

Solution à symétrie sphérique en présence de torsion

*"Things can get out of a black hole both on the outside and possibly to another universe
So if you feel you are in a black hole don't give up-there's a way "out""*
Stephan Hawking

6.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les solutions à une symétrie sphérique des équations d'Einstein dans le vide. En premier lieu nous considérons le théorème de Birkhoff dans la géométrie Riemannienne où nous rappelons les solutions de Schwarzschild. Ensuite, nous nous intéressons à la solution à symétrie sphérique des équations d'Einstein en présence de torsion. Pour déterminer la masse du trou noir obtenu ainsi, nous utilisons le rayonnement de Hawking pour calculer la température correspondante et le second principe de la thermodynamique pour calculer la masse.

6.2 Rappel des solutions de Karl Schwarzschild

Avant de chercher une solution en présence du torsion, nous rappelons la solution d'Einstein dans le vide appelée solution de Schwarzschild qu'elle décrit un trou noir caractérisé par deux singularités ; une singularité nécessaire et une singularité de coordonnées. Suivant le théorème de Birkhoff il est important d'obtenir $f = g$ que nous expliquerons en détail.

En premier lieu soit une métrique à symétrie sphérique et statique

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{1}{g} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2 \quad (6.1)$$

f et g sont des fonctions quelconques dépendent de la coordonnée r seulement, il faut

tout d'abord calculer les connexions métriques et les tenseurs de Ricci pour résoudre les équations d'Einstein dans le vide.

6.2.1 Connexions de Christoffel $\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$

Nous avons la connexion de Christoffel

$$\bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\mu}) \quad (6.2)$$

à partir de la métrique (6.1), nous obtenons les composantes suivantes

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^0_{01} &= \bar{\Gamma}^0_{10} = \frac{1}{2} \frac{f'}{f} \\ \bar{\Gamma}^1_{00} &= \frac{1}{2}g f', \quad \bar{\Gamma}^1_{11} = -\frac{1}{2} \frac{g'}{g} \\ \bar{\Gamma}^1_{22} &= -gr, \quad \bar{\Gamma}^1_{33} = -gr \sin^2(\theta) \\ \bar{\Gamma}^2_{12} &= \bar{\Gamma}^2_{21} = \frac{1}{r}, \quad \bar{\Gamma}^2_{33} = -\cos(\theta) \sin(\theta) \\ \bar{\Gamma}^3_{13} &= \bar{\Gamma}^3_{31} = \frac{1}{r}, \quad \bar{\Gamma}^3_{23} = \bar{\Gamma}^3_{32} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \end{aligned} \quad (6.3)$$

les autres termes sont nuls.

6.2.2 Tenseurs de Ricci $\bar{R}_{\alpha\beta}$

En absence du torsion, le tenseur de Ricci est donné par

$$\bar{R}_{\beta\nu} = g^{\alpha\mu} \bar{R}_{\mu\beta\alpha\nu} = \bar{R}^\alpha_{\beta\alpha\nu} \quad (6.4)$$

nous obtenons donc les composantes du tenseur de Ricci à partir de la contraction des résultats représentés dans (C.1) et nous savons que les équations d'Einstein dans le vide impliquent que $\bar{R}_{\alpha\beta} = 0$, ce qui nous arrive aux résultats suivants

$$\bar{R}_{00} = \frac{1}{4}f'g' + \frac{1}{2}gf'' - \frac{1}{4}g\frac{(f')^2}{f} + \frac{g}{r}f' = 0 \quad (6.5)$$

$$\bar{R}_{11} = \frac{1}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{f'g'}{fg} - \frac{1}{2}\frac{f''}{f} - \frac{1}{r}\frac{g'}{g} = 0 \quad (6.6)$$

$$\bar{R}_{22} = 1 - g - \frac{1}{2}r\frac{1}{f}(fg' + gf') = 0 \quad (6.7)$$

$$\bar{R}_{33} = \left[1 - g - \frac{1}{2}r\frac{1}{f}(fg' + gf') \right] \sin^2(\theta) = 0. \quad (6.8)$$

à partir de (6.5) + $fg \times (6.6) = 0$ nous trouvons

$$\frac{1}{r}(gf' - fg') = 0$$

multiplions cette dernière relation par $\frac{g^2}{r} \neq 0$, nous arrivons à

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{f}{g} \right) = 0$$

ce qui nous donne

$$f = C_{st}g \quad (6.9)$$

cherchons la constante C_{st} à partir de la platitude asymptotique ; $\lim_{r \rightarrow \infty} g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$

il vient

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_{00} = \eta_{00} = -1 = -f \Rightarrow f = 1$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_{11} = \eta_{11} = 1 = \frac{1}{g} \Rightarrow g = 1$$

et donc $C_{st} = 1$

nous obtenons

$$f = g \quad (6.10)$$

à partir de l'équation (6.7) et que $f = g$ nous obtenons

$$1 - f - rf' = 0$$

qui est équivalent à

$$\frac{d}{dr}(rf) = 1$$

ce qui nous donne

$$rf = r + C_1$$

et donc

$$f = 1 + \frac{C_1}{r} \quad (6.11)$$

dans ce cas $C_1 = -2M$ (ici nous prenons $G = 1$) et

$$f = g = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \quad (6.12)$$

finalemt, nous obtenons

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2 \quad (6.13)$$

qui est la solution de Schwarzschild.

Si $r \longrightarrow \infty$ nous avons la platitude asymptotique c'est à dire

$$\lim_{r \longrightarrow \infty} ds_{Schwar}^2 = ds_{Mink}^2$$

nous remarquons qu'il existe deux singularités

$$\begin{aligned} |g_{00}|_{r \longrightarrow 0} &\longrightarrow \infty \\ (g_{11})_{r \longrightarrow 2M} &\longrightarrow \infty \end{aligned}$$

la première singularité $r \longrightarrow 0$ est une singularité nécessaire d'un trou noir et la deuxième singularité $r \longrightarrow 2M$ est une singularité de coordonnée.

6.3 Solutions à symétrie sphérique en présence de torsion

Dans le cas général il n'est pas nécessaire de trouver $f = g$, nous allons étudier le cas d'une symétrie sphérique en présence de torsion, avant cela nous définirons les composantes de torsion et de contorsion afin d'obtenir les nouveaux tenseurs de Ricci.

6.3.1 Torsion $Q^\alpha_{\beta\mu}$

Les composantes non nulles du tenseurs de torsion sont

$$Q^1_{01} = -Q^1_{10} = \phi_1(r), Q^2_{02} = -Q^2_{20} = \phi_2(r), Q^3_{03} = -Q^3_{30} = \phi_3(r) \quad (6.14)$$

6.3.2 Contorsion $T^\alpha_{\beta\nu}$

Nous utilisons la définition de contorsion en fonction de torsion

$$T_{\alpha\beta\gamma} = Q_{\alpha\beta\gamma} + Q_{\beta\gamma\alpha} + Q_{\gamma\beta\alpha} \quad (6.15)$$

ce qui nous conduit à trouver les composantes suivantes

$$\begin{aligned} T^0_{11} &= \frac{2}{fg} \phi_1, \quad T^0_{22} = \frac{2r^2}{f} \phi_2, \quad T^0_{33} = \frac{2r^2 \sin^2(\theta)}{f} \phi_3 \\ T^1_{01} &= 2\phi_1, \quad T^2_{02} = 2\phi_2, \quad T^3_{03} = 2\phi_3 \end{aligned} \quad (6.16)$$

les autres termes sont nuls.

6.3.3 Tenseurs de Ricci $R_{\beta\nu}$

De la même manière de la partie précédente nous obtenons les composantes du tenseur de Ricci à partir de la contraction des résultats représentés dans (C.2), et en tenant en compte que les équations d'Einstein dans le vide dans ce cas impliquent $R_{\beta\nu} = 0$, nous trouvons donc

$$R_{00} = \frac{1}{4}f'g' + \frac{1}{2}gf'' - \frac{1}{4}g\frac{(f')^2}{f} + \frac{g}{r}f' = 0 \quad (6.17)$$

$$R_{11} = \frac{1}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{f'g'}{fg} - \frac{1}{2}\frac{f''}{f} - \frac{1}{r}\frac{g'}{g} + \frac{4}{fg}\phi_1(\phi_2 + \phi_3) = 0 \quad (6.18)$$

$$R_{22} = 1 - g - \frac{1}{2}r\frac{1}{f}(fg' + gf') + 4\frac{r^2}{f}\phi_2(\phi_1 + \phi_3) = 0 \quad (6.19)$$

$$R_{33} = \left[1 - g - \frac{1}{2}r\frac{1}{f}(fg' + gf') + 4\frac{r^2}{f}\phi_3(\phi_1 + \phi_2)\right]\sin^2(\theta) = 0 \quad (6.20)$$

en calculant $(6.20) - (6.19) \times \sin^2(\theta)$, ce qui nous conduit à obtenir

$$\phi_2\phi_1 = \phi_3\phi_1$$

bien que $\phi_1 \neq 0$, alors

$$\phi_2 = \phi_3 \quad (6.21)$$

remplaçons l'équation (6.21) dans (6.18) nous obtenons

$$\frac{1}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{f'g'}{fg} - \frac{1}{2}\frac{f''}{f} - \frac{1}{r}\frac{g'}{g} + \frac{8}{fg}\phi_1\phi_2 = 0 \quad (6.22)$$

maintenant, nous multiplions l'équation (6.22) par fg et nous l'ajoutons à l'équation (6.17), il vient

$$\frac{1}{r}(gf' - fg') + 8\phi_1\phi_2 = 0 \quad (6.23)$$

nous multiplions cette dernière relation par $\frac{r}{g^2}$, nous trouvons

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{f}{g}\right) = -8\frac{r}{g^2}\phi_1\phi_2$$

et donc

$$\frac{f}{g} = -8\int \frac{r}{g^2}\phi_1\phi_2 dr \quad (6.24)$$

nous remarquons qu'il est impossible de trouver $f = g$ en présence du torsion.

Nous avons $\frac{f}{g} \neq 1$ et pour cela, nous supposons une solution de type Lifshitz qui est

défini comme[47]

$$ds^2 = -\frac{r^{2z}}{l^{2z}} F(r) dt^2 + \frac{l^2}{r^2} \frac{dr^2}{F(r)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2 \quad (6.25)$$

nous allons chercher la formule de $\phi_1\phi_2$ en fonction de $F(r)$, nous avons

$$\frac{f}{g} = \left(\frac{r}{l}\right)^{2z-2}$$

nous faisons la dérivée de cette dernière par rapport à la cordonnée spatiale

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{f}{g} \right) = -8 \frac{r}{g^2} \phi_1 \phi_2$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \phi_1 \phi_2 &= -\frac{1}{8r} \frac{d}{dr} \left(\frac{f}{g} \right) g^2 \\ \phi_1 \phi_2 &= \frac{(1-z)}{4l^2} \left(\frac{r}{l} \right)^{2z-4} g^2 \end{aligned}$$

donc la formule des champs $\phi_1\phi_2$ est donné par

$$\phi_1 \phi_2 = \frac{(1-z)}{4l^2} \left(\frac{r}{l} \right)^{2z} F^2$$

maintenant, nous allons chercher la solution de l'équation d'Einstein, à partir de la relation (6.17)

$$\frac{1}{4} f' g' + \frac{1}{2} g f'' - \frac{1}{4} g \frac{(f')^2}{f} + \frac{g}{r} f' = 0$$

et que

$$g' = \left(\frac{r}{l} \right)^{2-2z} f' + \frac{2-2z}{l^{2-2z}} r^{1-2z} f$$

nous obtenons

$$\frac{1}{4} f' \left[\left(\frac{r}{l} \right)^{2-2z} f' + \frac{2-2z}{l^{2-2z}} r^{1-2z} f \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l} \right)^{2-2z} f f'' - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{l} \right)^{2-2z} (f')^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{r}{l} \right)^{2-2z} f f' = 0$$

nous simplifions l'équation, nous trouvons facilement

$$r f'' + (3-z) f' = 0 \quad (6.26)$$

multiplions cette équation par r^{2-z}

$$\frac{r^{z-3}f'' - (z-3)r^{z-4}f'}{r^{2z-6}} = 0$$

il vient

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{f'}{r^{z-3}} \right) = 0$$

ce qui nous donne

$$f' = Cr^{z-3}$$

et donc

$$\int df = \int Cr^{z-3} dr$$

alors

$$f = A + \frac{B}{r^{2-z}}, \quad (6.27)$$

la constante A se détermine à partir de la condition de platitude asymptotique pour $r \rightarrow \infty$. Nous avons

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_{00} = \lim_{r \rightarrow \infty} (-f) = -A \quad (6.28)$$

ce qui implique que $A = 1$. Pour la constante B nous posons $B = -(2m)^{2-z}$. La forme finale de l'élément ds^2 est donc

$$ds_T^2 = - \left(1 - \left(\frac{2m}{r} \right)^{2-z} \right) dt^2 + \frac{r^{2z-2}}{l^{2z-2}} \left(1 - \left(\frac{2m}{r} \right)^{2-z} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2.$$

Dans le cas où $z = 1$, nous trouvons la solution de Schwarzschild

$$\lim_{z=1} ds_T^2 = ds_{Schwa}^2.$$

6.3.4 Rayonnements de Hawking à $(1+1)$ dimensions

D'après la relativité générale, les trous noirs isolés sont des objets noirs et immuables, des choses peuvent rentrer dans le trou noir mais la gravité est tellement forte que la matière et la lumière ne peuvent pas s'échapper des trous noirs.

Stephan Hawking a compris que les trous noirs produisent un rayonnement et donc la lumière qui peut amener à l'évaporation des trous noirs, l'émission des rayonnements est due à la création des paires des particules-antiparticules générées par le vide, des effets de ces fluctuations du vide peuvent être mis en évidence par divers phénomènes est parmi ces phénomènes l'effet tunnel que nous allons l'étudier pour trouver la température de Hawking. Puisque toute la physique est contenue dans le plan (t, r) , nous étudions le rayonnement de Hawking à $(1+1)$ dimensions.

Soit un espace temps à $(1 + 1)$ dimensions décrit par la métrique suivante

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{1}{g(r)} dr^2 \quad (6.29)$$

$f(r)$ et $g(r)$ sont des fonctions arbitraires, nous supposons qu'ils s'anulent à un certain $r = r_0$ (le point $r = r_0$ indique l'horizon).

Equation de Klein-Gordon

Considérons un champ scalaire ϕ à couplage minimale de masse m se propage dans l'espace temps représenté par la métrique (6.29)

$$(\square - m^2) \phi(r) = 0$$

où le D'alembertien $\square \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu)$ l'équation devient

$$\left(\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu) - m^2 \right) \phi(r) = 0 \quad (6.30)$$

avec $\sqrt{|g|} = \sqrt{|\det(g_{\alpha\beta})|} = \sqrt{\frac{f}{g}}$

$$-\frac{1}{f} \frac{\partial^2 \phi(r)}{\partial t^2} + \sqrt{\frac{g}{f}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{fg} \frac{\partial}{\partial r} \right) \phi(r) - m^2 \phi(r) = 0$$

écrivons $\phi(r) \equiv e^{iwt} \psi(r)$ nous obtenons

$$\left(w^2 + \sqrt{fg} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{fg} \frac{\partial}{\partial r} \right) - m^2 f \right) \psi(r) = 0$$

nous posons $\sqrt{fg} = B(r)$ il vient

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{w^2}{B^2} - \frac{m^2 f}{B^2} \right) \psi(r) = 0 \quad (6.31)$$

supposons aussi $\psi(r) \equiv \chi(r) \varphi(r)$, et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial r^2} &= \chi(r) \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial r^2} + \varphi(r) \frac{\partial^2 \chi(r)}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \chi(r)}{\partial r} \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} &= \chi(r) \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} + \varphi(r) \frac{\partial \chi(r)}{\partial r} \end{aligned}$$

nous remplaçons ces deux dernières dans (6.31), nous trouvons

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{w^2}{B^2} - \frac{m^2 f}{B^2} + \frac{1}{\varphi(r)} \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{\varphi(r)} \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{B'}{B} \frac{1}{\varphi(r)} \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} \right] \chi(r) = 0 \quad (6.32)$$

pour obtenir une équation qui ressemble à l'équation de Schrodinger, nous posons

$$\frac{2}{\varphi(r)} \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} \frac{\partial \chi(r)}{\partial r} + \frac{B'}{B} \frac{\chi(r)}{\varphi(r)} \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} = 0$$

nous concluons donc

$$\chi(r) = B^{-\frac{1}{2}},$$

remplaçons ce dernier résultat dans l'équation (6.32), nous obtenons

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{4} \frac{B'}{B^2} + \frac{w^2}{B^2} - \frac{m^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{B''}{B} \right] \varphi(r) = 0$$

dans le cas $r = r_0 \Rightarrow B \ll 1$ et donc $\frac{1}{B^2} \gg 1$, les termes de $\left(\frac{1}{B^2}\right)$ sont dominants, l'équation devient

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + K^2 \right] \varphi(r) = 0 \quad (6.33)$$

avec $\bar{w}^2 = \frac{1}{4} B' + w^2$ et $K^2 = \frac{\bar{w}^2}{B^2}$.

Nous considérons une solution $\varphi(r)$ sous le forme

$$\varphi(r) = A(r) e^{\frac{i}{\hbar} S(r)}$$

en l'injectant dans l'équation (6.33), et en tenant en compte que $\hbar \ll 1$ nous obtenons donc les équations suivantes

$$2A'(r)S'(r) + A(r)S''(r) = 0 \quad (6.34)$$

et

$$-\left(S'(r)\right)^2 + \hbar^2 K^2 = 0 \quad (6.35)$$

la solution pour $S(r)$ est donc

$$\begin{aligned} S'(r) &= \hbar |K(r)| \\ S(r) &= \hbar \int^r |K(r')| dr'. \end{aligned}$$

Si nous mettons $S'(r) = H(r)$ la solution de l'équation se ramène à

$$2A'(r)H(r) + A(r)H'(r) = 0$$

ce qui nous donne

$$A(r) = \frac{1}{\sqrt{H(r)}} = \frac{1}{\sqrt{S'(r)}} = \frac{1}{\sqrt{\hbar |K(r)|}}$$

finalement, en posant $\hbar \equiv 1$, il vient

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{|K(r)|}} e^{i \int^r K(r')_{[imaginaire]} dr'}. \quad (6.36)$$

Effet tunnel et trous noirs

Etant donné le système de coordonnées (6.29), dans une région R (l'horizon) où il n'y a pas des singularités, il est possible de montrer que la probabilité pour une particule d'énergie E qui a quitté la région R en fonction de la probabilité qu'une particule d'énergie E soit entrée dans la région R est donnée par la relation[48]

$$P_{[emission]} = e^{-\beta E} P_{[absorption]} \quad (6.37)$$

cela revient à supposer que la région R est baignée de rayonnement à la température β^{-1} .

La probabilité d'émission ou d'absorption des particules est donnée par le module caré de la fonction $\varphi(r)$

$$P \propto e^{2i \int^r K(r')_{[imaginaire]} dr'} = e^{2i \int^r \frac{\bar{w}}{B(r')} dr'},$$

l'intégrale est bien défini est réel mais si les points sont situés sur des côtés opposés de l'horizon, l'intégrale n'existe pas en raison de la divergence de $B^{-1}(r)$ à $r = r_0$.

Pour évaluer cet intégrale nous devons utiliser une prescription $i\varepsilon$ appropriée pour spécifier le contour complexe sur lequel l'intégrale doit être effectuée autour de $r = r_0$. Ca veut dire, nous devons prendre le contour pour définir l'intégrale comme étant un demi-cercle infinitésimal au dessus du pôle à $r = r_0$ pour les particules sortantes à gauche de l'horizon et les particules entrantes sur la droite $r = r_0 - i\varepsilon$. dans le cas des particules entrantes à gauche et les particules sortantes à droite de l'horizon $r = r_0 + i\varepsilon$ (qui correspond à une situation inversée dans le temps des cas précédents), le contour doit être un demi-cercle infini sous le pôle à $r = r_0$, et donc cela revient à pousser la singularité à $r = r_0$ vers $r = r_0 \pm i\varepsilon$ [48].

Bien que nous utilisons la partie imaginaire $K(r')_{[imaginaire]}$, nous choisissons le contour pour qu'il se trouve dans le plan complexe supérieur.

La probabilité d'émission des particules est donc

$$P_{[emission]} \propto e^{-2i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r_0 - i\varepsilon}^{r_0 + i\varepsilon} \frac{\bar{w}}{B(r)} dr}.$$

Nous faisons le développement de $B(r) = B'(r_0)(r - r_0) + O[(r - r_0)^2] = R(r_0)(r - r_0)$, nous avons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r_0 - i\varepsilon}^{r_0 + i\varepsilon} \frac{\bar{w}}{B(r)} dr = -\frac{i\pi E}{R(r_0)}$$

avec $E = \bar{w}$, nous obtenons

$$P_{[emission]} \propto \exp\left(-\frac{2\pi E}{R(r_0)}\right) \quad (6.38)$$

de même la probabilité d'absorption des particules est

$$P_{[absorption]} \propto e^{-2i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r_0 - i\varepsilon}^{r_0 + i\varepsilon} \frac{\bar{w}}{B(r)} dr}$$

et donc

$$P_{[absorption]} \propto \exp\left(\frac{2\pi E}{R(r_0)}\right) \quad (6.39)$$

Nous écrivons finalement

$$P_{[emission]} = \exp\left(-\frac{4\pi E}{R(r_0)}\right) P_{[absorption]} \quad (6.40)$$

nous savons que dans un système avec une température β^{-1} les probabilités d'absorption et d'émission sont liées par la relation (6.37), En comparant (6.40) et (6.37) nous identifions la température de l'horizon en fonction de $R(r_0)$, la formule générale de la température à l'horizon est

$$\beta^{-1} = \frac{|R(r_0)|}{4\pi} \quad (6.41)$$

pour notre cas où il y a la torsion

$$ds_T^2 = -\left(1 - \left(\frac{2m}{r}\right)^{2-z}\right) dt^2 + \frac{r^{2z-2}}{l^{2z-2}} \left(1 - \left(\frac{2m}{r}\right)^{2-z}\right)^{-1} dr^2$$

avec

$$R(r) = \frac{\partial B}{\partial r} = \frac{\partial(\sqrt{fg})}{\partial r} = \frac{l^{z-1}}{r^z} \left[1 - z + \left(\frac{2m}{r}\right)^{2-z}\right]$$

et

$$R(r_0) = R(2m) = \frac{(2-z)l^{z-1}}{(2m)^z}.$$

La température de Hawking est donc

$$T_h = \beta^{-1} = \frac{(2-z)l^{z-1}}{4\pi(2m)^z} \quad (6.42)$$

pour $z = 1$

$$\beta^{-1} = T_{Sch} = \frac{1}{8\pi m} \quad (6.43)$$

qui est la température d'un trou noir de Schwarzschild.

Pour trouver la vraie masse M du trou noir dans ce cas, nous partons de la deuxième loi de la thermodynamique

$$dM = T_h dS_{Bh} \quad (6.44)$$

où S_{Bh} est l'entropie de Bekenstein-Hawking donné par

$$S_{Bh} = \frac{1}{4} A = \pi r_h^2 = 4\pi m^2$$

en remplaçant $dS = 8\pi m dm$ et la température obtenue dans la deuxième loi, nous arrivons à

$$dM = \frac{(2-z) l^{z-1}}{2} (2m)^{1-z} d(2m). \quad (6.45)$$

après intégration, nous obtenons la masse du trou noir

$$M = \frac{l^{z-1}}{2} (2m)^{2-z}, \quad (6.46)$$

et

$$(2m)^{2-z} = (2M) l^{1-z}$$

finalemt, la solution peut s'écrire sous la forme

$$ds_T^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r^{2-z}} l^{1-z} \right) dt^2 + \frac{r^{2z-2}}{l^{2z-2}} \left(1 - \frac{2M}{r^{2-z}} l^{1-z} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2. \quad (6.47)$$

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résolu les équations d'Einstein en présence de torsion, pour une métrique à symétrie sphérique. Nous avons utilisé le mécanisme de Hawking (le rayonnement des trous noirs) et la deuxième loi de la thermodynamique pour calculer la masse du trou noir trouvé.

Chapitre 7

Conclusion générale

"Once you stop learning you start dying"

Albert Einstein

Dans ce mémoire nous avons voulu étudier quelques aspects de la théorie de jauge de Poincaré de la gravitation. Dans cette théorie, l'espace temps est l'espace de Riemann-Cartan où les connexions ne sont pas symétriques et portent ainsi un tenseur de torsion.

En présence de torsion, il a été question de voir les problèmes suivants :

- 1) l'existence des degrés de liberté fantômes
- 2) la solution FRW
- 3) la solution à symétrie sphérique

Dans le deuxième chapitre, nous avons exposé un bref rappel sur la théorie de la relativité générale. D'abord nous avons énoncé le principe d'équivalence et, ensuite, nous avons exposé quelques propriétés de l'espace-temps (considéré comme une variété pseudo-Riemannienne). Finalement, nous avons montré comment dériver les équations d'Einstein par l'approche habituelle et par la méthode de Palatini.

Dans le troisième chapitre, nous avons pu construire une théorie de jauge de Poincaré locale, où nous avons trouvé deux ensembles du champ de jauge, à savoir les champs de translation et de jauge de Lorentz qui sont associés à la torsion et à la courbure respectivement. Puis nous fixons le lagrangien décrivant la gravitation et qu'il contient 10 termes quadratiques, trois termes quadratiques dans le champ de jauge de translation et les six autres termes quadratiques dans le champ de jauge de Lorentz avec des paramètres libres $(a_1, a_2, a_3, b_1, \dots, b_6)$, afin de revenir à la relativité générale nous devons juste de poser $Q = 0$.

Dans le quatrième chapitre, nous avons étudié la stabilité de la théorie décrite au chapitre précédent à cause des degrés de liberté fantômes (ghosts). Dans le cas considéré, nous avons montré que la théorie libre de ghosts est celle de Gauss-Bonnet avec torsion.

Dans le cinquième chapitre, nous avons établi les équations de Friedmann en présence de torsion. Dans ce cas nous avons montré que la présence de torsion peut jouer le rôle d'une constante cosmologique effective donnant lieu à une expansion accélérée exponen-

tiellement. Dans cette image, l'inflation est due à un effet géométrique plutôt qu'à un champ scalaire.

Dans le sixième chapitre, nous sommes intéressés aux solutions à symétrie sphérique en présence de torsion. Suivant le théorème de Birkhoff il est important d'obtenir $f = g$, néanmoins en présence de torsion nous avons trouvé un cas particulier où $f \neq g$, donc il est intéressant d'étudier les propriétés de ce cas, en utilisant l'espace temps de Lifshitz car il vérifie la condition $f \neq g$, puis nous calculons les quantités thermodynamiques en utilisant l'effet tunnel en raison de la création des particules dans la région de l'horizon, nous trouvons la température du Hawking en présence de torsion $T_h = \frac{|(2-z)l^{z-1}|}{4\pi(2m)^z}$ et la masse du trou noir $2M = l^{z-1}(2m)^{2-z}$, pour revenir à le cas ordinaire (trou noir de Schwarzschild) il suffit juste de poser $z = 1$.

Annexe A

Décomposition de $\mathcal{L}_G$

-Le tenseur de Riemann $\bar{R}^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ en absence du torsion est défini par

$$\bar{R}^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} - \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\rho\mu}\bar{\Gamma}^\rho{}_{\beta\nu} - \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\rho\nu}\bar{\Gamma}^\rho{}_{\beta\mu} \quad (\text{A.1})$$

la dérivée covariante d'un tenseur de type $(\frac{1}{2})$

$$\bar{\nabla}_\mu T^\alpha{}_{\beta\nu} = T^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} + \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\rho\mu}T^\rho{}_{\beta\nu} - \bar{\Gamma}^\rho{}_{\beta\mu}T^\alpha{}_{\rho\nu} - \bar{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu}T^\alpha{}_{\beta\rho} \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{\nabla}_\nu T^\alpha{}_{\beta\mu} = T^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\rho\nu}T^\rho{}_{\beta\mu} - \bar{\Gamma}^\rho{}_{\beta\nu}T^\alpha{}_{\rho\mu} - \bar{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu}T^\alpha{}_{\beta\rho}, \quad (\text{A.3})$$

la notation $\bar{\nabla}$ représente la dérivée covariante en fonction de la connexion de Levi-Cevita (Christoffel) seulement.

-Quelques propriétés sur le tenseur de Levi-Civita ;

$$\varepsilon^{\beta\lambda\mu\nu} = -\varepsilon^{\lambda\beta\mu\nu} \quad (\text{A.4})$$

$$\varepsilon^{\alpha\mu_1\dots\mu_N}\varepsilon_{\beta\mu_1\dots\mu_N} = -(N-1)!\delta^\alpha_\beta. \quad (\text{A.5})$$

-Ces calculs suivants sont utilisés dans le cas du Lagrangien total $\mathcal{L}_G$;

Nous avons

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\mu\beta\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\gamma} &= 6\delta^\rho_\gamma \\ \varepsilon^{\mu\nu\beta\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma} &= 2(\delta^\mu_\alpha\delta^\rho_\gamma - \delta^\mu_\gamma\delta^\rho_\alpha) \\ \varepsilon^{\lambda\beta\nu\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\rho} &= -2(\delta^\lambda_\alpha\delta^\sigma_\rho - \delta^\lambda_\rho\delta^\sigma_\alpha) \\ \varepsilon^{\rho\nu\beta\theta}\varepsilon_{\mu\beta\nu\gamma} &= 2(\delta^\rho_\mu\delta^\theta_\gamma - \delta^\rho_\gamma\delta^\theta_\mu) \\ \varepsilon^{\beta\nu\alpha\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma} &= -6\delta^\rho_\gamma \\ \varepsilon^{\mu\alpha\nu\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma} &= 2(\delta^\mu_\beta\delta^\rho_\gamma - \delta^\mu_\gamma\delta^\rho_\beta), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

dans cette partie nous allons présenter la décomposition du lagrangien quadratique $\mathcal{L}_G$. Remplaçons les résultats (4.54), (4.55), (4.56), (4.58), (4.57), (4.59), (4.49) et (4.52) dans

la formule du lagrangien (4.60), la formule de Lagrangien $\mathcal{L}_G$ devient après décomposition

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_G = & +\frac{8}{9}(4b_2+b_4+2b_5)\bar{\nabla}_\mu Q_\alpha\bar{\nabla}^\mu Q^\alpha +\frac{8}{9}(2b_6+4b_3+b_4)\bar{\nabla}_\mu Q_\alpha\bar{\nabla}^\alpha Q^\mu \\
& +\frac{8}{9}(18b_1+2b_2+2b_3+b_4+4b_5+4b_6)\bar{\nabla}_\mu Q^\mu\bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha \\
& +\frac{1}{36}(b_4-2b_2)\bar{\nabla}^\nu\left(\varepsilon^{\alpha\mu\beta\rho}\tilde{Q}_\rho\right)\bar{\nabla}_\nu\left(\varepsilon_{\alpha\beta\mu\gamma}\tilde{Q}^\gamma\right) \\
& +\frac{1}{36}(4b_3-3b_4+2b_2)\bar{\nabla}^\alpha\left(\varepsilon^{\mu\nu\beta}{}_\rho\tilde{Q}^\rho\right)\bar{\nabla}_\mu\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\tilde{Q}^\gamma\right) \\
& +\frac{1}{36}(b_5-b_6)\bar{\nabla}_\lambda\left(\varepsilon^{\lambda\beta\nu}{}_\sigma\tilde{Q}^\sigma\right)\bar{\nabla}_\alpha\left(\varepsilon^\alpha{}_{\beta\nu\rho}\tilde{Q}^\rho\right) \\
& +\frac{4}{9}(b_5-b_6+2b_2-2b_3)\bar{\nabla}_\mu Q_\beta\bar{\nabla}_\lambda\left(\varepsilon^{\lambda\mu\beta\sigma}\tilde{Q}_\sigma\right) \\
& -\frac{4}{3}(6b_1+b_5+b_6)\bar{R}\bar{\nabla}_\lambda Q^\lambda-2M_{Pl}^2\bar{\nabla}_\lambda Q^\lambda-\frac{8}{3}(b_5+b_6)\bar{R}_{\beta\nu}\bar{\nabla}^\nu Q^\beta \\
& -\frac{1}{27}[36b_1+8b_2-7b_3+4b_4+10b_5+10b_6]\tilde{Q}_\sigma\tilde{Q}^\sigma\bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha \\
& -\frac{8}{27}(16b_2+16b_3+11b_4+8b_5+8b_6)Q^\nu Q^\beta\bar{\nabla}_\nu Q_\beta \\
& +\frac{2}{3}(b_2+b_3-b_4)\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\bar{\nabla}^\mu\left(\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_\rho\tilde{Q}^\rho\right)+\frac{8}{3}(b_2+2b_3+b_4)\bar{R}^\nu{}_{\beta\mu\nu}\bar{\nabla}^\mu Q^\beta \\
& +\frac{1}{2}M_{Pl}^2\frac{1}{3}(2a_1-a_2+3a_3-8)Q_\rho Q^\rho+\frac{1}{2}M_{Pl}^2\frac{1}{6}(1-a_1-a_2)\tilde{Q}_\nu\tilde{Q}^\nu \\
& +\frac{4}{81}(-18-4b_5-4b_6+4b_3-b_4+22b_2)\tilde{Q}_\rho\tilde{Q}^\rho Q_\beta Q^\beta \\
& -\frac{8}{81}(b_5+5b_3-2b_4-6b_2+b_6)Q_\nu\tilde{Q}^\nu Q_\beta\tilde{Q}^\beta \\
& +\frac{4}{27}(2b_2+2b_3+b_4+b_5+b_6)\tilde{Q}^\beta\tilde{Q}^\nu\bar{\nabla}_\nu Q_\beta \\
& +\frac{8}{27}(72b_1+16b_2+13b_3+7b_4+20b_5+20b_6)Q_\rho Q^\rho\bar{\nabla}_\mu Q^\mu \\
& +\frac{4}{27}(b_2-b_3)\varepsilon^{\rho\nu\beta\theta}\tilde{Q}_\theta Q_\rho\bar{\nabla}_\mu\left(\varepsilon^\mu{}_{\beta\nu\gamma}\tilde{Q}^\gamma\right) \\
& +\frac{2}{27}(2b_3-b_4)\varepsilon^{\beta\nu\alpha\rho}Q^\mu\tilde{Q}_\rho\bar{\nabla}_\mu\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\tilde{Q}^\gamma\right) \\
& +\frac{4}{27}(2b_2+b_3-b_4)\varepsilon^{\mu\alpha\nu\rho}Q^\beta\tilde{Q}_\rho\bar{\nabla}_\mu\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\tilde{Q}^\gamma\right) \\
& +\frac{1}{9}(3b_1+b_5+b_6)\bar{R}\tilde{Q}_\rho\tilde{Q}^\rho-\frac{1}{9}(b_5+b_6)\bar{R}_{\beta\nu}\tilde{Q}^\beta\tilde{Q}^\nu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} M_{Pl}^2 \bar{R} + b_1 \bar{R}^2 + (b_5 + b_6) \bar{R}_{\mu\nu} \bar{R}^{\mu\nu} + \left(b_2 + b_3 + \frac{b_4}{2} \right) \bar{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \bar{R}^{\mu\nu\rho\sigma} \\
& + \frac{96}{81} (6 + 2b_2 + 2b_3 + b_4 + 2b_5 + 2b_6) Q_\rho Q^\rho Q_\sigma Q^\sigma \\
& - \frac{16}{9} (3b_1 + b_5 + b_6) \bar{R} Q_\rho Q^\rho + \frac{16}{9} (b_5 + b_6) \bar{R}_{\beta\nu} Q^\nu Q^\beta \\
& + \frac{1}{216} (6 + 2b_2 + 2b_3 + b_4 + 2b_5 + 2b_6) \tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho \tilde{Q}_\nu \tilde{Q}^\nu \\
& + \frac{2}{9} (16b_2 + 16b_3 + 5b_4) \bar{R}^\mu{}_{\beta\mu\nu} Q^\nu Q^\beta - \frac{8}{9} (2b_2 + 2b_3 + b_4) \bar{R}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} Q_\rho Q^\rho \\
& + \frac{1}{9} (2b_2 + 2b_3 + b_4) \bar{R}_{\alpha\beta}{}^\beta{}_\nu \tilde{Q}^\alpha \tilde{Q}^\nu + \frac{1}{18} (2b_2 + 2b_3 + b_4) \bar{R}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} \tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho \\
& + \frac{8}{9} (b_2 + b_3 - b_4) \bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon^{\alpha\nu\mu\rho} Q^\beta \tilde{Q}_\rho + \frac{4}{9} (2b_2 + 2b_3 - b_4) \bar{R}^\mu{}_{\beta\mu\nu} \varepsilon^{\rho\beta\nu\theta} Q_\rho \tilde{Q}_\theta.
\end{aligned}$$

Si nous utilisons les contraintes $b_5 = -4b_1 - b_6$, $b_4 = 2b_1 - b_2 - b_3$ la formule de lagrangien devient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_G = & -\frac{16}{9} (3b_1 - b_2 + b_3 + b_6) \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \bar{\nabla}^\mu Q^\alpha + \frac{16}{9} (b_1 - b_2 + b_3 + b_6) \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \bar{\nabla}^\alpha Q^\mu \\
& + \frac{32}{9} b_1 \bar{\nabla}_\mu Q^\mu \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha + \frac{1}{18} (b_1 - 2b_2 - b_3) \bar{\nabla}^\nu \left(\varepsilon^{\alpha\mu\beta\rho} \tilde{Q}_\rho \right) \bar{\nabla}_\nu \left(\varepsilon_{\alpha\beta\mu\gamma} \tilde{Q}^\gamma \right) \\
& + \frac{1}{18} (5b_3 - 3b_1 + 4b_2) \bar{\nabla}^\alpha \left(\varepsilon^{\mu\nu\beta\rho} \tilde{Q}_\rho \right) \bar{\nabla}_\mu \left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma} \tilde{Q}^\gamma \right) \\
& - \frac{1}{18} (2b_1 + b_6) \bar{\nabla}_\lambda \left(\varepsilon^{\lambda\beta\nu\sigma} \tilde{Q}_\sigma \right) \bar{\nabla}^\alpha \left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\rho} \tilde{Q}^\rho \right) \\
& + \frac{4}{27} (b_2 - b_3) \varepsilon^{\rho\nu\beta\theta} \tilde{Q}_\theta Q_\rho \bar{\nabla}^\mu \left(\varepsilon_{\mu\beta\nu\gamma} \tilde{Q}^\gamma \right) \\
& - \frac{4}{27} (b_1 - b_2 - 2b_3) \varepsilon^{\beta\nu\alpha\rho} Q^\mu \tilde{Q}_\rho \bar{\nabla}_\mu \left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma} \tilde{Q}^\gamma \right) \\
& + \frac{4}{27} (-2b_1 + 4b_2 + 3b_3) \varepsilon^{\mu\alpha\nu\rho} Q^\beta \tilde{Q}_\rho \bar{\nabla}_\mu \left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma} \tilde{Q}^\gamma \right)
\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{8}{9}(2b_1 - b_2 + b_3 + b_6) \bar{\nabla}_\mu Q_\beta \bar{\nabla}_\lambda \left(\varepsilon^{\lambda\mu\beta\sigma} \tilde{Q}_\sigma \right) - \frac{8}{3} b_1 \bar{R} \bar{\nabla}_\lambda Q^\lambda - 2M_{Pl}^2 \bar{\nabla}_\lambda Q^\lambda \\
& -\frac{1}{27}(4b_1 - 15b_3) \tilde{Q}_\sigma \tilde{Q}^\sigma \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha + \frac{16}{27}(5b_1 + 3b_2 + 3b_3) Q^\nu Q^\beta \bar{\nabla}_\nu Q_\beta \\
& -\frac{1}{27}(4b_1 - 15b_3) \tilde{Q}_\sigma \tilde{Q}^\sigma \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha + \frac{16}{27}(5b_1 + 3b_2 + 3b_3) Q^\nu Q^\beta \bar{\nabla}_\nu Q_\beta \\
& +\frac{2}{3}(-2b_1 + 3b_2 + 3b_3) \bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu} \bar{\nabla}^\mu \left(\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_\rho \tilde{Q}^\rho \right) + \frac{8}{3}(2b_1 - b_2) \bar{R}{}^\nu{}_{\beta\mu\nu} \bar{\nabla}^\mu Q^\beta \\
& +\frac{1}{2} M_{Pl}^2 \frac{1}{3} (2a_1 - a_2 + 3a_3 - 8) Q_\rho Q^\rho + \frac{1}{2} M_{Pl}^2 \frac{1}{6} (1 - a_1 - a_2) \tilde{Q}_\nu \tilde{Q}^\nu \\
& +\frac{8}{81} (-9 + 7b_1 + 12b_2 + 3b_3) \tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho Q_\beta Q^\beta + \frac{32}{3} b_1 \bar{R}_{\beta\nu} \bar{\nabla}^\nu Q^\beta \\
& -\frac{8}{81} (-8b_1 + 4b_2 + 9b_3) Q_\nu \tilde{Q}^\nu Q_\beta \tilde{Q}^\beta - \frac{8}{27} b_1 \tilde{Q}^\beta \tilde{Q}^\nu \bar{\nabla}_\nu Q_\beta \\
& +\frac{8}{27} (6b_1 + 2b_2 - b_3) Q_\rho Q^\rho \bar{\nabla}_\mu Q^\mu - \frac{1}{9} b_1 \bar{R} \tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho + \frac{4}{9} b_1 \bar{R}_{\beta\nu} \tilde{Q}^\beta \tilde{Q}^\nu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{2} M_{Pl}^2 \bar{R} + b_1 \bar{G} + \frac{64}{9} (1 - b_1) Q_\rho Q^\rho Q_\sigma Q^\sigma + \frac{16}{9} b_1 \bar{R} Q_\rho Q^\rho \\
& -\frac{16}{9} b_1 \bar{R}_{\beta\nu} Q^\nu Q^\beta + \frac{1}{36} (1 - b_1) \tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho \tilde{Q}_\nu \tilde{Q}^\nu \\
& +\frac{4}{9} (5b_1 + 3b_2 + 3b_3) \bar{R}{}^\mu{}_{\beta\mu\nu} Q^\nu Q^\beta - \frac{16}{9} b_1 \bar{R}{}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} Q_\rho Q^\rho \\
& +\frac{2}{9} b_1 \bar{R}_{\alpha\beta}{}^\beta{}_\nu \tilde{Q}^\alpha \tilde{Q}^\nu + \frac{8}{9} (-2b_1 + 3b_2 + 3b_3) \bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon^{\alpha\nu\mu\rho} Q^\beta \tilde{Q}_\rho \\
& +\frac{1}{9} b_1 \bar{R}{}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} \tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho + \frac{8}{9} (-b_1 + 2b_2 + 2b_3) \bar{R}{}^\mu{}_{\beta\mu\nu} \varepsilon^{\rho\beta\nu\theta} Q_\rho \tilde{Q}_\theta.
\end{aligned}$$

La dérivée covariante du tenseur de Levi-Civita est nulle $\bar{\nabla}^\nu \left(\varepsilon^{\alpha\mu\beta\rho} \tilde{Q}_\rho \right) = \varepsilon^{\alpha\mu\beta\rho} \bar{\nabla}^\nu \tilde{Q}_\rho$,

nous avons aussi les propriétés représentés dans l'équation (A.6), alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_G = & -\frac{16}{9} (3b_1 - b_2 + b_3 + b_6) \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \bar{\nabla}^\mu Q^\alpha + \frac{16}{9} (b_1 - b_2 + b_3 + b_6) \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \bar{\nabla}^\alpha Q^\mu \\
& + \frac{32}{9} b_1 \bar{\nabla}_\mu Q^\mu \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha + \frac{1}{3} (b_1 - 2b_2 - b_3) \bar{\nabla}^\nu \tilde{Q}_\gamma \bar{\nabla}_\nu \tilde{Q}^\gamma \\
& + \frac{1}{9} (5b_3 - 3b_1 + 4b_2) \left(\bar{\nabla}^\mu \tilde{Q}_\gamma \bar{\nabla}_\mu \tilde{Q}^\gamma - \bar{\nabla}^\alpha \tilde{Q}_\alpha \bar{\nabla}_\gamma \tilde{Q}^\gamma \right) \\
& + \frac{1}{9} (2b_1 + b_6) \left(\bar{\nabla}_\alpha \tilde{Q}_\rho \bar{\nabla}^\alpha \tilde{Q}^\rho - \bar{\nabla}_\rho \tilde{Q}_\alpha \bar{\nabla}^\alpha \tilde{Q}^\rho \right) \\
& + \frac{8}{27} (b_2 - b_3) \left(\tilde{Q}_\gamma Q_\mu \bar{\nabla}^\mu \tilde{Q}^\gamma - \tilde{Q}_\mu Q_\gamma \bar{\nabla}^\mu \tilde{Q}^\gamma \right) + \frac{8}{9} (b_1 - b_2 - 2b_3) Q^\mu \tilde{Q}_\gamma \bar{\nabla}_\mu \tilde{Q}^\gamma \\
& + \frac{8}{27} (-2b_1 + 4b_2 + 3b_3) \left(Q^\mu \tilde{Q}_\gamma \bar{\nabla}_\mu \tilde{Q}^\gamma - Q^\rho \tilde{Q}_\rho \bar{\nabla}_\mu \tilde{Q}^\mu \right) \tag{A.8} \\
& + \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_G = & -\frac{16}{9} (3b_1 - b_2 + b_3 + b_6) \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \bar{\nabla}^\mu Q^\alpha + \frac{16}{9} (b_1 - b_2 + b_3 + b_6) \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \bar{\nabla}^\alpha Q^\mu \\
& + \frac{32}{9} b_1 \bar{\nabla}_\mu Q^\mu \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha + \frac{1}{9} (2b_1 - 2b_2 + 2b_3 + b_6) \bar{\nabla}^\nu \tilde{Q}_\gamma \bar{\nabla}_\nu \tilde{Q}^\gamma \\
& - \frac{1}{9} (5b_3 - 3b_1 + 4b_2) \bar{\nabla}^\nu \tilde{Q}_\nu \bar{\nabla}_\gamma \tilde{Q}^\gamma - \frac{1}{9} (2b_1 + b_6) \bar{\nabla}_\rho \tilde{Q}_\alpha \bar{\nabla}^\alpha \tilde{Q}^\rho \\
& + \frac{8}{27} (b_2 - b_3) \left(\tilde{Q}_\gamma Q_\mu \bar{\nabla}^\mu \tilde{Q}^\gamma - \tilde{Q}_\mu Q_\gamma \bar{\nabla}^\mu \tilde{Q}^\gamma \right) + \frac{8}{9} (b_1 - b_2 - 2b_3) Q^\mu \tilde{Q}_\gamma \bar{\nabla}_\mu \tilde{Q}^\gamma \\
& + \frac{8}{27} (-2b_1 + 4b_2 + 3b_3) \left(Q^\mu \tilde{Q}_\gamma \bar{\nabla}_\mu \tilde{Q}^\gamma - Q^\rho \tilde{Q}_\rho \bar{\nabla}_\mu \tilde{Q}^\mu \right) \tag{A.9} \\
& + \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_\mu (Q^\mu \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha - Q^\alpha \bar{\nabla}_\alpha Q^\mu) &= \bar{\nabla}_\mu Q^\mu \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha - \bar{\nabla}_\mu Q^\alpha \bar{\nabla}_\alpha Q^\mu + Q^\mu \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha - Q^\alpha \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\alpha Q^\mu \\
&= \bar{\nabla}_\mu Q^\mu \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha - \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \bar{\nabla}^\alpha Q^\mu + Q^\mu \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha - Q^\mu \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\mu Q^\alpha \\
&= \bar{\nabla}_\mu Q^\mu \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha - \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \bar{\nabla}^\alpha Q^\mu + Q^\mu [\bar{\nabla}_\mu, \bar{\nabla}_\alpha] Q^\alpha \\
&= \bar{\nabla}_\mu Q^\mu \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha - \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \bar{\nabla}^\alpha Q^\mu + Q^\mu \bar{R}^\alpha_{\rho\mu\alpha} Q^\rho \\
&= \bar{\nabla}_\mu Q^\mu \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha - \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \bar{\nabla}^\alpha Q^\mu - \bar{R}_{\rho\mu} Q^\rho Q^\mu
\end{aligned}$$

posons $Q^\mu \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha - Q^\alpha \bar{\nabla}_\alpha Q^\mu = V^\mu$ nous obtenons alors

$$\bar{\nabla}_\mu Q^\mu \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha = \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \bar{\nabla}^\alpha Q^\mu + \bar{R}_{\rho\mu} Q^\rho Q^\mu + \bar{\nabla}_\mu V^\mu \tag{A.10}$$

de même

$$\bar{\nabla}_\nu \tilde{Q}^\nu \bar{\nabla}_\gamma \tilde{Q}^\gamma = \bar{\nabla}_\nu \tilde{Q}_\gamma \bar{\nabla}^\gamma \tilde{Q}^\nu + \bar{R}_{\nu\gamma} \tilde{Q}^\nu \tilde{Q}^\gamma + \bar{\nabla}_\nu \tilde{V}^\nu \tag{A.11}$$

où

$$\tilde{Q}^\nu \bar{\nabla}_\gamma \tilde{Q}^\gamma - \tilde{Q}^\gamma \bar{\nabla}_\gamma \tilde{Q}^\nu = \tilde{V}^\nu$$

remplaçons les relations (A.10) et (A.11) dans (A.9)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G = & -\frac{16}{9} (3b_1 - b_2 + b_3 + b_6) \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \bar{\nabla}^\mu Q^\alpha + \frac{16}{9} (3b_1 - b_2 + b_3 + b_6) \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \bar{\nabla}^\alpha Q^\mu \\ & + \frac{1}{9} (2b_1 - 2b_2 + 2b_3 + b_6) \bar{\nabla}^\nu \tilde{Q}_\gamma \bar{\nabla}_\nu \tilde{Q}^\gamma - \frac{1}{9} (2b_1 - 2b_2 + 2b_3 + b_6) \bar{\nabla}_\rho \tilde{Q}_\alpha \bar{\nabla}^\alpha \tilde{Q}^\rho \\ & - \frac{1}{3} (2b_2 + b_3 - b_1) \bar{\nabla}_\rho \tilde{Q}_\alpha \bar{\nabla}^\alpha \tilde{Q}^\rho + \frac{8}{27} (b_1 + 2b_2 - 4b_3) \tilde{Q}_\gamma Q_\mu \bar{\nabla}^\mu \tilde{Q}^\gamma \\ & - \frac{8}{27} (b_2 - b_3) \tilde{Q}_\mu Q_\gamma \bar{\nabla}^\mu \tilde{Q}^\gamma - \frac{8}{27} (-2b_1 + 4b_2 + 3b_3) Q^\rho \tilde{Q}_\rho \bar{\nabla}_\mu \tilde{Q}^\mu \\ & + \frac{32}{9} b_1 (\bar{R}_{\rho\mu} Q^\rho Q^\mu + \bar{\nabla}_\mu V^\mu) - \frac{1}{9} (5b_3 - 3b_1 + 4b_2) (\bar{R}_{\nu\gamma} \tilde{Q}^\nu \tilde{Q}^\gamma + \bar{\nabla}_\nu \tilde{V}^\nu) \\ & + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

il vient donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G = & + \frac{16}{9} (3b_1 - b_2 + b_3 + b_6) [\bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \bar{\nabla}^\alpha Q^\mu - \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \bar{\nabla}^\mu Q^\alpha] \\ & - \frac{1}{9} (2b_1 - 2b_2 + 2b_3 + b_6) [\bar{\nabla}_\rho \tilde{Q}_\alpha \bar{\nabla}^\alpha \tilde{Q}^\rho - \bar{\nabla}^\nu \tilde{Q}_\gamma \bar{\nabla}_\nu \tilde{Q}^\gamma] \\ & - \frac{1}{3} (2b_2 + b_3 - b_1) \bar{\nabla}_\rho \tilde{Q}_\alpha \bar{\nabla}^\alpha \tilde{Q}^\rho + \frac{8}{27} (b_1 + 2b_2 - 4b_3) \tilde{Q}_\gamma Q_\mu \bar{\nabla}^\mu \tilde{Q}^\gamma \\ & - \frac{8}{27} (b_2 - b_3) \tilde{Q}_\mu Q_\gamma \bar{\nabla}^\mu \tilde{Q}^\gamma - \frac{8}{27} (-2b_1 + 4b_2 + 3b_3) Q^\rho \tilde{Q}_\rho \bar{\nabla}_\mu \tilde{Q}^\mu \\ & + \frac{32}{9} b_1 (\bar{R}_{\rho\mu} Q^\rho Q^\mu + \bar{\nabla}_\mu V^\mu) - \frac{1}{9} (5b_3 - 3b_1 + 4b_2) (\bar{R}_{\nu\gamma} \tilde{Q}^\nu \tilde{Q}^\gamma + \bar{\nabla}_\nu \tilde{V}^\nu) \\ & + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Calculons $\bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \bar{\nabla}^\alpha Q^\mu - \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \bar{\nabla}^\mu Q^\alpha$

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \bar{\nabla}^\alpha Q^\mu - \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \bar{\nabla}^\mu Q^\alpha &= \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha (\bar{\nabla}^\alpha Q^\mu - \bar{\nabla}^\mu Q^\alpha) \\
&= \bar{\nabla}^\mu Q^\alpha (\bar{\nabla}_\alpha Q_\mu - \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha) \\
&= \bar{\nabla}^\mu Q^\alpha \left(\partial_\alpha Q_\mu - \bar{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\alpha} Q_\lambda - \partial_\mu Q_\alpha + \bar{\Gamma}^\lambda{}_{\alpha\mu} Q_\lambda \right) \\
&= \bar{\nabla}^\mu Q^\alpha (\partial_\alpha Q_\mu - \partial_\mu Q_\alpha) \\
&= \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha (\partial^\alpha Q^\mu - \partial^\mu Q^\alpha) \\
&= \left(\partial_\mu Q_\alpha - \bar{\Gamma}^\lambda{}_{\alpha\mu} Q_\lambda \right) (\partial^\alpha Q^\mu - \partial^\mu Q^\alpha) \\
&= \left(\partial_\mu Q_\alpha \partial^\alpha Q^\mu - \partial_\mu Q_\alpha \partial^\mu Q^\alpha - \bar{\Gamma}^\lambda{}_{\alpha\mu} Q_\lambda \partial^\alpha Q^\mu + \bar{\Gamma}^\lambda{}_{\alpha\mu} Q_\lambda \partial^\mu Q^\alpha \right) \\
&= (\partial_\mu Q_\alpha \partial^\alpha Q^\mu - \partial_\mu Q_\alpha \partial^\mu Q^\alpha) \\
&= -\frac{1}{2} 2 (\partial_\mu Q_\alpha \partial^\mu Q^\alpha - \partial_\mu Q_\alpha \partial^\alpha Q^\mu) \\
\bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \bar{\nabla}^\alpha Q^\mu - \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \bar{\nabla}^\mu Q^\alpha &= -\frac{1}{2} (\partial_\mu Q_\alpha - \partial_\mu Q_\alpha) (\partial^\mu Q^\alpha - \partial^\alpha Q^\mu) = -\frac{1}{2} \Upsilon_{\mu\alpha} \Upsilon^{\mu\alpha} \quad (A.14)
\end{aligned}$$

notons que

$$\Upsilon_{\mu\alpha} = 2\partial_{[\mu} Q_{\alpha]}$$

de la même manière

$$\bar{\nabla}_\nu \tilde{Q}_\gamma \bar{\nabla}^\gamma \tilde{Q}^\nu - \bar{\nabla}_\nu \tilde{Q}_\gamma \bar{\nabla}^\nu \tilde{Q}^\gamma = -\frac{1}{2} \left(\partial_\nu \tilde{Q}_\gamma - \partial_\nu \tilde{Q}_\gamma \right) \left(\partial^\nu \tilde{Q}^\gamma - \partial^\gamma \tilde{Q}^\nu \right) = -\frac{1}{2} S_{\nu\gamma} S^{\nu\gamma} \quad (A.15)$$

avec

$$S_{\nu\gamma} = \frac{1}{2} \partial_{[\nu} \tilde{Q}_{\gamma]}$$

nous remplaçons les résultats (A.14) et (A.15) dans (A.13), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_G &= -\frac{8}{9} (3b_1 - b_2 + b_3 + b_6) \Upsilon_{\mu\alpha} \Upsilon^{\mu\alpha} + \frac{1}{18} (2b_1 - 2b_2 + 2b_3 + b_6) S_{\nu\gamma} S^{\nu\gamma} \\
&\quad - \frac{1}{2} M_{Pl}^2 \frac{1}{3} (2 - 2a_1 + a_2 - 3a_3) Q_\rho Q^\rho + \frac{1}{24} \frac{1}{2} M_{Pl}^2 (1 - 4a_1 - 4a_2) \tilde{Q}_\nu \tilde{Q}^\nu \\
&\quad + \frac{24}{81} (b_1 + b_2 - b_3) \tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho Q_\beta Q^\beta + \frac{8}{81} (4b_1 - 5b_2 - 4b_3) Q_\nu \tilde{Q}^\nu Q_\beta \tilde{Q}^\beta \\
&\quad + \frac{8}{81} 3 (4b_1 - 5b_2 - 4b_3) \tilde{Q}^\beta \tilde{Q}^\nu \bar{\nabla}_\nu Q_\beta + \frac{1}{27} (b_1 + b_2 - b_3) \tilde{Q}_\sigma \tilde{Q}^\sigma \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha \\
&\quad + \frac{8}{27} (b_1 - 2b_2 - b_3) \tilde{Q}_\mu Q_\gamma \bar{\nabla}^\mu \tilde{Q}^\gamma + \frac{1}{3} (b_1 - 2b_2 - b_3) \bar{\nabla}_\nu \tilde{Q}^\nu \bar{\nabla}_\gamma \tilde{Q}^\gamma \\
&\quad + \frac{1}{9} (b_1 + b_2 - b_3) 2\bar{R}_{\nu\gamma} \tilde{Q}^\nu \tilde{Q}^\gamma + \frac{1}{9} (b_1 + b_2 - b_3) \left(-g_{\nu\gamma} \bar{R} \tilde{Q}^\nu \tilde{Q}^\gamma + \bar{R} \tilde{Q}_\gamma \tilde{Q}^\gamma \right) \quad (A.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{2}M_{Pl}^2\bar{R}+b_1\bar{G}-\frac{8}{3}b_1\bar{R}\bar{\nabla}_\lambda Q^\lambda-2M_{Pl}^2\bar{\nabla}_\lambda Q^\lambda+\frac{32}{3}b_1\bar{R}_{\beta\nu}\bar{\nabla}^\nu Q^\beta \\
& -M_{Pl}^2Q_\rho Q^\rho+\frac{1}{16}M_{Pl}^2\tilde{Q}_\nu\tilde{Q}^\nu+\frac{16}{9}b_1\bar{R}_{\beta\nu}Q^\nu Q^\beta+\frac{16}{9}b_1\bar{R}Q_\rho Q^\rho \\
& +\frac{8}{81}(-9+4b_1+9b_2+6b_3)\tilde{Q}_\rho\tilde{Q}^\rho Q_\beta Q^\beta+\frac{32}{9}b_1\bar{\nabla}_\mu V^\mu-\frac{1}{9}b_1\bar{R}\tilde{Q}_\rho\tilde{Q}^\rho \\
& +\frac{1}{9}(-3b_3+5b_1-6b_2)\bar{R}_{\nu\gamma}\tilde{Q}^\nu\tilde{Q}^\gamma-\frac{1}{9}(5b_3-3b_1+4b_2)\bar{\nabla}_\nu\tilde{V}^\nu \\
& +\frac{8}{81}(4b_1+b_2-5b_3)Q_\nu\tilde{Q}^\nu Q_\beta\tilde{Q}^\beta-\frac{8}{27}(-2b_1+4b_2+3b_3)Q^\rho\tilde{Q}_\rho\bar{\nabla}_\mu\tilde{Q}^\mu \\
& +\frac{8}{27}(-5b_1+5b_2+4b_3)\tilde{Q}^\beta\tilde{Q}^\nu\bar{\nabla}_\nu Q_\beta+\frac{8}{27}(b_2-b_1+2b_3)\tilde{Q}_\mu Q_\gamma\bar{\nabla}^\mu\tilde{Q}^\gamma \\
& +\frac{1}{27}(-5b_1-b_2+16b_3)\tilde{Q}_\sigma\tilde{Q}^\sigma\bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha+\frac{64}{9}(1-b_1)Q_\rho Q^\rho Q_\sigma Q^\sigma \\
& +\frac{16}{27}(5b_1+3b_2+3b_3)Q^\nu Q^\beta\bar{\nabla}_\nu Q_\beta+\frac{8}{3}(2b_1-b_2)\bar{R}^\nu{}_{\beta\mu\nu}\bar{\nabla}^\mu Q^\beta \\
& +\frac{1}{36}(1-b_1)\tilde{Q}_\rho\tilde{Q}^\rho\tilde{Q}_\nu\tilde{Q}^\nu+\frac{8}{27}(6b_1+2b_2-b_3)Q_\rho Q^\rho\bar{\nabla}_\mu Q^\mu \\
& +\frac{4}{9}(5b_1+3b_2+3b_3)\bar{R}^\mu{}_{\beta\mu\nu}Q^\nu Q^\beta+\frac{8}{27}(b_1+2b_2-4b_3)\tilde{Q}_\gamma Q_\mu\bar{\nabla}^\mu\tilde{Q}^\gamma \\
& +\frac{1}{9}b_1\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}\tilde{Q}_\rho\tilde{Q}^\rho-\frac{16}{9}b_1\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}Q_\rho Q^\rho+\frac{2}{9}b_1\bar{R}_{\alpha\beta}{}^{\beta}{}_{\nu}\tilde{Q}^\alpha\tilde{Q}^\nu \\
& +\frac{1}{3}(2b_2+b_3-b_1)\bar{R}_{\nu\gamma}\tilde{Q}^\nu\tilde{Q}^\gamma+\frac{1}{3}(2b_2+b_3-b_1)\bar{\nabla}_\nu\tilde{V}^\nu \\
& -\frac{8}{9}(2b_1-b_2+b_3+b_6)\bar{\nabla}_\mu Q_\beta\bar{\nabla}_\lambda\left(\varepsilon^{\lambda\mu\beta\sigma}\tilde{Q}_\sigma\right)+\frac{8}{9}(-2b_1+3b_2+3b_3)\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon^{\alpha\nu\mu\rho}Q^\beta\tilde{Q}_\rho \\
& +\frac{8}{9}(-b_1+2b_2+2b_3)\bar{R}^\mu{}_{\beta\mu\nu}\varepsilon^{\rho\beta\nu\theta}Q_\rho\tilde{Q}_\theta+\frac{2}{3}(-2b_1+3b_2+3b_3)\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\bar{\nabla}^\mu\left(\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_{\rho}\tilde{Q}^\rho\right).
\end{aligned}$$

Nous définissons les paramètres

$$\begin{aligned}
\kappa &= 4b_1+b_6 \\
\beta &= b_1+b_2-b_3 \\
m_T^2 &= -\frac{1}{3}(2-2a_1+a_2-3a_3)M_{Pl}^2 \\
m_S^2 &= \frac{1}{24}(1-4a_1-4a_2-3a_3)M_{Pl}^2
\end{aligned}$$

donc la formule finale de lagrangien quadratique $\mathcal{L}_G$ après décomposition est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_G = & -\frac{8}{9}(\kappa - \beta) \Upsilon_{\mu\alpha} \Upsilon^{\mu\alpha} + \frac{1}{18}(\kappa - 2\beta) S_{\nu\gamma} S^{\nu\gamma} + \frac{1}{2}m_T^2 Q^2 + \frac{1}{2}m_S^2 \tilde{Q}^2 \\
& + \frac{24}{81}\beta \tilde{Q}^2 Q^2 + \frac{8}{81}(4\beta - 9b_2) \left[\left(\tilde{Q}^\nu Q_\nu \right)^2 + 3\tilde{Q}^\beta \tilde{Q}^\nu \bar{\nabla}_\nu Q_\beta \right] \\
& + \frac{1}{27}\beta \tilde{Q}^2 \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha + \frac{8}{27}(\beta - 3b_2) \tilde{Q}_\mu Q_\gamma \bar{\nabla}^\mu \tilde{Q}^\gamma + \frac{1}{3}(\beta - 3b_2) \left(\bar{\nabla}_\nu \tilde{Q}^\nu \right)^2 \\
& + \frac{1}{9}\beta \left(2\bar{G}_{\nu\gamma} \tilde{Q}^\nu \tilde{Q}^\gamma + \bar{R} \tilde{Q}^2 \right) \tag{A.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}M_{Pl}^2 \bar{R} + b_1 \bar{G} - \frac{8}{3}b_1 \bar{R} \bar{\nabla}_\lambda Q^\lambda - 2M_{Pl}^2 \bar{\nabla}_\lambda Q^\lambda + \frac{32}{3}b_1 \bar{R}_{\beta\nu} \bar{\nabla}^\nu Q^\beta \\
& - M_{Pl}^2 Q_\rho Q^\rho + \frac{1}{16}M_{Pl}^2 \tilde{Q}_\nu \tilde{Q}^\nu + \frac{16}{9}b_1 \bar{R}_{\beta\nu} Q^\nu Q^\beta + \frac{16}{9}b_1 \bar{R} Q_\rho Q^\rho \\
& + \frac{8}{81}(-9 + 4b_1 + 9b_2 + 6b_3) \tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho Q_\beta Q^\beta + \frac{32}{9}b_1 \bar{\nabla}_\mu V^\mu - \frac{1}{9}b_1 \bar{R} \tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho \\
& + \frac{1}{9}(-3b_3 + 5b_1 - 6b_2) \bar{R}_{\nu\gamma} \tilde{Q}^\nu \tilde{Q}^\gamma - \frac{1}{9}(5b_3 - 3b_1 + 4b_2) \bar{\nabla}_\nu \tilde{V}^\nu \\
& + \frac{8}{81}(4b_1 + b_2 - 5b_3) Q_\nu \tilde{Q}^\nu Q_\beta \tilde{Q}^\beta - \frac{8}{27}(-2b_1 + 4b_2 + 3b_3) Q^\rho \tilde{Q}_\rho \bar{\nabla}_\mu \tilde{Q}^\mu \\
& + \frac{8}{27}(-5b_1 + 5b_2 + 4b_3) \tilde{Q}^\beta \tilde{Q}^\nu \bar{\nabla}_\nu Q_\beta + \frac{8}{27}(b_2 - b_1 + 2b_3) \tilde{Q}_\mu Q_\gamma \bar{\nabla}^\mu \tilde{Q}^\gamma \\
& + \frac{1}{27}(-5b_1 - b_2 + 16b_3) \tilde{Q}_\sigma \tilde{Q}^\sigma \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha + \frac{64}{9}(1 - b_1) Q_\rho Q^\rho Q_\sigma Q^\sigma \\
& + \frac{16}{27}(5b_1 + 3b_2 + 3b_3) Q^\nu Q^\beta \bar{\nabla}_\nu Q_\beta + \frac{8}{3}(2b_1 - b_2) \bar{R}^\nu{}_{\beta\mu\nu} \bar{\nabla}^\mu Q^\beta \\
& + \frac{1}{36}(1 - b_1) \tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho \tilde{Q}_\nu \tilde{Q}^\nu + \frac{8}{27}(6b_1 + 2b_2 - b_3) Q_\rho Q^\rho \bar{\nabla}_\mu Q^\mu \\
& + \frac{4}{9}(5b_1 + 3b_2 + 3b_3) \bar{R}^\mu{}_{\beta\mu\nu} Q^\nu Q^\beta + \frac{8}{27}(b_1 + 2b_2 - 4b_3) \tilde{Q}_\gamma Q_\mu \bar{\nabla}^\mu \tilde{Q}^\gamma \\
& + \frac{1}{9}b_1 \bar{R}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} \tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho - \frac{16}{9}b_1 \bar{R}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} Q_\rho Q^\rho + \frac{2}{9}b_1 \bar{R}_{\alpha\beta}{}^{\beta}{}_{\nu} \tilde{Q}^\alpha \tilde{Q}^\nu \\
& + \frac{1}{3}(2b_2 + b_3 - b_1) \bar{R}_{\nu\gamma} \tilde{Q}^\nu \tilde{Q}^\gamma + \frac{1}{3}(2b_2 + b_3 - b_1) \bar{\nabla}_\nu \tilde{V}^\nu \\
& - \frac{8}{9}(2b_1 - b_2 + b_3 + b_6) \bar{\nabla}_\mu Q_\beta \bar{\nabla}_\lambda \left(\varepsilon^{\lambda\mu\beta\sigma} \tilde{Q}_\sigma \right) + \frac{8}{9}(-2b_1 + 3b_2 + 3b_3) \bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon^{\alpha\nu\mu\rho} Q^\beta \tilde{Q}_\rho \\
& + \frac{8}{9}(-b_1 + 2b_2 + 2b_3) \bar{R}^\mu{}_{\beta\mu\nu} \varepsilon^{\rho\beta\nu\theta} Q_\rho \tilde{Q}_\theta + \frac{2}{3}(-2b_1 + 3b_2 + 3b_3) \bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu} \bar{\nabla}^\mu \left(\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_{\rho} \tilde{Q}^\rho \right)
\end{aligned}$$

avec

$$\bar{G}_{\nu\gamma} = \bar{R}_{\nu\gamma} - \frac{1}{2}g_{\nu\gamma} \bar{R}.$$