Théorie de jauge de Poincaré Une théorie de la gravitation

"Einsteins theory of General Relativity has a mathematical structure very similar to Yang-Mills theory"
Chen-Ning Yang

3.1 Introduction

Une théorie de jauge est une théorie quantique des champs basée sur les propriétés de symétries et d'invariances des équations sous certaines transformations d'un groupe locale appelé "groupe de jauge". Les théories de jauges produisent automatiquement des quantités conservées comme le courant, l'énergie-impulsion...etc. La construction des théories des champs en interaction peut être guidée par un principe de dynamique relié à l'exigence de l'invariance de jauge locale.

Dans ce chapitre, nous allons présenter une formulation "théorie de jauge" pour la gravitation sur la base du groupe de Poincaré. Nous commençons d'abord par un rappel sur les groupes où nous introduisons la notion de groupe, le groupe de Lorentz et le groupe de Poincaré. Ensuite, nous montrons succinctement, comment reformuler l'électrodynamique comme une théorie de jauge du groupe $U(1)$. Finalement, nous considérons la théorie de jauge du groupe de Poincaré.

3.2 Rappel sur les groupes

Le groupe est une structure algébrique qui sert à étudier les symétries et les invariances des lois physiques, et on dit qu'un groupe de transformations est un groupe de symétrie s'il laisse l'action invariante et donc laisse les lois physiques qui découlent de cette action invariantes.

3.2.1 Définition d'un groupe

Soit un groupe G ensemble des éléments $g_i \in G$, muni d'une opération $\bullet$, l'ensemble et l'opération doivent satisfaire les conditions suivantes

*Loi de composition interne ; Si g_i et $g_j \in G$, alors

$$g_i \bullet g_j \in G \tag{3.1}$$

*L'associativité ; Pour tout g_i, g_j et $g_k \in G$

$$g_i \bullet (g_j \bullet g_k) = (g_i \bullet g_j) \bullet g_k \tag{3.2}$$

*L'élément neutre ; Il existe un élément $g_1 \in G$ tel que

$$g_1 g_i = g_i g_1 = g_i \tag{3.3}$$

*L'élément inverse ; Pour chaque élément $g_i \in G$, il existe un élément inverse $g_i^{-1} \in G$ tel que

$$g_i^{-1} g_i = g_i g_i^{-1} = g_1 \tag{3.4}$$

-En général $[g_i, g_k] \neq 0$, si nous avons un groupe dont $[g_i, g_k] = 0$ ce groupe est dit abélien.

-Notons que le nombre des éléments d'un groupe peut être fini ou infini.

-L'ensemble de $n \times n$ matrices réelles qui sont non singulières forment un groupe sous l'opération de multiplication matricielle.

-Généralement ce groupe est noté par $Gl\,(n, r)$ dans le cas des matrices réelles, l'extension complexe de ce groupe est notée par $Gl\,(n, c)$.

-Le sous-ensemble de $Gl\,(n, r)$ contient des matrices avec det $= +1$ forme un autre groupe noté $Sl\,(n, r)$ et son extension complexe est désignée par $Sl\,(n, c)$.

-Nous définissons un autre groupe qui s'appel le groupe unitaire $U\,(n)$ qui est constitué de $n \times n$ matrices unitaires (pour la vérification en tenant en compte que le produit des matrices unitaires est unitaire), de même le groupe spéciale unitaire est un sous ensemble composé des matrices unitaires de det $= 1$.

Principaux groupes de Lie

-$O\,(n)$ est le groupe multiplicatif des $n \times n$ matrices réelles orthogonales sur R vérifiant $M^T M = I_n$ (groupe orthogonal)

-$SO\,(n)$ est le groupe multiplicatif des $n \times n$ matrices réelles orthogonales sur R vérifiant $M^T M = I_n$ et $\det M = 1$ (groupe spécial orthogonal)

-$U\,(n)$ est le groupe multiplicatif des $n \times n$ matrices complexes unitaires sur C vérifiant $M^* M = I_n$ (groupe unitaire)

-$SU(n)$ est le groupe multiplicatif des $n \times n$ matrices complexes unitaires sur C vérifiant $M^*M = I_n$ et $\det M = 1$ (groupe spécial unitaire)

3.2.2 Groupe de Lorentz

Le groupe de Lorentz est un groupe de transformations linéaires des coordonnées qui laisse l'invariance des lois de la physique et surtout la loi de propagation de la lumière dans le vide et donc l'invariance de la métrique, il inclut deux types de symétries ;

-Les transformations spéciales de Lorentz.

-Les rotations statiques de l'espace.

Définition mathématique

La propriété qui caractérise le groupe de Lorentz est
$\forall \Lambda \in L$, $\forall (x, y) \in M^2$

$$(\Lambda x)^T \eta (\Lambda y) = x^T \eta y$$

où Λ sont 4×4 matrices réelles de Lorentz qui vérifient $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$
$\eta = diag(+1, -1, -1, -1)$ la métrique de Minkowski.
L le groupe de Lorentz et M l'espace-temps de Minkowski.

3.2.3 Groupe de Poincaré

Le groupe de Poincaré est le groupe des transformations affines de l'espace-temps, inclut quatre types de symétrie ;

-Les translations dans l'espace-temps.

-Les rotations dans l'espace.

-Les transformations de Lorentz propres ($\det \Lambda = +1$) et orthochrones $(\Lambda_{00} \succeq 1)$.

-Le renversement de temps T et la parité P.

Nous définissons le groupe de Poincaré P comme un produit semi direct du groupe de Lorentz et des vecteurs d'espace-temps

$$P = L \ltimes M$$

de même le groupe de Poincaré propre est défini comme

$$P_0 = L_0 \ltimes M$$

Définition mathématique

Nous introduisons un élément du groupe de Poincaré (Λ, g) (où $\Lambda \in L$ et $g \in M$) à partir de produit semi direct

$$(\Lambda, g)\left(\Lambda', g'\right) = \left(\Lambda\Lambda', g + \Lambda g'\right)$$

Algèbre de Poincaré

C'est l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré, qui est caractérisée par le crochet de Lie

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{3.5}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = \eta_{\mu\sigma} P_\nu - \eta_{\nu\sigma} P_\mu \tag{3.6}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \eta_{\sigma\mu} M_{\nu\rho} + \eta_{\rho\nu} M_{\mu\sigma} - \eta_{\rho\mu} M_{\nu\sigma} - \eta_{\sigma\nu} M_{\mu\rho} \tag{3.7}$$

où M, P et η sont le générateur de transformation de Lorentz, le générateur de translation et la métrique de Minkowski respectivement.

3.3 Théorie de jauge $U(1)$

La formulation de l'éléctromagnétique de Maxwell en 1864 était la première théorie des champs à avoir une symétrie de jauge,

$$A_i \rightarrow A_i' = A_i + \partial_i \alpha.$$

Plus tard, la théorie d'éléctrodynamique quantique est formuler comme une théorie de jauge du groupe $U(1)$. Dans cette partie nous montrons comment construire la théorie de jauge $U(1)$ en suivant la référence [38].

Considérons le lagrangien $\mathcal{L}$ décrivant le champ d'un seul fermion libre de masse m $(\hbar = c = 1)$

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^i \partial_i \psi - m\overline{\psi}\psi \tag{3.8}$$

ce lagrangien est invariant sous la transformation

$$U_\alpha = e^{i\alpha} \tag{3.9}$$

$$\psi \longrightarrow \psi' \equiv e^{i\alpha}\psi \tag{3.10}$$

$$\overline{\psi} \longrightarrow \overline{\psi}' \equiv \overline{\psi} e^{-i\alpha} \tag{3.11}$$

où α est une constante. L'invariance de symétrie sous la transformation (3.10) conduit à un courant conservé proportionnel à

$$J^i = \overline{\psi}\gamma^i \psi. \tag{3.12}$$

Considérons maintenant, le cas local où α est une fonction du quadri-vecteur x, $\alpha \equiv \alpha(x)$.

Dans ce cas, le lagrangien se transforme en $\mathcal{L}'$ avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= ie^{-i\alpha}\overline{\psi}\gamma^i\left[e^{i\alpha}\partial_i\psi + ie^{i\alpha}\psi\partial_i\alpha\right] - m\overline{\psi}\psi \\ \mathcal{L}' &= \mathcal{L} - J^i\partial_i\alpha. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Nous remarquons ici, que $\mathcal{L}$ n'est pas invariant sous la transformation locale à cause du terme $J^i\partial_i\alpha$. La question est donc quelle est la modification requis en $\mathcal{L}$ pour que notre théorie soit invariante sous les transformations

$$\psi \longrightarrow \psi' \equiv e^{i\alpha(x)}\psi,\ \overline{\psi} \longrightarrow \overline{\psi}' \equiv \overline{\psi}e^{-i\alpha(x)}, \tag{3.14}$$

pour réaliser cette propriété, nous introduisons un nouvel ensemble de variables $A^i(x)$ et nous considérons le lagrangien modifié $\mathcal{L}_1$ avec

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} + qA^iJ_i = \mathcal{L} + qA^i(x)\,J_i(x)\,,\ q \equiv \text{constante} \tag{3.15}$$

Ici, nous supposons que les quantités A^i se transforment sous les transformations (3.14) comme

$$A^i \longrightarrow A'^i = A^i + \frac{1}{q}\partial^i\alpha(x)\,. \tag{3.16}$$

Compte tenu du fait que J^i dans (3.12) est invariant sous les transformations (3.14)

$$J'^i = \overline{\psi}'\gamma^i\psi' = J^i \tag{3.17}$$

et en utilisant $(3.13), (3.17)$ et (3.16), nous obtenons le résultat souhaité

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1' &= \mathcal{L}' + qA'^iJ_i' = \mathcal{L} - J^i\partial_i\alpha(x) + q\left[A^i + \frac{1}{q}\partial^i\alpha(x)\right]J_i \\ &= \mathcal{L} + qA^iJ_i = \mathcal{L}_1 \end{aligned}$$

Il est clair que, comme J^i est un 4-vecteur, $A^i(x)$ doit être un champ vectoriel pour que $\mathcal{L}_1$ soit un scalaire.

Les transformations (3.10) où α est une constante sont appelées transformations de jauge globale, et les transformations (3.14) et (3.17) où $\alpha \equiv \alpha(x)$ est une fonction de x, sont appelées transformations de jauge locale.

Maintenant, nous voulons comprendre la nature physique de $A^i(x)$. En premier lieu, nous écrivons $\mathcal{L}_1$ sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= i\overline{\psi}\gamma^i\partial_i\psi - m\overline{\psi}\psi + q\overline{\psi}\gamma^iA_i\psi \\ &= i\overline{\psi}\left[\gamma^i(\partial_i - iqA_i)\right]\psi - m\overline{\psi}\psi. \end{aligned} \tag{3.18}$$

De la théorie fondamentale de l'équation de Dirac, nous en déduisons que $A^i(x)$ est juste le potentiel vecteur pour le champ éléctromagnétique et q est la charge de particule.

Bien que $\mathcal{L}_1$ est invariant sous les transformations de jauge, il ne peut pas être le lagrangien complet pour le système, car il ne contient pas le terme d'energie cinétique pour $A^i(x)$, il faut donc ajouter un terme quadratique en dérivée de $A^i(x)$ et qu'il doit être invariant sous transformations de jauge.

La combinaison

$$F_{ik} \equiv \partial_i A_k - \partial_k A_i$$

est évidemment une invariante de jauge, donc le terme d'energie cinétique est donné par

$$-\frac{1}{4} F_{ik} F^{ik}$$

finalement, nous arrivons au lagrangien invariant de jauge complet

$$\mathcal{L}_{ED} = i\overline{\psi} \left[\gamma^i \left(\partial_i - iqA_i\right)\right] \psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4} F_{ik} F^{ik} \tag{3.19}$$

$\mathcal{L}_{ED}$ représente le lagrangien de l'éléctrodynamique quantique.

Nous pouvons résumer ce que nous avons fait comme suit ; Nous avons commencé par un lagrangien qui était invariant sous une transformation globale, nous avons constaté qu'un tel lagrangien doit être modifié pour être invariant sous les transformations locales par l'introduction de quelque degrès de liberté supplémentaire $A^i(x)$. Enfin, nous avons ajouté le terme d'energie cinétique pour obtenir la forme complète du lagrangien de système. Le champ $A^i(x)$ est introduit pour maintenir l'invariance de jauge locale comme un champ de jauge.

La dérivée covariante est défini par $D_i = \partial_i - iqA_i$ qui permet de coupler le champ de jauge à d'autres champs.

Nous savons également que l'intéraction électromagnétique est une bonne interaction renormalisable ce fait génère l'espoir qu'en utilisant des symétries globales plus générales et en construisant leurs versions locales, et donc nous pouvons décrire les autres interactions de la nature.

3.4 Théorie de jauge de Poincaré

Il est bien évident que le principe d'équivalence implique que la RG d'Einstein est invariante sous les transformations locales de Poincaré [39]. Cependant, pour construire une théorie de jauge pour la gravitation, nous procédons conformément à la philosophie habituelle des théories de jauge en tenant compte que, comme montré par plusieurs expériences, en l'absence du champ gravitationnel, le groupe symétrie des interactions fondamentales est le groupe de Poincaré global. Ainsi, au lieu de considérer la symétrie de Poincaré locale comme une conséquence du principe d'équivalence, nous considérons d'abord une théorie physique invariante sous le groupe de Poincaré global et nous supposons, ensuite, que les paramètres du groupe soient des fonctions de coordonnées de l'espace-temps, pour avoir un groupe de Poincaré local. Pour rendre la théorie invariante sous les transformations de Poincaré locales, nous devons introduire de nouveaux champs compensateurs. Ces nouveaux champs représentent l'interaction gravitationnelle.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de montrer comment la transition de la symétrie globale à la symétrie locale nous conduit à la théorie de jauge de Poincaré de la gravitation qui contient la RG comme un cas particulier. Nous suivons la référence [40].

3.4.1 Symétrie de Poincaré globale

Champ de matière

Considérons un champ de matière dans l'espace-temps de Minkowski. Ce système est invariant sous les transformations de Poincaré globale

$$\begin{aligned} x^{'i} &= \Lambda^i{}_j x^j + \varepsilon^i, \text{ où } \Lambda = \delta^i{}_j + \omega^i{}_j, \\ &= x^i + \omega^i{}_j x^j + \varepsilon^i. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Ici, les composantes $\Lambda^i{}_j$ et ε^i sont considérées indépendantes des coordonnées (ω^{ij} et ε^i sont les dix paramètres du groupe de Poincaré). Sous cette transformation un champ de matière appartenant à une représentation arbitraire du groupe de Lorentz, se transforme comme

$$\phi^{'}(x^{'}) = e^{\frac{1}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij}}\phi(x) = \left[1 + \frac{1}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij}\right]\phi(x) \tag{3.21}$$

où Σ_{ij} sont les générateurs du groupe de Lorentz dans la représentation considérée. Pour commencer, nous calculons d'abord la variation $\delta_o\phi(x)$ avec

$$\delta_o\phi(x) = \phi^{'}(x) - \phi(x) \tag{3.22}$$

Ici, nous utilisons la notation δ_o au lieu de δ, pour faire la transformation similaire à une transformation de jauge. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \phi^{'}(x^{'}) &= \phi^{'}(x^i + \omega^i{}_j x^j + \varepsilon^i) \\ &= \phi^{'}(x) + (\omega^i{}_j x^j + \varepsilon^i)\partial_i\phi(x) \\ &= \phi(x) + \frac{1}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij}\phi(x), \end{aligned} \tag{3.23}$$

ce qui donne

$$\phi^{'}(x) - \phi(x) = (\frac{1}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij} - \omega^{ij}\ x_j\partial_i - \varepsilon^i\partial_i)\phi(x).$$

Comme le parametre ω^{ji} est supposé antisymétrique $\omega^{ji} = -\omega^{ij}$, nous pouvons écrire

$$\phi^{'}(x) - \phi(x) = (\frac{1}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij} - \frac{1}{2}\omega^{ij}\ x_j\partial_i - \frac{1}{2}\omega^{ji}\ x_i\partial_j - \varepsilon^i\partial_i)\phi(x) \tag{3.24}$$

pour obtenir finalement,

$$\delta_o\phi(x) = (\frac{1}{2}\omega^{ij}M_{ij} + \varepsilon^i p_i)\phi(x) = P\phi(x) \tag{3.25}$$

avec

$$P = \frac{1}{2}\omega^{ij}M_{ij} + \varepsilon^i p_i \tag{3.26}$$

où $M_{ij} = \Sigma_{ij} + x_i\partial_j - x_j\partial_i$ et $p_i = -\partial_i$ sont les générateurs des transformations de Poincaré.

Pour la variation de $\delta_o\partial_k\phi(x)$, nous utilisons le fait que ∂_k et δ_o commutent pour écrire

$$\delta_o\partial_k\phi(x) = \partial_k\delta_o\phi(x) = \partial_k\left[(\frac{1}{2}\omega^{ij}M_{ij} + \varepsilon^i p_i)\phi(x)\right]. \tag{3.27}$$

Nous obtenons alors

$$\delta_o\partial_k\phi(x) = P\partial_k\phi(x) + (\partial_k P)\,\phi(x) = P\partial_k\phi(x) + \omega_k{}^{i}\partial_i\phi(x).$$

Invariance de Poincaré globale

Considérons maintenant une théorie des champs décrite par le lagrangien $\mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$, où les champs $\phi^i(x)$ représentent les variables dynamiques. Les équations de mouvement sont les équations d'Euler-Lagrange qui découlent du principe de moindre action pour l'action intégrale

$$S\,(\Omega) = \int\limits_{\Omega} d^4x\mathcal{L}(\phi, \partial_k\phi; x) \tag{3.28}$$

Ici, nous supposons que $\mathcal{L}$ dépend explicitement de x, Ω. Soit les transformations d'espace temps

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= x^{\mu} + \zeta^{\mu}(x) \\ &= x^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}\,(x)\,x^{\nu} + \varepsilon^{\mu}\,(x)\,. \end{aligned}$$

Calculons la variation de l'action intégrale $S\,(\Omega)$. Comme nous avons considéré la variation δ_o au lieu de δ, nous calculons $\delta S\,(\Omega)$ comme suit

$$\begin{aligned} \delta S\,(\Omega) &\equiv \int\limits_{\Omega} \Delta\mathcal{L}d^4x = \delta\int\limits_{\Omega} d^4x\mathcal{L}(\phi, \partial_k\phi; x) \\ &= \int\limits_{\Omega} \left[\left(d^4x' - d^4x\right)\mathcal{L}(\phi, \partial_k\phi; x) + d^4x\ \delta(\mathcal{L}(\phi, \partial_k\phi; x))\right] \end{aligned} \tag{3.29}$$

avec

$$\delta\mathcal{L}(\phi,\partial_k\phi;x)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta_0\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\phi)}\delta_0\partial_k\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu. \tag{3.30}$$

Pour $d^4x^{'}-d^4x$, nous utilisons la loi de transformation

$$d^4x^{'}=\left|\frac{\partial x^{'\nu}}{\partial x^\mu}\right|d^4x$$

et la propriété

$$\det e^S=e^{trS}.$$

nous avons alors

$$\begin{aligned}\det\left(\frac{\partial x^{'\nu}}{\partial x^\mu}\right) &= \det\left(\delta^\nu{}_\mu+\partial_\mu\zeta^\nu(x)\right)\\ &= 1+\partial_\mu\zeta^\mu(x)\end{aligned} \tag{3.31}$$

ce qui nous donne

$$d^4x^{'}-d^4x=\partial_\mu\zeta^\mu(x)d^4x.$$

Calculons maintenant $\delta S\,(\Omega)$. En tenant compte du fait que $\delta x^\mu = x^{'\mu}-x^\mu=\zeta^\mu(x)$, nous pouvons écrire la variation $\delta S\,(\Omega)$ sous la forme

$$\delta S\,(\Omega)=\int_\Omega d^4x\Delta\mathcal{L}. \tag{3.32}$$

avec

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L} &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta_0\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\phi)}\delta_0\partial_k\phi+\zeta^\mu(x)\partial_\mu\mathcal{L}+\partial_\mu\zeta^\mu(x)\mathcal{L}\right]\\ \Delta\mathcal{L} &= \delta_0\mathcal{L}+\zeta^\mu\partial_\mu\mathcal{L}+\partial_\mu\zeta^\mu\mathcal{L}\end{aligned} \tag{3.33}$$

où

$$\delta_0\mathcal{L}\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta_0\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\phi)}\delta_0\partial_k\phi. \tag{3.34}$$

Pour que la théorie soit invariante, il faut que $\Delta\mathcal{L}=0$. D'après l'équation d'Euler Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=\partial_k\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\phi)}\right) \tag{3.35}$$

et comme $\omega^\mu{}_\mu=0$ et

$$\partial_k\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\phi)}\right)\delta_0\phi=\partial_k\left(\delta_0\phi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\phi)}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\phi)}\delta_0\partial_k\phi, \tag{3.36}$$

nous obtenons

$$\delta S\left(\Omega\right)=\int\limits_{\Omega}d^{4}x\partial_{\mu}\Lambda^{\mu} \tag{3.37}$$

avec

$$\Lambda^{\mu}=\zeta^{\mu}(x)\mathcal{L}+\delta^{\mu}{}_{k}\left(\delta_{0}\phi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{k}\phi)}\right). \tag{3.38}$$

3.4.2 Symétrie de Poincaré locale

Supposons que la théorie décrite par le Lagrangien de matière $\mathcal{L}_{M}=\mathcal{L}_{M}(\phi,\partial_{k}\phi)$ est invariante sous les transformations de Poincaré globales. Maintenons nous voulons généraliser ces transformations en supposant que ω^{ij} et ε^{i} sont des fonctions des coordonnées, $\omega^{ij}(x)$ et $\varepsilon^{i}(x)$.

La condition d'invariance (3.33) est maintenant violée pour deux raisons

1- $\delta_{0}\partial_{k}\phi$ se change, car nous avons

$$\delta_{0}\phi=(\frac{1}{2}\omega^{ij}(x)M_{ij}+\varepsilon^{i}(x)p_{i})\phi(x) \tag{3.39}$$

et

$$\begin{aligned}\partial_{k}\delta_{0}\phi &= \partial_{k}\left[(\frac{1}{2}\omega^{ij}(x)M_{ij}+\varepsilon^{i}(x)p_{i})\phi(x)\right] \\ &= P\partial_{k}\phi(x)-\partial_{k}\varepsilon^{i}(x)\partial_{i}\phi(x)+\frac{1}{2}\partial_{k}\omega^{ij}(x)M_{ij}\phi(x)+\omega_{k}{}^{i}\partial_{i}\phi(x).\end{aligned} \tag{3.40}$$

Comme $\frac{1}{2}\omega^{ij}(x)\partial_{k}(M_{ij})=\omega_{k}{}^{i}\partial_{i}$, nous pouvons écrire $\delta_{0}\partial_{k}\phi$ sous la forme

$$\delta_{0}\partial_{k}\phi=P\partial_{k}\phi-\left(\partial_{k}\zeta^{\nu}\right)\partial_{\nu}\phi+\frac{1}{2}(\partial_{k}\omega^{ij}(x)\Sigma_{ij}\phi(x) \tag{3.41}$$

où ous avons utilisé la propriété$\partial_{\mu}=\delta^{i}{}_{\mu}\partial_{i}$.

Remarque : Nous notons $\delta_{0}\partial_{k}\phi$ dans le cas d'une symétrie locale par $\delta_{0*}\partial_{k}\phi$.

La différence entre la variation $\delta_{0*}\partial_{k}\phi$ dans le cas d'une symétrie locale et la variantion $\delta_{0}\partial_{k}\phi$ la symétrie globale n'est pas nulle

$$\delta_{0*}\partial_{k}\phi-\delta_{0}\partial_{k}\phi=\frac{1}{2}(\partial_{k}\omega^{ij}(x)\Sigma_{ij}\phi(x)-\left(\partial_{k}\zeta^{\nu}\right)\partial_{\nu}\phi(x)-\omega_{k}{}^{i}\partial_{i}\phi(x)\neq0 \tag{3.42}$$

2-Dans une symétrie locale, le terme $\partial_{\mu}\zeta^{\mu}(x)$ n'est pas nul

$$\partial_{\mu}\zeta^{\mu}(x)=\left(\partial_{\mu}\omega^{\mu}{}_{\nu}(x)\right)x^{\nu}+\partial_{\mu}\varepsilon^{\mu}(x)\neq0.$$

Nous concluons donc que

$$\Delta\mathcal{L}\neq0 \tag{3.43}$$

alors il y a une violation de l'invariance locale, il faut donc faire des modifications pour éliminer le problème de la non-invariance et rendre la théorie invariante. Nous allons traiter ce problème en deux parties ; premièrement nous voulons éliminer la non-invariance du terme

$$\delta\mathcal{L} = \delta_0\mathcal{L} + \zeta^{\mu}\partial_{\mu}\mathcal{L},$$

et deuxièmement nous serons intéressés au terme

$$\partial_{\mu}\zeta^{\mu}\mathcal{L}.$$

Dérivée covariante et champs de compensation

Premièrement, nous introduisons un nouveau lagrangien $\mathcal{L}_M^{'} = \mathcal{L}_M\left(\phi, \triangledown_k\phi\right)$ en remplaçant la dérivée ordinaire par la dérivée covariante $\partial_k \rightarrow \triangledown_k$. Comme dans le cas de la dérivée ordinaire, la dérivée covariante doit se transformer comme suit

$$\delta_o\nabla_k\phi(x) = P\nabla_k\phi + \omega_k{}^{i}\nabla_i\phi. \tag{3.44}$$

Pour obtenir la dernière loi de transformation nous définissons la dérivé covariante par

$$\nabla_{\mu}\phi = \left(\partial_{\mu} + A_{\mu}\right)\phi,\ A_{\mu} \equiv \frac{1}{2}A^{ij}{}_{\mu}\Sigma_{ij} \tag{3.45}$$

et

$$\nabla_k\phi = \delta^{\mu}{}_k\nabla_{\mu}\phi - A^{\mu}{}_k\nabla_{\mu}\phi, \nabla_{\mu}\phi \equiv h_k{}^{\mu}\nabla_{\mu}\phi. \tag{3.46}$$

La règle de transformation de la dérivée covariante $\nabla_{\mu}\phi$ est donnée par

$$\delta_0\nabla_{\mu}\phi = P\nabla_{\mu}\phi - \left(\partial_{\mu}\zeta^{\nu}\right)\nabla_{\nu}\phi. \tag{3.47}$$

Cette dernière relation nous permet d'éliminer le terme $\partial_k\omega^{ij}$ apparaissant dans la relation(3.41) . Elle permet, également, de définir le champ de compensation de Lorentz $A^{ij}{}_{\mu}$. Pour la dérivée covariante $\nabla_k\phi$, nous définissons le champ $h_k{}^{\mu} = \delta^{\mu}{}_k - A^{\mu}{}_k$. Nous introduisons le champ $b^{\mu}{}_k$, l'inverse de $h_k{}^{\mu}$, avec

$$b^k{}_{\mu}h_i{}^{\mu} = \delta^k{}_i\ ,\ b^k{}_{\mu}h_k{}^{\nu} = \delta^{\nu}{}_{\mu}. \tag{3.48}$$

Les transformations des champs $b^{\mu}{}_k$ et $A^{ij}{}_{\mu}$ sont données par

$$\delta_0 b^k{}_{\mu} = \omega^k{}_s b^s{}_{\mu} - \left(\partial_{\mu}\zeta^{\lambda}\right)b^k{}_{\lambda} - \zeta^{\lambda}\partial_{\lambda}b^k{}_{\mu} \tag{3.49}$$

et

$$\delta_0 A^{ij}{}_{\mu} = -\triangledown_{\mu}\,\omega^{ij} - \left(\partial_{\mu}\zeta^{\lambda}\right)A^{ij}{}_{\lambda} - \zeta^{\lambda}\left(\partial_{\lambda}A^{ij}{}_{\mu}\right). \tag{3.50}$$

Maintenant, nous voulons montrer les relations (3.49) et (3.50) ;

1-Calculons la variation de $\delta_0\nabla_k\phi$ à partir de la relation (3.46)

$$\delta_0\nabla_k\phi = \delta_0\left(h_k{}^{\mu}\nabla_\mu\phi\right) = \left(\delta_0 h_k{}^{\mu}\right)\nabla_\mu\phi + h_k{}^{\mu}\left(\delta_0\nabla_\mu\phi\right) \tag{3.51}$$

nous remplaçons le dernier terme par la relation (3.47) , et il reste donc de calculer $\delta_0 h_k{}^{\mu}$, en utilisant la relation (3.48)

$$\delta_0\left(b^k{}_{\mu}h_k{}^{\nu}\right) = \delta_0\delta^{\nu}{}_{\mu} = 0$$

$$b^k{}_{\mu}\left(\delta_0 h_k{}^{\nu}\right) = -\left(\delta_0 b^k{}_{\mu}\right)h_k{}^{\nu} \tag{3.52}$$

multiplions cette dernière relation par $h_i{}^{\mu}$

$$h_i{}^{\mu}b^k{}_{\mu}\left(\delta_0 h_k{}^{\nu}\right) = -\left(\delta_0 b^k{}_{\mu}\right)h_k{}^{\nu}h_i{}^{\mu}$$

$$\delta_0 h_i{}^{\nu} = -\left(\delta_0 b^k{}_{\mu}\right)h_k{}^{\nu}h_i{}^{\mu} \tag{3.53}$$

nous remplaçons (3.49) dans (3.53) , nous trouvons

$$\begin{aligned}\delta_0 h_i{}^{\nu} &= -\left[\omega^k{}_s b^s{}_{\mu} - \left(\partial_\mu\zeta^\lambda\right)b^k{}_{\lambda} - \zeta^\lambda\partial_\lambda b^k{}_{\mu}\right]h_k{}^{\nu}h_i{}^{\mu} \\ &= -\omega^k{}_s\delta^s{}_i h_k{}^{\nu} + \left(\partial_\mu\zeta^\lambda\right)\delta^{\nu}{}_{\lambda}h_i{}^{\mu} + \zeta^\lambda\left(\partial_\lambda b^k{}_{\mu}\right)h_k{}^{\nu}h_i{}^{\mu}\end{aligned} \tag{3.54}$$

à partir de la relation (3.48) , nous avons

$$\begin{aligned}\partial_\lambda\left(b^k{}_{\mu}h_i{}^{\mu}\right) &= 0 \\ \left(\partial_\lambda b^k{}_{\mu}\right)h_i{}^{\mu} &= -b^k{}_{\mu}\left(\partial_\lambda h_i{}^{\mu}\right)\end{aligned} \tag{3.55}$$

et donc la relation (3.54) devient

$$\begin{aligned}\delta_0 h_i{}^{\nu} &= \omega_i{}^k h_k{}^{\nu} + \left(\partial_\mu\zeta^\nu\right)h_i{}^{\mu} - \zeta^\lambda b^k{}_{\mu}h_i{}^{\mu}\left(\partial_\lambda h_i{}^{\mu}\right) \\ &= \omega_i{}^k h_k{}^{\nu} + \left(\partial_\mu\zeta^\nu\right)h_i{}^{\mu} - \zeta^\lambda\partial_\lambda h_k{}^{\mu}\end{aligned} \tag{3.56}$$

maintenant nous remplacons $\delta_0 h_i{}^{\nu}$ et $\delta_0\nabla_\mu\phi$ par ses expressions dans la relation (3.51) il vient

$$\begin{aligned}\delta_0\nabla_k\phi &= \left(\delta_0 h_k{}^{\mu}\right)\nabla_\mu\phi + h_k{}^{\mu}\left(\delta_0\nabla_\mu\phi\right) \\ &= \left[\omega_k{}^s h_s{}^{\mu} + \left(\partial_\nu\zeta^\mu\right)h_k{}^{\nu} - \zeta^\nu\left(\partial_\nu h_k{}^{\mu}\right)\right]\nabla_\mu\phi \\ &\quad + h_k{}^{\mu}\left[P\nabla_\mu\phi - \left(\partial_\mu\zeta^\nu\right)\nabla_\nu\phi\right]\end{aligned} \tag{3.57}$$

en tenant en compte que $\nabla_k\phi \equiv h_k{}^{\mu}\nabla_\mu\phi$

$$\delta_0\nabla_k\phi = \omega_k{}^s\nabla_s\phi - \zeta^\nu\left(\partial_\nu h_k{}^{\mu}\right)\nabla_\mu\phi + h_k{}^{\mu}P\nabla_\mu\phi \tag{3.58}$$

en simplifiant le dernier terme

$$\begin{aligned} h_k{}^{\mu} P \nabla_\mu \phi &= h_k{}^{\mu} \left(\frac{1}{2} \omega^{ij} M_{ij} + \varepsilon^i p_i \right) \nabla_\mu \phi \\ h_k{}^{\mu} P \nabla_\mu \phi &= \frac{1}{2} \omega^{ij} \Sigma_{ij} h_k{}^{\mu} \nabla_\mu \phi + \frac{1}{2} \omega^{ij} x_i h_k{}^{\mu} \left(\partial_j \nabla_\mu \phi \right) \\ & \quad - \frac{1}{2} \omega^{ij} x_j h_k{}^{\mu} \left(\partial_i \nabla_\mu \phi \right) - \varepsilon^i h_k{}^{\mu} \left(\partial_i \nabla_\mu \phi \right) \end{aligned} \tag{3.59}$$

nous avons

$$h_k{}^{\mu} \left(\partial_i \nabla_\mu \phi \right) = \partial_i \left(h_k{}^{\mu} \nabla_\mu \phi \right) - \nabla_\mu \phi \left(\partial_i h_k{}^{\mu} \right)$$

donc

$$\begin{aligned} h_k{}^{\mu} P \nabla_\mu \phi &= \frac{1}{2} \omega^{ij} \Sigma_{ij} h_k{}^{\mu} \nabla_\mu \phi + \frac{1}{2} \omega^{ij} x_i \left[\partial_j \left(h_k{}^{\mu} \nabla_\mu \phi \right) - \nabla_\mu \phi \left(\partial_j h_k{}^{\mu} \right) \right] \\ & \quad - \frac{1}{2} \omega^{ij} x_j \left[\partial_i \left(h_k{}^{\mu} \nabla_\mu \phi \right) - \nabla_\mu \phi \left(\partial_i h_k{}^{\mu} \right) \right] \\ & \quad - \varepsilon^i \left[\partial_i \left(h_k{}^{\mu} \nabla_\mu \phi \right) - \nabla_\mu \phi \left(\partial_i h_k{}^{\mu} \right) \right] \end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned} h_k{}^{\mu} P \nabla_\mu \phi &= \left[\frac{1}{2} \omega^{ij} \left(\Sigma_{ij} + x_i \partial_j - x_j \partial_i \right) - \varepsilon^i \partial_i \right] h_k{}^{\mu} \nabla_\mu \phi - \frac{1}{2} \omega^{ij} x_i \nabla_\mu \phi \left(\partial_j h_k{}^{\mu} \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} \omega^{ij} x_j \nabla_\mu \phi \left(\partial_i h_k{}^{\mu} \right) + \varepsilon^i \nabla_\mu \phi \left(\partial_i h_k{}^{\mu} \right) \\ &= \left[\frac{1}{2} \omega^{ij} M_{ij} + \varepsilon^i p_i \right] \nabla_k \phi + \left[\omega^i{}_j x^j + \varepsilon^i \right] \nabla_\mu \phi \left(\partial_i h_k{}^{\mu} \right) \\ h_k{}^{\mu} P \nabla_\mu \phi &= P \nabla_k \phi + \zeta^i \nabla_\mu \phi \left(\partial_i h_k{}^{\mu} \right) \end{aligned} \tag{3.61}$$

finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned} \delta_0 \nabla_k \phi &= \omega_k{}^{s} \nabla_s \phi - \zeta^\nu \left(\partial_\nu h_k{}^{\mu} \right) \nabla_\mu \phi + P \nabla_k \phi + \zeta^i \nabla_\mu \phi \left(\partial_i h_k{}^{\mu} \right) \\ \delta_0 \nabla_k \phi &= P \nabla_k \phi + \omega_k{}^{s} \nabla_s \phi \end{aligned} \tag{3.62}$$

et alors la transformation $\delta_0 b^k{}_{\mu}$ satisfait la relation de la dérivée covariante.

2-Dans cette partie nous allons montrer que $A^{ij}{}_{\mu}$ se transforme comme suit

$$\delta_0 A^{ij}{}_{\mu} = - \bigtriangledown_\mu \omega^{ij} - \left(\partial_\mu \zeta^\lambda \right) A^{ij}{}_{\lambda} - \zeta^\lambda \left(\partial_\lambda A^{ij}{}_{\mu} \right) \tag{3.63}$$

commençons par la variation de la relation (3.45)

$$\begin{aligned}
\delta_0 \bigtriangledown_\mu \phi &= \delta_0 \left[(\partial_\mu + A_\mu)\,\phi\right] \\
\delta_0 \bigtriangledown_\mu \phi &= (\partial_\mu + A_\mu)\,\delta_0\phi + \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\delta_0\left(A^{ij}{}_{\mu}\right)\phi \\
&= (\partial_\mu + A_\mu)\,P\phi + \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\delta_0\left(A^{ij}{}_{\mu}\right)\phi,\ \ \delta_0\phi = P\phi \qquad (3.64)
\end{aligned}$$

d'après les relations (3.47) et (3.64)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Sigma_{ij}\delta_0\left(A^{ij}{}_{\mu}\right)\phi + (\partial_\mu + A_\mu)\,P\phi &= P\bigtriangledown_\mu \phi - (\partial_\mu\zeta^\nu)\bigtriangledown_\nu \phi \\
\frac{1}{2}\Sigma_{ij}\delta_0\left(A^{ij}{}_{\mu}\right)\phi &= P\left(\partial_\mu + \frac{1}{2}A^{ij}{}_{\mu}\Sigma_{ij}\right)\phi - (\partial_\mu\zeta^\nu)\left(\partial_\nu + \frac{1}{2}A^{ij}{}_{\nu}\Sigma_{ij}\right)\phi \\
&\quad -\left(\partial_\mu + \frac{1}{2}A^{ij}{}_{\mu}\Sigma_{ij}\right)P\phi \qquad (3.65)
\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Sigma_{ij}\delta_0\left(A^{ij}{}_{\mu}\right)\phi &= P\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}\Sigma_{ij}P\left(A^{ij}{}_{\mu}\phi\right) - (\partial_\mu\zeta^\nu)\,\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\,(\partial_\mu\zeta^\nu)\,A^{ij}{}_{\nu}\phi \\
&\quad -\partial_\mu\,(P\phi) - \frac{1}{2}A^{ij}{}_{\mu}\Sigma_{ij}P\phi \qquad (3.66)
\end{aligned}$$

calculons $P\left(A^{ij}{}_{\mu}\phi\right)$

$$\begin{aligned}
P\left(A^{ij}{}_{\mu}\phi\right) &= \left(\frac{1}{2}\omega^{ls}M_{ls} + \varepsilon^l p_l\right)A^{ij}{}_{\mu}\phi \\
&= \left[\frac{1}{2}\omega^{ls}\left(\Sigma_{ls} + x_l\partial_s - x_s\partial_l\right) - \varepsilon^l\partial_l\right]A^{ij}{}_{\mu}\phi \\
&= \frac{1}{2}\omega^{ls}\Sigma_{ls}A^{ij}{}_{\mu}\phi + \frac{1}{2}\omega^{ls}x_l\left(\partial_s A^{ij}{}_{\mu}\right)\phi + \frac{1}{2}\omega^{ls}x_l A^{ij}{}_{\mu}\left(\partial_s\phi\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\omega^{sl}x_s\left(\partial_l A^{ij}{}_{\mu}\right)\phi - \frac{1}{2}\omega^{sl}x_s A^{ij}{}_{\mu}\left(\partial_l\phi\right) - \varepsilon^l\left(\partial_l A^{ij}{}_{\mu}\right)\phi \\
&\quad -\varepsilon^l A^{ij}{}_{\mu}\left(\partial_l\phi\right) \\
&= A^{ij}{}_{\mu}\left[\frac{1}{2}\omega^{ls}\left(\Sigma_{ls} + x_l\partial_s - x_s\partial_l\right) - \varepsilon^l\partial_l\right]\phi + \omega^{ls}x_l\left(\partial_s A^{ij}{}_{\mu}\right)\phi - \varepsilon^l\left(\partial_l A^{ij}{}_{\mu}\right)\phi \\
P\left(A^{ij}{}_{\mu}\phi\right) &= A^{ij}{}_{\mu}P\phi + \omega^{sl}x_l\left(\partial_s A^{ij}{}_{\mu}\right)\phi - \varepsilon^l\left(\partial_l A^{ij}{}_{\mu}\right)\phi \qquad (3.67)
\end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned}
\partial_\mu (P\phi) &= \partial_\mu \left[\left(\frac{1}{2}\omega^{ij} M_{ij} + \varepsilon^i p_i\right)\phi\right] \\
&= P\partial_\mu \phi + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \omega^{ij}\right) M_{ij}\phi + \frac{1}{2}\omega^{ij}\left(\partial_\mu M_{ij}\right)\phi + \left(\partial_\mu \varepsilon^i\right) p_i \phi \\
\partial_\mu (P\phi) &= P\partial_\mu \phi + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \omega^{ij}\right) M_{ij}\phi + \omega^{kj}\delta^k{}_\mu \partial_j \phi + \left(\partial_\mu \varepsilon^i\right) p_i \phi \qquad (3.68)
\end{aligned}$$

nous remplaçons (3.67) et (3.68) dans la relation (3.66)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Sigma_{ij}\delta_0\left(A^{ij}{}_\mu\right)\phi &= P\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\left[A^{ij}{}_\mu P\phi + \omega^{ls}x_l\left(\partial_s A^{ij}{}_\mu\right)\phi - \varepsilon^l\left(\partial_l A^{ij}{}_\mu\right)\phi\right] \\
&\quad - \left(\partial_\mu\zeta^\nu\right)\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\left(\partial_\mu\zeta^\nu\right)A^{ij}{}_\nu\phi - \frac{1}{2}A^{ij}{}_\mu\Sigma_{ij}P\phi \\
&\quad - \left[P\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\omega^{ij}\right)M_{ij}\phi + \omega^{kj}\delta^k{}_\mu\partial_j\phi + \left(\partial_\mu\varepsilon^i\right)p_i\phi\right] \qquad (3.69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Sigma_{ij}\delta_0\left(A^{ij}{}_\mu\right)\phi &= -\frac{1}{2}\Sigma_{ij}\left(\partial_\mu\zeta^\nu\right)A^{ij}{}_\nu\phi - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\omega^{ij}\right)\left[\Sigma_{ij} + x_i\partial_j - x_j\partial_i\right]\phi \\
&\quad + \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\omega^{ls}x_l\left(\partial_s A^{ij}{}_\mu\right)\phi - \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\varepsilon^l\left(\partial_l A^{ij}{}_\mu\right)\phi \\
&\quad - \left(\partial_\mu\zeta^\nu\right)\partial_\nu\phi - \omega^{kj}\delta^k{}_\mu\partial_j\phi - \left(\partial_\mu\varepsilon^i\right)p_i\phi \qquad (3.70)
\end{aligned}$$

nous avons la dérivée $\partial_\mu\zeta^\nu$

$$\partial_\mu\zeta^\nu = \left(\partial_\mu\omega^\nu{}_\rho\right)x^\rho + \omega^\nu{}_\mu + \partial_\mu\varepsilon^\nu \qquad (3.71)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Sigma_{ij}\delta_0\left(A^{ij}{}_\mu\right)\phi &= -\frac{1}{2}\Sigma_{ij}\left(\partial_\mu\omega^{ij}\right)\phi - \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\left(\partial_\mu\zeta^\nu\right)A^{ij}{}_\nu\phi + \left(\partial_\mu\omega^{ij}\right)x_j\partial_i\phi \\
&\quad + \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\omega^{ls}x_l\left(\partial_s A^{ij}{}_\mu\right)\phi - \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\varepsilon^l\left(\partial_l A^{ij}{}_\mu\right)\phi \\
&\quad - \left(\partial_\mu\omega^\nu{}_\rho\right)x^\rho\partial_\nu\phi - \omega^\nu{}_\mu\partial_\nu\phi - \partial_\mu\varepsilon^\nu\partial_\nu\phi \\
&\quad - \omega^{kj}\delta^k{}_\mu\partial_j\phi + \left(\partial_\mu\varepsilon^i\right)\partial_i\phi \qquad (3.72)
\end{aligned}$$

il vient

$$\frac{1}{2}\Sigma_{ij}\delta_0\left(A^{ij}{}_\mu\right)\phi = -\frac{1}{2}\Sigma_{ij}\left(\partial_\mu\omega^{ij}\right)\phi - \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\left(\partial_\mu\zeta^\nu\right)A^{ij}{}_\nu\phi - \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\zeta^l\left(\partial_l A^{ij}{}_\mu\right)\phi$$

nous concluons donc

$$\delta_0\left(A^{ij}{}_\mu\right) = -\partial_\mu\omega^{ij} - \partial_\mu\zeta^\nu A^{ij}{}_\nu - \zeta^l\partial_l A^{ij}{}_\mu$$

nous ajoutons et nous soustrayons le terme $A^{i}{}_{s\mu}\omega^{sj}$

$$\delta_0 A^{ij}{}_{\mu} = -\partial_\mu \omega^{ij} - A^{i}{}_{s\mu}\omega^{sj} + A^{i}{}_{s\mu}\omega^{sj} - \partial_\mu \zeta^\nu A^{ij}{}_{\nu} - \zeta^l \partial_l A^{ij}{}_{\mu} \tag{3.73}$$

notons que ω^{sj}, $A^{i}{}_{s\mu}$ et Σ_{ij} sont antisymétriques de ces deux premiers indices

$$\omega^{sj} = -\omega^{js},\ A^{i}{}_{s\mu} = -A_{s}{}^{i}{}_{\mu},\ \Sigma_{ij} = -\Sigma_{ji}$$

nous avons

$$A^{i}{}_{s\mu}\omega^{sj}\Sigma_{ij} = A_{s}{}^{i}{}_{\mu}\omega^{js}\Sigma_{ij}$$

nous faisons $i \leftrightarrow j$ dans le coté droit

$$\begin{aligned} A^{i}{}_{s\mu}\omega^{sj}\Sigma_{ij} &= A_{s}{}^{j}{}_{\mu}\omega^{is}\Sigma_{ji} \\ A^{i}{}_{s\mu}\omega^{sj}\Sigma_{ij} &= -A_{s}{}^{j}{}_{\mu}\omega^{is}\Sigma_{ij} \\ &\Rightarrow A^{i}{}_{s\mu}\omega^{sj} = -A_{s}{}^{j}{}_{\mu}\omega^{is} \end{aligned} \tag{3.74}$$

nous remplaçons la relation (3.74) dans (3.73) nous obtenons

$$\delta_0 A^{ij}{}_{\mu} = -\bigtriangledown_\mu \omega^{ij} - \partial_\mu \zeta^\nu A^{ij}{}_{\nu} - \zeta^l \partial_l A^{ij}{}_{\mu} \tag{3.75}$$

la dérivée covariante de ω^{js} est donnée par

$$\bigtriangledown_\mu \omega^{ij} = \partial_\mu \omega^{ij} + A^{i}{}_{s\mu}\omega^{sj} + A_{s}{}^{j}{}_{\mu}\omega^{is}$$

d'après le terme $-\partial_\mu \omega^{ij}$ nous constatons que $A^{ij}{}_{\mu}$ n'est pas un tenseur mais un potentiel.

Lagrangien du champ de matière

Nous avons montré que

$$\delta \mathcal{L}'_M \equiv \delta_0 \mathcal{L}'_M + \zeta^\mu \partial_\mu \mathcal{L}'_M = 0 \tag{3.76}$$

maintenant nous allons essayer de modifier le lagrangien $\mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}_M$ de sorte que le terme $(\partial_\mu \zeta^\mu)\,\mathcal{L}$ soit nul. Notons que $(\partial_\mu \zeta^\mu) \neq 0$.

nous introduisons un nouveau lagrangien

$$\widetilde{\mathcal{L}}_M = \Lambda \mathcal{L}'_M \tag{3.77}$$

d'après la condition d'invariance

$$\Delta \widetilde{\mathcal{L}}_M \equiv \delta_0 \widetilde{\mathcal{L}}_M + \zeta^\mu \partial_\mu \widetilde{\mathcal{L}}_M + \partial_\mu \zeta^\mu \widetilde{\mathcal{L}}_M \tag{3.78}$$

remplaçons $\widetilde{\mathcal{L}}_M$ par son expression dans la relation(3.78)

$$\begin{aligned}
\Delta\widetilde{\mathcal{L}}_M &\equiv \delta_0\left(\Lambda\mathcal{L}_M^{'}\right)+\zeta^\mu\partial_\mu\left(\Lambda\mathcal{L}_M^{'}\right)+\partial_\mu\zeta^\mu\Lambda\mathcal{L}_M^{'} \\
\Delta\widetilde{\mathcal{L}}_M &\equiv \Lambda\left(\delta_0\mathcal{L}_M^{'}+\zeta^\mu\partial_\mu\mathcal{L}_M^{'}\right)+\left(\delta_0\Lambda+\partial_\mu\left(\zeta^\mu\Lambda\right)\right)\mathcal{L}_M^{'} \\
\Delta\widetilde{\mathcal{L}}_M &\equiv \Lambda\delta\mathcal{L}_M^{'}+\left(\delta_0\Lambda+\partial_\mu\left(\zeta^\mu\Lambda\right)\right)\mathcal{L}_M^{'} \qquad (3.79)
\end{aligned}$$

le premier terme est nul d'après (3.76) et donc pour que la condition d'invariance soit vérifiée il suffit de montrer que

$$\delta_0\Lambda+\partial_\mu\left(\zeta^\mu\Lambda\right)=0 \qquad (3.80)$$

l'une des solutions de cette dernière équation est

$$\Lambda=\det\left(b^k{}_\mu\right)\equiv b \qquad (3.81)$$

$$\delta_0\Lambda+\partial_\mu\left(\zeta^\mu\Lambda\right)=\delta_0\det\left(b^k{}_\mu\right)+\partial_\mu\left(\zeta^\mu b\right)=\delta_0\det\left(b^k{}_\mu\right)+\left(\partial_\rho\zeta^\rho\right)\det\left(b^k{}_\mu\right)+\zeta^\rho\partial_\rho\det\left(b^k{}_\mu\right) \qquad (3.82)$$

nous avons

$$\delta_0\det\left(b^k{}_\mu\right)=\det\left(b^k{}_\mu\right)\left(b^k{}_\mu\right)^{-1}\delta_0\left(b^k{}_\mu\right) \qquad (3.83)$$

de même

$$\partial_\rho\det\left(b^k{}_\mu\right)=\det\left(b^k{}_\mu\right)\left(b^k{}_\mu\right)^{-1}\partial_\rho\left(b^k{}_\mu\right) \qquad (3.84)$$

avec

$$\left(b^k{}_\mu\right)^{-1}=h_k{}^\mu$$

la relation (3.82) devient

$$\delta_0\Lambda+\partial_\mu\left(\zeta^\mu\Lambda\right)=\det\left(b^k{}_\mu\right)h_k{}^\mu\delta_0\left(b^k{}_\mu\right)+\left(\partial_\rho\zeta^\rho\right)\det\left(b^k{}_\mu\right)+\zeta^\rho\det\left(b^k{}_\mu\right)h_k{}^\mu\partial_\rho\left(b^k{}_\mu\right) \qquad (3.85)$$

en remplaçant $\delta_0\left(b^k{}_\mu\right)$ par sa formule (3.49) dans cette dernière relation et en tenant en compte la relation (3.48) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\delta_0\Lambda+\partial_\mu\left(\zeta^\mu\Lambda\right) &= \det\left(b^k{}_\mu\right)h_k{}^\mu\left[\omega^k{}_s b^s{}_\mu-\left(\partial_\mu\zeta^\lambda\right)b^k{}_\lambda-\zeta^\lambda\partial_\lambda\left(b^k{}_\mu\right)\right] \\
&\quad +\left(\partial_\rho\zeta^\rho\right)\det\left(b^k{}_\mu\right)+\zeta^\rho\det\left(b^k{}_\mu\right)h_k{}^\mu\partial_\rho\left(b^k{}_\mu\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La forme finale de lagrangien du champ de matière modifiée est donnée par

$$\widetilde{\mathcal{L}}_M=\Lambda\mathcal{L}_M^{'}=b\mathcal{L}_M\left(\phi,\nabla_k\phi\right). \qquad (3.86)$$

Cette construction du lagrangien est généralement valide pour les champs de matière massive, cependant il ne convient pas dans le cas de l'électrodynamique quantique.

Le Lagrangien complet

Dans cette partie nous allons constuire un lagrangien pour les nouveaux champs $b^k{}_\mu$ et $A^{ij}{}_\mu$, ensuite nous l'ajoutons au lagrangien du champ de matière afin d'obtenir le lagrangien complet.

En premier lieu, en calculant le commutateur de deux dérivées covariantes

$$\begin{aligned} [\nabla_k, \nabla_l]\,\phi &= \nabla_k \nabla_l \phi - \nabla_l \nabla_k \phi \\ &= \nabla_k \left(h_l{}^\nu \nabla_\nu \phi\right) - \nabla_l \left(h_k{}^\mu \nabla_\mu \phi\right) \\ &= \nabla_k h_l{}^\nu \nabla_\nu \phi - \nabla_l h_k{}^\mu \nabla_\mu \phi + h_l{}^\nu h_k{}^\mu \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - h_k{}^\mu h_l{}^\nu \nabla_\nu \nabla_\mu \phi \\ [\nabla_k, \nabla_l]\,\phi &= \nabla_k h_l{}^\nu \nabla_\nu \phi - \nabla_l h_k{}^\mu \nabla_\mu \phi + h_l{}^\nu h_k{}^\mu [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\,\phi \end{aligned} \tag{3.87}$$

nous avons

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi &= (\partial_\mu + A_\mu)(\partial_\nu + A_\nu)\,\phi \\ \nabla_\mu \nabla_\nu \phi &= \partial_\mu \partial_\nu \phi + \partial_\mu (A_\nu \phi) + A_\mu \partial_\nu \phi + A_\mu A_\nu \phi \end{aligned} \tag{3.88}$$

de même

$$\nabla_\nu \nabla_\mu \phi = \partial_\nu \partial_\mu \phi + \partial_\nu (A_\mu \phi) + A_\nu \partial_\mu \phi + A_\nu A_\mu \phi \tag{3.89}$$

alors

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\,\phi &= \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \nabla_\nu \nabla_\mu \phi \\ &= (\partial_\mu A_\nu)\,\phi - (\partial_\nu A_\mu) + [A_\mu, A_\nu]\,\phi \end{aligned} \tag{3.90}$$

avec

$$\partial_\nu A_\mu = \partial_\nu \left(\frac{1}{2} A^{ij}{}_\mu \Sigma_{ij}\right) = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \partial_\nu A^{ij}{}_\mu \tag{3.91}$$

$$\partial_\mu A_\nu = \partial_\mu \left(\frac{1}{2} A^{ij}{}_\nu \Sigma_{ij}\right) = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \partial_\mu A^{ij}{}_\nu . \tag{3.92}$$

Calculons le commutateur $[A_\mu, A_\nu]\,\phi$

nous avons le générateur de transformation de Poincaré $M_{ij} = \Sigma_{ij} + x_i \partial_j - x_j \partial_i$ et par analogie de la relation (3.7) nous pouvons écrire

$$[\Sigma_{ni}, \Sigma_{sj}] = \eta_{jn} \Sigma_{is} + \eta_{si} \Sigma_{nj} - \eta_{sn} \Sigma_{ij} - \eta_{ji} \Sigma_{ns}$$

en tenant en compte que $A^{kj}{}_\nu$ et Σ_{ij} sont antisymétriques de deux premiers indices, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
[A_\mu, A_\nu]\,\phi &= \frac{1}{4}A^{ni}{}_{\mu}A^{sj}{}_{\nu}\,[\Sigma_{ni},\Sigma_{sj}]\,\phi = \frac{1}{4}A^{ni}{}_{\mu}A^{sj}{}_{\nu}\left[\eta_{jn}\Sigma_{is}+\eta_{si}\Sigma_{nj}-\eta_{sn}\Sigma_{ij}-\eta_{ji}\Sigma_{ns}\right]\phi \\
&= \frac{1}{4}\left[A^{i}{}_{s\mu}A^{sj}{}_{\nu}+A^{i}{}_{s\mu}A^{sj}{}_{\nu}-A^{is}{}_{\mu}A^{j}{}_{s\nu}+A^{i}{}_{s\mu}A^{sj}{}_{\nu}\right]\Sigma_{ij}\phi \\
&= \left[\frac{1}{2}A^{i}{}_{s\mu}A^{sj}{}_{\nu}+\frac{1}{4}A^{js}{}_{\mu}A^{i}{}_{s\nu}-\frac{1}{4}A^{j}{}_{s\mu}A^{si}{}_{\nu}\right]\Sigma_{ij}\phi \\
[A_\mu, A_\nu]\,\phi &= \frac{1}{2}\left[A^{i}{}_{s\mu}A^{sj}{}_{\nu}-A^{i}{}_{s\nu}A^{sj}{}_{\mu}\right]\Sigma_{ij}\phi \qquad (3.93)
\end{aligned}
$$

nous remplaçons $(3.92)\,,(3.91)$ et (3.93) dans (3.90) il vient

$$
\begin{aligned}
[\nabla_\mu,\nabla_\nu]\,\phi &= \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\left[\partial_\mu A^{ij}{}_{\nu}-\partial_\nu A^{ij}{}_{\mu}+A^{i}{}_{s\mu}A^{sj}{}_{\nu}-A^{i}{}_{s\nu}A^{sj}{}_{\mu}\right]\phi \\
[\nabla_\mu,\nabla_\nu]\,\phi &= \frac{1}{2}\Sigma_{ij}F^{ij}{}_{\mu\nu}\phi
\end{aligned}
$$

le commutateur (3.87) devient

$$
\begin{aligned}
[\nabla_k,\nabla_l]\,\phi &= \nabla_k h_l{}^{\nu}\nabla_\nu\phi-\nabla_l h_k{}^{\mu}\nabla_\mu\phi+\frac{1}{2}\Sigma_{ij}h_l{}^{\nu}h_k{}^{\mu}F^{ij}{}_{\mu\nu}\phi \\
[\nabla_k,\nabla_l]\,\phi &= \nabla_k h_l{}^{\nu}\nabla_\nu\phi-\nabla_l h_k{}^{\mu}\nabla_\mu\phi+\frac{1}{2}\Sigma_{ij}F^{ij}{}_{kl}\phi \qquad (3.94)
\end{aligned}
$$

il rest de simplifier les deux premiers termes ; on a $b^{k}{}_{\mu}, h_i{}^{\mu}$ et $\delta^{k}{}_{i}$ sont des champs scalaires et donc

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mu\left(h_k{}^{\nu}b^{i}{}_{\nu}\right) &= \partial_\mu\delta^{i}{}_{k}=0 \\
\left(\nabla_\mu h_k{}^{\nu}\right)b^{i}{}_{\nu} &= -h_k{}^{\nu}\left(\nabla_\mu b^{i}{}_{\nu}\right) \qquad (3.95)
\end{aligned}
$$

d'une autre part

$$
\begin{aligned}
\nabla_k h_l{}^{\nu}\nabla_\nu\phi-\nabla_l h_k{}^{\mu}\nabla_\mu\phi &= \left(\nabla_k h_l{}^{\nu}\right)b^{i}{}_{\nu}\nabla_i\phi-\left(\nabla_l h_k{}^{\mu}\right)b^{i}{}_{\mu}\nabla_i\phi \\
&= h_k{}^{\mu}\left(\nabla_\mu h_l{}^{\nu}\right)b^{i}{}_{\nu}\nabla_i\phi-h_l{}^{\nu}\left(\nabla_\nu h_k{}^{\mu}\right)b^{i}{}_{\mu}\nabla_i\phi
\end{aligned}
$$

à partir du résultat (3.95) nous abtenons

$$
\begin{aligned}
\nabla_k h_l{}^{\nu}\nabla_\nu\phi-\nabla_l h_k{}^{\mu}\nabla_\mu\phi &= h_k{}^{\mu}\left(-h_l{}^{\nu}\left(\nabla_\mu b^{i}{}_{\nu}\right)\right)\nabla_i\phi-h_l{}^{\nu}\left(-h_k{}^{\mu}\left(\nabla_\nu b^{i}{}_{\mu}\right)\right)\nabla_i\phi \\
&= h_l{}^{\nu}h_k{}^{\mu}\left[\nabla_\nu b^{i}{}_{\mu}-\nabla_\mu b^{i}{}_{\nu}\right]\nabla_i\phi \\
&= -h_l{}^{\nu}h_k{}^{\mu}F^{i}{}_{\mu\nu}\nabla_i\phi \\
\nabla_k h_l{}^{\nu}\nabla_\nu\phi-\nabla_l h_k{}^{\mu}\nabla_\mu\phi &= -F^{i}{}_{kl}\nabla_i\phi \qquad (3.96)
\end{aligned}
$$

remplaçons (3.96) dans (3.94) nous trouvons finalement

$$[\nabla_k, \nabla_l]\,\phi = \frac{1}{2}F^{ij}{}_{kl}\Sigma_{ij}\phi - F^{i}{}_{kl}\nabla_i\phi \tag{3.97}$$

avec

$$F^{ij}{}_{kl} = F^{ij}{}_{\mu\nu}h_k{}^{\mu}h_l{}^{\nu} \tag{3.98}$$

$$F^{i}{}_{kl} = F^{i}{}_{\mu\nu}h_k{}^{\mu}h_l{}^{\nu} \tag{3.99}$$

$$F^{ij}{}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^{ij}{}_{\nu} - \partial_\nu A^{ij}{}_{\mu} + A^{i}{}_{s\mu}A^{sj}{}_{\nu} - A^{i}{}_{s\nu}A^{sj}{}_{\mu} \tag{3.100}$$

$$F^{i}{}_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu b^{i}{}_{\nu} - \nabla_\nu b^{i}{}_{\mu} \tag{3.101}$$

$F^{ij}{}_{\mu\nu}$ et $F^{i}{}_{\mu\nu}$ sont des quantités physiques qui représentent les forces du champ de Lorentz et de translation respectivement et qui se transforment comme des tenseurs.

Finalement, la forme complète du lagrangien des champs de matière et de jauge est donnée comme suit

$$\widetilde{\mathcal{L}} = b\mathcal{L}_G\left(F^{ij}{}_{kl}, F^{i}{}_{kl}\right) + b\mathcal{L}_M\left(\phi, \nabla_k\phi\right) \tag{3.102}$$

le premier terme repose uniquement sur des forces du champs et il s'appel le lagrangien libre (free lagrangian)$\mathcal{L}_G$.

3.4.3 Interprétation de théorie de jauge de Poincaré

Géometrie de Riemann-Cartan

La théorie d'Einstein-Cartan est une théorie non métrique de la gravitation, car elle admet une hypothèse selon laquelle la connexion affine a une partie antisymétrique non-nulle $\Gamma^{\mu}{}_{[\lambda\rho]} \neq 0$, de sorte que la courbure de l'espace-temps est non seulement couplée à l'énergie de masse et la quantité de mouvement de la matière, mais aussi à son moment angulaire et son spin. Dans ce cas la géométrie de Riemann-Cartan est caractérisée par un triple $(M, g, \bigtriangledown)$, où (M, g) est une variété pseudo-Riemannienne à n-dimensions $(n \geq 2)$, avec une connexion linéaire ∇ ,un tenseur de torsion non-nul $Q^{\mu}{}_{\lambda\rho} \neq 0$ et la condition de la compatibilité métrique $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. Deux éléments nécessaires dans la géométrie de Riemann-Cartan sont ;

Le tenseur de torsion

$$Q^{\mu}{}_{\lambda\rho} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\rho} - \Gamma^{\mu}{}_{\rho\lambda}\right) = \Gamma^{\mu}{}_{[\lambda\rho]} \tag{3.103}$$

et le tenseur de Riemann

$$R^{\alpha}{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu} - \partial_\nu\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\mu} \tag{3.104}$$

dans cette partie nous définirons une autre connexion appelée la connexion de spin.

Connexion de spin

Le choix de la base dans un espace tangent T_P n'est pas unique. Un système de coordonnées est déterminé par un ensemble de quatre vecteurs $\widehat{e}_\mu(x)$, tangents aux lignes de coordonnées. En U_4, nous pouvons également introduire une base de Lorentz orthonormée, déterminée par quatre vecteurs $\widehat{e}_i(x)$ (tétrade), tels que

$$\widehat{e}_i(x) = e^\mu{}_i(x)\widehat{e}_\mu(x) \tag{3.105}$$

et

$$g(\widehat{e}_i, \widehat{e}_j) = \eta_{ij}. \tag{3.106}$$

Chaque vecteur tangent u peut être exprimé dans les deux bases

$$u = u^\mu \widehat{e}_\mu = u^i \widehat{e}_i \tag{3.107}$$

L'existence de référentiels de Lorentz entraîne des conséquences très importantes. En particulier, ils sont utilisés pour introduire des spineurs finis dans la théorie U_4.

Si nous voulons comparer les vecteurs $u^i(x)$ et $u^i(x+dx)$ aux points x et $x+dx$, déterminés respectivement par rapport aux référentiels de Lorentz $\widehat{e}_i(x)$ et $\widehat{e}_i(x+dx)$, nous devons connaître la règle du transport parallèle

$$\delta u^i = -\omega^i{}_{j\mu} u^j dx^\mu \tag{3.108}$$

où le 64 éléments $\omega^i{}_{j\mu}$ sont les connexions de spin. Le transport parallèle de v_i peut être déterminé en exigeant $\delta(u^i v_i) = 0$,

$$\delta v_i = \omega^j{}_{i\mu} v_j dx^\mu \tag{3.109}$$

Exigeant que le champ tensoriel η_{ij} soit invariant sous transport parallèle,

$$\delta\eta_{ij} = \left(\omega^s{}_{j\mu}\eta_{is} + \omega^s{}_{i\mu}\eta_{sj}\right) dx^\mu = 0 \tag{3.110}$$

implique que la connexion est antisymétrique

$$\omega_{ij\mu} + \omega_{ji\mu} = 0. \tag{3.111}$$

Après avoir établi la règle du transport parallèle, nous pouvons définir les dérivées ω-covariantes de u^i et v_i

$$Du^i = \left(\partial_\mu u^i + \omega^i{}_{j\mu} u^j\right) dx^\mu = D_\mu(\omega) u^i dx^\mu \tag{3.112}$$

$$D_\mu(\omega) u^i = \partial_\mu u^i + \omega^i{}_{j\mu} u^j \tag{3.113}$$

$$D_\mu(\omega) v_i = \partial_\mu v_i - \omega^j{}_{i\mu} v_j. \tag{3.114}$$

Puisque η est un tenseur constant, la condition $\delta\eta_{ij}$ donne

$$D_\mu(\omega)\,\eta_{ij} = 0. \tag{3.115}$$

Relation entre ω et Γ

Jusqu'à présent, nous n'avons supposé aucune relation entre la connexion de spin ω et Γ. Il est naturel d'exiger que les composantes tétrades d'un vecteur $u(x)$, transporté parallèlement de x vers $x + dx$, soient égales à

$$u^i + \delta u^i = e^i{}_\mu(x + dx)(u^\mu + \delta u^\mu)$$

car le transport parallèle est une opération géométrique unique, indépendante du choix de référentiel. En d'autres termes, ω et Γ représentent le même objet géométrique dans deux référentiels différents. De ce fait, nous obtenons la relation

$$D_\mu(\omega + \Gamma)\,e^i{}_\nu \equiv D_\mu(\omega)\,e^i{}_\nu - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu}e^i{}_\rho = 0 \tag{3.116}$$

avec

$$D_\mu(\omega)\,e^i{}_\nu = \partial_\mu e^i{}_\nu + \omega^i{}_{j\mu}e^j{}_\nu \tag{3.117}$$

à partir de ces équations nous pouvons avoir la condition de métricité

$$D_\mu(\Gamma)\,g_{\mu\nu} = D_\mu(\omega + \Gamma)\,g_{\mu\nu} = D_\mu(\omega + \Gamma)\left(\eta_{ij}e^i{}_\mu e^j{}_\nu\right) = 0. \tag{3.118}$$

Dans une représentation quelconque du groupe de Lorentz, la dérivée w-covariante d'une quantité ϕ peut être généralisé comme

$$D_\mu(\omega)\,\phi = (\partial_\mu + \omega_\mu)\,\phi,\ \omega_\mu \equiv \frac{1}{2}\omega^{ij}{}_\mu\Sigma_{ij} \tag{3.119}$$

Σ_{ij} est relié au matrice de spin.

Interprétation

La théorie de jauge de Poincaré est basée sur la symétrie globale de Poincaré, la localisation de cette symétrie conduit à la théorie de jauge de Poincaré de la gravitation comme on a déja vu dans la partie précédente, et nous avons obtenu le champ de Lorentz $F^{ij}{}_{\mu\nu}$ et de translation $F^i{}_{\mu\nu}$ qui sont définis par les relations (3.100) et (3.101)

Notre objectif maintenant est d'écrire les tenseurs représentés dans les relations (3.103) et (3.104) en fonction de connexion de spin ω au lieu de Γ.

à partir de (3.116) nous avons

$$D_\mu(\omega)\,e^i{}_\nu = \Gamma^\rho{}_{\nu\mu}e^i{}_\rho \tag{3.120}$$

nous multiplions (3.103) par $e^i{}_\rho$ il vient

$$\begin{aligned}
2Q^\rho{}_{\mu\nu}e^i{}_\rho &= \Gamma^\rho{}_{\nu\mu}e^i{}_\rho - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}e^i{}_\rho \\
&= D_\mu(\omega)\,e^i{}_\nu - D_\nu(\omega)\,e^i{}_\mu \equiv 2Q^i{}_{\mu\nu}(\omega) \qquad (3.121)\\
Q^i{}_{\mu\nu}(\omega) &= Q^\rho{}_{\mu\nu}e^i{}_\rho \qquad (3.122)
\end{aligned}$$

multiplions aussi (3.104) par $e^i{}_\lambda$

$$e^i{}_\lambda R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} = e^i{}_\lambda\left(\partial_\mu\Gamma^\lambda{}_{\rho\nu}\right) - e^i{}_\lambda\left(\partial_\nu\Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}\right) + e^i{}_\lambda\Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} - e^i{}_\lambda\Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\rho\mu}$$

en tenant en compte que

$$\begin{aligned}
e^i{}_\lambda\left(\partial_\mu\Gamma^\lambda{}_{\rho\nu}\right) &= \partial_\mu\left(\Gamma^\lambda{}_{\rho\nu}e^i{}_\lambda\right) - \left(\partial_\mu e^i{}_\lambda\right)\Gamma^\lambda{}_{\rho\nu} \\
&= \partial_\mu\left(D_\nu(\omega)\,e^i{}_\rho\right) - \left(\partial_\mu e^i{}_\lambda\right)\Gamma^\lambda{}_{\rho\nu}
\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned}
e^i{}_\lambda R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} &= \partial_\mu\left(D_\nu(\omega)\,e^i{}_\rho\right) - \left(\partial_\mu e^i{}_\lambda\right)\Gamma^\lambda{}_{\rho\nu} - \partial_\nu\left(D_\mu(\omega)\,e^i{}_\rho\right) + \left(\partial_\nu e^i{}_\lambda\right)\Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} \\
&\quad + \left(D_\mu(\omega)\,e^i{}_\sigma\right)\Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} - \left(D_\nu(\omega)\,e^i{}_\sigma\right)\Gamma^\sigma{}_{\rho\mu}
\end{aligned}$$

dans ce cas $D_\nu(\omega)\,e^i{}_\rho = \partial_\nu e^i{}_\rho + \omega^i{}_{j\nu}e^j{}_\rho$, nous trouvons

$$e^i{}_\lambda R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu\left(\omega^i{}_{j\nu}e^j{}_\rho\right) - \partial_\nu\left(\omega^i{}_{j\mu}e^j{}_\rho\right) + \omega^i{}_{j\mu}e^j{}_\sigma\Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} - \omega^i{}_{j\nu}e^j{}_\sigma\Gamma^\sigma{}_{\rho\mu}$$

de même $\partial_\mu\left(\omega^i{}_{j\nu}e^j{}_\rho\right) = \left(\partial_\mu\omega^i{}_{j\nu}\right)e^j{}_\rho + \omega^i{}_{j\nu}\left(\partial_\mu e^j{}_\rho\right)$, nous simplifions nous obtenons

$$\begin{aligned}
e^i{}_\lambda R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} &= \left(\partial_\mu\omega^i{}_{j\nu}\right)e^j{}_\rho - \left(\partial_\nu\omega^i{}_{j\mu}\right)e^j{}_\rho + \omega^i{}_{j\mu}\omega^j{}_{k\nu}e^k{}_\rho - \omega^i{}_{j\nu}\omega^j{}_{k\mu}e^k{}_\rho \\
e^i{}_\lambda R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} &= \left[\partial_\mu\omega^{ij}{}_\nu - \partial_\nu\omega^{ij}{}_\mu + \omega^i{}_{k\mu}\omega^{kj}{}_\nu - \omega^i{}_{k\nu}\omega^{kj}{}_\mu\right]e_{j\rho}
\end{aligned}$$

donc

$$e^{j\rho}e^i{}_\lambda R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} = \left[\partial_\mu\omega^{ij}{}_\nu - \partial_\nu\omega^{ij}{}_\mu + \omega^i{}_{k\mu}\omega^{kj}{}_\nu - \omega^i{}_{k\nu}\omega^{kj}{}_\mu\right] \equiv R^{ij}{}_{\mu\nu}(\omega)\,, \qquad (3.123)$$

la relation (3.121) peut être résolu pour la connexion ω avec

$$\begin{aligned}
\omega_{ij\mu} &= \triangle_{ij\mu} + K_{ij\mu} \\
\triangle_{ij\mu} &\equiv \frac{1}{2}\left(c_{ijm} - c_{mij} + c_{jmi}\right)e^m{}_\mu
\end{aligned}$$

où $c^i{}_{\mu\nu} = \partial_\mu e^i{}_\nu - \partial_\nu e^i{}_\mu$ est appelé l'objet de l'anholonomité, K représente le tenseur de contorsion.

Lorsque nous comparons ces derniers résultats avec lesquels ils sont représentés dans les relations (3.121) et (3.123) on peut remarquer ;

-Le champ de Lorentz $A^{ij}{}_{\mu}$ est équivalente à la connexion du spin $\omega^{ij}{}_{\mu}$.

-La force du champs de Lorentz $F^{ij}{}_{\mu\nu}$ peut être identifié par le tenseur de la courbure de Riemann $R^{ij}{}_{\mu\nu}(\omega)$.

-La force du champ de translation $F^{i}{}_{\mu\nu}$ est équivalente au tenseur du torsion $Q^{i}{}_{\mu\nu}(\omega)$.

-Le champ de jauge de translation $b^{i}{}_{u}$ peut être identifié par le champ tetrad $e^{i}{}_{\mu}$.

-La dérivée covariante $\nabla_\mu(A)$ est équivalente à la dérivée w-covariante $D_\mu(\omega)$.

-La condition de métricité $\nabla_\mu \eta_{ij} = 0 \Leftrightarrow D_\mu(\Gamma)\, g_{\mu\nu} = 0$.

Nous constatons que la théorie de jauge de Poincaré a la structure géométrique de Riemann-Cartan U_4 dans laquelle la torsion et la courbure ont été utilisées pour caractériser les phénomènes gravitationnels.

3.4.4 Lagrangien quadratique

Le champ gravitationnel dans la théorie de jauge de Poincaré est déterminé par le lagrangien $\mathcal{L}_G$ [40]

$$\mathcal{L}_G = b\left(-\alpha R + \mathcal{L}_T + \mathcal{L}_R + \lambda\right) \tag{3.124}$$

Nous nous intéressons au lagrangien quadratique dans lequel les équations de mouvement sont tout au plus de second ordre de dérivée de champ $A^{ij}{}_{\mu}$ et $b^{i}{}_{u}$, et donc $\mathcal{L}_G$ peut être au plus quadratique en torsion $Q^{i}{}_{\mu\nu}$ et courbure $R^{ij}{}_{\mu\nu}$ et en tenant en compte la conservation de parité du théorie de jauge de Poincaré, alors

$$\mathcal{L}_T \equiv a\left(AQ_{ijk}Q^{ijk} + BQ_{ijk}Q^{jik} + CQ_iQ^i\right) \tag{3.125}$$

avec $Q_i = Q^{j}{}_{ij}$

$$\mathcal{L}_R \equiv b_1 R_{ijkl}R^{ijkl} + b_2 R_{ijkl}R^{klij} + b_3 R_{ij}R^{ij} + b_4 R_{ij}R^{ji} + b_5 R^2 + b_6\left(\varepsilon_{ijkl}R^{ijkl}\right)^2 \tag{3.126}$$

la forme de Lagrangien $\mathcal{L}_G$ devient

$$\mathcal{L}_G = b\begin{pmatrix} -\alpha R + a\left(AQ_{ijk}Q^{ijk} + BQ_{ijk}Q^{jik} + CQ_iQ^i\right) \\ +b_1 R_{ijkl}R^{ijkl} + b_2 R_{ijkl}R^{klij} + b_3 R_{ij}R^{ij} \\ b_4 R_{ij}R^{ji} + b_5 R^2 + b_6\left(\varepsilon_{ijkl}R^{ijkl}\right)^2 + \lambda \end{pmatrix} \tag{3.127}$$

où

λ est la constante cosmologique.

α, A, B, C et b_i sont des paramètres sans dimensions.

$a = \frac{1}{2\kappa}$, κ la constante gravitationnel d'Einstein.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons construit une théorie de jauge de la gravitation en considérant le groupe de Poincaré. Après avoir introduit, un champ de matière dans l'espace de Minkowski, nous avons montré comment l'invariance de la théorie sous les transformations de Poincaré locale nous impose la modification de la dérivée partielle à une dérivée covariante avec une connexion de spin. L'interpretation géométrique de la théorie nous a conduit à une théorie de la gravitation quadratique avec torsion.