Analyse a posteriori

Sommaire du chapitre :

Introduction

Pour cette analyse a postériori, nous avons choisi de recentrer les études de vidéos sur les moments d'introduction de la définition formelle et la gestion des exercices. Nous avons observé trois enseignants (M, A et L) qui ont utilisé le logiciel et un enseignant ordinaire (N) qui n'a utilisé que le manuel.

Donc, en premier lieu nous proposons une analyse des traces (sur le logiciel) des élèves de la classe de l'enseignante « M » puis celle de l'enseignant « A ». Notons que nous n'avons pas récupéré les traces des activités des binômes de la classe de l'enseignant « L » sur leurs ordinateurs. Cela nous permet une première validation de notre ingénierie à partir des traces des productions des élèves.

Ensuite, nous proposons une analyse des extraits des séquences filmées de chacun des enseignants (M, L, A et N) qui ont participé à l'expérimentation de notre ingénierie. Ces extraits ne concernent que l'introduction de la définition formalisée à l'issue de la gestion de l'activité 1 du logiciel dans son « approche formelle », ainsi que la partie des exercices (mais uniquement pour les professeurs M et L). D'une part, il n'était pas possible matériellement de nous livrer à des analyses de l'intégralité des séquences (logiciel ou ordinaire) des 4 professeurs (ce qui aurait représenté plus de 10 heures de séances). D'autre part, des problèmes de récupérations de données ont fait que nous n'avons pas pu avoir accès à tout ce qu'il aurait été possible de récupérer (approches cinématiques, formelles et exercices du logiciels chez M, L, A ainsi que la séance ordinaire de deux heures chez N). Les sources de données ne sont donc pas homogènes d'un enseignant à l'autre.

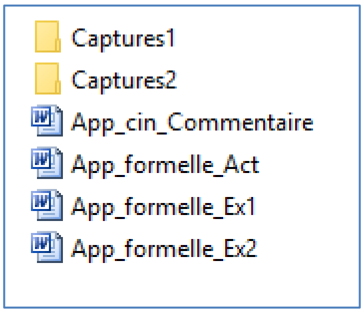
Enfin, étant donné que notre problématique porte sur l'introduction de la définition formalisée de la continuité (au sein d'un certain niveau de conceptualisation que nous avons décrit dans le chapitre IV), nous avons choisi de ne transcrire que les épisodes qui précèdent cette introduction dans les 3 séances logicielles, les épisodes d'exercices pour étudier le réinvestissement de la connaissance nouvelle par les élèves dans ces exercices, et la séance ordinaire d'une heure, dans laquelle l'enseignant N suit le cours et les activités proposés par le manuel.

Partie (1) : Analyse des traces des élèves sur le logiciel

Analyse des traces des élèves des enseignants « M » et « A »

Nous avons reçu, à la fin des séances assurées par le professeur « M » pour les élèves de la troisième année section mathématique, neuf (09) dossiers enregistrés par le logiciel TIC_Analyse. Cette classe comporte neuf binômes (M1, M2, … et M9), chacun d'eux a travaillé sur sa propre machine (PC).

Nous avons choisi d'analyser aussi la trace des élèves de l'enseignant « A ». Cette fois-ci, nous n'avions récupéré que six (06) dossiers pour les binômes (A1, A2, … et A6) pourtant il y avait beaucoup de binômes qui ont travaillé sur leurs PC personnels.



Le dossier du binôme « M1 » créé par le logiciel.

Dans le tableau 1, nous avons choisi de nous intéresser aux traces des binômes de la classe de l'enseignante « M » quant aux :

- Nombre de valeurs de β, objet de la première tâche dans les différentes activités 1, 2, 3 et 4 : cela nous montre pour les deux cas de discontinuité si les élèves ont compris que si pour une valeur de β il n'y a pas de α, ils déduisent que pour la valeur de β suivante il n'y a pas de α non plus.
- Commentaires rédigés dans sa partie objet de la complétion demandée,
- Usages du bouton « Recherche » conçu pour une recherche automatique proposée par le logiciel, cela peut traduire la construction chez les élèves d'un schème d'usage du logiciel qui participe de la compréhension du processus d'approximation en jeu dans l'approche formelle.

Dans la même idée, le tableau 2 résume la trace des élèves de l'enseignant « A ».

Rappelons, enfin, que nous n'avions pas récupéré de traces pour les élèves de l'enseignant « L ».

Activité 1 ☸ Pour f(x)= -1+(1+x/2)^2

Question1:
alpha1= 0,38
alpha1= 0,35
alpha1= 0,29
alpha1= 0,14
alpha1= 0,08
alpha1= 0,04

Question2:
→ Commentaire: Pour tout béta positif, il existe alpha positif tel que f(i) est inclu dans l'interval j

Activité 2 ☸ Pour f(x)= -x-1/2 si x < 2
x-4 si x > =2

Question1:
alpha1= 0,33
alpha1= 0,18
alpha1= non
alpha1= non
alpha1=
alpha1=

Question2:
→ Commentaire: il existe béta positif, pour tout alpha positif tel que ...

Activité 3 ☸ Pour f(x)= 3-x^2/2 si x < 1
x si x > =1

Question1:
alpha1= pas de alpha
alpha1= aucun
alpha1= aucun
alpha1= aucun
alpha1= aucun
alpha1= aucun

Question2:
→ Commentaire: il existe béta positif, pour tout alpha positif tel que f(i) non toute dans l'intervalle j:
beta=0,8 et les autres aussi.
f n'est pas continue en 1

Activité 4 ☸ Pour f(x)= -1+(x+4)^2 si x < -2
1-x si x > =-2

Question1:
alpha1= 0,21
alpha1= 0,18
alpha1= 0,14
alpha1= 0,08
alpha1= 0,04
alpha1= 0,04

Question2:
→ Commentaire: Pour tout béta positif, il existe alpha positif tel que ...

Fig1 : *« Trace du travail du binôme M1 sur les activités relatives à l'introduction de la définition formelle proposées par le logiciel »*

1) **Analyse des traces des élèves de la classe de l'enseignante « M » enregistrées par « TIC_Analyse » sur leur PC**

Binômes \ Activités		Activité1 – f continue	Activité 2 – f discontinue	Activité 3 – f discontinue	Activité 4 – f continue
M1 (voir le commentaire plus bas)	Nombre de valeurs de β	06	04 – il écrit « non » à partir du troisième béta	06 - il a écrit « aucun »	06
	Commentaire rédigé	… f(i) est inclu dans l'interval j	Non enregistré	… f(i) non toute dans l'intervalle j: beta=0,8 et les autres aussi.	Non enregistré
	Usage du bouton « Recherche »	A partir de la $4^{ème}$ valeur de β	A partir de la $1^{ère}$ valeur de β	A partir de la $1^{ère}$ valeur de β	A partir de la $1^{ère}$ valeur de β
M2	Nombre de valeurs de β	06	04 – 2 valeur de alpha puis 2 « aucun »	02, il écrit pour les deux « il n'y a pas »	06
	Commentaire rédigé	… f(i) est dans j	… f(i) non completement dans j	… f(i) non incu dans j	Non enregistré
	Usage du bouton « Recherche »	A partir de la $4^{ème}$ valeur de β	A partir de la $2^{ème}$ valeur de β	A partir de la $1^{ère}$ valeur de β	A partir de la $1^{ère}$ valeur de β
M3	Nombre de valeurs de β	06	06 (3 valeurs de β – il trouve alpha=0,04 pour la troisième valeur de β, c'est une fausse estimation de la lecture et 3 « non »)	03 (« non trouvé »)	06
	Commentaire rédigé	… f(i) est inclus dans j	… f(i) n'est pas completement inclus dans j	… f(i) n'est pas inclu dans l'intervalle j f n'est pas continue	Non enregistré
	Usage du bouton « Recherche »	A partir de la $3^{ème}$ valeur de β	Non utilisé (car des valeurs trouvées légèrement différentes)	A partir de la $1^{ère}$ valeur de β	A partir de la $1^{ère}$ valeur de β
M4	Nombre de valeurs de β	06	06 (02 valeurs et 04 « xxxx»)	03 (« xxx »)	
	Commentaire rédigé	… f(I) est inclu dans J	f(I) n'est pas toute dans J	… f(I) non inclus dans J	Non enregistré
	Usage du bouton « Recherche »	A partir de la $3^{ème}$ valeur de β	Non	A partir de la $1^{ère}$ valeur de β	A partir de la $1^{ère}$ valeur de β

M5	Nombre de valeurs de β	06	04 (02 valeurs de β et 02 « xxx »)	03 (« xxx »)	06
	Commentaire rédigé	… f(I) est inclus dans J	… f(I) n'est pas dans J (beta=0,5 par exemple)	… f(I) n'est pas inclus dans J il y a toujours des images en dehors de l'interval J	Non enregistré
	Usage du bouton « Recherche »	A partir de la 3ème valeur de β	A partir de la 2ème valeur de β	A partir de la 1ère valeur de β	A partir de la 1ère valeur de β
M6	Nombre de valeurs de β	06	04 (02 valeurs de β et 02 « non »)	06 (« non »)	06
	Commentaire rédigé	… f(I) est inclu dans J	… f(I) n'est pas inclu toute dans l'intervalle J	… f(i) n'est pas dans J	Non enregistré
	Usage du bouton « Recherche »	A partir de la 3ème valeur de β	A partir de la 2ème valeur de β	A partir de la 1ère valeur de β	A partir de la 2ème valeur de β
M7	Nombre de valeurs de β	Aucune valeur	06 (02 valeurs de β et 04 « aucun »)	02 (« non »)	06
	Commentaire rédigé	Aucun commentaire	… f(I) n'es pas completement dans l'intervalle J	… que f(I) n'est pas inclus totalement dans l'intervalle J	Non enregistré
	Usage du bouton « Recherche »	Non	A partir de la 1ère valeur de β	A partir de la 1ère valeur de β	A partir de la 1ère valeur de β
M8	Nombre de valeurs de β	06	04 (02 valeurs de β et 02 « pas de alpha »	03 (« ---»)	06
	Commentaire rédigé	… f(I) se trouve dans l'intervalle J de centre f(1) et de rayon beta	… f(I) non incluse completement dans l'intervalle J	… pour tout alpha positif , f(I) n'est pas inclu dans J	… f(I) inclu dans J
	Usage du bouton « Recherche »	A partir de la 3ème valeur de β	A partir de la 1ère valeur de β	A partir de la 1ère valeur de β	A partir de la 1ère valeur de β
M9	Nombre de valeurs de β	06	06 (03 valeurs de α et 03 « pas de alpha »)	06 (« non »)	06
	Commentaire rédigé	… f(I) est dans J	… f(i) non dans j completement	… que toujours f(i) non inclu dans j donc f n'est pas continu en x0	Non enregistré
	Usage du bouton « Recherche »	A partir de la 3ème valeur de β	A partir de la 4ème valeur de β	A partir de la 1ère valeur de β	A partir de la 1ère valeur de β

Tableau T.M : *analyse des traces des élèves de l'enseignante « M »*

Détaillons de près l'activité du binôme M1 (la copie de trace présentée plus haut est celle de M1). Cela correspond aux lignes grisées du tableau ci-dessus :

Pour l'activité 1, il a bien cherché le α correspondant aux 6 valeurs de β proposées par le logiciel. Ce qui est cohérent avec le fait que la fonction proposée est continue et pour toute valeur de β, on peut trouver α … l'élève conclut par un commentaire correct. Il utilise le bouton recherche automatique à partir du 4^{ième} β, ce qui peut être un signe d'un schème d'usage du logiciel qui peut se construire. Mais on ne sait pas si c'est le professeur qui leur demande explicitement à ce moment-là.

Pour l'activité 2, il a cherché les valeurs de α pour les 4 premiers β et a écrit à partir du troisième « non ». Il n'a rien cherché pour la suite des valeurs, ce qui semble montrer que le binôme a bien saisi que s'il existe un β pour lequel il n'existe pas de α alors pour toute autre valeur de β qui lui est inférieure (« inférieure au saut ») il n'y aura pas non plus de α vérifiant f(I) inclus dans J. Malheureusement, il n'a pas enregistré son commentaire. Par contre, il a utilisé le bouton de recherche automatique dès le premier β, confirmant le fait qu'il a su prendre en main le logiciel en lui déléguant la recherche automatique (construction d'un schème d'usage).

Pour l'activité 3, il a écrit « *pas de alpha* » ce qui semble montrer qu'il a bien cherché ; et il a écrit « aucun » pour les autres, ce qui semble montrer qu'il n'a plus fait de recherche et marqué « *aucun* » de façon automatique. On peut donc penser que c'est à nouveau un signe de compréhension des connaissances nouvelles en jeu. Le commentaire en langage naturel est maladroit : « *f(i) non toute dans l'intervalle j: beta=0,8 et les autres aussi* » mais traduit correctement l'idée que dès le premier β=0,8 (et donc les suivants) on ne peut pas trouver α tel que f(I) soit inclus dans J.

Pour l'activité 4, il a cherché les valeurs de α pour les 6 valeurs de β proposées, ce qui conforme avec la continuité.

Si on analyse maintenant le tableau selon la première colonne grisée (activité 1), on voit que tous les binômes ont cherché les valeurs de α pour les 6 valeurs de β proposées dans la première activité. Mis à part le binôme 7 qui n'a rien enregistré, les commentaires sont corrects mais on peut relever qu'ils sont tous sous le même format (alors le champ de réponse était libre) : « *f(I) est inclus dans J* » (avec une variante pour le binôme M8). En ce qui concerne la recherche automatique (mis à part le binôme 7 qui n'a rien enregistré), tous ont utilisé la fonctionnalité à partir du 3ième ou du 4ième β. A nouveau, on peut penser qu'il s'agit de l'amorce de la construction du schème d'usage mais cela peut aussi correspondre à une aide procédurale du professeur à un moment de la séance d'utiliser cette fonctionnalité pour aller plus vite.

Selon la deuxième colonne grisée (activité 2, fonction non continue), on voit que tous les binômes ont marqué « *aucun* » à partir de 3ième valeur de β (sauf le binôme M3 qui a trouvé une valeur de $\alpha = 0{,}04$ mais qu'on peut attribuer à un défaut de visualisation sur l'écran). Selon les binômes, on voit que certain ont éprouvé la nécessité d'écrire « *aucun* » pour les 6 valeurs de β. On ne sait pas s'ils ont testé véritablement toutes les valeurs de β ou bien s'ils ont compris qu'ils peuvent marquer « *aucun* » de façon systématique comme on l'a observé pour le binôme M1. Pour d'autres binômes, il est clair qu'ils n'ont testé au plus que 4 valeurs (M1, M2, M5, M6 et M8) ce qui assure par contre qu'ils ont compris à un moment qu'il est inutile d'aller plus loin.

Dans le cas du binôme M3, si on veut aller plus loin, on ne sait pas s'il a testé ou non les 6 valeurs dans l'activité 2. Par contre on voit que pour l'activité 3, il n'a testé que 3 valeurs de β, écrivant « *non trouvé* » puis il n'a plus testé les valeurs plus petites. En fait, on voit bien que pour tous les binômes entre la colonne 2 et la colonne 3, le nombre de valeur de β testées en colonne 3 est presque toujours inférieur ou égal à 3 – en tous cas inférieur aux nombres de recherches dans la colonne 2 - sauf pour M1 et pour le binôme M6 dont on peut penser qu'il a écrit « *non* » de façon assez systématique. Cela nous montre que de façon générale, à un certain moment, les élèves comprennent bien que lorsqu'une valeur de β ne convient pas (pour un cas de discontinuité), toute valeur de β inférieure ne convient pas non plus. Les élèves peuvent aussi visualiser le lien entre cette valeur de β « critique » et la hauteur du « saut » sur le graphique.

En ce qui concerne les commentaires, on voit qu'ils sont tous corrects modulos les maladresses d'écritures. Mais ils semblent très formatés ce qui peut laisser penser qu'il y a un effet « professeur » très fort. Enfin, concernant l'usage de la recherche automatique, on voit qu'elle s'impose dans toutes les pratiques des binômes au fil des 4 activités.

2) Analyse des traces des élèves de la classe de l'enseignant « A » enregistrées par « TIC_Analyse » sur leur PC

Binômes \ Activités		Activité1	Activité2	Activité3	Activité4
A1	Nombre de valeurs de β	06	02 (02 valeurs de β et les autres cases sont vides)	---	06
	Commentaire rédigé	… si x appartient au voisinage centré de x0 son image f(x) appartient au voisinage centré de f(x0).	… ils existent des réels appartiennent au voisinage centré de x0 re rayon alpha et leurs image n'appartiennent pas au voisinage centré de f(x0) de rayon beta	… aucun réel appartient au voisinage centré de x0 de rayon alpha son image appartient pas au voisinage centré de f(x0) de rayon beta	… si x appartient au voisinage centré de x0 de rayon alpha son image appartient au voisinage centré de f(x0) de rayon beta
	Usage du bouton « Recherche »	A partir de la 3ème valeur de β	A partir de la 3ème valeur de β	---	A partir de la 1ère valeur de β
A2	Nombre de valeurs de β	06	03 (03 valeurs de β dont la dernière est 0.01 et les autres cases sont vides)	---	06
	Commentaire rédigé	… si x appartient au voisinage centré de x0 de rayon alpha alors f(x) appartient au voisinage centré de f(x0) de rayon béta	… il existe des réels x appartenant au voisinage centré de x0 tel que leurs images n'appartiennet pas au voisinage centré de f(x0)	… si x appartient au voisinage centré de x0 de rayon alpha alors f(x) n'appartient pas au voisinage centré de f(x0) de rayon béta	… si x appartient au voisinage centré de x0 de rayon alpha f(x) appartient au voisinage centré de f(x0) de rayon béta. Ainsi f est continue en x0
	Usage du bouton « Recherche »	A partir de la 3ème valeur de β	A partir de la 1ère valeur de β	---	A partir de la 1ère valeur de β
A3	Nombre de valeurs de β	06	03 (03 valeurs de β dont la dernière est 0.01 et les autres cases sont vides)	--	06
	Commentaire rédigé	… si x appartient au voisinage ouvert centré en xo de rayon alpha alors f(x) appartient au voisinage ouvert centré en f(xo) et de rayon beta	Non enregistré	… il existe des réels appartient au voisinage centrée de x0 et de rayon alpha et leurs image n'appartiennent pas au voisinage centrée de f(x0) et de rayon beta	… si x appartient au voisinage ouvert centré en xo de rayon alpha alors f(x) appartient au voisinage ouvert centré en f(xo) et de rayon beta ainsi f est continue en x0
	Usage du bouton « Recherche »	A partir de la 3ème valeur de β	A partir de la 1ère valeur de β	---	A partir de la 1ère valeur de β

A4	Nombre de valeurs de β	06	05 (02 valeurs de β et 03 « ---»)	---	06
	Commentaire rédigé	… si x appartient au voisinage centre en x0 de rayon alpha alors f(x) appartient au voisinage centre en f(x0) et de rayon beta.	… f(x0-alpha, x0+alpha) n'est pas inclu dans l'intervalle J de centre f(x0) et de rayon beta Il y a des valeurs de I qui ont des images en dehors de J	.---	… si x appartient au voisinage centre x0 de rayon alpha alors f(x) appartient au voisinage centre de f(x0) de rayon beta
	Usage du bouton « Recherche »	A partir de la 3ème valeur de β	A partir de la 1ère valeur de β	---	A partir de la 1ère valeur de β
A5	Nombre de valeurs de β	06	05 (03 valeurs dont la dernière est 0,48 et 02 « --- »)	---	---
	Commentaire rédigé	...si x appartient au voisinage centre en x0 de rayon alpha alos f(x) appartient au voisinage centre en f(x0) et de rayon beta.	...si f(x) appartient au voisinage centre en f(x0) de rayon beta il n'existe pas alpha le rayon de voisinage centre en x0.	---	---
	Usage du bouton « Recherche »	A partir de la 3ème valeur de β	Non utilisé	---	---
A6	Nombre de valeurs de β	---	03 (03 valeurs de β dont la dernière est 0.01 et les autres cases sont vides)	---	06
	Commentaire rédigé	---	… il existe des rééls x appartiennent à I de voisinage centré en x0 de rayon alpha tels que leur image n'appartiennent pas au voisinage centré en f(x0) de rayon beta	… si x0 appartient au voisinage centré en x0=1 de rayon alpha il n'aura aucune image sur J le voisinage centré en f(x0) de rayon béta	… si x appartient à I voisinage centré de x0 et rayon alpha alors f(x) appartient à J voisinage centré de f(x0) de rayon béta ainsi f est continue en x0.
	Usage du bouton « Recherche »	---	Non utilisé	---	A partir de la 1ère valeur de β

***Tableau TA :** analyse des traces des élèves de l'enseignant « A »*

Commentaires à l'issue du tableau de l'enseignant A

- On retrouve le même type de résultats que dans le cas de l'enseignant M même si on peut regretter que beaucoup d'étapes n'ont pas été enregistrées par les binômes, ce qui occasionne des trous (sans données) dans le tableau.
- Toutefois, il y a ici des binômes (A2, A3, A5 et A6) qui ont réussi à proposer une valeur de α pour la non continuité de l'activité 2 dans le cas de β = 0,5. Dans le cas où la valeur trouvée est > 0,01 (en l'occurrence A5 propose 0,48 sans utiliser la recherche automatique), on peut se demander dans quelle mesure il a effectivement en ce qui le concerne compris la consigne. Dans le cas où la valeur de α trouvée est 0,01, les binômes peuvent avoir utilisé la recherche automatique ou non : A2 et A3 ont trouvé 0,01 en utilisant la recherche automatique et 0,01 est justement la valeur de α affichée par le logiciel à la fin de sa recherche automatique (copie d'écran ci-dessous). Les élèves ont recopié le α affiché par le logiciel alors qu'il n'y a pas de α qui correspond à β = 0,5. Les élèves ont-ils vu le commentaire du logiciel à compléter qui apparaît à la fin de la recherche ? Ont-ils compris que dans le cas β = 0,5, il n'y a aucune valeur de α satisfaisante ? Sinon comment expliquer que pour les valeurs de β suivantes, ils ont su qu'il n'y a pas de recherche à faire ? Il y a certainement dans ces cas un effet des interventions du professeur auquel il n'est pas possible d'accéder à partir de ces seules données extraites des traces logicielles. Dans le cas de A6, c'est encore plus questionnant car A6 ne semble pas avoir utilisé la recherche automatique et donc pour α = 0,01, il n'apparait pas d'intervalle I tel que f(I) soit inclus dans J, donc il aurait dû ne pas conclure ainsi.

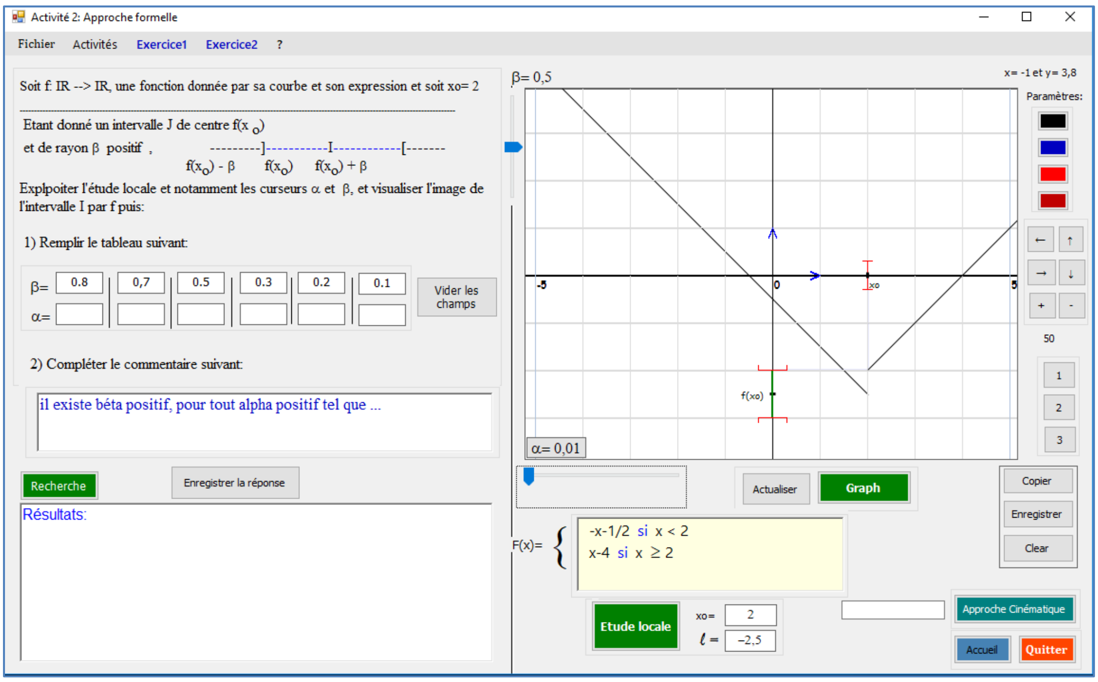


Fig2 : « Copie d'écran où on voit le message dans le cas β = 0,5 et on voit le α = 0,01 »

3) Commentaires à l'issue de l'analyse des traces des binômes chez M et A

- Dans les deux classes dont nous avons les traces du logiciel, on observe que tous les binômes, dans les cas 1 et 4 de continuité, ont manipulé le logiciel pour trouver des valeurs de α correspondantes aux valeurs de β fournies par le logiciel. Cela nous semble déjà un aspect positif car ces actions se sont nécessairement accompagnées d'activités mathématiques (reconnaissances et traitements) qui sont pour nous constitutives d'une entrée dans la bonne compréhension – si ce n'est la conceptualisation - de la définition formelle. Les commentaires dans le langage naturel sont toujours à peu près corrects, même s'ils sont souvent maladroits. Par exemple dans leurs commentaires, des élèves utilisent le mot « *dans* » au lieu de « *inclus dans* » ce qui peut être induit par l'effet de la visualisation des intervalles dans les autres sur le logiciel.
- Mais on constate surtout que les formulations en langage naturel, quand bien même le champ est totalement ouvert, sont très proches d'un binôme à l'autre dans la classe de M et dans la classe de A. Les binômes de la classe de l'enseignante « M » utilisent presque la formulation « *f(I) est (ou non)* ***inclus*** *dans J* » lorsqu'ils complètent les commentaires. Les binômes de l'enseignant « A », eux aussi utilisent presque des formulations basées sur le mot « voisinage » comme « *f(x) appartient au* ***voisinage*** *centre en f(x0) et de rayon beta* » ou « *… il existe des réels appartenant au* ***voisinage*** *centrée de x0 et de rayon alpha et leurs image n'appartiennent pas au voisinage centré de f(x0) et de rayon beta* ». Il y a donc clairement un effet professeur à ce niveau, qui a donné des aides aux élèves. En fait, nous voyons que la façon de relire la consigne par l'enseignant à un instant où les élèves sont en train de réfléchir sur la tâche en question influe sur la façon dont les élèves formulent leurs commentaires. On peut se demander si ces interventions (aides) étaient uniquement procédurales ou si elles avaient des aspects constructifs. Toutefois cela fait preuve aussi que les élèves se sont montrés très attentifs aux interventions de leur enseignant qui les a aidés (semble-t-il). C'est pour nous un facteur d'engagement clair des élèves dans les activités qui étaient proposées.
- Dans les cas de non continuité, on constate que les élèves, soit à partir de l'activité 2, au plus tard dans l'activité 3, ne remplissent pas les champs correspondants à des valeurs de β dès qu'ils ont trouvé une valeur de β pour laquelle il n'y a pas de α (tel que f(I) soit inclus dans J). Même si à nouveau il y a certainement un effet professeur, nous retenons cette

observation comme un signe de l'entrée des élèves dans la compréhension – si ce n'est dans le niveau de conceptualisation visée – de la définition formalisée et le lien entre le β formel qui est proposé par le logiciel et le saut qui apparaît sur le graphique. Toutefois, il convient de rester prudent compte tenu par exemple de ce qu'on observe pour les binômes A2, A3, A5 et A6 dont nous avons parlé plus haut. Il y a cependant dans l'activité des élèves une nécessaire forte interaction entre le paradigme AI (l'existence d'un β) et le paradigme AG (le saut). Le travail sur la non continuité permet certainement en retour de mieux comprendre pourquoi dans l'activité 4, le fait que le graphique ne présente pas de saut est étroitement associé au fait que pour tout β on peut trouver α tel que f(I) soit inclus dans J ; ce qui à nouveau fait le lien entre les paradigmes AG et AI.

- Tous les binômes des deux classes ont utilisé à partir d'un certain moment, assez rapidement dans la plupart des cas la fonctionnalité de « recherche automatique », après avoir cherché « manuellement » les premières valeurs de α au moins dans l'activité 1. Ce passage du manuel à l'automatique, même si encore une fois on peut se demander quel a été le rôle de l'enseignant, traduit pour nous une intériorisation des gestes manuels d'approximations, voire la constitution d'un schème d'action instrumentée, c'est-à-dire pour nous que le schème construit participe de la compréhension de l'action d'approximation.

Partie (2) : Analyse des séquences vidéo

Pour l'analyse des séquences vidéo, nous avons découpé les séances en épisodes en fonction des sous-tâches demandées aux élèves – méthodologie classique dans notre cadre théorique - et nous avons choisi de procéder comme suit :

- Analyse des tâches et sous-tâches proposées par l'enseignant aux élèves, identification des activités et sous activités associées pour chaque épisode,
- Identification des formes de travail proposé par l'enseignant (recherche individuelle, en groupe, oral collectif, écrit collectif…),
- Identification des médiations fournies par le professeur (aides et proximités notamment)

Et nous avons adoptés les abréviations suivantes:

RI : recherche individuelle

OC : oral collectif

EC : écrit collectif

X : formes de travail variées.

On en infère les activités mathématiques « possibles » des élèves (à défaut de leurs activités « effectives ») – dans le cadre théorique on a parlé des activités « effectivement possibles », compte tenu des déroulements en classes.

Dans ce qui suit, nous présentons pour chaque séance assurée par les 4 enseignants un premier tableau donnant le scénario global de la séance (le synopsis) et un deuxième détaillant les épisodes choisis et les différentes tâches et activités de l'enseignant et celles des élèves. Puis, nous proposons une analyse de la séquence à travers une succession de commentaires à l'issue de ces tableaux.

I. Analyse des séquences vidéo relatives à l'introduction de la définition formelle

I.1. L'enseignante « M » (avec le logiciel)

a) Synopsis (ou scénario global)

<table>
<tr><th>Episode</th><th>chronomètre</th><th>durée</th></tr>
<tr><td>E1 : « Introduction et présentation »</td><td>séq8
7' 10 s
→ 11' 50 s</td><td>4' 40 s</td></tr>
<tr><td>E2 : Travail avec le « TIC_Analyse »

→ Séquence1 : « Traitement du cas « β=0.8 »</td><td>Séq08
De 11' 50
→16' 45 s
(4' 55 s)</td><td rowspan="2">9 ' 28 s</td></tr>
<tr><td>→ Séquence2 : « Recherche individuelle: complétion du tableau »
Recherche des autres valeurs de α pour chaque valeur β considérée.</td><td>Séq08
De 16' 45 s
→séq09
1' 20 s
(4' 33 s)</td></tr>
<tr><td>E3 : « Rédaction du commentaire »</td><td>Séq09
1' 20 s
→ 4' 10 s</td><td>2' 50 s</td></tr>
<tr><td>E4 : « Formulation de la définition formelle »</td><td>Séq09
De 4' 11
→ 8' 41 s</td><td>4 ' 30 s</td></tr>
</table>

Tableau V.M.1 : Chronologie (extrait relative à l'introduction de la définition formelle)

b) Analyse de l'extrait de la séquence vidéo de « M » relative à l'introduction de la définition formelle (activité 1 uniquement)

Episodes	Objectif élève (tâche) / objectif prof	Forme du travail de classe avec les durées	Indication sur le déroulement	Type d'aides mathématiques et proximités de l'enseignant	Activité possibles (« effectives ») des élèves (a maxima, a minima, pour tous) et connaissances mises en fonctionnement
1 **Présentation de l'approche dite formelle de notion de continuité**	- Présentation de l'approche dite « formelle », - Présentation de l'environnement de travail et de l'activité1, - Explication de la consigne - Présentation de l'interface (les curseurs de α et de β, simulation de l'image de l'intervalle I, le bouton « Etude locale », interactivité,	OC + RI (4' 40 s)	Intervention collective visant à : - faire une transition entre le travail précédent concernant l'approche dite « cinématique » et cette nouvelle approche dite « formelle », *« Maintenant, on va aborder l'approche formelle* ***On va revoir les quatre activités mais selon une autre approche qui est l'approche formelle*** *//Et elle montre sur le tableau le bouton de l'interface du logiciel//* *//Elle montre à ses élèves via le menu déroulant du logiciel comment accéder à l'activité 1// »* - Présentation de l'interface du logiciel relative à cette deuxième approche, - Explication de la consigne : *« **Alors, pour ce faire, pour ce faire, on va fixer un intervalle de centre f(x0), et de rayon β, … β étant un réel strictement positif. Voilà un voisinage de f(x0)…*** *// Elle montre aux élèves sur l'écran*	**Aide à visée constructive** Lien entre l'approche cinématique et l'approche formelle	Activités liées à l'écoute Des manipulations sur leurs machines Découverte des fonctionnalités de « TIC_Analyse » ***(activités pour tous)*** Activités de traitement (technique) : activer étude locale – (tous) Activité d'écoute et de visualisation ***(activités pour tous)***

			le dessin proposé dans la consigne// ***On peut l'appeler J, c'est le voisinage de f(x0).*** *Alors, … **existe-t-il un α ou existe-t-il un voisinage de x0** tel que qu'est qu'on a, f(I) soit inclus dans… »* - Présentation rapide de l'interface du logiciel et des principales fonctionnalités - Usage de ses boutons : recherche manuelle avec les curseurs ou bien recherche automatique. Le professeur manipule et écrit sur l'écran blanc sur l'image au vidéoprojecteur	**Reformulation possible grâce à la visualisation entre la question de la recherche de α et la recherche de I tel que f(I)** soit inclus dans J – lien avec les connaissances mathématiques antérieures sur l'image d'un intervalle par une fonction.	
2 **Travail avec « TIC_Analyse » sur l'activité 1**	- Recherche individuelle, - Complétion du tableau.	RI + OC **(9' 28 s)**	- Recherche individuelle, - Intervention du professeur (clarification de la consigne, insister sur **f(I) doit être inclus dans J,** appel à l'usage de la recherche automatique avec le bouton « Recherche automatique », lecture de la valeur de α (0.38) donnée par le logiciel, formulation sur le tableau, - Faire voir que si α est une solution alors toute autre valeur qui lui est inférieure est aussi solution. *//« … remarquez quelque chose de même la valeur 0.38 si on considère une valeur inférieure à 0.38, est ce qu'on aura toujours la même chose ? »//*	- Questions liées à la visualisation ? (aide procédurale pour préparer la tâche) (*pour cette valeur de α=0,7 par exemple, est-ce que f(I) ⊂ J ? Pourquoi ? …*) - Explication au moyen de visualisation graphique - interventions auprès de toute la classe : *« Si on voit pas l'image de l'intervalle, si on voit pas la bande insérée en bleu, on commence par appuyer sur la touche étude locale »* (ici : intervention technique - **aide procédurale** adressée à toute la classe) Aide procédurale pour trouver la première valeur de α. Elle transforme l'activité	- Traitement sur la machine (non mathématique) ***(activité pour tous)*** - Utiliser le curseur vertical pour choisir la valeur 0.8 de β. - Manipuler le curseur horizontal et visualiser f(I) - Lire une première valeur de α vérifiant f(I) ⊂ J ***(activité pour tous)*** - Utiliser le curseur vertical pour choisir les autres valeurs de β du tableau. - Manipuler le curseur horizontal et visualiser f(I) - Préciser la valeur de α

			- Reprise de la recherche des binômes. - Le professeur a donné suffisamment de temps à ses élèves de manipuler sur leur machine. Elle ne cesse de contrôler le travail de la plupart des binômes. // - Il y a des interactions « élève-professeur » et « élève-élève » {aide d'aspect technique et stratégique} *« …Il faut choisir une valeur de β. Le curseur est là. On peut minimiser la valeur de β … jusqu'la valeur 0.7. … la valeur 0.6 en suite …* ***en fait, chaque fois pour chaque valeur de β, il y aura … »***	attendue ***pour tous*** en activité *à* ***minima*** pour les élèves. - le professeur contrôle le travail des élèves qui sont en train de manipuler leur ordinateur en situation d'activité, - **Aide à visée constructive** pouvant être considérée comme proximité (alpha = 0,38 est une solution alors toute valeur inférieure à 0,38 est aussi solution), - Contrôle et encouragement des binômes en situation de recherche, - **Aide procédurale ROI** → Focaliser sur l'aide procédurale donnée par le logiciel (info-bulle) *// Essayer, si c'est possible, de donner la plus grande valeur de α //*	correspondante à chacune des valeurs de β. ***(activité a minima)***
3 **« Rédaction du commentaire », toujours sur l'activité 1**	- Rédaction du commentaire objet de la deuxième consigne de l'activité proposée dans le logiciel.	OC + X **(2' 50)**	- Réflexion individuelle - Intervention de l'enseignante pour orienter les élèves au procédé de formulation du commentaire, retour à la consigne, puis schématisation de la situation à l'aide d'un dessin et profite des interactions des élèves pour récapituler la situation complète de l'activité1 et les tâches ainsi réalisées.	- Le professeur rappelle la tâche suivante concernant la question 2 (complétion du commentaire) : *« …Alors. Il y a un commentaire, Il y a un commentaire qu'on va remplir… Remplissez le commentaire … »* - Au début : il n'y avait pas d'aides : le professeur se limite à circuler entre les rangs. Il contrôle le travail des binômes. - Le professeur intervient pour une **aide procédurale** :	- Réflexion individuelle (50 s), (**activité a maxima** devenu **pour tous** après l'intervention du professeur) - Rédiger des commentaires dans la zone de texte proposée par le logiciel contenant déjà un début (par défaut) **(activité pour tous)**

				« … on a du mal à donner le commentaire. Qu'est qu'on remarque ? Qu'est qu'on remarque ? Discutons un peu. Qu'est qu'on remarque ? *Oui … BASMA. … »* - Gestion de l'incident provoquée par l'élève (pas la réponse attendue): reprise de la réponse de l'élève et retour sur la tâche et explication détaillée (en montrant sur le vidéoprojecteur et sur le tableau à l'aide d'un dessin …) *« …: La valeur de α est plus proche de la valeur de β ! … est ce que c'est ça ce qui est demandé ? Qu'est ce qui est demandé ? Qu'est que qui est demandé dès le départ ? »* - **Aide à visée constructive :** Le professeur revient à la consigne de l'activité sur l'écran de projection de la fenêtre du logiciel : il récapitule les différentes tâches ainsi réalisées en focalisant sur l'aspect générique de β en vue de chercher une généralisation à toute valeur strictement positive.	- Interagir avec les questions de l'enseignante qui récapitule et rappelle les tâches ainsi réalisées dans cette activité1. **(activité a minima)**

5 **« Formulation de la définition formelle » à l'issue de l'activité 1**	Phase de reformulation du commentaire et formulation de la définition formelle	X **(4' 30)**	- Partir des commentaires (des binômes) ainsi récupérés et correctement formulés et exploiter des différents cadres et registres ainsi que les potentialités du logiciel pour amener les élèves à comprendre l'écriture de la définition formelle au moyen de traductions successives faisant appel à leurs connaissances antérieures (disponibles) sur : - la notion d'intervalle, - Image d'un ensemble par une fonction *// … on va interpréter ce qu'on vient de voir …qu'est-ce qu'on remarque ? …//* *« … Alors, on va reformuler. Quel que soit β positif, il existe un α positif tel que x appartient au voisinage qu'on a noté x0 mois α, x0 plus α alors f(x) appartient à l'intervalle f(x0) mois β, f(x0) plus (plus) β. »* - Le professeur entame l'étape des traductions successives des écritures mathématiques ainsi trouvées - Elle commence à utiliser les quantificateurs « ∀ » et « ∃ »	- **Proximités ascendantes et horizontales**: généralisation des résultats obtenus pour formuler la définition (formelle) de la continuité via **des traductions successives (reformulations)** en partant des commentaires établis par les élèves. Et en se basant sur les connaissances déjà-là pour accéder à des formulations différentes - **Aide procédurale** - partir des commentaires rédigés par les élèves, - caractériser l'intervalle I par son rayon α, - caractériser l'intervalle J par son rayon β, - Caractériser formellement l'appartenance d'un réel x à un intervalle de centre donné et de rayon arbitraire, - Traduire formellement l'inclusion f(I) ⊂ J, - Ecrire la définition formelle.	- **Les élèves interviennent de façon spontanée pour répondre ensemble et correctement aux questions proposées par leur enseignante lors de la formulation de la définition formelle (activités a minima)** - Quelques élèves interviennent également de façon spontanée lors des traductions cherchées par l'enseignante en rapport avec l'appartenance de x ou f(x) à I ou J et l'image de I est incluse dans J, d'autres suivent attentivement et il y a une certaine tendance à une présentation qui ne semble pas porteuse d'ambiguïtés pour les élèves vue qu'il n' y avait pas d'incidents didactiques (du moins). **(activités pour tous)**

Tableau VM.2 : Analyse de l'extrait de la séquence vidéo relative à l'introduction de la définition formelle.

c) Commentaires

Les élèves ont travaillé avant sur l'approche cinématique (qu'on avait choisi de ne pas analyser).

Le professeur fait l'intervention « maintenant on a va **« revoir » sous une autre approche qu'on va appeler l'approche formelle ».**

Une première proximité entre les activités des élèves et la définition formalisée, c'est le fait que le professeur a le support pour dire que l'approche cinématique se reformule en une nouvelle approche « approximation », et c'est clairement un palier entre le concept image primitif et la définition formalisée (**1^er^ palier de proximité ascendante** qui va de l'approche intuitive à une approche plus proche de la formalisation et avec les mêmes fonctions).

Les élèves ont eu de l'activité sur l'approche cinématique et ils vont l'enrichir avec une approche formelle « ancrée » dans les activités précédentes – grâce au logiciel, grâce au professeur qui fait le lien « on va revoir »… Tout ça ne serait pas possible avec le manuel car il n'y a pas d'approche cinématique.

Une autre proximité est offerte par le logiciel lui-même. C'est que les curseurs manipulés β et α, sont dans cet ordre : on bouge β d'abord, et on cherche α, ce qui est en proximité avec la définition formelle qui sera donnée par le professeur :

*« Alors, pour se faire, pour ce faire, on va fixer un intervalle de centre $f(x_0)$, **et de rayon β, … β étant un réel strictement positif.** Voilà un voisinage de $f(x_0)$… (en montrant le logiciel aux élèves)*

// Elle montre aux élèves sur l'écran le dessin proposé dans la consigne//

On peut l'appeler J, c'est le voisinage de $f(x_0)$

*Alors, … **existe-t-il un α ou existe-t-il un voisinage de x_0** tel que qu'est qu'on a, f(I) soit inclus dans…*

A la différence du manuel, ce qui est spécifique du logiciel c'est le nombre de valeurs accordées à β (6 dans le tableau mais il y aussi l'aspect du curseur qui bouge de 0,01 en 0,01) que les élèves vont manipuler eux-mêmes et qui apporte un caractère de **généricité** au β qui est une proximité avec le « quel que soit β ». On peut parler d'instrumentation : le caractère universel du β dans la définition formalisée vient avec la manipulation par les élèves du curseur de β (en référence à genèse instrumentale).

Le procédé interactif accompagné de la visualisation de l'image de l'intervalle I par la fonction f pour chaque cas de figure associé à une valeur de β, considéré dans le tableau, permet aux élèves de donner une valeur de α demandée. Ces activités sont accompagnées d'aides procédurales du type : « *... pour cette valeur de α=0,7 par exemple, est-ce que f(I) ⊂ J ? Pourquoi ? ...* »

Les élèves se basent sur le tableau complété ainsi obtenu pour formuler le commentaire qui traduit l'existence de α pour tout réel β strictement positif.

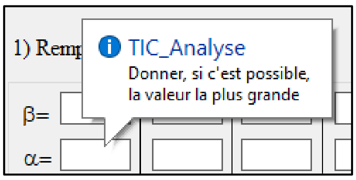
Ainsi, les calculs « techniques » à faire dans l'activité du manuel sont remplacés par de la visualisation suite à des manipulations de curseurs. Nous considérons que ces activités de visualisation - et leur aspect dynamique assuré par les curseurs de α et β - participent à des activités de reconnaissances mathématiques des notions en jeu et sont d'un grand profit pour l'enseignant pour introduire cette définition formelle. Cela est évidemment un signe d'une grosse différence avec le manuel.

« … en fait, chaque fois pour chaque valeur de β, il y aura … » *vient en appui des activités des élèves – après – sera en proximité avec le « quel que soit, il existe ... » ancré dans l'activité des élèves…*

D'autres aides à visée constructive apparaissent également dans ce tableau, nous parlons du résultat : « *si α est une solution..., alors toute autre valeur de α qui lui est inférieure est aussi solution ...* ».

- Une aide est donnée par l'enseignante : « ... *remarquez quelque chose de même la valeur 0.38 si on considère une valeur inférieure à 0.38, est ce qu'on aura toujours la même chose ? »*,
- Une aide est donnée par le logiciel : elle apparait dans l'infobulle qui apparait lorsque la souris survole une zone de texte consacrée à α *« Donner si c'est possible, la plus grande valeur »*.

info-bulle qui apparait lors du passage du pointeur de la souris sur une zone de texte de α.



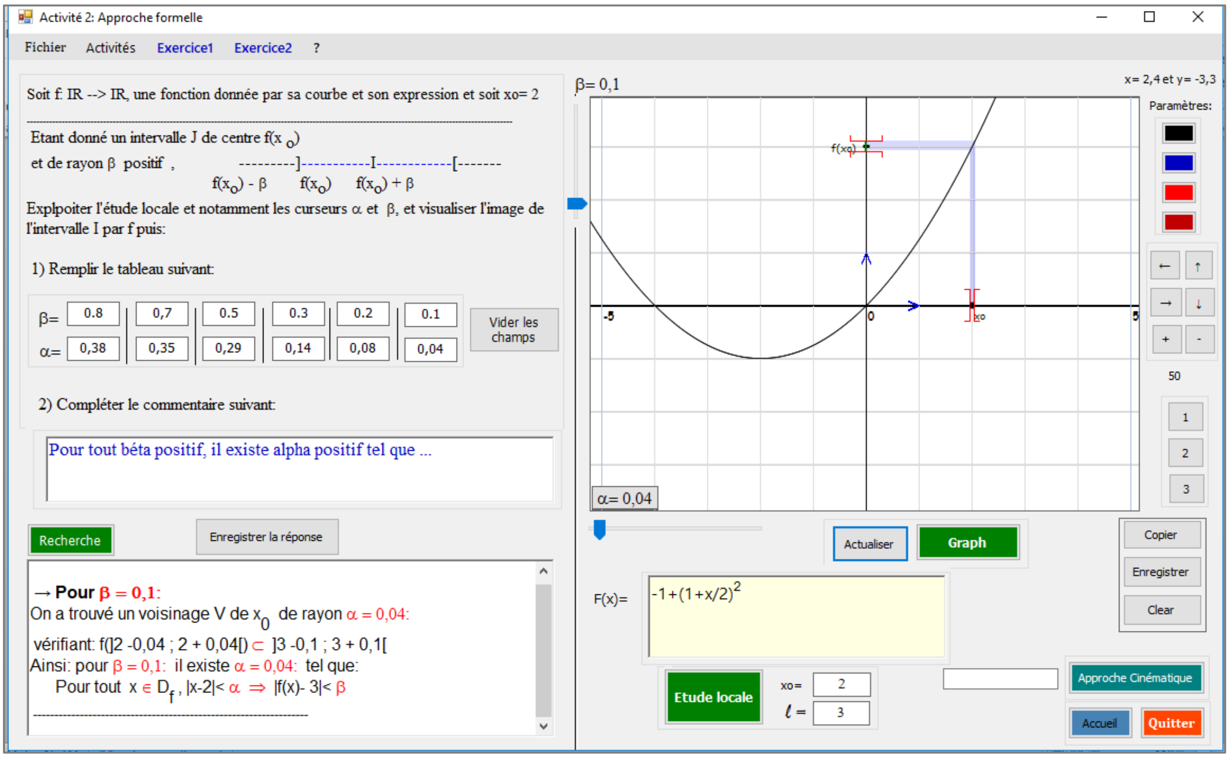


Fig3 : « copie d'écran de l'activité 1 au moment où l'on trouve les valeurs de α pour les valeurs de β proposées »

La définition formelle est ainsi donnée à l'issue de l'activité 1, conformément à ce qui est prévu dans l'ingénierie. Au cours de la formulation collective de cette définition en β et α, les traductions successives sont déclenchées par l'activité des élèves sur le logiciel, à cause des visualisations graphiques des images et images réciproques des voisinages considérés, ce qui a, on l'imagine, facilité la compréhension de l'implication que comporte la définition formalisée dans les commentaires rédigés.

A noter aussi que l'activité proposée dans ce scénario rencontre bien les ZPD des élèves, chose qui est vérifiée par le discours en classe, puisque les élèves n'ont pas trouvé de difficultés pour accomplir les tâches complexes proposées et suivre la formulation de la définition formelle de la continuité, à travers une reformulation guidée par le professeur qui elle-même est considérée comme tâche complexe (notion FUG).

Cependant, jusqu'ici, nous ne pouvons en aucun cas parler du niveau de conceptualisation de la notion de continuité pour ces élèves. Nous n'avons pas encore analysé en effet le reste de la séquence d'enseignement qui se rapporte aux trois autres activités qui traitent d'autres cas (un exemple de fonction continue et deux exemples de fonctions discontinues). Rappelons que ces exercices vont toucher le caractère « objet » de la notion de continuité. Ils seront complétés par des exercices du manuel au cours des autres séances de cours et exercices, et les élèves auront ainsi l'occasion de rencontrer des situations leur permettant d'utiliser ce concept de définition formelle par son caractère « outil », comme celles proposées dans le manuel dont nous en avons déjà parlé dans le chapitre IV (Relief sur la notion de continuité).

La comparaison de ces résultats avec celle de la séance ordinaire pourra également légitimer notre ingénierie.

Reste à noter à la fin de cette analyse que si l'on confronte avec l'étude a *priori* (chapitre VI), nous regrettons qu'il n'y a pas d'aller-retour avec l'approche cinématique. L'enseignante aurait dû s'appuyer sur l'approche cinématique. Nous estimons qu'il y avait des occasions manquées de faire d'autres liens et d'autres proximités basées sur les différentes caractérisations de la continuité (intuitive et formelle). Certes le manque de familiarisation de l'enseignante avec l'ingénierie en est un facteur.

I.2. L'enseignant « L » (avec le logiciel)

a) Synopsis (ou scénario global)

Episode	**chronomètre**	**durée**
- E1 : « Introduction et présentation » ✓ L'approche dite « formelle » ✓ Présentation de l'activité1 et explication de la consigne	A partir de la séq18 → séq19 1' 50	2' 28
• E2 : Présentation des fonctionnalités de « TIC_Analyse », Traitement du cas « β=0.8 »	De séq19 1' 50 → Fin de séq20	4' 55
• E3 : « Complétion du tableau » objet de la première consigne de l'activité1 proposée par le logiciel	Séq21 1' → séq23 0' 30	5' 04
• E4 : « Formulation de la définition formalisée de la continuité »	Séq23 0' 30 → séq24 0' 20	3' 34

Tableau VL.1 : Chronologie (extrait relative à l'introduction de la définition formelle)

b) Analyse de l'extrait de la séquence vidéo relative à l'introduction de la définition formelle (Enseignant « L »)

Episodes	Objectif élève (tâche) / objectif prof	Forme du travail de classe avec les durées	Indication sur le déroulement	Type d'aides mathématiques et proximités de l'enseignant	Activité « possibles » des élèves (a maxima, a minima, pour tous) et connaissances mises en fonctionnement
1 **« Introduction et présentation »**	Lecture de l'activité Lier avec les activités précédentes Comprendre la consigne	OC (2' 28')	- Introduction : présentation de l'approche dite « formelle » - Connexion avec l'approche cinématique, la même palette des fonctions considérées dans l'approche cinématique (précédente) *//…Activité, ah prenez. Ici, regardez bien on va passer à un autre problème,* *Regardez bien, on va essayer de voir autre chose…* *On va considérer un voisinage ici (il commence à dessiner et écrire au tableau en essayant de traduire ce qu'il est en train de dire) qui est continue en un point x0. Ici f(x0).* *Si je considère un intervalle centré en f(x0). Un intervalle centré en f(x0), par quoi est caractérisé ?...//* - Présentation de l'activité1 *// Donc ça c'est l'intervalle si vous voulez J. donc c'est un intervalle J de centre f(x0). Je demande je me demande s'il existe un intervalle I centré en*	- Présentation de la nouvelle approche à adopter dans l'étude du comportement d'une fonction en un réel, - Le professeur se place dans le registre graphique en faisant un dessin à main levée, il considère une fonction quelconque puis, il part d'un voisinage de $f(x_0)$ et il introduit les objectifs de l'étude du comportement de f en x_0. - Le professeur tente de motiver ses élèves lors de la présentation de l'activité1 proposée par le logiciel, la première consigne, les différentes tâches prescrites et le lien avec les objectifs de la séance.	- Activités liées à l'écoute. - Activité de visualisation (pour tous).

			x0. Donc ici j'ai un intervalle x0 moins α x0 plus α. Ça c'est l'intervalle I de sorte que toute valeur dans cet intervalle aura son image dans l'intervalle J. c'est-à-dire j'aurai f de I inclus entièrement dans J. pour tout réel β, c'est-à-dire j'aurai pour tout réel β strictement positif, // - Explication de la consigne par le professeur en faisant une figure (tâches prescrites)		
2 **« Présentation des fonctionnalités de TIC_Analyse » et traitement du cas β=0.8**	- Découvrir la deuxième interface du logiciel et ses fonctionnalités. - Recherche de α pour la valeur de β=0.8	OC (4' 55)	- Présentation rapide de l'interface du logiciel et des principales fonctionnalités *// Tapez « étude locale ». Alors, regardez bien ici.* *On a considéré β égal 0 8. C'est ce qu'on part de la consigne sur laquelle vous allez travailler tout à l'heure. On a considéré β 08 c'est-à-dire j'ai considéré un intervalle centré en f(x0) de rayon 08. On cherche on va chercher s'il existe un intervalle centré en x0 dont l'image est inclus dans l'intervalle J. (il écrit au stylo sur l'écran comme annotations sur l'interface du logiciel dans sa fenêtre « graphique »)//* - Usage de ses boutons : recherche avec les curseurs manuellement ou bien recherche automatique	Questions liées à la visualisation (**aide procédurale** pour préparer la tâche) *//… donc ça c'est l'intervalle J. ici c'est l'intervalle I. Dans ce cas de figure, a-t-on f de I inclus dans J ? //* *//… Donc ce réel qui appartient à I, son image est à l'extérieure de J. donc cette condition n'est pas réalisée dans ce cas de figure.//* Explication basée sur des annotations faites sur la projection au tableau ou au moyen de figures faites à main levée sur le tableau. - **Aide technique (**manipulatoire**)**: appel à l'usage des boutons flèches du clavier pour une manipulation précise des curseurs de α et β. *// J'ai besoin de ce 043 ou 044, je suis un peu loin. Je peux taper*	Traitement (non mathématique) : activer étude locale – (tous) Activité d'écoute Activité de réponse à la question (visualisation), 1 seul élève concerné – prépare les sous-activités nécessaires de visualisation

			(l'interface, le mode de l'étude locale, les curseurs de α et de β, la simulation de l'image de l'intervalle I, interactivité …) *//… on va agir sur le curseur pour modifier le α afin d'obtenir ce résultat (il montre à la main l'écriture « f< I > ⊂ J » existant sur le tableau)* *Passez sur le curseur. Appuyez sur le curseur (une élève est en train de travailler sur l'ordinateur qui est lié au vidéoprojecteur et fait varier le curseur comme il a demandé son professeur)* *… Stop, stop ! Stop là par exemple. Ici α 0 76 on doit tomber à l'extérieure. Modifiez un peu avec le curseur. Rapidement, rapidement. Bonh, stop, stop. …049. //* - Traitement du cas « β=0.8 » : intervention du professeur pour expliquer de nouveau la consigne, *// Maintenant, pour α 044 c'est probablement limite-limite. D'accord ?* *… consigne suivant : vous allez modifier le α afin d'atteindre l'objectif. L'objectif c'est que f de I inclus dans J. modifiez le α. Essayons de faire ensemble le premier cas. Est-ce que ça va ? C'est presque. Encore, encore, encore, encore. Largement !*	*maintenant avec l'ordinateur, avec les flèches de l'ordinateur, ou avancer pas à pas. Le α. Vous avez. … voilà … 044 … 045 //*	

			C'est largement.// - Retour sur l'image d'un intervalle par une fonction (visualisation au moyen du logiciel), traitement collectif au vidéoprojecteur, travail des binômes (en parallèle) *//… donc ça c'est l'intervalle J. ici c'est l'intervalle I.* *Dans ce cas de figure, a-t-on f de I inclus dans J ?...//*		
3 **« Complétion du tableau »**	Travail individuel des binômes	RI (2' 12)	- Le professeur contrôle les travaux des binômes : nous n'avons pas détecté les dialogues en classe. - Il incite les membres des binômes à se partager le rôle de manipulation sur la machine.	**Aide technique à visée constructive** pouvant être considérée comme proximité (0,38 est une solution alors toute valeur inférieure à 0,38 est aussi solution) Focaliser sur l'aide procédurale donnée par le logiciel (info-bulle : «Essayer, si c'est possible, de donner la plus grande valeur de α »,	-Travail autonome -Traitement sur la machine (non mathématique) ***(activité pour tous)*** -Utiliser le curseur vertical pour -choisir la valeur 0.8 de β. -Manipuler le curseur horizontal et visualiser f(I) -Lire une première valeur de α vérifiant $f(I) \subset J$ ***(activité pour tous)***
	Travail collectif (sur la première valeur de β « 0,7 », appel à l'usage de la recherche automatique	X (2' 52)	- Pour une relance correcte du travail des élèves : exposé collectif et manipulation sur vidéoprojecteur de la sous-tâche « recherche de α pour la valeur de β « 0,7 », *//…tu peux gagner du temps… en rapportant le curseur proche…puis laisses-le terminer. …donc, pour 0.7…//* - Les élèves continuent à remplir le tableau et réfléchissent sur la rédaction du commentaire objet	**Aide technique** : appel à l'usage de la recherche automatique *//… On va voir la rigueur de ces valeurs et passer à l'ordinateur qui va faire ce travail.* *Attendez un peu. Ici, on a le bouton « Recherche ». cliquez ici pour que l'ordinateur cherche. Tu t'emmerdes pour rien ! je vais prendre par exemple (α) β 05, laissez-le chercher …une petite pause et il va s'arrêter là où il trouvera la valeur maximale de α.*	- Activité d'écoute, - Activité de visualisation, - Manipulation individuelle sur le PC pour une expérimentation et une application pour une vérification des potentialités du logiciel, ***(activité pour tous)*** - Une élève est chargée du travail sur le PC connecté au vidéoprojecteur

			de la deuxième consigne de l'activité.	*Ne t'emmerde pas. Voilà le α, il se donne α, α égal à 024.//*	
4 **« Formulation de la définition formelle »**	Travail collectif Partir des résultats de l'activité 1 et des commentaires pour formuler la définition de la continuité	X **(3' 34** s)	- Partir des résultats ainsi établis après la complétion du tableau et du commentaire dans l'activité1 : *// … j'atteins ainsi la définition mathématique de la continuité …//* *// …Et je reprends « inférieure à β, je dois confirmer ça. … Pour tout β.* *Autrement dit, si je le traduis d'une autre manière, avec le graphique.* *… le β, c'est-à-dire que j'ai pris un voisinage de x0, c'est-à-dire pour tout voisinage J de x0 (il veut dire plutôt de f(x0) au lieu de x0), il existe un voisinage I de x0 tel que f de I est inclus dans J. le J est symbolisé par son rayon β. Le I par son rayon α//*	- **Aide à visée constructive** procédé de généralisation à partir du tableau : pour toute valeur de β, on peut trouver α tel que … faire voir aux élèves que ces valeurs considérées dans le tableau sont, en fait, génériques. - **Proximités ascendantes et horizontales**: généralisation des résultats obtenus pour formuler la définition (formelle) de la continuité via des traductions successives (reformulations) en partant des commentaires établis par les élèves. Et en se basant sur les connaissances déjà-là pour accéder à des formulations différentes	- Activité d'écoute - Participation orale et collective ***(activité a minima)*** - caractériser l'intervalle I par son rayon α, ***(activité pour tous)*** - caractériser l'intervalle J par son rayon β, ***(activité pour tous)*** - Caractériser formellement l'appartenance d'un réel x à un intervalle de centre donné et de rayon arbitraire, ***(activité a minima)*** - Traduire formellement l'inclusion $f(I) \subset J$, ***(activité a maxima)***

Tableau VL.2 : analyse de l'extrait de la séquence vidéo relative à l'introduction de la définition formelle par l'enseignant « L »

c) Commentaires :

Dans ce qui suit, nous ne faisons pas une analyse détaillée comme celle que nous avons menée pour la séquence de l'enseignante « M », mais nous allons commenter de façon assez brève le tableau précédent en focalisant sur les quelques axes suivants :

(1) DIFFERENCES REMARQUEES AVEC LA SEANCE ORDINAIRE : des occasions d'aide et de proximités

L'environnement technologique basée sur le logiciel « TIC_Analyse » constitue un bon support de proximités à travers:

- Les activités de visualisation qui caractérisent cette séance sont essentiellement des activités pour tous. Elles sont basées sur l'usage de la technologie « TIC_Analyse » (préparation des tâches prescrites, présentation de la nouvelle approche pour l'étude du comportement de la fonction f au voisinage de x_0 , stratégie de recherche de valeurs de α pour une valeur de β donnée …)

« ...Activité, ah prenez. Ici, regardez bien on va passer à un autre problème, on va essayer de voir autre chose… On va considérer un voisinage ici (il commence à dessiner et écrire au tableau en essayant de traduire ce qu'il est en train de dire) qui est continue en un point x0. Ici f(x_0). ... Si je considère un intervalle centré en f(x_0). Un intervalle centré en f(x0), par quoi il est caractérisé ?... Donc ça c'est l'intervalle si vous voulez J. donc c'est un intervalle J de centre f(x_0). Je demande je me demande s'il existe un intervalle I centré en x_0. Donc ici j'ai un intervalle]x_0 moins α, x_0 plus α[. Ça c'est l'intervalle I de sorte que toute valeur dans cet intervalle aura son image dans l'intervalle J. c'est-à-dire j'aurai f de I inclus entièrement dans J. pour tout réel β, c'est-à-dire j'aurai pour tout réel β strictement positif ... »

« ... donc ça c'est l'intervalle J. ici c'est l'intervalle I. Dans ce cas de figure, a-t-on f de I inclus dans J ? »

« ... Donc ce réel qui appartient à I, son image est à l'extérieur de J. donc cette condition n'est pas réalisée dans ce cas de figure. »

- L'aspect dynamique des activités de traitement et la généricité des valeurs de β considérées sont aussi pour tous et offrent à l'enseignant des occasions d'aides et de proximités de plusieurs types, notamment dans la phase de formulation de la définition formelle.

« ... j'atteins ainsi la définition mathématique de la continuité ... ...Et je reprends « inférieure à β, je dois confirmer ça. ... Pour tout β. ... Autrement dit, si je le traduis d'une autre manière, avec le graphique... »

« ... le β, c'est-à-dire que j'ai pris un voisinage de x_0, c'est-à-dire pour tout voisinage J de f(x_0), il existe un voisinage I de x_0 tel que f de I est inclus dans J. le J est symbolisé par son rayon β. Le I par son rayon α ...»

(2) LIEN AVEC L'APPROCHE CINEMATIQUE :

L'enseignant « L », lui aussi, n'a pas fait de lien avec l'approche cinématique. On s'attendait à ce qu'il parte de la continuité telle qu'elle est exprimée dans l'approche précédente. Néanmoins, ce lien attendu est facilement abordable dans les cas de discontinuité qui seront évoqués dans les deux activités suivantes, en reliant la valeur de β trouvée et le saut que caractérise la courbe en son point d'abscisse x_0.

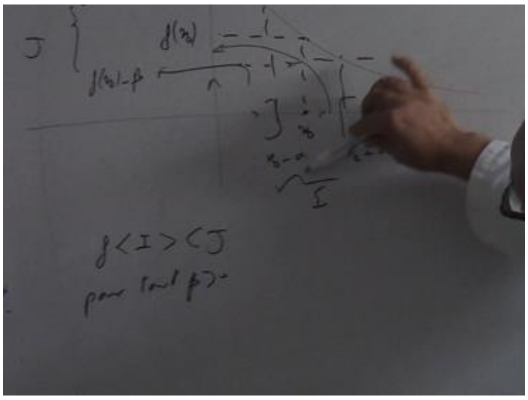
(3) LES ACTIVITES DES ELEVES EN LIEN AVEC LEUR ZPD :

Nous retenons de l'analyse de cette séquence d'enseignement et apprentissage proposée par l'enseignant « L » que :

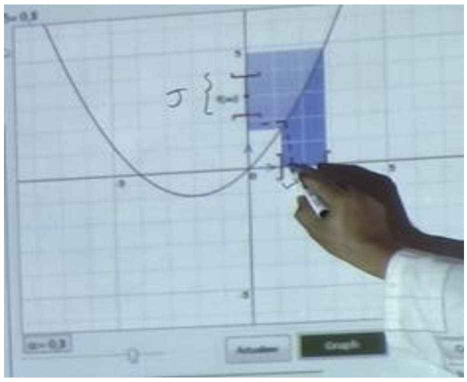
- La nature ou le type du discours qu'a *caractérisé* la séquence relative à la mise en place de la définition formalisée de cette notion de continuité est marquée par la participation orale et collective de la classe qui s'est montrée motivée par les objectifs de la séance et la manipulation de l'outil technologique,
- Les interventions des élèves et leurs réactions avec les questions proposées par l'enseignant (caractérisation de l'intervalle I par son rayon α, caractérisation de l'intervalle J par son rayon β, caractérisation en langage formel de l'appartenance d'un réel x à un intervalle de centre donné et de rayon arbitraire, traduction en langage formel l'inclusion f(I) ⊂ J, … etc.) se sont basées sur leurs pré - requis (des élèves) et notamment sur ce qu'ils ont retenu des activités préliminaires faites au début de la séance,
- La diversité des cadres et registres qu'a marqué ces séquences d'enseignement a joué un grand rôle pour atteindre la majorité des objectifs assignés,

Ce qui nous permet de penser, comme dans le cas de la séance avec le professeur M que l'installation de la définition formelle rencontre les ZPD des élèves – évaluées par leurs activités possibles « effectives » « pour tous » sur le logiciel - à l'aide de proximités horizontales et ascendantes.

Captures d'écrans (CE) :



CE1 : « Explication de la consigne à l'aide de dessin à main levée sur le tableau » : diversification des outils didactiques, alternance des environnements



CE2 « caractérisation graphique simulée de l'image d'un intervalle par une fonction ». Le professeur exploite la projection faite sur le tableau pour faire des annotations qui apparaissent sur la fenêtre du logiciel.

I.3. L'enseignante « A » (avec le logiciel)

a) Synopsis

Episode	Chronologie	Durée
• E1 : « Présentation »	De 0'.00 → 4' 10 s	4' 10 s
• E2 : « Traitement du cas « β=0.8 »	De 4' 10 s → 6' 30 s	2' 20 s
• E3 : « Premier exposé collectif »	De 6' 30 s → 8' 30 s	2'
• E4 : « Recherche individuelle »	De 8' 30 s → 15' 30 s	7'
• E5 : « Récupération et exposé des résultats »	De 15' 30 s → 19' 46 s	4' 16 s
• E6 : « Formulation de la définition formalisée de la continuité »	De 19' 46 s → 24 46 s	5'

Tableau VA.1 : Chronologie (extrait relative à l'introduction de la définition formelle)

b) Analyse de l'extrait de la séquence vidéo relative à l'introduction de la définition formelle par l'enseignant « A »

Episodes	**Objectif élève (tâche) / objectif prof**	**Forme du travail de classe avec les durées**	**Indication sur le déroulement**	**Type d'aides mathématiques et proximités de l'enseignant**	**Activité « réelle » des élèves (a maxima, a minima, pour tous) et connaissances mises en fonctionnement**
1 **« Présentation »**	Présentation : - l'approche dite « formelle », - l'activité1, - l'interface et les fonctionnalités du logiciel.	OC + X **(4' 10 s)**	- Explication de la consigne en faisant une figure et en exploitant celle projetée par le vidéoprojecteur sur le tableau avec des annotations faites au stylo), *//… Bien. Donc vous avez …, plutôt la touche « approche formelle », donc on va revenir à l'activité 1…//* - Présentation de l'interface, du mode de l'étude locale, des curseurs de α et de β, de la simulation de l'image de l'intervalle I, interactivité …) *//… on cherche l'existence d'un intervalle I de centre x0 et de rayon α strictement positif tel que quoi ?, tel que f(i) est incluse dans J. C'est ce qu'on va essayer SVP, d'étudier, maintenant … ensemble. Allez on va voir tout cela.//* -	- **Aides à visée constructive :** → En parlant de la nature du travail que caractérise cette nouvelle approche dite formelle : *// … cette nouvelle approche, ce qu'on appelle approche formelle ? plutôt plus mathématique. Ça va être encore mieux que ça plus … ? Plus locale. Plus locale. On va voir mieux ce réel-là x_0…//* → lien entre la recherche de α et des connaissances mathématiques antérieures sur l'image d'un intervalle par une fonction). - **Proximités descendante** : Caractérisation de voisinage centré : *//… un intervalle J de centre f de x0. C'est quoi SVP un intervalle J de centre f (x_0) ? Mieux que ça, SVP ? Nous avons à voir … Un voisinage centré ? … de qui SVP de f (x_0)*	*Activités d'écoute et d'interaction avec le professeur et le logiciel,* ***(Activités pour tous)***

				Rappelez-vous SVP, le réel 2 … x0, son image ….3.// - **Aide procédurale :** Aide basée sur une manipulation technique du logiciel : *// Donc c'est ça si vous voulez notre but. Donc à chaque fois on va faire varier la valeur de qui ? … de β. C'est-à-dire qu'on va à chaque fois, si vous voulez, changer le voisinage centré … de qui ? … de f de x0, c'est-à-dire qui va changer. Et on va essayer de voir l'existence de ce qu'on appelle voisinage centré de qui ? … de x0 … I, … telle que f de I sera incluse dans J.//* *// Ok ? Donc essayons de voir ça ensemble SVP. Alors, pour cela, vous avez tous passé …* *Alors on va essayer d'utiliser le … le curseur plutôt. … et de voir l'existence de β, plutôt de ce α. //*	
2 **« Traitement du cas « β=0.8 »**	- Présentation de la tâche à l'aide du vidéoprojecteur. - Recherche individuelle : manipulations par binômes sur les machines,	EC + OC + MI + X **(2' 20 s)**	- Intervention du professeur pour clarifier de nouveau les tâches proposées, retour sur l'image d'un intervalle par une fonction (visualisation au moyen du logiciel), *// La première si vous voulez valeur de β qu'on nous propose c'était quoi ? … c'est le 08. Donc on va essayer ensemble si vous voulez, … de déterminer la valeur de α//* - Le professeur interagit avec les binômes qui sont en train de travailler	- **Aide technique :** Le prof se charge du contrôle du travail des élèves : aide éventuellement technique, - Fonction d'organisation général du travail …. (le professeur exploite le tableau pour clarifier davantage la consigne.il efface pour écrire sur l'écran en vue d'expliquer…), *// Vous avez le curseur concernant le α, en bas, vous allez essayer de faire varier, … de faire glisser si*	- découverte des fonctionnalités du logiciel, ***(activités pour tous)*** - manipulation des curseurs, visualisations... ***(activités devenues a minima*** après l'intervention du

			sur leurs machines : *// Oui, … ça va. … voilà … β égal 0 virgule 8 …varier le curseur …alors, oui …//* Le professeur exploite le graphique et la simulation proposée par le logiciel pour expliquer pourquoi la valeur de α ne convient pas i.e. f(I) non incluse dans J. // Ok. Donc on n'a pas encore, si vous voulez, tombé sur la bonne valeur. Donc essayons encore mieux. Regardons ensemble. Vous allez donner des valeurs de α qui conviennent. Svp, agissez sur ces curseurs de α, à gauche et à droite. *Alors là, pas encore, alors là. Est-ce que l'intervalle, l'image de l'intervalle I est incluse dans J encore ? Non. Pas encore. Alors là, voilà donc ! Est ce qu'on voit maintenant ? Oui. C'est quoi la valeur de α ici ?//* - Le professeur évoque qu'en fait, toute valeur de α inférieure à 0.35 convient aussi : *//035. donc c'est une valeur, si vous voulez, qui convient. Changeons encore svp… et regardons ensemble. Encore est ce que ça marche ?* *... oui, donc, si vous voulez, il y a plusieurs valeurs de α. Retenez ça, toute valeur inférieur à la première valeur 036, oui. Con … convient.//*	*vous voulez le curseur concernant le α jusqu'à tomber sur la bonne… la bonne valeur.//* - Des paroles à basse voix, non détectées : le professeur agit avec le travail de ses élèves (fonctions d'aide, de contrôle, d'orientation …) - **Proximités horizontales :** *//… Ici, je vais prendre … alors, est ce que f de I est dans J pour cette valeur-là ? est-ce que c'est inclus ?* *… pourquoi ? pourquoi ce n'est pas inclus ? //* - **Proximités ascendantes :** *//... oui, donc, si vous voulez, il y a plusieurs valeurs de α. Retenez ça, toute valeur inférieur à la première valeur 036, oui. Con … convient//*	professeur***)*** - interactions avec le professeur, ***(activités pour tous)*** - interactions avec le logiciel. (1' 05 s) ***(activités a maxima)***

3 **« Premier exposé collectif »**	- Recherche collective de α pour la première valeur de β= 0,8 »	OC+EC **(2')**	- Exposé collectif et manipulation sur vidéoprojecteur de la sous-tâche « recherche de α pour la première valeur de β « 0,8 », - Vérification à l'aide de visualisation graphique si une valeur de α est ou non solution : caractérisation graphique de l'image d'un intervalle par une fonction (simulation) - Montrer aux élèves au moyen de traitement interactif avec le logiciel que : « si α est une solution, toute autre valeur qui lui est inférieure est aussi une solution ». Le travail est encore collectif	- **Aide procédurale** : pour trouver la première valeur de α. Elle transforme l'activité attendue *pour tous* en activité *à minima* pour les élèves. (à cause de la complexité de la première rencontre avec le logiciel et la manipulation des curseurs et une sous-estimation de notre part de la pratique ordinaire des enseignants)	- Pas de travail individuel. - Participation au tableau, - Interaction avec le professeur et le contenu projeté au tableau, - Activités de visualisation, - Activités de reconnaissance de l'image d'un intervalle par une fonction. ***(Activités pour tous)***

4 **« Recherche individuelle »**	- Complétion du tableau : → Trouver une valeur de α pour chaque valeur de β considérée dans le tableau, - Rédaction du commentaire objet de la deuxième consigne de l'activité.	RI **(7')**	- Demander des élèves d'exploiter le bouton de « Recherche automatique », *// Faites attention, si vous voulez, ce logiciel… cette méthode nous propose encore …* *Appuyez sur la touche « Recherche ». Vous allez cliquer svp, là. Et il y aura une recherche auto … automatique.* *Alors c'est quoi la valeur de β c'est 0 virgule 7 ? Regardez là svp, regardez le tableau. L'ordinateur est en train de chercher la bonne valeur de qui svp //* - Contrôler le travail des binômes sur leurs machines, - Charger un élève de travailler le cas β=0.5 sur le vidéoprojecteur : *// Alors, la troisième valeur de β … svp, je vous laisse le temps pour chercher encore.* *Oui, 0 virgule 5 ? Troisième valeur de β svp ? //* *// un quelqu'un au tableau svp. Quel curseur là svp. De qui ? … de β.* *Vous allez cliquer svp. Vous avez des flèches en bas svp. On va essayer de faire réduire la valeur de β jusqu'à arriver à combien cette svp ?//*		- Recherche individuelle: manipulations sur leurs ordinateurs pour remplir les autres cases du tableau objet de la première tâche (question 1 dans la consigne proposée dans l'activité en cours) ***(Activités pour tous)*** - Le recours au bouton de recherche automatique ***(Activité a minima)*** - Respect de la consigne (donner la valeur la plus grande) ***(Activités a maxima)*** - Recherche individuelle (par binôme) pour compléter le reste du tableau. ***(Activités pour tous)***

5 **« Récupération et exposé des résultats »**	- Complétion du tableau (au stylo), - Phase de récapitulation.	OC + RI + MI **(4' 16 s)**	- Le professeur contrôle la formulation du commentaire par les binômes, *(S'adresse à un binôme qui a trouvé une valeur inattendue)* *// Combien ? Le β svp, est ce que vous avez changé en 0 virgule 5 ? Eh ?* *Là, oui. Tout le monde, qu'est-ce que vous avez trouvé svp ?* *… 025…. Oui, regardons ensemble.//* - Pendant deux (02' 05 s) minutes, le professeur discute avec le groupe d'élève du devant concernant la formulation du commentaire, et de nouveau avec les autres binômes. - Le prof se charge de contrôler les manipulations des binômes sur leur machines et vérifie si tous les binômes sont à jour // …oui. *Donc vous allez si vous voulez noter votre commentaire ….Ah. Et j'aime vous entendre tout de suite. Alors vous allez noter votre commentaire. Allez svp, votre commentaire et ensuite vous allez enregistrer. Allez. Votre commentaire …//* - Le professeur récapitule après avoir chargé un élève de la complétion du tableau sur le vidéoprojecteur par les valeurs trouvées.	Fonction de contrôle et de suivi des essais des binômes.	- Travail individuel des binômes : rédaction des commentaires objet de la deuxième tâche proposée par le logiciel *//Les élèves formulent et écrivent leurs commentaires dans la zone de texte proposée par le logiciel sous contrôle de leur professeur//* ***(activités pour tous)***

6 **« Formulation de la définition formelle de la continuité »**	Formulation de la définition formalisée de la continuité en partant des commentaires formulés par les élèves,	OC + EC **(5')**	- Formulation de la définition formalisée au moyen de traductions successives exploitant les connaissances des élèves sur la notion de voisinage et celles sur l'image d'un intervalle par une fonction. - Le professeur part des commentaires ainsi formulés par les élèves à la fin de l'activité1 : *// … Ça y est ? Alors, que remarque-t-on svp ? Commentaire de ce résultat ? Ensemble svp.* *Oui ?* *… pour tout ? Oui ? je vous entends monsieur. Oui. Ensuite,…//* - Le professeur exploite la généricité de β et les résultats du tableau de l'activité 1 pour mettre en place le début de la définition ($\forall \beta > 0, \exists \alpha > 0$ …) *// A chaque fois qu'on se fixe β, qu'est-ce qu'il existe ?//* - Le professeur formule la définition de la continuité en partant des commentaires et se basant à la caractérisation algébrique des voisinages.	- **Proximités ascendantes :** généralisation des résultats obtenus pour formuler la définition (formelle) de la continuité via des traductions successives (reformulations) en partant des commentaires établis par les élèves. Et en se basant sur les connaissances déjà-là pour accéder à des formulations différentes - **Proximités ascendantes et horizontales**: généralisation des résultats obtenus pour formuler la définition (formelle) de la continuité via des traductions successives (reformulations) en partant des commentaires établis par les élèves. Et en se basant sur les connaissances déjà-là pour accéder à des formulations différentes → Faire appel à la caractérisation d'un voisinage centré (application des résultats de l'activité préliminaire) *// … Essayons svp, je répète encore une fois une autre fois : on va essayer de traduire de différentes manières ce qu'on vient d'énoncer … //*	- Les élèves interagissent avec leur professeur, beaucoup d'interventions semblent correctes. E : *« pour tout β positif,* E : *« pour tout β positif, il existe α positif, tel que si x appartient au voisinage ouvert centré en x0 … »//*

Tableau VA.2 : analyse de l'extrait de la séquence vidéo relative à l'introduction de la définition formelle par l'enseignant « A »

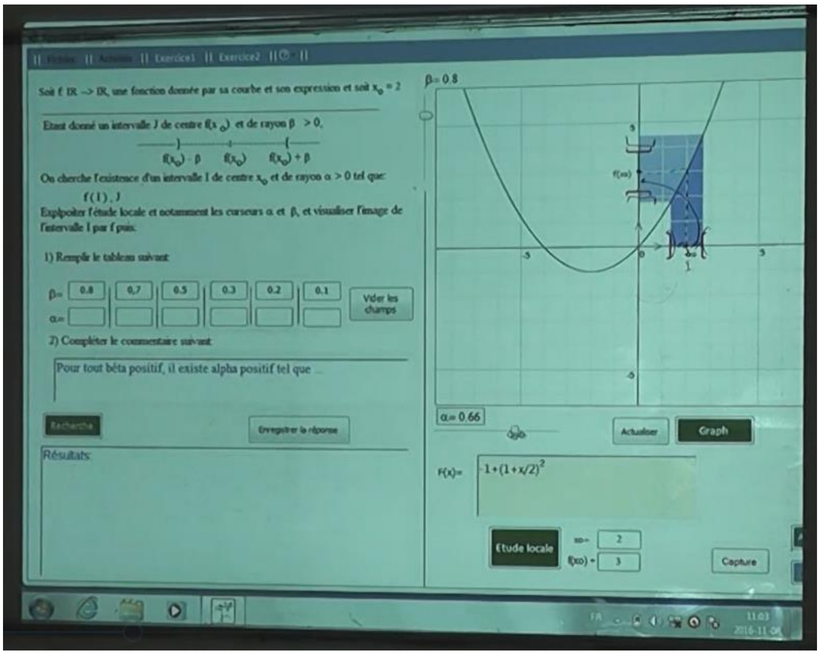
c) Commentaire

(1) DES OCCASIONS DE PROXIMITES

Lors de l'explication de la consigne, l'enseignant essaie de ressortir la généricité de β déjà offerte par le logiciel (comme déjà dit) et de ramener la situation à un problème de recherche (ou d'existence de α) en proximité avec la définition formelle :

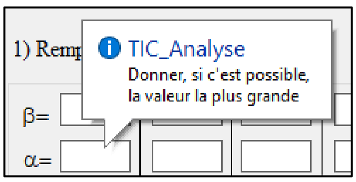
« Donc c'est ça si vous voulez notre but. Donc à chaque fois on va faire varier la valeur de qui ? … de β. C'est-à-dire qu'on va à chaque fois, si vous voulez, changer le voisinage centré … de qui ? … de f de x_0*, … . Et on va essayer de voir l'existence de ce qu'on appelle voisinage centré de qui ? … de* x_0 *… I, … telle que f de I sera incluse dans J »*

L'enseignant exploite l'environnement technologique pour faire également des proximités horizontales basées sur des activités de visualisation (dont on voit qu'elles sont essentiellement des activités « pour tous »). Par exemple, l'enseignant annote sur l'écran par des cas de figures traitant l'image d'un intervalle I correspondant à une valeur de α en demandant une vérification de l'inclusion $f(I) \subset J$ et pour conclure si cette valeur de α convient ou pas :



Rappelons qu'une aide procédurale « Donner, si c'est possible, la valeur la plus grande » est fournie par le logiciel à travers l'info-bulle qui accompagne la souris au moment où l'élève clique sur une zone de texte pour α :

info-bulle qui apparait lors du passage du pointeur de la souris sur une zone de texte de α.



Le logiciel donne lieu, aussi, à des occasions de proximités de tout type :

- Horizontales :
  - ✓ comme en rapport avec la reconnaissance (graphique) de l'image d'un intervalle basée sur des activités de visualisation développées par les élèves (pour tous) :

//... Ici, je vais prendre ... alors, est ce que f de I est dans J pour cette valeur-là ? Est-ce que c'est inclus ?

... pourquoi ? Pourquoi ce n'est pas inclus ? //

// ... Alors là, pas encore, alors là..., l'image de l'intervalle I est incluse dans J ? encore ? Non. Pas encore. Alors là, voilà donc ! Est ce qu'on voit maintenant ? Oui. C'est quoi la valeur de α ici ?... //

- Ascendantes :
  - ✓ pour dire que si α est une solution, toute autre valeur qui lui est inférieure est aussi solution.

//... oui, donc, si vous voulez, il y a plusieurs valeurs de α. Retenez ça, toute valeur inférieure à la première valeur 036, oui. Con ... convient...//

  - ✓ généralisation des résultats obtenus pour formuler la définition (formelle) de la continuité via des traductions successives (reformulations) en partant des commentaires établis par les élèves. Et en se basant sur les connaissances déjà-là pour accéder à des formulations différentes.
- Descendantes :
  - ✓ pour la caractérisation d'un voisinage centré.

//... un intervalle J de centre f de x_0. C'est quoi SVP un intervalle J de centre $f\ (x_0)$? Mieux que ça, SVP ? Nous avons à voir ... Un voisinage centré ? ... de qui SVP de $f\ (x_0)$. Rappelez-vous SVP, le réel 2 ... x_0, son image ....3 //

(2) DIFFERENCES REMARQUEES AVEC LA SEANCE ORDINAIRE : LES ASPECTS « DYNAMIQUE » ET « VISUALISATION »

Les activités de visualisation – reconnaissances - notamment en rapport avec la simulation de l'image de l'intervalle I et la vérification de l'inclusion $f(I) \subset J$ semblent toujours être des activités pour tous. Elles remplacent des excès de calculs – traitements - en environnement papier-crayon. En plus de la multiplicité des valeurs de β proposées dans le logiciel sont des éléments de différences.

(3) ICI, AUSSI, IL N'Y A PAS D'ALLER-RETOUR AVEC L'APPROCHE CINEMATIQUE

En revanche, le professeur « A » a fait des allers-retours entre les différentes formulations de la définition formelle avec les « voisinages » et en « β, α »:

« Pour tout $J = V_{f(x_0)}$, il existe $I = V_{x_0}$ tel que $f(I) \subset J$ »

Et « pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$; $|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \beta$

I.4. La séance ordinaire présentée par l'enseignante « N »

Classe : 3ème sciences expérimentales

a) Synopsis

Episode	Chronologie	Durée
▪ E1 : « Gestion de l'activité 1 page 23 » ❁ Représentation dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan de la courbe de la fonction f donnée (affine par morceau), ❁ Représentation sur l'axe des ordonnées l'ensemble des réels y tels que $\lvert y-3\rvert < 0.1$, puis déduire graphiquement une condition suffisante sur x pour que $\lvert \mathrm{f(x)}-3\rvert < 0.1$, (la recherche des bornes a été faite par le calcul) ❁ Même tâche avec 0.03 au lieu de 0.1. (une analogie dans le calcul est adoptée), ❁ Traduction des résultats en termes de « rendre $\lvert \mathrm{f(x)}-\mathrm{f(1)}\rvert$ aussi petite que l'on veut … ».	A partir de Séq07 (5' 36) → Séq11 (2' 20)	27' 32 s
• E2 : « Définition formalisée de la continuité » ❁ procédé de généralisation du résultat de l'activité précédente traduit en caractérisant l'appartenance d'un réel à un voisinage centré, ❁ Enoncé de la définition en β et α.	A partir de Séq11 (2' 20) → fin de Séq11	4' 33 s

Tableau VN.1 : Chronologie (extrait relative à l'introduction de la définition formelle)

b) Analyse de l'extrait de la séquence vidéo relative à l'introduction de la définition formelle

Episodes	Objectif élève (tâche) / objectif prof	Forme du travail de classe avec les durées	Indication sur le déroulement	Type d'aides mathématiques et proximités de l'enseignant	Activité « réelle » des élèves (a maxima, a minima, pour tous) et connaissances mises en fonctionnement
1 **« Gestion de l'activité 1 page 23 du manuel scolaire »**	▪ Représentation dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan de la courbe de la fonction f donnée (affine par morceau),	OC + EC **(8' 20 s)**	- Reconnaissance d'une fonction affine par intervalles, - Représentation graphiquement de la fonction (faire un tableau de valeurs, tracer le repère, tracer les demi-droites correspondantes, …) - Il n'y avait pas d'occasions de recherche individuelle ou de réflexion avant la gestion collective au tableau. - Prise de notes sur le cahier de cours.	- **Aide procédurale :** → Appel à la reconnaissance de la nature (affine par intervalles) de la fonction, - **Proximités descendantes :** → la courbe de f est alors la réunion de demi-droites (connaissances antérieures de la deuxième année) → une demi-droite est déterminée par deux points dont l'un est le sommet)	- Les élèves exploitent leurs connaissances sur les fonctions affines et notamment par intervalles, ***(activités a maxima)*** - Un élève est chargé du travail au tableau aidé par l'enseignante, - Les autres élèves participent, interagissent avec les questions posées par l'enseignante, ***(activités a maxima)*** - Les élèves copient le contenu du tableau sur leurs cahiers.

	▪ Représentation sur l'axe des ordonnées l'ensemble des réels y tels que $\lvert y-3\rvert < 0.1$, puis déduire graphiquement une condition suffisante sur x pour que $\lvert f(x)-3\rvert < 0.1$, (la recherche des bornes a été faite par le calcul)	OC +EC **(12'49s)**	- Appel à des connaissances anciennes sur la valeur absolue ($\lvert x-a\rvert < r \Leftrightarrow x \in]a-r, a+r[$) - Faire une analogie avec l'activité1 de la rubrique « pour commencer », *// Ça veut dire selon vous où se trouve y ? y seulement, sans faire le calcul. C'est déjà fait….* *… Equivaut …. ? … y appartient où ?...//* - Traduire la situation en termes d' « image » et d'« antécédent », *//…. Lis bien la question.* *… en déduire graphiquement, une condition… une condition suffisante sur x pour que f(x), valeur absolue de f(x) mois trois inférieure à zéro virgule un.* *Ça veut dire quoi ?* *Je dois trouver l'antécédent de f(x). ça veut dire x … appartient à quel intervalle … pour que …. son image … se trouve … sur cet intervalle ?* *… //* - Les bornes ont été déterminées par le calcul des antécédents de 2.9 et 3.1 par f (normalement : on doit se limiter à donner graphiquement l'intervalle au moyen de projections). *// …L'antécédent maintenant de trois virgule un par quelle restriction ?* *Par la première … restriction.* *Puisque…* *La première restriction.* *Pour les x qui sont plus grands que un //*	- **Proximités horizontales et descendantes,** demandes de compléments, de réponses, d'analogie avec les tâches réalisées dans les activités préliminaires. - **Aides procédurales :** Appel à l'usage d'une double projection des bornes de l'intervalle]2.9,3.1[. - Travail trop guidé par l'enseignante. - L'enseignante s'est obligée de répéter en vue d'expliquer davantage la réalisation de la tâche. - L'enseignante récapitule les résultats ainsi trouvées.	- Une élève est chargée du travail au tableau, mais ne participe pas effectivement à la résolution, - Les élèves interagissent avec les questions posées par l'enseignante, - Ils suivent la correction en cours et au même temps recopient ce qui est écrit au tableau, - Activités d'écoute à l'explication apportée par l'enseignante.

	▪ Même tâche avec 0.03 au lieu de 0.1. (une analogie dans le calcul est adoptée),		- Même travail : L'enseignante invite ses élèves à adopter une analogie avec la tâche précédente 2) a). *// Maintenant, la même question, mais avec un rayon plus … petit… avec un rayon plus … petit.* *Le même travail.* *D'accord ?//* - Retour sur l'image d'un intervalle par une fonction. - L'enseignante fait montrer à ses élèves le rayon sur le graphique existant. -	- **Proximités horizontales :** demandes de compléments, de réponses, d'analogie avec la valeur 0.1 de la tâche précédente. - **Aide procédurales :** Caractérisation graphique de l'image d'un intervalle par une fonction.	- Visualisation de l'image d'un intervalle par une fonction (a maxima ?)
	▪ Traduction des résultats en termes de « rendre $\lvert f(x) - f(1) \rvert$ aussi petite que l'on veut … ». »	OC + EC	- Partir des résultats des deux questions précédentes, synthétiser et traduire comme c'est énoncé : *// D'accord ?* *… à chaque fois. Je répète. A chaque fois la valeur absolue de f(x) moins f de 1donc je le prends aussi petite que l'on veut.* *La première fois j'ai pris f(x) mois f de 1inférieur à zéro un. … zéro un !* *J'ai trouvé un intervalle centré en 1de rayon combien ?* *Zéro…zéro trois !* *Et lorsque j'ai pris un rayon plus petit : zéro virgule zéro un. Aussi, …je peux trouver un intervalle centré en 1de rayon plus petit que le premier… //*	- **Des proximités horizontales et ascendantes :** L'enseignante tente d'expliquer à ses élèves que ces résultats restent valables pour n'importe quelles valeurs strictement positives autres que 0.1 et 0.01.	Activités d'écoute.

2 **« Définition formalisée de la continuité »**	▪ Généralisation du résultat de l'activité précédente traduit en caractérisant l'appartenance d'un réel à un voisinage centré, ▪ Enoncé de la définition en β et α.	**(4' 38 s)**	- L'enseignante exploite les résultats des questions précédentes et le graphique existant pour commenter et essayer de faire voir à ses élèves le comportement de la fonction au voisinage de 1 : *// … elle est très proche de f(1).* *D'accord ?* *Par suite, deuxième question … qu'est-ce que nous avons pris ? le rayon , il est… devient combien ?* *0,01. Ça veut dire qu'on se rapproche de f(1) qui est égal à 3.* *Compris ?* *C'est-à-dire aussi petit que l'on veut, … cette différence… Regardez !//* - L'enseignante exploite le graphique existant pour expliquer la notion de l'image d'un intervalle par la fonction f en annotant là-dessus : *// Lorsque je prends x ici, son image, automatiquement ça sera ici.* *Donc f(x) – f(1), … donc… elle est inférieure à combien ? … à 0.1.* *… lorsque je prends un intervalle centré en 1 de rayon très petit, toujours, je peux trouver un intervalle centré en 1, de rayon aussi …. Petit. Telle façon que l'image de n'importe quel réel x qui appartient à cet intervalle, … son image se trouve … ici.* *… c'est la continuité.* - L'enseignante explique de nouveau cette notion de tendance et de continuité en se basant sur le graphique existant// … en disant : *« Donc, pour tout intervalle, lorsque je*	- **Des proximités horizontales et ascendantes :** Les généralisations cherchées par l'enseignante ne semblent pas être dans la ZPD des élèves et souffrent de parachutage : → Elle a posé plusieurs questions et elle ne cesse de répondre par elle-même. → La plupart des traductions sont faites par l'enseignante.	- Les élèves n'interagissent pas correctement (même partiellement) avec les questions posées par leur enseignante (les réponses détectées sont toutes fausses), - Les élèves se sont montrés capables d'interagir lorsqu'ils se trouvent devant une situation de visualisation graphique.

			prends un intervalle de plus en plus de rayon très petit, toujours je peux trouver un intervalle centré en 1 tel que l'image de x qui appartient à cet intervalle, appartient à cet intervalle ». - L'enseignante introduit la définition formalisée en traduisant les résultats précédents : *// Comment je peux interpréter x appartient à l'intervalle ?* *Ça veut dire que |x-a| inférieure à combien ?* *… à α, alors … alors son image appartient au deuxième intervalle* *… f(x) – f(1) inférieure à β … inférieure à β.* *Voilà.* *… alors* $\|f(x) - f(a)\| < \beta$. *Voilà la définition de la continuité en un point.* *… C'est la définition topologique.* *Ça c'est un exemple de fonction continue en … en 1. //*		

Tableau VN.2 : analyse de l'extrait de la séquence vidéo relative à l'introduction de la définition formelle par l'enseignante «N »

c) Commentaire :

Il s'avère difficile d'introduire la définition formelle de la continuité dans une séance d'enseignement et apprentissage ordinaire comme celle présentée par l'enseignante « N », en effet nous avons relevé :

(1) des difficultés au niveau de la mise en place de cette définition en adoptant le type de scénario proposé par les auteurs du manuel scolaire. Dans ce scénario, les auteurs ont laissé implicitement à la charge du professeur plusieurs actes didactiques basés essentiellement sur :

- la mobilisation des connaissances déjà-là des apprenants en rapport avec les notions d'intervalles et éventuellement les voisinages notamment centrés et leurs caractérisations (graphique et algébrique),
- l'image d'un intervalle par une fonction.

(2) des difficultés qui relèvent de l'absence de sources de proximités dans les activités possibles des élèves telles que :

La multiplicité des exemples qui est normalement un vecteur essentiel du procédé de généralisation. Ici, l'activité propose seulement les deux valeurs 0,1 et 0,01 qui ne permettent pas aux élèves de généraliser. D'ailleurs la valeur 0,01 n'est pas visible sur le graphique ! Ce qui a obligé la classe à adopter une technique de calcul (algébrique) au lieu de procéder par une recherche graphique comme il s'est demandé dans l'activité :

3. Donner graphiquement une condition suffisante sur x pour que $|f(x)-3|<0.01$.

Fig. : extrait de l'énoncé de l'activité

La majorité des proximités faites par l'enseignante « N » sont du type « horizontale » et « descendante », à travers des demandes de compléments, de réponses, d'analogie avec la valeur 0.1 de la tâche précédente :

« *... Maintenant, la même question, mais avec un rayon plus ... petit... avec un rayon plus ... petit. ... Le même travail. ... D'accord ?* »

La seule tentative de proximité ascendante retenue concerne les généralisations cherchées par l'enseignante « N », qui ne semblent pas rencontrer la ZPD des élèves – qui n'ont pas développé assez d'activités préalables à ce moment - et qui souffrent de parachutage. En effet « N » a posé plusieurs questions et elle ne cesse de répondre par elle-même. Et la plupart des traductions sont faites par l'enseignante.

« *... elle est très proche de f(1). ... D'accord ?*

Par suite, deuxième question ... qu'est-ce que nous avons pris ? le rayon , il ... devient combien ? ... 0,01. Ça veut dire qu'on se rapproche de f(1) qui est égal à 3… Compris ?
C'est-à-dire aussi petit que l'on veut, ... cette différence… Regardez ! ...
… Lorsque je prends x ici, son image, automatiquement ça sera ici.
Donc f(x) – f(1), ... donc… elle est inférieure à combien ? ... à 0.1.
... lorsque je prends un intervalle centré en 1 de rayon très petit, toujours, je peux trouver un intervalle centré en 1, de rayon aussi .... petit de telle façon que l'image de n'importe quel réel x qui appartient à cet intervalle, ... son image se trouve ... ici.
... c'est la continuité. »

(3) Autres difficultés : un scénario basé sur des activités d'écoute essentiellement et des activités de recopie.

Cette séquence d'enseignement et apprentissage est également caractérisée par une large variété d'activités d'écoute (et de suivi des travaux des élèves chargés de faire la présentation au tableau dans l'épisode 1), des réponses aux différentes questions des activités proposées par le manuel sous l'aide du professeur. Les activités de traitement et d'organisation sont faites d'une manière collective. Les visualisations ne sont pas à la charge des élèves non plus (même partiellement).

Les différents temps alloués aux étapes des activités possibles (ou effectives) des élèves et les interventions de l'enseignante, en plus des formes de travail relevées, montrent que le scénario adopté ne donne pas d'importance à l'autonomie des élèves. Il y a aussi un gaspillage de temps mis à la construction des courbes des fonctions considérées, qui demeure un objectif secondaire.

II. Analyse de séquences relatives à la gestion des exercices du logiciel

II.1 La séquence des exercices de l'enseignante « M »

a) Chronologie : synopsis (ou scénario global)

Episode	chronomètre	durée
E1 : « Récapitulation » … des deux définitions (intuitive et formelle de la continuité)	Début de séq14 → 7' 10 s	7 ' 10 s
E2 : « Etude (ou gestion) d'un exemple » Continuité de $x \longmapsto 3x - 4$ en $x_0 = 1$ (appel à la définition formelle) (travail commencé par le professeur, le calcul est pris par un élève au tableau) ça est dans les détails du tableau suivant.	Séq14 De 7' 10 fin séq14	6 ' 06 s
E3 : « Gestion des exercices proposés par le logiciel » • Séq1 : Exercice(I.1) : Travail d'un élève (au tableau) : continuité de la fonction de $x \longmapsto 2x + 1$ en $x_0 = 2$ (en utilisant la définition formelle) (travail orienté vers le collectif : participation de toute la classe)	Début séq15 → 5' 00 s	24 '31 s
• Séq2 : Exercice (I.2) Continuité de de $x \longmapsto x^2$ en $x_0 = 0$ (appel à la définition formelle) (phase de recherche, exposé de la correction au tableau)	Séq15 De : 5' 00 → séq16 3' 40 s T. mis : 4' 11s	
• Séq3 : Exercice (I.3) Etude de la continuité de $x \longmapsto \frac{2x}{5} + 3$ en $x_0 = -2$ (phase de recherche, exposé au tableau)	Séq16 Phase de recherche De : 3 ' 40s →10 '20 s Phase de correction →10'55	
• Séq4 : - Exercice (I.4) Etude de la continuité de $x \longmapsto \sqrt{x}$ en $x_0 = 0$ (→ phase de recherche et d'enregistrement de réponse sur le logiciel) - Exercice (I.5) Etude de la continuité de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ en $x_0 = 5$ (→ phase de recherche et d'enregistrement de réponse sur le logiciel) (→ pas de phases de correction)	Séq16 De : 10 ' 55 → 19 ' 00s	
E4 : « gestion de l'exercice II » • Traitement du premier cas : exercice (II.1)	Séq16 De 19' 00 → 24' 27 s	6 ' 02 s
• Phase de recherche d'une valeur de β (pour les élèves) accompagnée de participation collective et spontanée	Séq17 De : 07 s → fin séq17	

Tableau 1.1 : Chronologie (extrait relative à la gestion des exercices proposés dans le logiciel)

b) Analyse de l'extrait de la séquence vidéo relative à la gestion des exercices proposés par le logiciel

Episodes	Objectif élève (tâche) / objectif prof	Forme du travail de classe avec les durées	Indication sur le déroulement	Type d'aides mathématiques et proximités de l'enseignant	Activité « réelle » des élèves (a maxima, a minima, pour tous) et connaissances mises en fonctionnement
1 Récapitulation	Institutionnalisation des différentes approches abordées pour l'introduction de la notion de continuité (définition intuitive et définition formelle)	OC (7'10 s)	- Discours interrogatif (restitution des deux définitions (intuitive et formelle), *// P : Alors, récapitulons, comment résumer la première partie ?* *Qu'est-ce qu'on a vu ? Qu'est-ce qu'on vient de voir ?* *Il y a deux approches … pour la continuité de f en un point x_0//* *// Ça, c'est l'approche cinématique.* *L'approche cinématique, on a dit hier que l'approche cinématique, elle a plutôt un aspect physique* *Donc on voit lorsque x qui prend des valeurs de plus en plus proches de x0,* *f(x), lui-même, prend des valeurs de plus en plus proches de f de x … x_0* *//le prof écrit sur le tableau//* - *Allons à l'approche formelle.* *//le professeur se dirige vers la deuxième partie du tableau//* *… qui est une approche qui est … plus mathématiques. Plus mathématique entre guillemets* *//elle écrit au tableau : « Approche 'plus' mathématique »//*	Lien entre l'approche cinématique et l'approche formelle Spécificité de chacune des deux approches Organisation des idées chez les élèves en vue d'institutionnaliser les quatre définitions récemment rencontrées (continuité et discontinuité selon les deux approches)	Activités de restitution (*Pour tous*) *// E : (MARIAM) Madame, lorsque, lorsque x prend des valeurs proches de plus en plus de x_0, alors f de … f(x) prend des valeurs proches … de plus en plus proches de $f(x_0)$ //*

2 Etude d'un exemple : continuité d'une fonction en un point (en utilisant la définition formelle)	- Appel à la définition formelle - Respect de la rigueur mathématique que caractérise une démonstration mathématique d'une proposition mathématique qui comporte les deux quantificateurs « ∀ et ∃ » - S'approprier de la technique de détermination d'une valeur de α pour une valeur générique de β.	EC (6' 06 s)	- Partir de la définition formelle, - Reconnaitre des techniques de preuve d'une proposition mathématique. (pour montrer « ∀ », on procède par : « soit … » Pour prouver l'existence, on procède par : « cherchons … ». *// Alors, pour tout β positif, existe-t-il un α positif … tel que …* *Si … valeur absolue de x moins x0, … x0 qui est 1 //elle efface x0 et écrit 1 à sa place//* *Valeur absolue de x moins 1 … inférieure à …//* -	- **Aides procédurales** : *// Allez, on considère … cette valeur absolue … remplacez f(x), remplacez f(1)* *Regardez c'est quoi la valeur de α ? //* **Aides à visée constructive** : mise en place d'une nouvelle technique de preuve de la continuité utilisant la définition formelle. *// on va interpréter cette valeur de f(x) moins f(1) inférieure à β.* *On va voir c'est quoi ?* *Dire que, dire que … //en écrivant au tableau//* *Qu'est-ce qu'on a ? … valeur absolue de f(x) moins f(1) … inférieure à β* *Qu'est-ce que ça donne ? … valeur absolue de f(x) …//*	*Activités d'écoute* *Activités d'échange orales* *//Temps de réflexion //* *//un élève s'est chargé tout seul//* *(Activités devenues pour tous)* E : (AZZOUZ), *//l'élève écrit :* « *|f(x)-f(1)|<β* » … *// puis développe le calcul et procède par des traductions jusqu'à apparaitre une écriture du type* $\|x-1\| <$ …

3 Gestion des tâches de l'exercice I	- Mise en place de la technique adoptée dans l'exemple : application - Traduction de $\lvert f(x)-f(x_0)\rvert < \beta$ et apparition du terme $\lvert x-x_0\rvert$, - Procédé d'exploitation de l'équivalence pour déduire une valeur de α	EC (5') RI (19 '31 s)	- Pour la première séquence : Traitement collectif de la première tâche (continuité de $x \mapsto 2x+1$ en $x_0 = 1$) contrôlé par l'enseignante. - Pour la deuxième séquence : (le reste de l'exercice I) - Contrôle des travaux des élèves accompagné d'interventions variées concernant : → les calculs (tels que de $f(x_0)$ et la factorisation de $\lvert f(x)-f(x_0)\rvert$, → la rigueur mathématique, → la déduction de α, → l'enregistrement des résultats trouvés … → seuls les exercices I.1 et I.2 sont corrigés sur le tableau d'une manière collective.	**Aides procédurales** *//… On va remplacer f(x) et f(1) //* ¤ Elle contrôle : - la rigueur mathématique dans les interventions des élèves et notamment dans les écritures des équivalences, - le calcul développé au tableau. ¤ Elle encourage les élèves en situation de recherche : // P : « ça y est ANOIR ? » … on prend α … est égal ? » E : « 5 β sur 2 » P : « très bien … très bien. La fin. »//	- Un élève s'est chargé de l'étude de la continuité de $x \mapsto 2x+1$ en $x_0 = 1$. (activité devenu *pour tous*) - Les autres tâches I.2, I.3, I.4 et I.5 sont faites par les élèves sur leurs cahiers de recherche en **autonomies** Il y a quelques binômes qui travaillent ensemble, (*activités pour tous*) - Plusieurs discours entres les binômes ont été remarqués
4 Gestion de l'exercice II.1	- Reconnaissance de la situation de discontinuité à travers le tracé qui présente une rupture en le point d'abscisse x_0. - Faire le lien entre le saut que caractérise la discontinuité de f en x_0 et la valeur de β cherchée.	OC + RI (6' 02 s)	- Travail collectif (intervention du professeur sur vidéoprojecteur, annotations sur l'écran …), - Reconnaissance du cas de discontinuité, explication de la consigne, - Vérification graphique de la validité d'une valeur de β. *// zéro cinq ! est ce qu'il répond à la question ?//* *//le professeur montre sur le tableau en dessinant sur le graphique affiché sur l'écran//* *Ça, c'est le voisinage de $f(x_0)$. … oui ou non ?* *il existe donc, il existe un β tel que*	- **Aide procédurale** - **Aide à visée constructive** : → lien entre la caractérisation graphique de la discontinuité et sa définition formelle, *//le professeur efface les annotations faites sur le graphique affiché sur l'écran pour faire de nouveaux de nouvelles schématisations correspondantes à la valeur de β=3//* *Regardez l'intervalle, l'intervalle sera f(x₀) + β, donc notre intervalle, elle est là … f(x₀) – β*	Activités d'écoute + Activité d'interaction Et de mise en fonctionnement de connaissances sur l'image et l'image réciproque d'un intervalle par une fonction. *E : (en parlant tous à la fois) … discontinue* *E : « appartient au voisinage de x_0 »*

			quel que soit le voisinage qu'on considère, quel que soit le voisinage qu'on considère de x_0 … les images des points appartenant à ce voisinage-là, ne sont pas tous inclus appartiennent au voisinage de x_o. Est-ce que c'est le cas ou non ? *//*	*… c'est là. Regardez ici, ça c'est le voisinage de 1. Quel que soit le voisinage de 1 qu'on va considérer* *… il est où ?* *… inclus dans un voisinage de …* *… f … de xo. Donc, l'idée c'est de choix … comment ça sera le choix de cette valeur de β ? //* → la valeur de β cherchée et la valeur du saut dans la rupture que caractérise la discontinuité. *//le professeur montre sur le graphique une portion de la courbe//* *C'est le cas par exemple cette partie-là aura pour image qui n'est pas … qui n'appartient pas au voisinage de $f(x_o)$. Alors, on va dire ici … les interprétations de la discontinuité seront auront un aspect graphique. La valeur de β que tu vas trouver, … tu vas la remarquer graphiquement … selon l'unité que l'on choisit … on peut prendre β égale à …//*	

Tableau 1.2 : analyse des séquences vidéo relatives à la gestion des exercices dans la séance de « M »

c) Commentaire

Avant d'entamer les exercices, l'enseignante a tenté d'organiser les idées chez les élèves en vue d'institutionnaliser les quatre définitions récemment rencontrées (continuité et discontinuité selon les deux approches) en faisant le lien entre l'approche cinématique et l'approche formelle et la spécificité de chacune des deux approches.

Les exercices I et II du logiciel proposent aux élèves des activités de reconnaissance, d'organisation et de traitement :

- Reconnaitre des techniques de preuve d'une proposition mathématique,
- Partir puis développer $|f(x) - f(x_0)|$, faire apparaitre $|x - x_0|$, exploiter l'équivalence en cours pour déduire une valeur de α…
- Reconnaissance du cas de discontinuité, vérification graphique de la validité d'une valeur de β
- Faire le lien entre la valeur du saut que caractérise la discontinuité en x_o et la valeur de β cherchée.

Ces activités ne sont pas toutes faites en pleine autonomie mais accompagnées d'aides du professeur :

- ✓ Aide procédurale : partir de la définition formelle, reconnaitre des techniques de preuve d'une proposition mathématique (pour montrer « ∀ », on procède par : « soit … ». Pour prouver l'existence, on procède par : « cherchons … ».
- ✓ Aide à visée constructive : mise en place d'une nouvelle technique de preuve de la continuité utilisant la définition formelle (tâches de l'exercice I), lien entre la caractérisation graphique de la discontinuité et sa définition formelle (dans les tâches de l'exercice II),

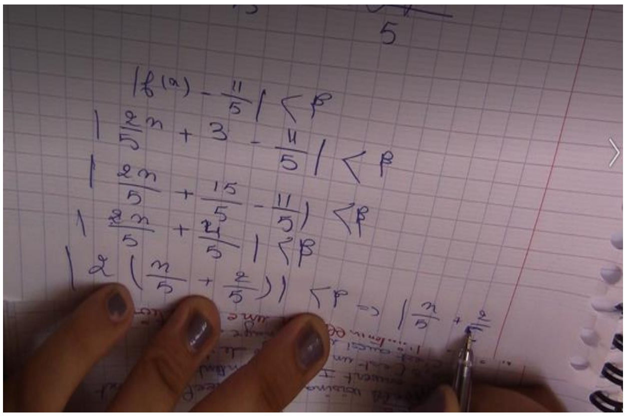
Notons que :

- Les premières tâches sont faites et présentées d'une manière collective sur le tableau,
- Les élèves rencontrent la technique de preuve de la continuité pour la première fois. Ils sont familiarisés par la technique de preuve d'une proposition du type : « pour tout point M appartenant à une telle la droite D, son image par une certaine translation appartient à une droite D' » ou « pour tout x appartenant à IR, $\frac{x}{1+x^2} \leq x$ », mais ils ne

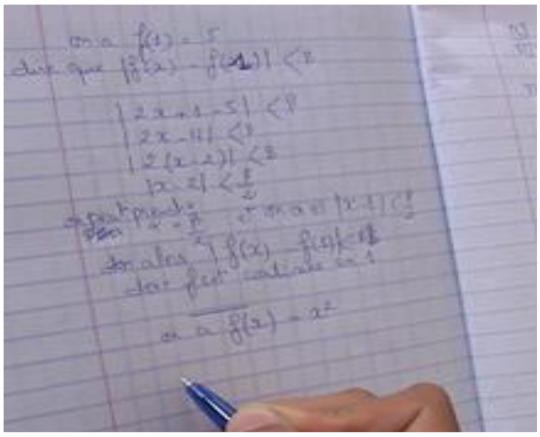
sont pas familiarisés par des propositions à doubles quantifications du type « pour tout β … , il existe α… »,

- La conception des exercices tient compte du niveau de conceptualisation visé et du domaine de travail associé que nous avons déjà précisés à la fin du chapitre IV.

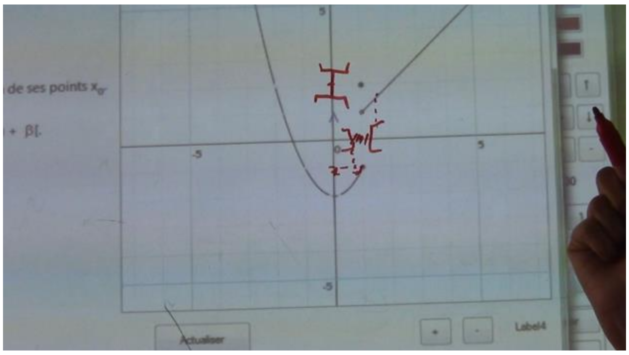
Copies d'écrans pour la gestion des exercices :



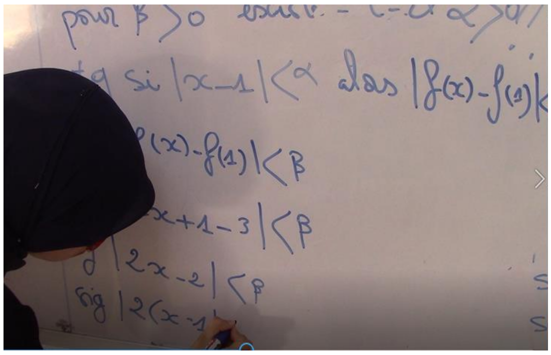
CE4 : « Recherche individuelle : continuité de $x \mapsto \frac{2x}{5} + 3$ en $x_0 = -2$



CE3 : « Recherche individuelle : continuité de $x \mapsto 2x + 1$ en 2



CE6 : « gestion de l'exercice II, interprétation de la discontinuité de f, recherche graphique d'une valeur de β objet de la consigne »



CE5 : « gestion de l'exemple, continuité de $x \mapsto 2x + 1$ en $x_0 = 1$, travail d'un élève au tableau »

II.2 La séquence des exercices de l'enseignant « L »

- Le professeur n'avait pas trouvé le temps pour traiter l'exercice II : il n'a consacré que 30 secondes pour une présentation de la consigne générale,
- Nous n'avons pas, malheureusement, filmé la phase de la recherche individuelle des élèves et leurs réflexions sur les différentes tâches proposées par le logiciel.

a) Chronologie : synopsis (ou scénario global)

Episode	chronomètre	durée
E1 : « Lecture et explication de la consigne »	A partir de Séq36 (1' 40) → 2'40 s	1 mn
E2 : « Phase de recherche individuelle »	Non filmée	- - - -
E3 : « Phase de correction (au tableau) » - Séq1 : continuité de $x \mapsto 2x + 1$ en $x_0 = 1$ - Séq2 : continuité de $x \mapsto x^2$ en 0 - Séq3 : continuité de $x \mapsto \frac{2x}{5} + 3$ en $x_0 = -2$	Séq37 Début → séq40 fin	6' 11 s

Tableau 2.1 : Chronologie (extrait relative à la gestion des exercices proposés dans le logiciel)

b) Analyse de l'extrait de la séquence vidéo relative à la gestion de l'exercice I proposé par le logiciel

Episodes	**Objectif élève (tâche) / objectif prof**	**Forme du travail de classe avec les durées**	**Indication sur le déroulement**	**Type d'aides mathématiques et proximités de l'enseignant**	**Activité « réelle » des élèves (a maxima, a minima, pour tous) et connaissances mises en fonctionnement**
1 E1 : « Lecture et explication de la consigne »	Présentation et explication de la consigne de l'exercice	OC (1')	- Précision de la nature du travail demandé : *//… Ah, les choses, on revient à … de nouveau aux mathématiques abstraites … toujours, on essaie de concrétiser mais on a besoin toujours de théorie //* - Lien avec les activités d'introduction de la continuité : *// … … tout à l'heure, c'étaient des valeurs arbitraires : … prendre β 0,2 … 0,5 … et ainsi de suite. Maintenant, dans l'absolue, … soit β strictement positif, on va chercher un réel α éventuellement en fonction de β, tel qu'on a … dès que valeur absolue de x-1 inférieure à α, … valeur absolue de f(x) – f(1) inférieure à β.//* - Organisation du travail: *// …Vous trouvez et vous … introduisez votre réponse et enregistrez.* D'accord, je vous laisse un peu de temps pour faire cet exercice.//	**Aide procédurale**	*Activités d'écoute* ***(pour tous)***

2 E3 : « Phase de correction»	- Séq1 : « continuité de $x \mapsto 2x+1$ en $x_0 = 1$ »	EC (2’ 24s)	- Travail à la charge d’un élève volontaire au tableau sous l’aide du professeur et la participation spontanée du reste de la classe	**Aide procédurale :** -le professeur incite ses élèves à partir de $\|f(x)-f(x_0)\|$ *// … mais le α n’existe pas encore …//* *-// vous avez l’hypothèse … donnée, … vous avez le β … donc les données … c’est f(x) … moins … ?//* *-//… En tout cas, vous avez l’énoncé sur votre poste Eh. Je ne vois rien moi.* *… f(x) moins f(1) en valeur absolue … inférieure à β.* *…. Signifie quoi ?//* *-// pourquoi il suffit de prendre α … β sur 2. RAMLA m’a dit … il suffit de prendre α inférieur à β sur 2.//*	- L’élève développe le calcul en partant de $\|f(x)-f(x_0)\|$, - Participation spontanée de la classe, - Ils corrigent ce que le professeur a dit (2|x-1| au lieu de 2|x+1|) … ***(Activités pour tous)***
	- Séq2 : « continuité de $x \mapsto x^2$ en 0) → 1’	EC (1’)	- Correction faite par le professeur (à main levée) sans beaucoup de détails, - L’enseignant évoque le cas $x_0 = 1$ qui présente d’ambiguïtés dans la recherche. Chose qui n’est pas encore visible pour les élèves puisqu’ils n’ont pas atteint le calcul en classe.	**Proximités descendantes** - Adopter la même procédure que celle rencontrée dans la situation précédente. **Proximités ascendantes** *//… je prends la même fonction f(x) égale x carrée … mais x_0, je le prends 1. Je vous demande de chercher un peu. Ici, … l’exemple est tellement immédiat. … pour le zéro. J’ai pas trouvé de problème.* *Je pense, vous êtes d’accord*	

				avec moi que je vais avoir des problèmes avec cette écriture // il écrit $\|x^2 - 1\| < \beta$// … comment s'en sortir pour « x – 1 » ? … Non, je vais pas discuter ça maintenant Eh. … cherchez-le. J'espère que vous avez saisi la différence. … Ah ? il y a quand même de différence. Penser là-dessus. //	
	- Séq3 : (continuité de $x \mapsto \frac{2x}{5} + 3$ en $x_0 = -2$)	EC (2' 47 s)	- Résultat donné par des élèves qui ont pu faire l'exercice et la correction est faite par le professeur (aussi) sur le tableau avec la participation de la classe, - Une généralisation est établie pour les expressions affines : résultat donné par des élèves après rectification ($\alpha = \frac{\beta}{\|\alpha\|}$ au lieu de $\frac{\beta}{\alpha}$)	**Proximités descendantes** Appliquer la même technique adoptée dans le (1) **Proximités ascendantes** - *//… Autrement dit, les fonctions affines … f(x) égale a x plus b, … on va prendre β à quoi égale ?//* - *// quel est le signe de α ? forcément ?//*	Les élèves interagissent avec le professeur. Ils participent ensemble. ***(Activité pour tous)*** E : *«… β sur a. »* *« …a différent de 0 »* *« … valeur absolue de a.//* ***(Activité a maxima)***

Tableau 2.2 : analyse des séquences vidéo relative à la gestion de l'exercice I du logiciel

c) Commentaire

Dans cette séquence, le professeur commence par faire le lien avec les activités d'introduction de la continuité :

« ... tout à l'heure, c'étaient des valeurs arbitraires : ... prendre β ... 0,2 ... 0,5 ... et ainsi de suite… Maintenant, dans l'absolue, ... soit β strictement positif, on va chercher un réel α éventuellement en fonction de β, tel qu'on a ... dès que valeur absolue de x-1 inférieure à α, ... valeur absolue de f(x) – f(1) inférieure à β. »

Il y a un premier travail collectif assuré par un élève sur le tableau. La rigueur dans la démarche adoptée est contrôlée par le professeur. Puis les élèves travaillent en autonomie (par binôme aussi). Ils sont également contrôlés par le professeur.

Les exposés des différentes réponses sont faits sur le tableau. Ils sont accompagnés de différentes interventions du professeur. Ces interventions sont des occasions d'aides et de proximités variées :

- Proximités ascendantes :
  - ✓ soulever des situations plus complexes à en réfléchir ultérieurement (celles qui font apparaitre une expression variable en plus de $|x - x_0|$; $q(x).|x - x_0| < \beta$)

« ... je prends la même fonction f(x) égale x carrée ... mais x_0 , je le prends 1. Je vous demande de chercher un peu. Ici, ... l'exemple est tellement immédiat. ... pour le zéro. J'ai pas trouvé de problème… Je pense, vous êtes d'accord »

  - ✓ Chercher une généralisation de la première fonction proposée $\mathrm{x} \longmapsto 2\mathrm{x} + 1$ aux fonctions affines : $\mathrm{x} \longmapsto \mathrm{ax} + \mathrm{b}$

« ... Autrement dit, les fonctions affines ... f(x) égale a x plus b, ... on va prendre β à quoi égale ? ... quel est le signe de α ? forcément ? »

- Des proximités descendantes :
  - ✓ appliquer la même technique adoptée dans le (1),
  - ✓ appliquer la définition formelle à chaque expression proposée en le point x_0 considéré .

Conclusion générale de ce chapitre

Le logiciel semble être un bon support de proximités (descendantes, ascendantes et horizontales) pour la construction du sens chez les élèves des concepts mathématiques (continuité, voisinage, image d'un intervalle par une fonction …). Il offre clairement pour l'enseignant la possibilité de mettre davantage en valeur le formalisme (symboles et mots), y compris avec des formulations intermédiaires, transitoires (par des proximités horizontales).

En revanche, aucun des trois enseignants n'a exploité le logiciel pour faire des liens entre les deux approches et nous considérons qu'ils ont manqué une occasion de légitimer, à l'aide de la définition formelle de la continuité, ce concept image existant chez les élèves à propos de la définition (« continue » veut dire « pas de rupture »).

A ce propos, on s'attendait qu'il y ait dans le scénario un épisode préparant la formulation de la définition de la continuité basé sur une description (visuelle) d'une situation de continuité :

En faisant varier d'une façon interactive la valeur de beta (le rayon de J) à l'aide du curseur vertical correspondant, on peut faire remarquer aux élèves (en focalisant sur l'intervalle I) que son image " tombe" dans l'intervalle J et les amener à une traduction en un langage pré-formel que pour tout J (intervalle centré en $f(x_0)$), on peut trouver un intervalle I centré en x_0 tel que $f(I)$ inclus dans J.

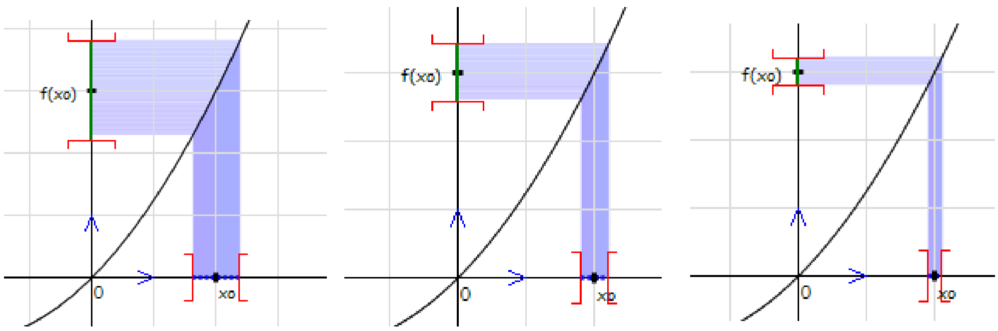


Fig1 : Captures d'écrans « quelques cas de figures »

Pour le cas de discontinuité, à travers des manipulations analogues, on peut amener les élèves à remarquer que pour quelques valeurs de β, on peut trouver des intervalles I dont l'image est incluse dans J, mais, à un moment donné (où la valeur de β dépasse la valeur du saut qui caractérise cette discontinuité), un intervalle I (centré en x_o) aura comme image qui "échappe" l'intervalle J (pour dire qu'il y a des f(x) n'appartiennent pas à J).

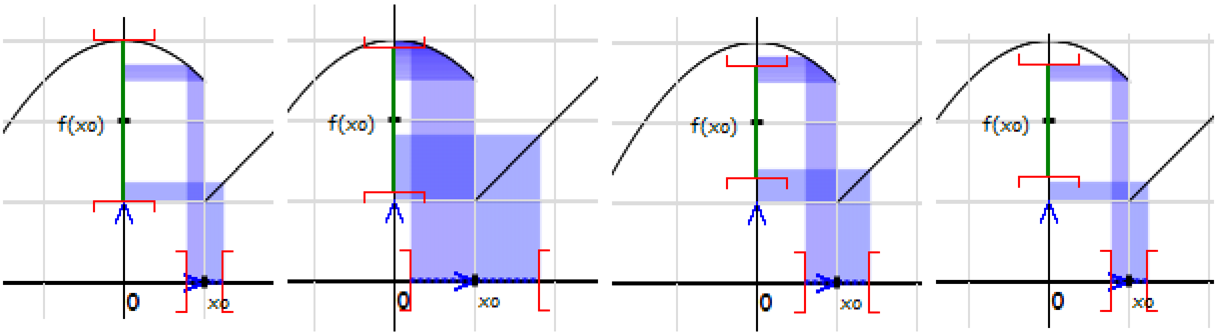


Fig2 : pour une valeur de $\beta = 1 > S = |\lim_g f - \lim_d f| \rightarrow$ on a trouvé un I tel que f(I)$\subset$ J, mais pour $\beta = 0{,}6 \rightarrow$ pour chaque valeur de α considérée, f(I)$\not\subset$ J

Nous avons aussi remarqué que la gestion des tâches de l'exercice (1) est faite dans le registre algébrique et il n'y avait pas d'actes de vérification graphique à l'aide du logiciel. Les enseignants ou les élèves auraient pu introduire l'expression de la fonction dans le logiciel et à l'aide de la recherche automatique (par exemple) ils auraient pu vérifier l'existence de α pour n'importe quelles valeurs de β considérées.