
Relief sur la notion de continuité

Niveau de conceptualisation visé

Sommaire du chapitre

I.	Relief sur la notion de continuité	82
1.	Etude épistémologique	82
1.1.	Genèse historique	82
1.2.	Conceptions et obstacles associés à la notion de continuité	85
1.2.1.	Concept image et concept définition	86
1.2.2.	Différents facteurs de conflits cognitifs	86
1.2.3.	Obstacles épistémologiques	88
1.3.	Points de vue épistémologiques sur la notion de limite	89
2.	Etude didactique	91
2.1.	La notion de continuité est un concept FUG	91
2.2.	Paradigmes de l'Analyse standard	92
3.	Etude curriculaire	94
3.1.	Les réformes	94
3.2.	particulièrement, concernant l'enseignement de l'Analyse au lycée	96
3.3.	Enfin, en ce qui concerne l'enseignement de la notion de continuité	97
3.4.	La notion de continuité dans les programmes actuels	99
3.4.1.	Les concepts mathématiques utilisés dans la notion de continuité dans les programmes actuels	99
3.4.2.	Les connaissances ultérieures occupées par la notion de continuité..	99
4.	Les manuels scolaires :	101

4.1. Analyse du chapitre « continuité »	101
4.1.1. Une première rubrique intitulée « Pour commencer »	101
4.1.2. La rubrique « Cours »	103
4.1.3. La rubrique « Exercices et Problèmes »	112
4.2. Le manuel scolaire et la place de la définition formelle dans l'enseignement de la notion de continuité.	113
4.3. Synthèse de l'étude du manuel sur la continuité	117
II. Niveau de conceptualisation visé et domaine de travail associé	119

I. Relief sur la notion de continuité

1. Etude historique et épistémologique

1.1. Genèse historique

Comme l'a souligné Dieudonné, un regard sur une notion apporte une aide considérable à l'étude de l'apprentissage de cette notion par les élèves d'aujourd'hui, « *on ne peut comprendre une science en ignorant son évolution* » (Dieudonné (1982)). En effet, un tel regard permet de mettre à jour les difficultés inhérentes à cette notion. En outre, l'étude historique apporte un éclairage sur les circonstances qui ont permis la naissance ou le développement de cette notion ainsi que sur le développement des autres notions qui ont influencé son évolution pour déceler comment leur compréhension a permis aux mathématiciens de mieux l'appréhender.

Nous nous intéressons ici, à la notion de continuité de par son importance en Analyse et de son développement historique assez particulier. Ce qui peut nous éclairer sur la complexité de sa définition. Cette définition caractérisée par son usage aujourd'hui, a mis longtemps à émerger. Elle est apparue tout d'abord comme outil en usage dans des contextes spécifiques, avant d'être définie de façon formelle grâce à Weierstrass (1815-1897) après plusieurs tentatives.

Aristote définit dans le livre VI de la Physique de la façon suivante : « *Or j'appelle continu ce qui est divisible en parties toujours divisibles* ». Le continu s'oppose ainsi à l'indivisible et, à travers cette opposition, la ligne continue s'oppose au point indivisible, le nombre à la grandeur géométrique, l'instant au temps.

Ces oppositions sont aussi présentes dans les éléments d'Euclide, à travers la séparation entre nombres et grandeurs. Il en est de même pour la continuité de la droite, même si son intervention s'effectue de façon implicite.

L'opposition entre continu et discret à travers celle entre grandeurs et nombres a duré longtemps en mathématiques et ce n'est qu'à la fin du XIX^{ème} siècle que l'unification s'établit et au même temps, la notion de « continu » sera complètement clarifiée, dans le cadre du mouvement d'arithmétisation de l'analyse, avec la contribution de divers mathématiciens comme Dedekind et Cantor.

Dedekind (1831-1916) évoquait la notion de « continu », lors de la caractérisation de l'ensemble \mathbb{R} par les coupures. Ce qui a permis d'indiquer une caractéristique de la continuité, utilisable comme base de déductions effectives.

Cette vision de la continuité de la droite conduira à une construction de l'ensemble des réels à partir des rationnels à travers la notion de coupure et dans la preuve que ce processus de coupure appliqué aux réels eux-mêmes ne donne aucun nouveau nombre, que la « complétude » cherchée a bien été réalisée.

Parallèlement, Cantor produira une construction des réels à partir des suites fondamentales de rationnels introduites initialement par Bolzano, c'est-à-dire, en langage moderne, des suites de Cauchy de rationnels.

Ainsi, la continuité est évoquée à travers des grandeurs et de la droite numérique.

La dualité continu / discontinu s'exprime aussi mathématiquement à travers d'autres objets, et notamment les fonctions.

Pour les mathématiciens actuels, une fonction f , définie au voisinage d'un point a , est continue en a si la limite des valeurs $f(x)$ prises par cette fonction, lorsque x tend vers a , existe et est égale à $f(a)$. Cette définition de la continuité des fonctions est, elle aussi, récente, remontant au XIX^{ème} siècle. Comme le rappelle Cauchy dans son mémoire sur les fonctions continues publié en 1844:

« Dans les ouvrages d'Euler et de Lagrange, une fonction est appelée continue ou discontinue, suivant que les valeurs de cette fonction, correspondantes à diverses valeurs de la variable, sont ou ne sont pas assujetties à une même loi, sont ou ne sont pas fournies par une seule et même équation. »

Cauchy, qui n'était pas d'accord avec Euler et Lagrange qui considèrent qu'une fonction est continue doit être définie à l'aide d'une seule expression (« *variable assujettie à une même loi* »). Il voyait que leur définition n'est pas mathématiquement satisfaisante et a cité, dans son mémoire : « *Un simple changement de notation suffira souvent à transformer une fonction continue en fonction discontinue et réciproquement.* »

En se basant sur l'exemple particulièrement simple qu'il a cité :

« La fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ apparaît discontinue car obéissant à deux règles distinctes mais il suffit de l'exprimer sous la forme unifiée $f(x) = \sqrt{x^2}$ » pour la rendre continue.

C'est ce qui va l'amener en 1821 à définir la continuité d'une fonction à variable réelle, entre deux bornes a et b par la propriété suivante :

« Entre ces limites¹, un accroissement infiniment petit de la variable produit un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même ».

La continuité d'une fonction est aussi définie localement, au voisinage d'un point, en demandant qu'elle soit « continue, entre deux limites de x , même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit ». Et, « lorsqu'une fonction f cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable x , on dit qu'elle devient alors *discontinue*, et qu'il n'y a pas pour cette valeur particulière *solution de continuité*. » Il s'ensuit que, pour Cauchy, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est discontinue en 0, puisqu'elle devient infinie en 0. Même si elles n'en sont pas très éloignées, les définitions de la continuité et de la discontinuité d'une fonction ne sont donc pas chez Cauchy les définitions actuelles. Le langage des limites ne s'y dégage pas, en particulier, complètement de celui des infiniment petits, comme ce sera le cas chez Weierstrass à qui l'on doit les définitions formelles actuelles.

La notion de continu, les rapports entre continu et continuité, restent encore chez Cauchy portés par des intuitions géométriques et non problématisés. Il semble aller de soi que la représentation graphique d'une fonction réelle continue sur un intervalle est « une branche de courbe *continue* » et la première démonstration qu'il donne dans son cours d'analyse algébrique du théorème des valeurs intermédiaires est basée sur cette évidence.

Aujourd'hui, les fonctions continues préservent la connexité et plus généralement le caractère continu des espaces sur lesquels elles opèrent, mais on peut penser qu'à l'époque de Cauchy, continuité et continu sont encore partiellement amalgamés.

Trois grandes familles de problèmes ont donc permis à la notion de développer :

(1) les problèmes géométriques comme les problèmes de réflexion sur la nature des grandeurs géométriques (notion d'indivisible par exemple). Cette problématique essentielle que constitue la géométrie s'est retrouvée constamment nécessaire pour appréhender certains aspects de la conformité. Au point de

¹ Il voulait dire « bornes »

constituer, par la suite, un obstacle. En effet il est fort difficile de quitter le point de vue géométrique pour se placer dans le domaine numérique, passage qui était pourtant indispensable, comme chez les mathématiciens du 17^e siècle, et plus tard d'ailleurs, puisque Cauchy ne s'est définitivement pas détaché de la visualisation géométrique : sa démonstration du théorème des valeurs intermédiaires fait encore un appel à une simple visualisation géométrique.

(2) Une deuxième problématique importante est aussi d'origine géométrique, mais elle est rapidement devenue un problème en soi, celui du développement en série entière des fonctions (en lien avec le questionnement sur la nature des fonctions admises pour la résolution du problème des cordes vibrantes, continues ou arbitraires, qui a été à l'origine de la controverse entre Euler et D'Alembert)

(3) Enfin, la troisième problématique essentielle est d'ordre topologique, elle concerne les transformations continues et les homéomorphismes. Cette problématique apparaît dans les travaux de Dedekind, Cantor et Hausdorff.

Notons enfin, qu'historiquement, les notions de « fonction » et de « continuité » ont évolué dans un rapport dialectique, un changement de vision par rapport à l'une entraînant un changement par rapport à l'autre et réciproquement. De plus, à chaque époque, la définition de la continuité dépendait des fonctions manipulées et des problèmes à résoudre.

1.2. Conceptions et obstacles associés à la notion de continuité

Il semble nécessaire de comprendre à quelles difficultés sont confrontés les élèves et étudiants lorsque les mots « continu » et « discontinu », qui font partie du vocabulaire commun, deviennent des termes mathématiques auxquels ils doivent attribuer un sens précis.

Plusieurs recherches en didactiques se sont centrées sur les notions au cœur de ce champ : les notions de limite, de continuité, de dérivée et d'intégrale. Elles se sont interrogées aussi sur les rapports que les élèves et étudiants entretenaient avec les nombres réels, les suites et les fonctions, objets sur lesquels opèrent ces notions. Portées par l'épistémologie constructiviste Piagétienne, elles ont eu tendance à approcher l'apprentissage en termes de déséquilibres, conflits cognitifs et ruptures.

La référence faite par divers chercheurs travaillant dans le champ conceptuel de l'analyse à la notion d'obstacle épistémologique introduite par Bachelard et importée dans le champ didactique par Brousseau dès 1976 a renforcé encore cette sensibilité de la recherche aux discontinuités de l'apprentissage.

1.2.1. Concept image et concept définition,

Selon Tall et Vinner (1981) la structure cognitive associée à un objet mathématique donné comporte le concept image et le concept définition. Le concept image inclut toutes sortes d'associations, de conceptions, d'intuitions, d'éléments structuraux et de processus reliés au concept en jeu. Le concept image n'est pas verbal « *the total cognitive structure associated with the concept: visual representation, mental pictures, experiences and impressions evoked by the concept name* » (Tall et Vinner, 1981). Le concept définition comporte les formes langagières, y compris formelles qui permettent de spécifier le concept. Celles-ci peuvent être apprises par cœur ou bien reconstruites par l'élève et dans ce dernier cas, elles seront utilisées pour exprimer ou verbaliser l'image qu'elles activent

En références aux travaux de Tall et Vinner sur le concept image et le concept définition de la continuité, les chercheurs confirment que la notion de continuité est rarement évoquée en tant que définition formelle, mais une image conceptuelle est construite à partir d'un usage informel (ou intuitif) du concept. Le concept image est censé amener normalement à la définition du concept, mais dans la pratique, il se produit certains conflits potentiels qui peuvent provoquer des conflits cognitifs pour ceux qui étudient ensuite l'analyse formelle.

1.2.2. Différents facteurs de conflits cognitifs

L'image conceptuelle dérive initialement de diverses sources, par exemple l'emploi usuel du terme "continu" dans des expressions dans la vie courante telles que : « *il a plu continuellement toute la journée* » (ce qui signifie qu'il n'y a pas eu de pause dans les précipitations).

L'utilisation initiale du terme « fonction continue » implique souvent une idée similaire, à savoir que le graphe de la fonction peut être dessiné « en continu » de

sorte qu'il ne présente pas de ruptures. C'est une description populaire erronée de la topologie en tant que géométrie.

Quelles images conceptuelles les étudiants ont-ils de la continuité à leur arrivée à l'université ? Tall et Vinner construisent un questionnaire basé sur une palette de 5 fonctions caractérisant différents types de continuité ou discontinuité.

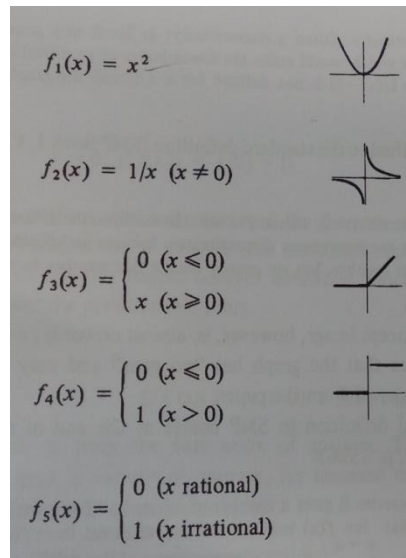


Fig1 : palette des fonctions utilisées par Tall et Vinner dans leurs travaux sur la continuité

Dans ce questionnaire proposé à un groupe d'étudiants, ils demandent de reconnaître la continuité avec des justifications. Tall et Vinner ont ainsi pu relever une variété de réponses indiquant différents concepts images chez les étudiants qui sont basés sur le « tracé d'un seul tenant », « pas de saut » et sur « une seule formule »

Tous les concept-images ainsi relevés ont des facteurs de conflit éventuels avec la définition formelle du concept.

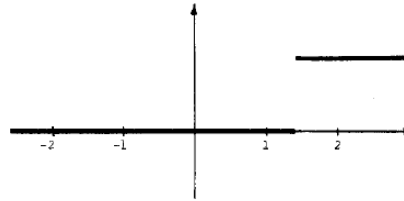
$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in D$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; x \in D \text{ et } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Certains conflits potentiels concernent la nature du domaine de définition. La représentation mentale de la droite réelle par la plupart des mathématiciens est "continue" au sens habituel du terme, selon laquelle elle ne présente aucune rupture. Par exemple, il est extrêmement difficile de former une image mentale de la ligne rationnelle au lieu de la ligne réelle. Si nous considérons des fonctions définies uniquement sur les rationnels, nous pouvons alors avoir des fonctions

formellement continues en conflit avec toutes les images conceptuelles mentionnées ci-dessus. Par exemple :

$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ (où \mathbb{Q} désigne le domaine des rationnels) donnée par : $f(x) =$
 $\begin{cases} 0 & \text{si } (x < 0 \text{ ou } x^2 < 2) \\ 1 & \text{si } (x > 0 \text{ et } x^2 > 2) \end{cases}$

qui a un graphique comme celui-ci :



est continue sur \mathbb{Q} mais le graphique

présente un « saut ». Le concept image est une propriété « globale » associée à la continuité globale sur un intervalle et ne concerne pas la continuité en un point.

Tall et Vinner concluent à la difficulté pour les étudiants à se former un concept image approprié de la continuité en un point. Les concepts images inappropriés sont néfastes à l'installation de la théorie formelle dans l'esprit de chaque étudiant.

1.2.3. Obstacles épistémologiques,

Les obstacles épistémologiques de la continuité sont très proches de ceux observés pour le concept de limite et peuvent être directement associés aux concept-images des élèves, en tant qu'origine spécifique de ces conceptions (El Bouazzaoui, 1988). L'un de ces obstacles peut être associé à ce qu'il appelle *image conceptuelle primitive* : il s'agit d'une conception géométrique et très intuitive de la continuité, liée aux aspects de la courbe. Avec ce concept image, la continuité et la dérivabilité sont souvent mélangées et la continuité signifie principalement que la courbe est lisse et sans angles.

Historiquement, cette conception primitive conduit Euler à introduire une définition de continuité en fonction des représentations algébriques de fonctions. Cela conduit à un deuxième obstacle épistémologique: une fonction continue est donnée par une seule expression algébrique, que l'on peut appeler l'*image concept algébrique* de la continuité. Cette conception a conduit à un nouvel obstacle avec le début de l'analyse de Fourier.

Ensuite, une définition claire est nécessaire. Cette définition vient avec Cauchy et Weierstrass et elle est proche de notre réelle formelle définition.

Finalement, nous retenons de cet aperçu historique que même si les élèves sont capables de les citer, les définitions des objets ne sont pas nécessairement ce que les élèves utilisent quand il s'agit d'identifier un objet. D'où la distinction introduite entre « concept définition » et « concept image ».

1.3. Points de vue épistémologiques sur la notion de limite

Nous avons déjà rencontré dans l'étude bibliographique préliminaire le travail de Bkouche (1996) qui met en évidence non seulement deux points de vue épistémologiques sur la notion de limite de fonction (« cinématique » et « approximation ») mais aussi l'existence d'une relation dialectique entre ces deux points de vue. Pour lui, l'approximation ne se trouve pas seulement dans le point de vue « approximation » sur la notion de limite mais aussi dans le point de vue « cinématique » :

- le point de vue « cinématique » donne un rôle prédominant à l'approximation de la variable x pour approcher $f(x)$. La variable « tire » la fonction ;
- le point de vue « approximation » donne un rôle prédominant à l'approximation de l'image $f(x)$. Le degré d'approximation que l'on veut, tire le degré d'approximation de la variable.

Nous savons que c'est le point de vue « approximation » qui a permis la stabilisation du concept de limite aujourd'hui. La définition en (ε, α) n'est autre qu'une systématisation de cette notion d'approximation. Le point de vue « approximation » de Bkouche se rattache aussi à la définition topologique de la notion de limite : les degrés d'approximation peuvent se formuler en langage de voisinages.

Cependant, toujours selon Bkouche, le point de vue « cinématique » est nécessaire dans le processus d'acquisition de la notion de limite :

« S'il est vrai que ce qui a conduit à la prédominance de ce point de vue (d'approximation), c'est sa valeur opératoire et son efficacité dans les démonstrations de l'analyse, il serait dangereux de rejeter le point de vue

cinématique dans la mesure où il reste le cadre intuitif dans lequel se pense la notion de limite ».

Dans sa thèse, Trouche (1996) ajoute un troisième point de vue sur la notion de limite qu'il appelle point de vue « opératoire ». On peut en effet manipuler des théorèmes opératoires, utiliser des résultats relatifs aux « limites usuelles », en dehors de tout point de vue cinématique et d'approximation. Il ne reste alors des limites que le calcul sur les limites. Il s'agit bien là d'un « point de vue opératoire » qui repose sur des « principes de calcul dégagés de toutes considérations (...) de limites ».

En conclusion, l'analyse épistémologique met en évidence trois « points de vue » sur le concept de limite :

- ✓ un point de vue « cinématique » : *« c'est la variable qui tire la fonction »* (R.Bkouche) ;
- ✓ un point de vue « approximation » : *« c'est le degré d'approximation que l'on veut qui tire la variable »* (R.Bkouche) ;
- ✓ un point de vue « opératoire » que l'on appellera plutôt « algébrique » (en référence aux paradigmes de l'Analyse comme on le verra plus tard) : *il fonctionne sur des règles, sans étudier la nature des objets sur lesquels elles opèrent »* (Dahan Dalmédico, 1982)

2. Etude didactique

2.1. La notion de continuité est un concept FUG

Comme nous l'avons déjà rencontré dans la partie bibliographique exploratoire, la définition formalisée de la continuité locale est une notion FUG. Plus précisément elle ne peut s'enseigner que comme une FUG.

- (F) Formalise: la définition apporte un nouveau formalisme
 Une fonction f définie dans un intervalle ouvert contenant un réel x_0 est dite continue en x_0 si « Pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout x vérifiant $|x - x_0| < \alpha$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \beta$ » pour la définition en α, β . Ou bien « pour tout intervalle ouvert J contenant $f(x_0)$, il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que $f(I) \subset J$ » en ce qui concerne la définition topologique
- (U) la définition unifie sous un même formalisme des types de continuité différents (continue lisse ou continue anguleux) que l'on a rencontré par exemple dans la palette de fonctions proposées par Tall et Vinner. Elle permet aussi d'unifier des connaissances précédentes des élèves: les notions d'intervalle, voisinage, fonction, image et image réciproque d'un intervalle par une fonction, éléments de logique ...etc
- (G) la définition est un précurseur pour généraliser la notion de continuité dans d'autres espaces. Par exemple dans les espaces métriques, on a
 - Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, f une application de E dans E' et a un point de E .

« On dit que l'application f est continue au point a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E [d(x, a) < \eta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon] \text{ »}$$

Dans les espaces topologiques, on a

« La fonction f est continue au point a si et seulement si l'image réciproque de tout voisinage W de $f(a)$ est un voisinage de a , ce qui s'écrit :

$$\forall W \in V(f(a)), f^{-1}(W) \in V(a)$$

A. Robert (1998) explique, à ce propos, que « si une notion représente une unification des notions précédentes, elle est nécessairement associée à une généralisation et porteuse d'un nouveau formalisme ».

De plus, l'introduction de telle « notion FUG » est souvent difficile car, pour les apprenants, le degré de généralisation de la notion peut être important, la relation entre « ancien » et « nouveau » est difficile à établir. Une difficulté d'enseignement d'une notion de ce type est donc de parvenir à construire du sens à partir des connaissances antérieures et «les connaissances visées ». D'où l'intérêt des discours « méta », pour compenser le manque de situations bien adaptées, vu l'« éloignement » des notions visées et des connaissances antérieures, au moment d'introduire notamment des notions qualifiées de FUG (à cause de leurs caractères Formalisateurs, Unificateurs, Généralisateurs, Robert 1998).

2.2. Paradigmes de l'Analyse standard (AS) :

En référence aux travaux de Kuzniak, Montoya, Vandebrouck, Vivier (2016), nous retenons trois paradigmes de l'analyse standard, dont on peut percevoir l'existence historique et l'impact dans l'enseignement actuel.

- Le paradigme [Analyse Arithmético-géométrique] (**AG**) qui permet des interprétations provenant, avec quelques implicites, de la géométrie, du calcul arithmétique mais aussi du monde réel. De nombreux problèmes d'Analyse trouvent leur source intuitive dans ce paradigme : calcul de longueur ou d'aires, continuité et tangence...Arithmétique et géométrie sont étroitement liées historiquement dans le développement de ce paradigme auquel il faudrait ajouter tous les problèmes de cinématique dont le rôle dans l'élaboration de l'Analyse a été fondamental.
- Le paradigme [Analyse calculatoire] (**AC**) : Dans ce calcul algébrique généralisé, les règles de calcul sont définies, plus ou moins explicitement, et elles sont appliquées indépendamment d'une réflexion sur l'existence et la nature des objets introduits. Dans ce paradigme, les fonctions vont être identifiées avec leur

écriture, retrouvant ainsi l'idéal perdu d'assimiler toutes les fonctions aux fonctions analytiques.

- Le paradigme [Analyse Infinitésimale] (**AI**) : Cette fois, un travail spécifique et formel s'appuie sur l'approximation et la localité : bornes, inégalités, travail sur des voisinages, négligeabilité ... La précision des définitions associée à la rigueur des raisonnements qui ne peuvent plus s'appuyer simplement sur des évidences intuitives, souvent géométriques, marque une rupture épistémologique avec les deux précédents.

On identifie à l'issue de cette première étude du relief que les concepts images, les obstacles épistémologiques et les points de vue sont très reliés aux différents paradigmes.

Des concepts images et des obstacles sont de nature géométrique et relèvent du paradigme AG – continuité globale associée au tracé continu, sans saut, conception intuitive de la continuité et son lien avec l'approche cinématique. Un autre lien peut être fait entre des concepts image de la continuité associée au type d'expression algébrique, le point de vue « algébrique » qui relèvent du paradigme AC. Enfin, on peut mettre en lien le formel de la définition FUG de continuité avec le paradigme AI et le point de vue « approximation ».

3. Etude curriculaire

3.1. Les réformes d'un point de vue général

Depuis son indépendance en 1956, la Tunisie a connu cinq grandes réformes de son système éducatif (1958, 1968, 1978, 1993 et 2002) chacune ayant ses principes et ses finalités, à travers lesquelles l'enseignement des mathématiques a subi plusieurs bouleversements à travers des changements des programmes (contenus et finalités et les niveaux exigibles des activités mathématiques) et les méthodes pédagogiques adoptées.

Les différentes réformes sont :

La réforme de 1968 est caractérisée par l'avènement des mathématiques dites "modernes", inscrivant ainsi l'enseignement tunisien des mathématiques dans la norme mondiale. En Tunisie, comme dans plusieurs autres pays, l'enseignement traditionnel des mathématiques est remis en question dans son contenu comme dans ses méthodes.

Structures, formalisme, démarche généralisante, utilisation des quantificateurs et abstraction sont les grandes lignes de la réforme de 1968.

Les manuels scolaires ont été réécrits conformément à la réorientation de ce programme et aux nouvelles tendances pédagogiques. La politique de formations initiale et continue des enseignants a été modifiée conformément aux nouveaux contenus et aux nouvelles méthodes pédagogiques. Les enseignants ont parfaitement adhéré aux principes de la réforme. Adoptant pour la plupart d'entre eux des stratégies *d'enseignement magistral*. Le curriculum avait des exigences en termes d'abstraction et de formalisme qui induisaient des difficultés dans l'apprentissage de certains élèves. Il en a résulté une désaffection et une démotivation d'un grand nombre d'élèves envers les mathématiques.

La réforme de 1978 : C'est au niveau des méthodes pédagogiques et didactiques que la réforme de 1978 a apporté le plus de changements, puisqu'elle préconise :

- Un enseignement destiné à développer chez l'élève des savoir-faire et des capacités.

- Un apprentissage, dans le primaire et le collège, suivant une pédagogie qui se veut « active », où l'élève construit son savoir et où le manuel devient non seulement un outil d'enseignement mais aussi un outil d'apprentissage.

Cette réforme a été accompagnée de tout un programme de formation continue axé sur une formation des enseignants en géométrie classique (non enseignée à l'université) ainsi que sur une formation pédagogique. Ce dispositif de formation est confronté à une résistance des enseignants à modifier leurs pratiques d'enseignement et leurs attitudes.

La réforme 1993 : Elle est caractérisée par (ou marquée par) des difficultés d'implémentation de la réforme (manuels scolaires élaborés sur la base d'une pédagogie par objectif (PPO), le dispositif de formation des enseignants ne permettant pas une mise en place de nouvelles méthodes pédagogiques adéquates est confrontés à une résistance des enseignants aux finalités de cette réforme). Elle se caractérise aussi par des difficultés d'enseignement et d'apprentissage qui sont apparues, des programmes considérés trop chargés et difficiles. Tentant de pallier à la situation, l'institution a décidé d'alléger les programmes. Ces "Allègements" ont eu des effets néfastes au niveau épistémologique que didactique.

La réforme 2002 : Elle est marquée par la bonne volonté d'une intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement et apprentissage. Selon la loi d'orientation :

- « *Les mathématiques et les sciences sont enseignées dans le but de permettre aux élèves de maîtriser les différentes formes de la pensée scientifique, de les exercer à l'usage des modes de raisonnement et d'argumentation, de les doter de compétences de résolution des problèmes et d'interprétation des phénomènes naturels et des faits humains.* »
- « *Les programmes accordent l'intérêt qui se doit à l'entraînement des apprenants à l'utilisation des technologies de l'information et de la communication comme moyen d'accès au savoir et outil de l'auto formation.* »

3.2. Particulièrement, concernant l'enseignement de l'Analyse au lycée

Les notions enseignées dans le champ de l'analyse réelle pour les élèves dans le cycle secondaire sont principalement, l'ensemble des réels, les suites réelles, les fonctions numériques à variable réelle, la limite de fonction et de suite, la continuité de fonction, la dérivation et l'intégration. En raison des changements des programmes et des curriculums qui ont accompagné les différentes réformes, l'enseignement de l'analyse est passé d'une organisation basée sur des problèmes et peu de justifications théoriques (avant 1968), au tout formel des années 1970, puis à l'introduction d'éléments relatifs aux approximations jusqu'à la réforme de 1993. Actuellement, cet enseignement semble stabilisé autour de la mise en place de sens provisoires à ses concepts d'une manière intuitive évitant par cela le formalisme qui se trouve reporté à l'université laissant place à des manipulations techniques relevant de l'algèbre et des justifications parfois graphiques.

En ce qui concerne les contenus mathématiques qui relèvent de l'Analyse dans les classes de 3^{ème} et 4^{ème} (sections scientifiques)², les items des différentes réformes sont :

Reforme 1958 :

Etude de fonctions numériques d'une variable réelle. Etude des fonctions circulaires. Continuité, limites et dérivation. Fonction réciproque d'une fonction numérique d'une variable réelle. Différentielles et fonctions primitives. Détermination de fonctions par équations différentielles.

Reforme 1968 :

Etude de fonctions numériques d'une variable réelle. Etude de fonctions circulaires. Continuité, limites et dérivation. Notion de suites, notation indicielle, raisonnement par récurrence. Calcul Intégral.

Reforme 1993 :

Fonctions numériques à variable réelle. Etudes et représentations graphiques de quelques exemples. Exploitation des représentations graphiques.

²L'équivalent des classes de première et terminale scientifiques pour le système éducatif français.

Etude de fonctions numériques d'une variable réelle. Etude de fonctions circulaires. Continuité, limites et dérivation. Etude de suites numériques. Calcul Intégral.

3.3. Finalement, en ce qui concerne l'enseignement de la notion de continuité

Jusqu'à la réforme de 1993, la notion de continuité est introduite après celle du concept de limite via un formalisme en présence de quantificateurs : x_0 étant un réel donné, une fonction f définie dans un intervalle ouvert contenant x_0 est dite continue en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0; |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Tout en partant de la définition suivante : « x_0 étant un réel donné, une fonction f définie dans un intervalle ouvert contenant x_0 est dite continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ » (La limite existe et est égale à l'image de x_0 par la fonction f).

A partir des années 90 (après la réforme de 93), le concept de continuité est introduit la première fois pour les élèves de la troisième année à l'aide d'une approche intuitive étant donné que le programme préconise d'éviter le formalisme : il s'agit de

« Reconnaître si une fonction est continue en un point ou sur un intervalle à partir de son expression algébrique ou d'un graphique. »

Les contenus enseignés pour les élèves de la troisième année sections scientifiques³ en rapport avec les premiers concepts de l'analyse sont : « Continuité en un point – Opérations sur les fonctions continues – Continuité sur un intervalle. Limite finie ou infinie en un réel a - Limite finie ou infinie à l'infini – Opérations sur les limites de fonctions – Asymptotes – Branches infinies. Dérivabilité en un point – Dérivabilité sur un intervalle – Fonction dérivée – Opérations sur les dérivées. Liens entre le signe de la dérivée, le sens de variation et les extrema. Etude d'exemples de fonctions de référence »

³ Sections mathématiques, sciences expérimentales, sciences techniques et sciences de l'informatique.

Des commentaires qui accompagnent les contenus à enseigner :

(a) Pour les élèves des sections sciences techniques et sciences de l'informatique

- « *L'étude de continuité ne concerne que les fonctions du programme* ».
- « *On ne donnera pas les définitions de la limite, ces notions seront introduites de façon intuitive et à l'aide de dessin* ».

(b) Pour les élèves des sections mathématique et sciences expérimentales

- « *Tous les résultats concernant les opérations sur les fonctions continues seront admis* ».
- « *Le théorème donnant une condition suffisante pour qu'une équation de la forme $f(x) = k$ possède au moins une solution sera admis* ».
- « *On utilisera la dichotomie pour donner une valeur approchée d'une solution de $f(x) = k$.* »
- « *On donnera les définitions de la limite finie ou infinie d'une fonction en un réel ou à l'infini* ».
- « *On utilisera la notation $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $\lim_a f$* »
- « *Le calcul de limites n'est pas une fin en soi. A travers des situations variées, on veillera à ce que l'apprenant :*
 - ✓ *utilise les résultats sur les fonctions continues pour déterminer la limite finie d'une fonction.*
 - ✓ *utilise les résultats sur les limites finies pour déterminer le prolongement par continuité d'une fonction ;*
 - ✓ *interprète graphiquement les limites finies ou infinies en termes d'asymptotes ou de branches paraboliques.* »
 - ✓ *Utilise une transformation d'écriture adéquate pour déterminer une limite.* »

3.4. La notion de continuité dans les programmes⁴ actuels

Nous allons essayer de déterminer les notions qui entretiennent des relations avec la notion de continuité, et nous cherchons dans la suite des programmes des grandes classes du secondaire, les notions qui vont utiliser la continuité en vue de préciser les connaissances antérieures nécessaires aux élèves pour assimiler la notion en question ainsi que les « tâches attendues » de l'enseignant.

A la réforme de 1993, le programme de mathématique en Tunisie stipule: « *On évitera toute formalisation des définitions relatives à la limite d'une fonction* », mais le nouveau programme, en vigueur depuis Septembre 2006, qui préconise un enseignement de la notion de continuité d'une fonction basé sur une caractérisation graphique et algébrique de la fonction n'a pas signalé de façon explicite cet évitement. D'ailleurs, en troisième année (classe près-bac), il semblerait qu'il y ait là une volonté de réintroduction de « rigueur mathématique » dans les quelques tâches relatives à quelques activités à travers l'appel aux définitions formelles du concept de continuité ; mais les exercices qui figurent dans les manuels scolaires n'organisent pas cet usage du formalisme.

3.4.1. Les concepts mathématiques utilisés dans la notion de continuité dans les programmes actuels

- Intervalle de \mathbb{R} ;
- Valeur absolue ;
- Fonction numérique à variable réelle ;
- Image d'un intervalle par une fonction ;
- Image réciproque d'un intervalle par une fonction ;
- Eléments de logique ;
- Limite ;

3.4.2. Les connaissances ultérieures occupées par la notion de continuité

- Le théorème des valeurs intermédiaires ;
- Limite ;
- Prolongement par continuité ;

⁴ Un extrait des programmes de 3^{ème} et 4^{ème} (sections scientifiques) est en annexe.

- Fonction réciproque ;
- Dérivabilité ;
- Etude de fonction ;
- Limite d'une suite récurrente (du type $U_{n+1} = f(U_n)$, avec U_0 donné).
- La notion de primitive ;
- Fonction logarithme et exponentielle ;
- Calcul intégral ;

4. Les manuels scolaires :

Le manuel scolaire est considéré, par les instructions officielles, comme fondamental pour l'élève et pour le professeur. Il reflète les objectifs, suit de très près les programmes et oriente l'élève vers ce qui est indispensable à savoir. A la limite on peut se passer de consulter les programmes puisqu'on les retrouve à travers le manuel qui est un document officiel unique.

Le manuel scolaire officiel est aussi un outil de travail présent à la maison pour l'élève et l'enseignant.

Un inconvénient majeur est que ce manuel officiel oblige les enseignants à s'y restreindre et limite la liberté de préparation et d'innovation des professeurs.

4.1. Analyse du chapitre « continuité » dans les manuels scolaires

C'est le chapitre 2. Les auteurs des deux manuels proposent un scénario permettant aux enseignants d'atteindre les objectifs assignés par le programme officiel tout en essayant de respecter la rigueur mathématique et le sens mathématique des concepts enseignés. Ils visent un enseignement basé sur « l'énoncé de savoirs et la rencontre de connaissances ».

De façon quasiment linéaire, les auteurs proposent : une introduction de la définition formelle de la continuité d'une fonction en un point, la caractérisation graphique du concept de continuité et l'utilisation de la définition formelle pour étudier la continuité de quelques fonctions en un réel ($x \mapsto \sqrt{x}$ en 1), continuité de \sqrt{f} et $|f|$..., pour prouver qu'une fonction continue garde un signe constant dans un voisinage de x_0 quand $f(x_0) \neq 0$ (Cf. activité « mobiliser ses compétences » page 34).

Contenu du chapitre :

4.1.1 Une première rubrique intitulée « Pour commencer »

Elle comporte trois activités ayant pour objectifs de rappeler :

- La notion de voisinage et ses caractérisations ;
- l'image d'un intervalle (ou un voisinage) par une fonction
- l'image réciproque d'un intervalle (ou un voisinage) par une fonction

L'énoncé de l'**activité 1** de la rubrique « Pour commencer » est

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes.

$$1) |x - 1| < \frac{1}{2} \quad ; \quad 2) \left| x + \frac{1}{2} \right| < 0,1 \quad ; \quad 3) |x - 2| > 0,2$$

Il s'agit d'une activité dans le cadre algébrique (résolution d'inéquations). Les élèves doivent utiliser l'équivalence « $|x - a| < r \Leftrightarrow -r < x - a < r$ » qui doit être disponible (reconnaissance, changement de point de vue) puis il y a deux inéquations à résoudre (à ce niveau d'enseignement nous considérons seulement comme du traitement et pas organisation et traitement). Il s'agit de préparer les élèves à la manipulation de la valeur absolue dans le registre formel de la définition formalisée.

L'énoncé de l'**activité 2** est le suivant :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Représenter sur l'axe des ordonnées l'ensemble des réels y tels que $|y - 2| < \frac{1}{2}$.
2. Représenter sur l'axe des abscisses l'ensemble des réels x tels que $|x + 1| < 0,2$
3. En déduire l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que :

$$\begin{cases} |x + 1| < 0,2 \\ |y - 2| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

C'est cette fois une activité d'exploration pour introduire la notion de bande, mais en deux dimensions étant donné que l'on va caractériser par les bandes la continuité locale : l'ensemble des points M vérifiant un tel système est l'intérieur d'un rectangle.

Dans les questions 1 et 2, les élèves traitent de façon isolée les représentations graphiques des solutions des deux inéquations. Il y a un changement de point de vue habituel entre $|x - a| < r$ et « x dans l'intervalle $]a - r, a + r[$ » puis un changement de cadre quand il s'agit de représenter graphiquement l'intervalle. C'est un changement indiqué explicitement par la question donc à ce niveau d'enseignement, on peut considérer qu'il s'agit d'un traitement avec une adaptation (pas de reconnaissance nécessaire mais changement de point de vue et

un changement de cadre à la charge de l'élève). Il y a ensuite une nouvelle complexité liée au passage des deux dimensions 1 isolément à la dimension 2 dans le cadre graphique : les élèves doivent tracer les droites horizontales et verticales d'équations $y=1,5$; $y=2,5$; $x=0,8$; $x=1,2$. On peut presque considérer qu'il y a un jeu de cadre indiqué dans la mesure où les élèves vont devoir reconnaître que l'ensemble des solutions dans le cadre algébrique correspond à un rectangle dans le cadre graphique.

L'activité 3 : son énoncé est le suivant :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Tracer la parabole d'équation $y = x^2$.
2. a) Représenter l'ensemble des points $M(x, y)$ de la courbe tels que $y \in]0,5, 1,5[$.
b) Déterminer graphiquement l'ensemble des abscisses de ces points.

C'est une activité d'exploration pour introduire le système d'équations d'une portion d'une courbe d'une fonction donnée. L'exercice est cette fois dans le cadre graphique uniquement (avec la courbe d'équation $y = x^2$). Les élèves doivent utiliser les connaissances construites à l'activité précédente (traitement avec une adaptation). Ils doivent tracer les droites horizontales $y=0,5$ et $y=1,5$, visualiser les intersections avec la courbe et en déduire l'intervalle de x correspondant. Il y a un passage d'une dimension à deux dimensions à une dimension qui entraîne une certaine complexité du traitement attendu.

4.1.2 Une deuxième rubrique intitulée « Cours »,


Elle comporte deux paragraphes : le premier paragraphe s'appelle « continuité en un réel », le deuxième « continuité de certaines fonctions usuelles ».

Dans le premier paragraphe « continuité d'une fonction en un réel », sont proposées :

- Une première activité suivie de la définition formelle de la continuité ;
- Une deuxième activité suivie d'un vocabulaire et d'une conséquence qui exprime la caractérisation graphique d'une fonction continue (tracé

continu) et d'une fonction discontinue (tracé présentant un saut ou une rupture). Cette dernière est accompagnée d'illustrations graphiques traduisant ces caractérisations dans le registre graphique.

Dans le deuxième paragraphe intitulé « Continuité de certaines fonctions usuelles », sont proposées deux activités, la première approchant un théorème admis sur la continuité de certaines fonctions usuelles qui est énoncé avant la deuxième activité qui est proposée comme applications directes de ce théorème.

 **Le premier paragraphe est « Continuité en un réel »**

L'énoncé de l'**activité 1** est le suivant, suivi d'un commentaire du manuel :

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x > 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 3x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Représenter la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2. a) Représenter sur l'axe des ordonnées, l'ensemble des réels y tels que $|y - 3| < 0.1$.
b) En déduire graphiquement, une condition suffisante sur x pour que $|f(x) - 3| < 0.1$.
3. Donner graphiquement une condition suffisante sur x pour que $|f(x) - 3| < 0.01$.

L'activité précédente suggère que $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de $f(1)$ dès que x est suffisamment proche de 1.

On dit que f est continue en 1.

Les auteurs proposent donc une introduction de la définition formelle, en suivant un procédé exploratoire graphique, sur une fonction particulière affine par morceaux, en partant de deux exemples correspondant à deux valeurs particulières supposées génériques : $\beta = 0.1$ et $\beta = 0.01$. Mais le choix de ces valeurs considérées semble critique et abusif du fait que, réellement, les élèves n'arrivent pas à voir 0.01 sur leurs graphiques, dans lesquels ils ont l'habitude de prendre une graduation de pas 1 centimètre ou un carreau de leurs cahiers. L'activité graphique ne peut-être que superficielle.

Le commentaire proposé par le manuel « L'activité précédente suggère que $f(x)$ peut être rendu aussi proche de $f(1)$, dès que x est suffisamment proche de 1 », sur lequel l'enseignant va se baser pour introduire la définition formelle de la continuité nécessite un grand travail didactique de la part de l'enseignant au niveau des deux étapes suivantes :

- Une première concernant le mot « suggère » qui se base sur une vision expérimentale graphique : les élèves doivent reconnaître que les deux seules valeurs considérées sont génériques et l'enseignant doit les aider pour cela ;
- Une deuxième concernant la traduction de ce commentaire dans un langage mathématique formel. En effet les activités sont uniquement dans le registre graphique (associées au graphe de la fonction f particulière qui est demandé à la question 1) et le lien avec le langage formel de la définition ne peut pas du tout être immédiat.

La définition formelle est ensuite donnée par le manuel :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

On dit que la fonction f est continue en a si pour tout nombre $\beta > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que si x appartient à I et $|x - a| < \alpha$, alors $|f(x) - f(a)| < \beta$.

Dans les deux étapes mentionnées, nous pensons que les interventions de l'enseignant (en termes d'aide et de proximités) doivent être des éléments importants pour atteindre les objectifs de l'activité en vue d'introduire la définition formelle de la continuité. Mais le discours de l'enseignant peut-il être réellement en proximité avec les activités des élèves sur ce qui leur est proposé ? La définition formelle proposée par le manuel constitue-t-elle vraiment une proximité avec les activités des élèves qui relevaient uniquement du registre graphique ?

Parallèlement à cette définition du nouveau concept de continuité, le manuel aurait pu proposer :

- ✓ D'autres formulations de la définition dans différents registres notamment celui de la langue naturelle en référant aux intervalles du type : « pour tout intervalle ouvert J de centre $f(x_0)$, il existe un intervalle ouvert I de centre x_0

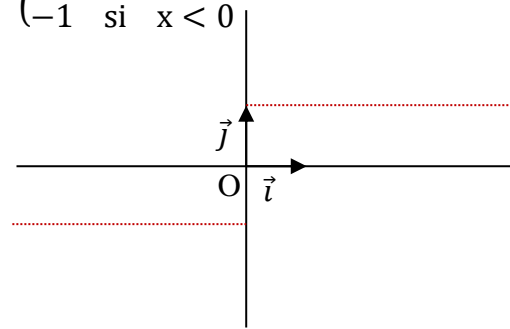
tel que $f(I) \subset J$ ». Les intervalles font référence à la définition topologique de la continuité (avec des voisinages) mais ils s'appuient plus sur la représentation graphique, en considérant les activités préliminaires qui ont été proposées aux élèves comme marche pied (travail sur les intervalles et leurs images).

- ✓ Une illustration graphique mettant en amont ces différents aspects dans la définition : les deux quantificateurs, l'image d'un intervalle par la fonction f ...
- ✓ La dépendance éventuelle des rayons α et β qui figurent dans la définition.

L'activité 2 est la suivante :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On a représenté la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$



1. Reproduire la figure.

2. Calculer $|f(x) - f(0)|$.

3. Peut-on rendre la quantité $|f(x) - f(0)|$ aussi petite que l'on veut, en rapprochant x de 0 ?

L'activité précédente illustre le cas d'une fonction non continue en 0.

Il s'agit d'une succession de traitements. On utilise la définition formelle comme objet pour caractériser la non continuité. Mais la quantité $|f(x) - f(0)|$ calculée vaut toujours 1. La réponse à la question 3 est donc immédiate. Cela peut aussi engendrer de difficultés chez l'élève avec l'expression « rendre aussi petit » qui traduit pour lui « une variabilité » i.e. relatif aux quantités variables. Les auteurs auraient pu évoquer les comportements de la fonction f à gauche et à droite du réel x_0 . Mais l'activité est uniquement dans le registre algébrique et graphique. Le jeu de registre entre l'algébrique et le graphique renvoie uniquement à l'idée de saut dans le cas de la non continuité en un point. On peut penser qu'il est difficile que l'activité illustre la non continuité en 0 dans son lien avec la définition formelle.

Le manuel introduit ensuite le vocabulaire :

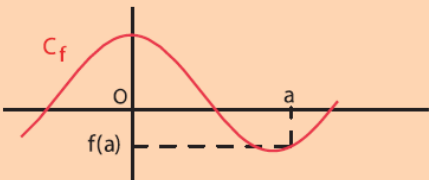
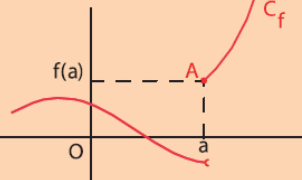
Une fonction non continue en a est dite discontinue en a .

L'activité précédente illustre le cas d'une fonction non continue en 0 .

Nous pouvons faire quelques commentaires :

- ✓ Différentes caractérisations complémentaires de la non continuité en 0 sont laissées à la charge du professeur, notamment celles que nous privilégions en rapport avec cette existence de l'intervalle J qui répond à la condition suffisante $f(I)$ non inclus dans J : on pourrait proposer une illustration graphique de tel cas mettant en jeu l'existence d'un intervalle ouvert J de centre $f(x_0)$ pour le quel tout intervalle ouvert I on ait $f(I)$ non inclus dans J .
- ✓ Le professeur doit, par ailleurs, faire comprendre à ses élèves qu'avec le choix de $\beta=1.5$ par exemple, tout intervalle I ouvert de centre $x_0 = 0$ vérifie $f(I) \subset J$, chose qui ne suffit pas pour dire que f est continue en $x_0 = 0$ (passage du « quel que soit » de la définition formelle de continuité au « il existe » pour la non continuité)

Le manuel donne ensuite des conséquences graphiques :

 <p>Graphique d'une fonction continue f sur un intervalle ouvert I. La courbe C_f est continue et passe par le point $(a, f(a))$. L'axe des abscisses est marqué à a et l'axe des ordonnées à $f(a)$. Le point O est l'origine.</p>	 <p>Graphique d'une fonction discontinue f en a. La courbe C_f présente un saut au point $A(a, f(a))$. L'axe des abscisses est marqué à a et l'axe des ordonnées à $f(a)$. Le point O est l'origine.</p>
<p>Lorsque la représentation graphique de f sur un intervalle ouvert I met en évidence un tracé continu de la courbe, la fonction f est continue en tout réel a de I.</p>	<p>Lorsque la représentation graphique de f sur un intervalle ouvert I met en évidence un saut du tracé de part et d'autre du point $A(a, f(a))$, la fonction f est discontinue en a.</p>

- ✓ La caractérisation graphique intitulée « Conséquence » n'est pas si évidente pour les élèves étant donné que la définition formelle relève du point de vue « approximation » et que cette conséquence ramène l'activité des

élèves dans le registre graphique (graphe continu globalement ou graphe avec un saut) avec le « saut » qui est associé au point de vue « cinématique ». Ce ne peut donc pas non plus être une proximité entre les activités des élèves – dans le registre graphique – et la définition formalisée – dans le registre formel.

- ✓ Notons également que le manuel ne propose pas d'exercices d'application que les élèves ont l'habitude de faire après chaque institutionnalisation d'un nouveau concept.

 **Pour le paragraphe 2 de cette partie du cours « continuité de certaines fonctions usuelles »**

Deux activités sont proposées :

Activité 1: elle consiste à vérifier la continuité d'exemples simples de fonctions et en se référant à la reconnaissance graphique du concept de continuité. La méthode est indiquée, les tâches sont simples et isolées et les activités attendues sont des activités de traitement uniquement.

Activité 2 : c'est une application directe du théorème (admis) énoncé précédemment approché par l'activité 1.

Théorème (admis)

Toute fonction constante est continue en tout réel a .
 La fonction $x \mapsto x$ est continue en tout réel a .
 Toute fonction linéaire est continue en tout réel a .
 Toute fonction affine est continue en tout réel a .
 La fonction $x \mapsto x^2$ est continue en tout réel a .
 La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout réel non nul a .
 La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en tout réel strictement positif a .
 Toute fonction polynôme est continue en tout réel.
 Toute fonction rationnelle est continue en tout réel où elle est définie.

Extrait du manuel : « Théorème admis page 24 »

 **Le paragraphe 3 se rapporte à la « Continuité de $|f|$ »**

Dans l'objectif de démontrer le théorème (si f est continue en un réel a alors $|f|$ est continue en a) le manuel propose cette activité invitant l'élève à se référer à

la définition formelle de la continuité. Le concept de continuité est utilisé comme un *objet* pour traduire les continuités respectives de f et $|f|$.


Deux sous tâches (appelées toujours activités dans le manuel) sont proposées :

Activité 1 : la question (1) est « montrer que $||c| - |d|| \leq |c - d|$ ». C'est un traitement (non immédiat) dans le registre algébrique et qui ne concerne pas la continuité.

La question 2 est « montrer que si f est continue en a alors $|f|$ est continue en a »

- ✓ L'élève doit utiliser les connaissances construites précédemment sur la définition de continuité (niveau de mise en fonctionnement mobilisable, pas de reconnaissance à ce niveau-là). Il y a une organisation attendue et à chaque étape un traitement spécifique dans le registre formel, ce qui rend particulièrement complexe la tâche.
 - Il doit partir de la définition formelle traduisant la continuité de f en a ;
 - Il part d'un réel $\beta > 0$ tel que $||f(x)| - |f(a)|| < \beta$ et se lance dans la recherche $\alpha > 0$ tel que
 Pour tout x vérifiant $|x - a| < \alpha$ alors $||f(x)| - |f(a)|| < \beta$ (organisation)
 - Il exploite le résultat de la première question : $||f(x)| - |f(a)|| < |f(x) - f(a)|$ - traitement en réinvestissant et adaptant une question antérieure
 - Il doit reconnaître qu'il cherche une condition suffisante – reconnaissance au niveau de la logique du raisonnement.
- ✓ Le rôle (médiat) du professeur en terme d'aides (procédurales) est sûrement très important pour que les élèves arrivent accomplir cette tâche.

L'activité 2 est une application directe du théorème qui vient d'être démontré et énoncé.

 **Le paragraphe 4** se rapporte aux opérations sur les fonctions continues.

Le théorème est admis et énoncé, il est suivi d'une activité 1 qui n'est autre qu'une application directe.

✿ **Le paragraphe 5 se rapporte à la continuité de \sqrt{f} .** Les auteurs du manuel proposent deux activités, l'une traitant un exemple particulier et l'autre propose une démonstration du théorème. On y revient dans le paragraphe suivant.

Les deux méthodes adoptées font appel aussi à la définition formelle de la continuité et encore une fois où le concept de continuité prend le statut d'objet.

Dans ces deux activités, les tâches proposées se ramènent à l'utilisation des méthodes déjà indiquées au moyen de déductions guidées.

Les activités 3, 4 et 5 sont des applications directes du théorème ainsi démontré et énoncé.

Dans les deux dernières, les fonctions proposées ne sont pas données par leurs expressions. Les élèves peuvent facilement les retrouver après avoir calculé des distances en utilisant les coordonnées de points donnés du plan muni d'un repère orthonormé.

✿ **Le paragraphe 6** de cette partie cours se rapporte à l'introduction des concepts de continuité à gauche et continuité à droite.

Pour ce faire, deux activités sont proposées suivies des définitions de ces deux nouveaux concepts, suivies du théorème unifiant la continuité, la continuité à gauche et la continuité à droite.

Les auteurs du manuel ont choisi encore une fois d'introduire ces notions de continuité à gauche et continuité à droite au moyen de définitions formelles.

Les activités 3 et 4 proposées traitent des exemples d'application du théorème ainsi énoncé.

Les auteurs terminent ce paragraphe par l'étude de la continuité (à gauche et/ou à droite) de \sqrt{f} en un réel a où f est une fonction continue (à gauche et/ou à droite), avant de proposer une cinquième activité comme application directe de ce dernier résultat énoncé comme théorème.

🌸 **Le paragraphe suivant (N°7)** de ce cours se rapporte à l'aspect global de la notion de continuité : « Continuité d'une fonction sur un intervalle ». Nous décrivons maintenant très brièvement dans la mesure où notre travail ne porte que sur la notion de continuité locale en un point.

Des définitions sont proposées et suivies de deux résultats (conséquence 1 et 2) en rapport avec la continuité des fonctions polynômes et rationnelles sur leurs domaines de définition.

Deux autres activités permettant aux élèves de s'entraîner à l'application de ces théorèmes (souvent appelés « théorèmes généraux »).

🌸 **Image d'un intervalle par une fonction continue**

Le théorème énonçant l'image d'un intervalle par une fonction continue est admis (conformément aux directives du programme officiel) mais le manuel propose quand même trois activités permettant d'approcher ce résultat (un exemple de fonction continue et deux autres discontinues). La détermination de l'image d'un intervalle par une fonction continue se fait par le recours au calcul algébrique ou graphiquement. Les questions sont toutes fermées et les méthodes sont indiquées.

🌸 **Résolution d'équations de la forme $f(x) = k$**

Trois activités proposées en vue d'approcher le théorème des valeurs intermédiaires qui est admis (conformément aux directives du programme officiel). Ce théorème n'est pas nommé.

L'énoncé de ce théorème est accompagné d'une illustration graphique.

L'activité 4 proposée est une application de ce théorème, elle traite des exemples de dichotomie pour donner une valeur approchée d'une solution de l'équation

$$[f(x) = k].$$

Les rubriques « QCM » visent à permettre à l'élève de faire sa propre évaluation.

La rubrique « Vrai ou Faux » vise à l'apprentissage progressif des règles logiques.

Dans la rubrique « Mobiliser ses compétences », le manuel propose deux situations :

La situation 1 a pour objectif de prouver le résultat suivant :

« Étant donnée une fonction continue, définie sur un intervalle ouvert contenant un réel a . si $f(a) \neq 0$ alors il existe un intervalle ouvert de centre a tel que f garde un signe constant (celui de $f(a)$) ». Cette situation nous intéresse particulièrement dans la mesure où elle fait mobiliser la définition de la continuité locale comme outil pour répondre à la question. On y revient aussi dans le paragraphe suivant.

La situation 2 : une fonction f est donnée par son expression $f(x) = 5x^3 - 10x^2 + 8x - 10$. Il s'agit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et de s'entraîner à l'usage de la méthode de dichotomie pour donner une valeur approchée d'une solution de $[f(x) = 0]$. Cela ne concerne pas la définition de la continuité locale.

4.1.3 La rubrique « Exercices et Problèmes »

Le manuel propose 20 exercices. Ils se rapportent à :

- la reconnaissance de la continuité d'une fonction en un point ou sur un intervalle. Cette reconnaissance se fait à partir de l'expression algébrique (théorème généraux) ou bien d'un graphique.
- L'application des théorèmes du cours : en particulier, l'image d'un intervalle par une fonction continue, les équations du type $[f(x) = k]$, l'usage de la méthode de dichotomie pour trouver une valeur approchée d'une équation de la forme $[f(x) = 0]$ où f est une fonction continue.
- Les exercices ne mettent donc pas en jeu la définition formelle de la continuité en un point.

4.2. Le manuel scolaire et la place de la définition formelle dans l'enseignement de la notion de continuité.

Pour les manuels des troisièmes et quatrièmes années sections mathématique et sciences expérimentales, le recours à la définition formelle de la continuité est fait dans très peu d'occasions :

- « Pour la démonstration du théorème énonçant la continuité de $|f|$, dont on a déjà parlé dans le paragraphe précédent.

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

Si f est continue en a , alors $|f|$ est continue en a . »

[3^{ème} Maths, Tome1, Activité1, page 25]

On a vu que pour cette démonstration, le manuel propose deux sous tâches :

1. Montrer que pour tous réels c et d , on a $||c| - |d|| \leq |c - d|$.
2. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a .

Montrer que si f est continue en a , alors $|f|$ est continue en a .

- Pour les activités 1 et 2 qui introduisent le théorème qui concerne la continuité de \sqrt{f} ; l'activité 1 étant en fait préparatoire à l'activité 2. L'activité 1 est divisée en 4 sous-tâches. L'activité 2 est divisée en 4 sous tâches.

Activité1 : [3^{ème} Maths, 3^{ème} sciences expérimentales, Tome1, Activité1, page 26]

1. Représenter la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2. a) Montrer que $\sqrt{1+x} - \sqrt{2} = \frac{x-1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{2}}$
 b) En déduire que $\sqrt{1+x} - \sqrt{2} \leq \frac{x-1}{\sqrt{2}}$
 c) La fonction f est-elle continue en 1 ?

Activité2 : [3^{ème} Maths, 3^{ème} sciences expérimentales, Tome1, Activité2, page 26]

Soit f une fonction positive sur un intervalle ouvert I . Soit a un réel de I tel que f soit continue en a .

1. On suppose que $f(a) > 0$;

a) Montrer que pour tout réel x de I , $\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(a)} = \frac{f(x)-f(a)}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}}$

b) En déduire que pour tout réel x de I , $|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(a)}| \leq \frac{|f(x)-f(a)|}{\sqrt{f(a)}}$

c) En déduire que \sqrt{f} est continue en a .

2. On suppose que $f(a) = 0$.

a) Ecrire la définition de la continuité de f en a .

b) En déduire que \sqrt{f} est continue en a .

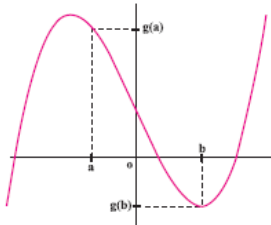
- Pour prouver un résultat sur les fonctions continues à savoir (c'est la partie « mobiliser ses compétences » dont on a parlé plus haut :

« f est une fonction continue sur un intervalle ouvert contenant un réel x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$ alors il existe un intervalle ouvert de centre x_0 sur le quel f est du signe de $f(x_0)$. » [3^{ème} Maths, Tome1, Situation1, page 34]

Mobiliser ses compétences

Situation 1

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
On a représenté ci-contre la courbe représentative d'une fonction g définie sur un intervalle ouvert.



1. Soit un réel a tel que la fonction g est continue en a et $g(a) > 0$.

a. Représenter l'ensemble des points $M(x, g(x))$ tels que $\frac{1}{2}g(a) < g(x) < \frac{3}{2}g(a)$.

b. Montrer qu'il existe un intervalle $]a-h, a+h[$ tel que pour tout $x \in]a-h, a+h[$, on a $g(x) \in \left] \frac{1}{2}g(a), \frac{3}{2}g(a) \right[$.

c. En déduire que la fonction g reste strictement positive sur cet intervalle.

2. Soit un réel b tel que la fonction g est continue en b et $g(b) < 0$.
Montrer qu'il existe un intervalle $]b-h, b+h[$ sur lequel g reste strictement négative.

- Les auteurs proposent aussi une démonstration du théorème suivant concernant la limite en un réel a d'une fonction continue en a :

« Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .
 f est continue en a , si et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. »

Activité1 [3^{ème} Maths, Tome1, Activité1, page 42]

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

1. On suppose que f est continue en a .
 - a. Ecrire la définition de la continuité de f en a .
 - b. En déduire que f admet une limite en a , que l'on déterminera.
2. On suppose que f admet pour limite en a le réel $f(a)$.

Montrer que f est continue en a .

Dans le paragraphe « Calcul de limites » sont proposées deux activités permettant de prouver le théorème suivant :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel a de I et soit g une fonction définie sur l'intervalle I .

Si g est continue en a et si $g(x) = f(x)$ pour tout $x \neq a$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(a)$

Les énoncés des deux activités sont :

- **Activité1 :**

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = |x|$.

1. Ecrire la définition de la continuité de g en 0 .
2. Soit f la fonction définie pour tout réel non nul x , par $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$
 - a. Montrer que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \neq 0$.
 - b. En déduire que f admet une limite en 0 , que l'on déterminera.

- **Activité2 :**

Soit g une fonction définie sur un intervalle ouvert I et continue en un réel a de I .

1. Ecrire la définition de la continuité de g en a .
2. Soit f une fonction définie sur I , sauf peut-être en a et telle que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \neq a$.

Montrer que f admet une limite en a , que l'on déterminera.

- « Pour la preuve de la continuité de la fonction composée » [4^{ème} Maths, Tome1, page 12].
- « Pour la preuve des deux théorèmes concernant les limites et ordre » [4^{ème} Maths, Tome1, page 14].

Comme nous avons dit dans le paragraphe précédent, la définition n'intervient dans aucun exercice. Elle est un outil de preuve de nouveaux théorèmes ou des résultats concernant les fonctions continues en général.

4.3 Synthèse de l'étude du manuel sur la continuité

Entre les années 1990 et 2006, le programme de mathématique stipule: « *On évitera toute formalisation des définitions relatives à la limite d'une fonction* » L'organisation choisie dans les manuels des classes terminales met donc une insistance importante sur l'algèbre des limites, avec quelques techniques de majorations *ou de* minoration. Selon les objectifs des programmes, l'élève doit être capable d'étudier *et/ou* de calculer des limites de fonctions à partir des théorèmes d'opérations sur les limites, des théorèmes relatifs aux limites et ordres et des limites de fonctions de références qui sont : $x \mapsto x$, $x \mapsto a$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$. Après 2006, cette mention (directive) est enlevée des commentaires du programme 2006, ce qui permet aux auteurs des manuels de donner les définitions formalisées des notions de limite et continuité avec quelques utilisations pour démontrer quelques résultats. Il y a donc comme nous l'avons relevé avec l'analyse des programmes une volonté de réintroduction de « rigueur mathématique » dans les quelques tâches relatives aux activités citées plus haut et à travers l'appel aux définitions formelles des concepts de limite et continuité.

Mais les exercices qui figurent ensuite dans les manuels scolaires des classes de troisième sections mathématique et sciences expérimentales n'organisent pas cet usage du formalisme sauf dans des preuves de théorèmes généraux. Comment dès lors définir le domaine de travail et le niveau de conceptualisation visé – avec un niveau de rigueur attendu des élèves adéquat ? Il y a des sortes d'ambiguïté entre les ambitions des manuels, les programmes et aussi les exercices proposés aux élèves. En outre, et c'est ce que nous retenons le plus, l'articulation entre l'intuition graphique (paradigme AG), les validations algébriques (théorèmes généraux dans le paradigme AC) et les outils de validation formel (paradigme AI) ne sont pas du tout assumés par le manuel qui laisse cette responsabilité aux enseignants (qui du coup en éprouvent beaucoup de difficultés comme on a vu dans la partie sur les questionnaires).

Les auteurs ont choisi de mettre en place une caractérisation de la continuité à travers le tracé de sa courbe (tracé continue ou non, dans le paradigme AG) mais les définitions (dans AI) sont presque parachutées (avec une seule activité pour introduire la définition formelle de la continuité d'une fonction en un point via un raisonnement graphique), mettant l'enseignant et ses élèves dans une situation difficile au niveau de la déduction voulue au moyen de la phrase : « l'activité précédente suggère que $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de $f(1)$, dès que x assez proche de 1 ». Comme on a relevé plus haut, le discours de l'enseignant peut-il être réellement en proximité avec les activités des élèves sur ce qui leur est proposé ? La définition formelle proposée par le manuel constitue-t-elle vraiment une proximité avec les activités des élèves qui relevaient uniquement du registre graphique ?

Il y a une absence totale de l'approche cinématique de la notion de continuité locale dans ce paradigme AG, au profit d'une approche uniquement « formelle » qui relève d'un autre paradigme (AI). Appuyée uniquement sur des activités dans le registre graphique, cette approche s'avère sûrement insuffisante pour accompagner la compréhension par les élèves de la définition formelle. Nous avons vu plus haut que les deux approches sont liées de façon dialectique et que l'approche cinématique est nécessaire (Bkouche).

Le scénario proposé par le manuel est également marqué par le passage trop rapide à l'aspect global de la continuité (continuité sur un intervalle, image d'un intervalle par une fonction continue ...). Les auteurs du manuel n'ont proposé aucune application pour la mise en place de la définition formelle (pas d'exemples, pas d'exercices d'application) sauf quelques situations de preuve de théorèmes généraux. Les exercices ne concernent que la reconnaissance de la continuité d'une fonction en un point ou sur un intervalle, à partir d'expression algébrique ou de graphique. Comment dès lors ne pas retrouver les résultats de Tall et Vinner sur les concepts images prépondérants chez les étudiants, à savoir « tracé d'un seul tenant », « pas de saut » et sur « une seule formule » ?

II. Niveau de conceptualisation visé et domaine de travail associé

Rappelons schématiquement que le niveau de conceptualisation visé (ou le domaine de travail associé) pour la notion de continuité est défini par la détermination d'un ensemble de tâches (ou de problèmes) et activités mettant en jeu cette notion, conformément aux programmes. Il suppose la disponibilité de ses caractères objets et outils (Douady 1986) et est associé à des mises en fonctionnement spécifiques attendues sur ces tâches (niveau de rigueur spécifique, formalisme attendu, modes de raisonnements spécifiques, cadres et registres associés, connaissances disponibles et mobilisables spécifiques...). Cette disponibilité inclut l'organisation des connaissances impliquées et associées à la notion de continuité, nouvelles et anciennes. Il s'agit d'une vision simplifiée des champs conceptuels de Vergnaud, mais prenant en compte explicitement les programmes et les ressources des enseignants (le manuel notamment ici).

Dans ce qui précède, nous avons essayé d'établir un « relief » sur la notion « continuité » en précisant « *les spécificités de cette notion dont font partie sa caractérisation mathématique, son insertion dans les programmes scolaires et dans les acquis antérieurs supposés des élèves, ainsi que le listage des difficultés d'apprentissage déjà répertoriés* ».

Dans notre cas, le niveau de conceptualisation de la notion de « continuité » qu'on peut atteindre à partir du programme est repéré par :

- La disponibilité des définitions et des propriétés données dans le cours (peut se vérifier à l'occasion d'exercices ou de questions de cours) – notamment la définition formelle de continuité comme objet ;
- La flexibilité entre les différentes approches de la continuité, cinématique, approximation et le lien avec les formules algébriques ;
- La flexibilité entre les différents registre de travail de la continuité : le registre graphique, le registre algébrique et le registre formel (symbolique) ;
- La flexibilité associée entre des activités relevant des trois paradigmes de l'analyse : géométrique, calculatoire et infinitésimale ;

- L'aspect local de la continuité en un point et pas seulement une approche globale de la continuité par la forme du graphique ou de l'expression algébrique ;
- Les types de raisonnement, notamment l'entrée dans le raisonnement par condition suffisante caractéristique de l'analyse infinitésimale ;
- La disponibilité de la définition de continuité comme outil pour la résolution de certains exercices et problèmes qui rentrent dans le cadre du programme et qui la mettent en jeu ;
- Cela implique un certain niveau de rigueur, que nous pouvons aussi préciser :
 - ✓ On ne veut pas manipuler le formalisme pour lui-même, ce n'est pas une fin en soi. La manipulation de la définition de la négation n'est par exemple pas un objectif, toutefois on espère que les élèves puissent dépasser l'idée de saut dans le seul registre graphique et parler en termes d'intervalles ou de voisinages.
 - ✓ Il ne s'agit pas de nier la définition formelle mais qu'elle soit outil pour les élèves dans des situations où ils ne peuvent pas statuer sur la continuité de fonctions par des théorèmes généraux (comme la fonction partie entière par exemple).
 - ✓ On ne va pas creuser le problème de la continuité de \mathbb{R} . Par exemple le travail sur la fonction caractéristique de \mathbb{Q} tel qu'il est proposé par Tall et Vinner ne saurait être attendu dans le niveau que nous cherchons à définir. Il s'agit donc de sélectionner un certain nombre de fonctions faciles, dans le cadre du programme, celles qui sont les fonctions dites de référence (les fonctions du type $X_{\mathbb{Q}}$ et celles qui présentent une discontinuité de deuxième espèce n'en font pas partie)

Des exemples de tâches relevant de ce domaine de travail sont déjà connus. Ils nous ont servi à concevoir les questionnaires préliminaires et nous les avons également rencontrés dans le manuel qui reste le support principal de l'enseignement.

Un exemple de situation est proposé par le manuel à la page 34, situation 1 intitulée « mobiliser ses compétences » dont l'objectif est de prouver un résultat sur les fonctions continues à savoir :

« f est une fonction continue sur un intervalle ouvert contenant un réel x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$ alors il existe un intervalle ouvert de centre x_0 sur lequel f est du signe de $f(x_0)$. »

Deux autres exemples sont issus du deuxième questionnaire proposé aux étudiants et seront repris dans le post test qui nous servira dans le chapitre 9 à la validation externe de notre ingénierie :

Question6 :

« Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} vérifiant : pour tout réel x , $|f(x)| \leq 3|x|$
 Montrer que f est continue en $x_0 = 0$ ».

Dans cette question on peut utiliser la caractérisation par la limite de la fonction.

Question7 :

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} telle que $f(1) > 0$
 Montrer qu'il existe un intervalle I ouvert centré en 1 tel que : pour tout réel x appartenant à I , $f(x) > 0$.

Nous complétons cette liste par d'autres exercices (liste non exhaustive) :

- ✓ Sur des exemples simples, prouver la continuité d'une fonction donnée par son expression en un point x_0 donné de son domaine de définition :
 - $f(x) = ax + b$, x_0 donné, a et b donnés
 - $f(x) = ax + b$, x_0 quelconque
 (i.e. : établir la continuité d'une fonction affine en un réel x_0 donné en utilisant la définition formelle d'une manière guidée)
- ✓ En utilisant la définition formelle, établir la continuité de $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$ au point $x_0 = 0$

- ✓ Etant donnée une fonction f qui est continue en un réel x_0 , prouver la continuité de f^2 en x_0 (activité similaire à celle proposée dans le manuel qui concerne \sqrt{f} et $|f|$), les techniques de majorations et de minoration avouées nécessaires peuvent être approchées par l'intermédiaire d'indications par exemple.
- ✓ Etablir la continuité d'une fonction vérifiant une certaine propriété (exemple celle donnée dans le test : f est une fonction définie sur un intervalle I vérifiant [pour tout $x \in I, |f(x)| < k|x|$ ou x^2 , où k est une constante réelle donnée (ici : $x_0 = 0$)
 Dans la même idée : pour une fonction f vérifiant : $|f(x) - f(x_0)| < k|x - x_0|$
 (Ou par exemple : « en admettant que pour tout réel x , $|\sin x| < |x|$... montrer que la fonction *sinus* est continue en 0.)
- ✓ Montrer que si f est une fonction définie sur un intervalle I contenant un réel x_0 tel que $f(x_0) > 0$ alors il existe un intervalle J contenant x_0 tel que $f(x) > 0$, pour tout $x \in J$
- ✓ Etant donnée une fonction f donnée à l'aide d'une représentation graphique qui présente une discontinuité en un point x_0 de son domaine de définition. Déterminer graphiquement une valeur de β pour laquelle tous les voisinages de x_0 ont une image par f non incluse dans le voisinage de $f(x_0)$ de rayon β . (ou autres formulations similaires)
- ✓ Des activités analogues permettant aux élèves d'établir le lien entre la valeur de β et la valeur du saut qui caractérise une discontinuité. L'exercice suivant en est un exemple :

« Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

- (a) Soit α un réel strictement positif, donner un réel x_1 de l'intervalle $]0, \alpha[$ vérifiant $f(x_1) > \frac{3}{2}$.
- (b) En déduire que f n'est pas continue en 0.