - f(0)\|$

Reconnaissance : la fonction est affine par morceaux donc il faut a priori considérer plusieurs cas. Organisation : considérer les différents cas : $x < 0, x = 0$ et $x > 0$. Le traitement est du calcul algébrique simple. L'activité est possible pour tous car les élèves sont habitués aux fonctions affines par morceaux et au fait de traiter plusieurs cas. En fait ici la quantité vaut toujours 1.

(3) Pour la troisième tâche

Peut-on rendre la quantité $|f(x) - f(0)|$ aussi petite que l'on veut, en rapprochant x de 0 ?

La réponse à la question 3 n'est peut-être pas immédiate étant donné le contexte et sa formulation. L'élève doit savoir qu'une expression numérique constante ne peut pas être rendue aussi petite que l'on veut (elle n'est pas variable). Rapprocher x de 0 ne veut pas dire que x=0. Il y a de la reconnaissance en jeu et l'activité possible peut-rester *a maxima* (ça peut bloquer les élèves).

Cela peut aussi engendrer des difficultés chez l'élève avec l'expression « rendre aussi petit » qui traduit pour lui « une variabilité » i.e. relative aux quantités variables. Les auteurs auraient pu évoquer les comportements de la fonction f à gauche et à droite du réel x_0. Mais l'activité est uniquement dans les registres algébrique et graphique. Le jeu de registre entre l'algébrique et le graphique renvoie uniquement à l'idée de saut dans le cas de la non continuité en un point. On peut penser ici qu'il est difficile que l'activité illustre la non continuité en 0 dans son lien avec la définition formelle.

(4**) Pour le commentaire** proposé à la suite de l'activité 2 :

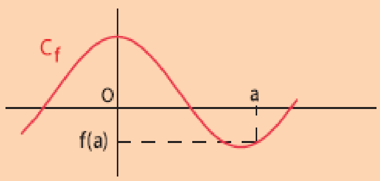
L'activité précédente illustre le cas d'une fonction non continue en 0.

Vocabulaire
Une fonction non continue en a est dite discontinue en a.

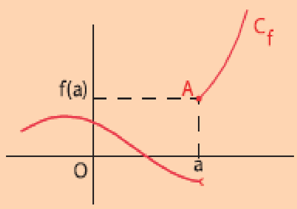
Le lien avec la continuité est laissé à la charge de l'enseignant, il doit revenir sur le commentaire établi dans l'activité précédente concernant le cas d'une fonction continue « *f(x) peut être rendu aussi proche que l'on veut de f(1), dès que x est suffisamment proche de 1* » pour en formuler un commentaire analogue pour le cas de cette fonction discontinue. Mais cette occasion de proximité descendante (lien entre la définition formelle introduite à l'activité 1 et ce qui a été développé sur la non continuité dans l'activité 2) reste très difficile à faire à partir du seul cas particulier qui a été traité (par exemple le fait que la quantité $|f(x) - f(1)|$ vaut toujours 1 et n'est pas variable).

(5) Pour « la conséquence » proposée en vue de caractériser graphiquement les cas de continuité et de discontinuité d'une fonction en un réel,

Conséquence



Lorsque la représentation graphique de f sur un intervalle ouvert I, met en évidence un tracé continu de la courbe la fonction f est continue en tout réel a de I.



Lorsque la représentation graphique de f sur un intervalle ouvert I met en évidence un saut du tracé de part et d'autre du point A (a, f(a)), la fonction f est discontinue en a.

Commentaire

- ✓ Aucun rapprochement n'est proposé pour ces caractérisations et l'enseignant trouvera des difficultés remarquables pour passer d'une définition formelle à une caractérisation graphique à l'aide de ce saut existant ou non de la courbe (difficulté à faire un discours qui soit en proximité - descendante - avec l'activité qui a pu être développée par les élèves)
- ✓ Encore une fois, le manuel laisse à la charge de l'enseignant tout un discours fort utile à la mise en place de la définition du concept de continuité et pour ne pas se limiter à faire penser les apprenants à la caractérisation du tracé continu ou non.
- ✓ L'enseignant doit mettre dans la tête de ses élèves qu'une fonction n'est pas toujours donnée par sa courbe et donc cette caractérisation n'est pas « mathématique ».

Conclusion

La diversification des formes de conversion est laissée à la charge de l'enseignant qui doit gérer les complexités sous-jacentes de son exécution, par exemple, il n'est pas facile pour les élèves de convertir les résultats de l'activité 1 page 23 en une formulation en langue naturelle du contenu du commentaire proposé à la suite de l'activité.

Résultats de l'activité 1 page 23	→	Le commentaire : « L'activité précédente suggère que f(x) peut être rendu aussi proche que l'on veut de f(1), dès que x est suffisamment proche de 1 ».	→	La définition formelle de la continuité en β et α

La caractérisation graphique du concept de continuité d'une fonction en un point x_0 est introduite d'une manière parachutée au moyen de la conséquence donnée à la page 24, juste après la formulation de la définition formelle et l'activité 2 de la page 23 qui présente un cas de fonction (fonction affine par morceaux) discontinue en un réel. L'enseignant se réfère aux représentations de ses élèves sur le mot « continue » pour l'exécution de cette conversion. Ce qui demeure caché, toujours selon nous, c'est cette relation entre le « saut » de la courbe en son point d'abscisse x_0 qui caractérise la discontinuité de la fonction f en x_0 et le β qui figure dans la définition formelle (cette dernière apparait normalement à l'issue de la question 3 de l'activité 2).

3. Analyse des tâches proposées par le logiciel.

Dans ce qui suit, nous allons analyser les quatre activités proposées dans chacune des deux approches (cinématique et formelle) en identifiant les activités attendues en termes de reconnaissance, traitement et organisation, celles qui sont possibles pour tous, celles qui sont seulement *a maxima*.

3.1. L'approche cinématique

Enoncé des tâches proposées:

> On considère une fonction f: IR → IR donnée par sa courbe et son expression (ci-contre) et on considère le réel $x_o = 2$
>
> Consigne:
>
> On aimerait étudier le comportement de la fonction f au voisinage de x_o
> Exploiter les options de l'animation et notamment celle de "pas à pas", du choix de la "vitesse" et le tableau de valeurs ci-dessous pour:
>
> Compléter le commentaire suivant:
>
> Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proche de $x_0 = 2$, alors ...

❋ **L'activité 1:**

L'expression de la fonction f est : $f(x) = -1 + \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2$ et $x_0 = 2$ (voir copie d'écran dans la partie « ingénierie »).

L'activité attendue des élèves :

- Déplacement d'un point mobile (traitement « manipulatoire », *activité pour tous*),
- Manipulation des boutons d'animation « tendance par valeurs inférieures » ou « … par valeurs supérieures » suite à la présentation de l'enseignant (il est attendu des aides manipulatoires (techniques) de la part du professeur pour initier les élèves à ces fonctionnalités).

Le logiciel propose alors une visualisation dynamique du graphique (le point mobile sur la courbe se rapproche du point d'abscisse $x_0 = 2$) et de la table numérique (qui affiche des valeurs de x et des valeurs de $f(x)$). Cette visualisation aide les élèves à faire le lien entre le registre graphique et le registre numérique dans leurs aspects dynamiques (*reconnaissance possible pour tous*). Le fait que le logiciel propose de la visualisation dynamique est également supposé aider les élèves à reconnaître le lien entre l'approche cinématique et l'approche par approximation.

Il est ensuite demandé aux élèves de remplir la zone de texte en langage naturel, à partir de ces reconnaissances permises par le logiciel. Le passage à la formulation peut donc rester une activité *a maxima* (à cause de cette reconnaissance) et suppose certainement pour des élèves d'avoir une aide procédurale. L'activité devient alors *a minima* pour ces élèves.

Il n'y a pas d'activité d'organisation spécifique, car cette dernière est prise en charge par le logiciel.

❋ **L'activité 2:**

L'expression de la fonction f est : $f(x) = \begin{cases} -x - \frac{1}{2} & si \ x < 2 \\ x - 4 & si \ x \geq 2 \end{cases} \quad et \ x_0 = 2$ et on va demander aux élèves de refaire la même manipulation, sans aides manipulatoires. Il est à noter que dès cette deuxième fonction, on étudie une discontinuité.

Les élèves doivent reconnaître un saut dans la représentation graphique (reconnaissance possible pour tous dans la mesure où c'est graphique), reconnaître la valeur de $f(x_0)$ graphique (attendue *pour tous*) car des connaissances anciennes sur les généralités sur les fonctions sont supposées disponibles - et même sur celles de l'introduction de la notion de limite en deuxième année qui a été faite à l'aide des tableaux de valeurs.

A nouveau les élèves doivent formuler en langage naturel (compléter la phrase proposée par le logiciel qui est toujours la même dans le cas de l'approche cinématique). On peut penser que les connaissances mises en fonctionnement dans l'activité 1 (éventuellement avec aide procédurale du professeur) vont être adaptées pour que cette formulation soit une activité possible *pour tous*.

❈ **L'activité 3**

L'expression de la fonction f est : $f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{x^2}{2} & si \ \ x < 1 \\ x \ \ si & x \ \geq \ 1 \end{cases} \quad et \ x_0 = 1$

Les mêmes enchainements des sous activités sont attendus (sauf peut-être une reconnaissance supplémentaire (*a maxima*) sur l'aspect local du problème, indépendamment de la forme globale de la courbe (ici : branche de parabole et demi-droite), c'est ce qui se passera dans le déroulement effectif pour distinguer ce que peut apporter l'activité 3 par rapport à l'activité 2.

❈ **L'activité 4:**

L'expression de la fonction f est : $f(x) = \begin{cases} 3 - x & si \quad x < 1 \\ 2 + 2sin(x-1) & si \quad x \ \geq \ 1 \end{cases} \quad et \ x_0 = 1$

Il est attendu les mêmes enchainements que les activités précédentes, avec une visualisation locale comme dans l'activité 3. Il est attendu que toutes ces activités puissent devenir pour tous les élèves (notamment la reconnaissance de la continuité et de la discontinuité dans le registre graphique, et en lien avec ce qui se passe au niveau des approximations numériques).

3.2. L'approche formelle

Enoncé des tâches proposées :

« Soit $f : IR \rightarrow IR$, une fonction donnée par sa courbe et son expression et soit $x_0 = 2$

....

Etant donné un intervalle J de centre $f(x_0)$ et de rayon β positif,

--------------------]----------I----------[----------------------------

$f(x_0) - \beta$ $f(x_0)$ $f(x_0) + \beta$

Exploiter l'étude locale et notamment les curseurs α et β, et visualiser l'image de l'intervalle I par f puis :

(1) Remplir le tableau suivant :

β =	0,8	0,7	0,5	0,3	0,2	0,1
α =						

(2) Compléter le commentaire suivant :

Pour tout β positif, il existe α positif tel que …

»

(3) Deux autres tâches d'ordre technique, leur but n'est pas lié à l'apprentissage de mathématiques, au moyen des deux boutons « **Vider les champs** » et « **Enregistrer la réponse**», le premier est conçu pour énoncer un début de nouvelle tâche et l'autre pour la récupération de traces des travaux du binôme.

❈ **L'activité 1 :**

L'expression de la fonction f est toujours $f(x) = -1 + \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2$ et $x_0 = 2$
Les traitements attendus sont :

- Utiliser le bouton « Etude locale »
- Manipuler le curseur de β et celui de α (pour une première valeur de β proposée dans le tableau)

Il est attendu des aides procédurales (techniques) du professeur car il s'agit du premier contact avec cette fenêtre. L'activité possible est *a minima* (même pour les bons élèves, il faut de l'aide).

Le logiciel propose une visualisation de l'image de l'intervalle I par la fonction f : les connaissances anciennes mises en fonctionnement sont : l'image d'un intervalle par une fonction, la caractérisation graphique de f(I) inclus ou non dans J. L'activité possible est seulement *a minima* à nouveau car la reconnaissance associée à la visualisation ne peut être développée par les élèves en autonomie.

Les élèves doivent lire la valeur de α et considérer la valeur la plus grande. A nouveau l'activité nécessite des aides du professeur et ne peut-être que « *a minima* » au moment de l'activité 1.

Il est aussi attendu que les élèves formulent en langage « pseudo-formel » une caractérisation de la continuité à partir des résultats du tableau de correspondance (β, α).

A nouveau il n'y a pas d'organisation à la charge des élèves, celle-ci est prise en charge par le logiciel.

❋ **L'activité 2 :**

L'expression de la fonction f est $f(x) = \begin{cases} -x - \frac{1}{2} & si \;\; x < 2 \\ x - 4 & si \;\; x \geq 2 \end{cases} \quad et\; x_0 = 2$

Les mêmes traitements sont attendus mais pour les deux premières valeurs de β seulement. Pour ces deux valeurs, on peut trouver des α, contrairement aux restes des valeurs de β proposées dans le tableau. Il est attendu des aides du professeur là – cf ingénierie - encore pour formuler dans la zone de texte ce qui est attendu (notamment comprendre la négation de « quel que soit β » en « il existe β »). L'activité possible des élèves *reste a minima* car ils doivent être guidés par le professeur.

❈ **L'activité 3 :**

L'expression de la fonction f est $f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{x^2}{2} & si\ x < 1 \\ x & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$ et $x_0 = 1$

Les mêmes traitements que dans l'activité 2 sont attendus avec une adaptation puisque l'élève ne trouve pas de valeur de α dès la première valeur de β (0.8) proposée dans le tableau. L'élève reconnaît qu'on est dans le même cas que l'activité 2 mais il a déjà expérimenté cette similitude dans l'approche cinématique. On attend donc qu'il soit capable de formuler la même phrase que dans l'activité 2 « il existe β positif tel que pour tout α positif l'image de l'intervalle I par f est incluse dans J » (activité attendue pour tous cette fois). L'élève fait aussi le lien avec l'approche cinématique vue antérieurement.

❈ **L'activité 4 :**

L'expression de la fonction f est $f(x) = \begin{cases} 3 - x & si \quad x < 1 \\ 2 + 2\sin(x-1) & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ et $x_0 = 1$

On attend les mêmes traitements et les mêmes reconnaissances que dans l'activité 1 mais cette fois sans les aides du professeur : activité attendue *pour tous*.

3.3. L' « Exercice I »

Cinq situations sur des exemples de fonctions continues (du programme) sont proposées pour une première manipulation de la définition formalisée de la continuité. Rappelons que nous faisons le choix de faire travailler la définition essentiellement comme objet ici, la définition comme outil pouvant être travaillée dans les exercices proposés par le manuel ou dans les questionnaires écrits. Dans l'exercice 1, étant donné un réel β positif (supposé générique), on demande de trouver un réel α positif vérifiant : $|x - x_0| < \alpha$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \beta$

Exercice 1.1 :

Soient f : IR → IR

$x \mapsto f(x) = 2x + 1$ et $x_0 = 1$

On étudie le comportement de la fonction f au voisinage de $x_0 = 0$

Soit $\beta > 0$, déterminer s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que:

Dès que $|x - 1| < \alpha$ alors $|f(x) - f(1)| < \beta$

Réponse :

$\alpha =$ $\boxed{}$

Il est attendu que les exercices peuvent être résolus en papier crayon mais il est aussi possible d'aller explorer les fonctions et trouver expérimentalement les réponses aux questions (ce qui ne sera pas du tout exploité par les professeurs).

- **(AR)**
  - Reconnaissance de la forme $|x| < r$ → « *activité pour tous* »
  - Reconnaissance du résultat sur la valeur absolue « $|x| < r$ » signifie $x \in]-r, r[$ » → « *activité a maxima*»
  - Adaptation [$x \rightarrow f(x) - f(1)$] → « *activité a maxima*»
- **(AO)**
  - Transformer $|f(x) - f(1)|$ en $2|x - 1|$, → « *activité pour tous* »
  - Mettre sous la forme $|x - 1| < \beta/2$ → « *activité pour tous* »

– Donner une valeur de α en se basant sur la consigne → « *activité a maxima* »

Exercice 1.2 :

Soients f : IR → IR

$x \mapsto f(x) = x^2$ et $x_0 = 0$

On étudie le comportement de la fonction f au voisinage de $x_0 = 0$

Soit β > 0, déterminer s'il existe un réel α > 0 tel que:

Dès que $|x - 0| < \alpha$ alors $|f(x) - f(10)| < \beta$

Réponse :

α=

Les mêmes activités de traitements, de reconnaissances et d'organisation avec :

-La reconnaissance du résultat (pour a et b deux réels positifs, $a^2 < b^2$ signifie $a < b$),

Exercice 1.3 :

Soient f : IR → IR

$x \mapsto f(x) = \frac{2}{5}x + 1$ et $x_0 = -2$

On étudie le comportement de la fonction f au voisinage de $x_0 = -2$

Soit α > 0, déterminer s'il existe un réel α > 0 tel que:

Dès que $|x - (-2)| < \alpha$ alors $|f(x) - f(-2)| < \beta$

Réponse :

α=

Les mêmes activités de traitements, de reconnaissances et d'organisation que l'exercice 1.1

Exercice 1.4 :

Soient f : IR → IR

$x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$ et $x_0 = 0$

On étudie le comportement de la fonction f au voisinage de $x_o = 0$

Soit β > 0, déterminer s'il existe un réel β > 0 tel que:

Dès que $|x - 0| < \alpha$ alors $|f(x) - f(0)| < \beta$

Réponse :

α=

Les mêmes activités de traitements, de reconnaissances et d'organisation avec :

- La reconnaissance du résultat (pour a et b deux réels positifs,

« $a < b$ $signifie$ $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ »),

Exercice 1.5 :

Soient f : IR → IR

$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ et $x_0 = 5$

On étudie le comportement de la fonction f au voisinage de $x_o = 5$

Soit β > 0, déterminer s'il existe un réel α > 0 tel que:

Dès que $|x - 5| < \alpha$ alors $|f(x) - f(5)| < \beta$

Réponse :

α =

Les mêmes activités de traitements, de reconnaissances et d'organisation avec :

- La reconnaissance de technique adéquate pour majorer $|\frac{1}{ab}|$ en se plaçant (localement) dans un intervalle ne contenant pas zéro pour trouver une majoration de $|\frac{a-b}{ab}|$,
- L'aide du professeur semble fort utile pour inciter les élèves au travail local.

→ « *activité a maxima* » – *aide du professeur* → « *a minima* »

3.4. L'« Exercice II »

Cinq situations sur des exemples de fonctions données par leurs représentations graphiques, ces fonctions présentent une discontinuité en un certain point x_0 de leur domaine de définition. On demande à l'élève de donner une valeur de β pour laquelle $f(I)$ est non inclus dans J.

Exercice 2.1 :

Soient f : IR → IR

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} -2 + x^2 \; si \; x < 1 \\ x \;\; si \;\; x > 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

La courbe de f (ci-contre) suggère que f n'est pas continue en l'un de ses points x_0 .

Donner un réel β > 0 pour lequel:
Pour tout réel $\alpha > 0$, $f(]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\not\subset]f(x_0) - \beta, f(x_0) + \beta[$.

Réponse :

β=

- **(AT)**
  - Traitement graphique.
- **(AR)**
  - Détermination graphique de l'image d'un intervalle par une fonction à partir de sa courbe (les connaissances de mise en fonctionnement sont: l'image d'un intervalle par une fonction, la caractérisation graphique de f(I) inclus ou non dans J).

→ « *activité à maxima*»

- **(AO)**
  - Faire le lien entre le saut que caractérise la discontinuité de f en x_0 et le rayon du voisinage de l'intervalle J de centre f(x_0) et de rayon β.

→ « *activité à maxima*»

Exercice 2.2

La fonction donnée par son graphique est celle de f : IR → IR

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x \ \ si \ x < 1 \\ \frac{2}{x} \ \ si \ \ x > 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

Les mêmes activités de traitement, de reconnaissance et d'organisation.

→ « *activité à maxima*»

Exercice 2.3 :

La fonction donnée par son graphique est celle de f : IR → IR

$$\mathrm{x} \mapsto \mathrm{f(x)} = \begin{cases} 2\sin(\mathrm{x}) \ \ \mathrm{si \ x} < 2 \\ \mathrm{x \ \ si \ \ x} \ \geq 2 \end{cases}$$

Les mêmes activités de traitement, de reconnaissance et d'organisation.

– Exploitation les fonctionnalités des effets de zoom du logiciel pour pouvoir visualiser localement la portion de la courbe au voisinage de la rupture en le point de coordonnées (2, f(2)) vue que le saut est assez petit (de l'ordre de $|2\sin(2) - 2| \approx 0.18$)

→ « *activité à maxima*»

Exercice 2.4 :

La fonction donnée par son graphique est celle de f : IR → IR

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} -3 - x \ \ si \ x < -1 \\ x \ \ si \ \ x \ \geq -1 \end{cases}$$

Les mêmes activités de traitement, de reconnaissance et d'organisation.

→ « *activité à maxima*»

Exercice 2.5 :

La fonction donnée par son graphique est celle de f : IR → IR

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} -\frac{5}{2} - x \ \ si\ x < -1 \\ x \ \ si \ \ x \geq -1 \end{cases}$$

Les mêmes activités de traitement, de reconnaissance et d'organisation que pour l'exercice 2.1.

→ « *activité à maxima*»

4. Conclusion de ce chapitre

Le manuel scolaire se limite à introduire la définition formelle de la continuité à travers une seule situation basée sur un exemple de fonction affine par morceaux. Il n'y a pas d'approche cinématique dont on a vu dans le relief qu'elle est dialectique de l'approche approximation (Bkouche). Les activités ainsi proposées qui s'inscrivent uniquement dans les deux paradigmes AG et AC présentent des difficultés chez les élèves puisqu'elles font appel à des reconnaissances « fortes » pour associer les activités proposées (objet du commentaire : « *cette activité suggère* ... » en fait : ça ne suggère pas du tout) à la définition formelle qui relève du paradigme AI. Le degré d'approximation cherché dans la troisième tâche (0,01 que nous considérons comme une variable didactique) n'est pas proposé d'une manière réfléchie (du moins, il manque de réalisme). D'autant plus, l'objectif de la tâche relative à la construction de la courbe est plutôt secondaire, et puisque le travail demandé s'inscrit dans le registre graphique, nous voyons qu'un graphique donné pourrait faciliter la tâche de l'enseignant et des élèves.

Notons quand même, que le choix didactique de deux expressions différentes en deçà et au-delà de la valeur $x_0 = 1,$ n'est pas (évidemment) clair pour les enseignants pour qu'ils fassent remarquer aux élèves que « *la fonction ne continue pas par la même expression de part et d'autre de x_0 mais elle est pourtant continue en ce point* ». En particulier cela peut renforcer un conflit cognitif relevé dans la partie « relief » sur le fait que les élèves associent la continuité à l'unique expression algébrique de la fonction.

On peut donc conclure que cette introduction du concept de continuité par le manuel scolaire risque d'aboutir à mettre les élèves sur la voie d'une conceptualisation erronée de cette notion.

En revanche, le logiciel proposé dans notre ingénierie propose une palette de fonction inspirée des travaux de Tall et Vinner que nous avons présentée dans le chapitre IV (Relief sur la notion de continuité). A travers des activités imbriquant différents registres, ce logiciel semble être un bon support d'introduction des différentes définitions (cinématique et formelle) de ce nouveau concept ; et à travers des tâches proposées dans le logiciel dans sa fenêtre « Exercice », il permet la mobilisation de ces nouvelles connaissances.

On voit donc que le logiciel offre des occasions et des situations qui font que les élèves peuvent avoir plus d'activités « pour tous » qui mettent en jeu – même indirectement - la définition formalisée, et ce surcroit d'activités (à la fois quantitatif mais aussi qualitatif) doit cette fois permettre au professeur d'introduire la définition sous forme d'une réelle proximité avec les activités « effectives » des élèves (et ça fera sens pour les élèves).