

Rappel sur les intégrales de chemin

2.1 Concepts d'intégrale de chemin

L'étude de la mécanique quantique par l'outil fonctionnel puissant dit l'intégrale de chemin est un besoin naturel qui surgît en mettant en correspondance de façon très explicite sa relation à la mécanique classique et on pourrait estimer, sans prétention que cette intégrale de chemin est l'une des découvertes théoriques les plus significatives dans le domaine de la physique quantique.

Cette notion d'intégrale de chemin a été introduite pour la première fois dans les années 1920 par Norbert Wiener comme méthode pour résoudre des problèmes dans la théorie de la diffusion et du mouvement Brownien faisant intervenir des intégrales en dimension infinie mais sans relation avec le domaine quantique et ses phénomènes.[1]. Ce fut en 1942 que Richard Feynman réinventa ces intégrales de chemin suite à des remarques pertinentes de Dirac mettant en relation le domaine classique et quantique et ceci a permis de représenter le propagateur de l'équation de Schrödinger comme une intégrale en dimension infinie et créa le lien avec le noyau de la chaleur fonction fondamentale en théorie de la diffusion.[6].

La formulation de la mécanique quantique basée via des intégrales de chemin bien qu'elle semble mathématiquement plus compliquée que la formulation habituelle basée sur des équations aux dérivées partielles, elle est bien adaptée aux systèmes à plusieurs degrés de liberté tels que la théorie des champs ou les systèmes statistiques et où un formalisme de type Schrödinger serait beaucoup plus complexe [2]. En effet, il permet une transition facile et rapide de la mécanique quantique avec un petit nombre de degrés de liberté (et de particules) à la théorie quantique des champs ou à la physique statistique où la dimension croît indéfiniment (ainsi que le nombre de particules) . En particulier, les intégrales de chemin généralisées au concept du champ conduisent à une compréhension des relations profondes entre la théorie des champs quantiques et les phénomènes critiques dans les transitions de phase

continues.

Une intégrale de chemin est une intégrale fonctionnelle, c'est-à-dire que, où nous intégrons sur un espace de fonctions à l'encontre d'une intégrale ordinaire (par exemple intégrer sur des nombres réels ou complexes). Les intégrales de chemin sont définies comme des objets mathématiques qui peuvent être considérés comme des généralisations à un nombre infini des variables paramétrés par un indice continu (chemin évoluant en temps) et partagent parfois des propriétés analytiques et algébriques que celles des intégrales habituelles. Les grandeurs physiques sont exprimées sous forme de moyennes sur tous les chemins possibles mais dans la limite semi-classique $\hbar \sim 0$, les principales contributions provenant de tous les chemins se réduisent parfois aux chemins proches des chemins classiques. Ainsi, les intégrales de chemin conduisent à une compréhension intuitive et à des calculs simples de quantités physiques dans la limite semi-classique.[3]

Finalement, nous pouvons dire que la caractéristique la plus captivante de la technique est qu'elle fournit une approche unifiée pour résoudre des problèmes dans différentes branches de la physique théorique telles que la mécanique quantique, la théorie quantique des champs, la théorie des super cordes et la statistique

2.2 Propagateur de Feynman

2.2.1 Définition

Le propagateur est un outil mathématique qui permet de calculer l'amplitude de transition d'un système physique de l'état initial $\psi(x, t_0)$ à l'état final $\psi(y, t)$ et qui s'exprime par la relation suivante :

$$\psi(y, t) = \int dx K(y, t; x, t_0) \psi(x, t_0). \quad (2.1)$$

Cette équation exprime l'évolution temporelle en la mécanique quantique de la fonction d'onde $\psi(y, t)$ avec $\psi(x, t_0)$ sa valeur initial et $\psi(y, t)$ est solution de l'équation de Schrodinger.

Il est facile d'obtenir l'expression du propagateur en terme d'une intégrale de chemin (intégrale fonctionnelle) en utilisant l'équation de Chapman-Kolmogorov (comme exemple : une marche aléatoire ou un mouvement Brownien) qui est une généralisation de l'équation (1.1) et qui s'écrit sous la forme

$$K(x_n, t_n; x_0, t_0) = \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \prod_{n=1}^N K(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}) \quad (2.2)$$

Dans ce qui suit nous allons obtenir l'expression de cette dernière en utilisant l'opérateur d'évolution.

2.3 Propagateur et opérateur d'évolution

La solution formelle de l'équation de Schrodinger peut être exprimée par un opérateur dit opérateur d'évolution qui exprime l'état du système $|\Psi(t)\rangle$ à l'instant t à partir de l'état initial $|\Psi(t_0)\rangle$ à l'instant t_0 suivant la formule

$$|\Psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle \quad (2.3)$$

où $U(t, t_0)$ est l'opérateur d'évolution. Il est clair que le propagateur n'est rien d'autre que l'élément de matrice de cet opérateur en représentation de configuration. En effet, multiplions par le bra $\langle y|$ et insérons la relation de fermeture $\int dx |x\rangle \langle x|$, nous obtenons alors

$$\langle y| \Psi(t)\rangle = \int dx \langle y| U(t, t_0) |x\rangle \langle x| \Psi(t_0)\rangle \quad (2.4)$$

$$\Psi(t, y) = \int dx \langle y| U(t, t_0) |x\rangle \Psi(t_0, x) \quad (2.5)$$

avec $\Psi(t, y) = \langle y| \Psi(t)\rangle$ (en notation de dirac)

En comparaison avec l'équation (1.1) on a

$$K(y, t; x, t_0) = \langle y| U(t, t_0) |x\rangle \quad (2.6)$$

Pour un système physique régi par l'hamiltonien $\hat{H}(t)$ (ou bien \hat{H} indépendant du temps) cet opérateur d'évolution est solution de l'équation

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} &= \hat{H}(t)U(t, t_0) \\ U(t_0, t_0) &= I \end{aligned} \quad (2.7)$$

et dont la solution est

$$U(t, t_0) = T_D \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t) dt\right)$$

où T_D est l'opérateur de Dyson qui ordonne les temps en progressant de $t_0 \rightarrow t$. Pour \hat{H} indépendant du temps, bien sûr la solution est comme l'habituel la fonction exponentielle

$$U(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t - t_0)\right) \quad (2.8)$$

Ce qui donne enfin le propagateur comme élément de matrice suivant

$$K(y, t; x, t_0) = \langle y| T_D \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t) dt\right) |x\rangle \quad (2.9)$$

L'idée de Feynman, basée sur des remarques de Dirac reliant la mécanique quantique à la mécanique classique utilisant les transformations canoniques quand $\hbar \rightarrow 0$, est de réécrire cet élément de matrice au moyen du lagrangien du système en subdivisant l'intervalle du temps $[t_0, t]$ en intervalles infinitésimaux de durée $\epsilon \rightarrow 0$. Le postulat est donné par

$$K(y, t; x, t_0) = C(\epsilon; y, x) \exp\left(\frac{i}{\hbar} L(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{t})\epsilon\right) \quad (2.10)$$

avec $\tilde{t} \in [t_0, t_0 + \epsilon]$, \tilde{q} entre (x, y) et $\dot{\tilde{q}} = \frac{y-x}{\epsilon}$ pour $\epsilon \rightarrow 0$. La validation de ce postulat sera donnée par la suite en utilisant la formule de Trotter dans l'expression formelle (2.10). $C(\epsilon; y, x)$ est une constante de normalisation qui assure que

$$K(y, t_0 + \epsilon; x, t_0) \rightarrow \delta(y - x) \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0$$

2.4 Idée du propagateur de Feynman

La formulation intégrale du chemin de la théorie quantique représente l'amplitude de transition qui est donnée par la somme sur tous les chemins possibles allant de la position initiale q_i à l'instant t_i vers la position finale q_f à l'instant t_f et qu'on appelle aussi propagateur de feynman $K(q_f; t_f | q_i; t_i)$.

Feynman exprime ce propagateur comme une intégrale fonctionnelle sur tous les chemins continus comme suit

$$\begin{aligned} K(q_f; t_f | q_i; t_i) &= \int Dq(t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} L(q(t), \dot{q}(t)) dt\right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{(q_i; t_i)}^{(q_f; t_f)} \left(\frac{m}{2\pi i \epsilon \hbar}\right)^{N/2} \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N L(q_n, \frac{q_n - q_{n-1}}{\epsilon})\epsilon\right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

On a en notation continue

$$Dq(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \epsilon \hbar}\right)^{N/2} \prod_{n=1}^{N-1} (dq_n) \quad (2.12)$$

et bien sûr l'action est donnée par

$$S[q(t)] = \int_{t_i}^{t_f} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (2.13)$$

et $L(q(t), \dot{q}(t))$ le lagrangien de système. Comme on l'a dit, La validation de ce postulat sera donnée par la suite en utilisant la formule de Trotter dans l'expression formelle .

2.5 Oscillateur harmonique en intégrale de chemin

Avant d'étudier le modèle de Jaynes-Cummings dans sa version intégrale de chemin, il est naturel de savoir résoudre les problèmes simples de la mécanique quantique tels que la particule libre et celui de l'oscillateur harmonique dans cette formulation de Feynman. Par exemple, voyons comment on obtient le propagateur de l'oscillateur harmonique.

Considérons un système physique d'un oscillateur harmonique simple à une dimension donné par le lagrangien suivant

$$L(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad (2.14)$$

Comme nous l'avons vu, la définition du propagateur entre le point initial x_a à l'instant t_a et le point final x_b à l'instant t_b s'écrit par la formule continue suivante

$$K(x_b; t_b | x_a; t_a) = \int_{(x_a; t_a)}^{(x_b; t_b)} Dx(t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(x(t), \dot{x}(t))\right\} \quad (2.15)$$

Remarquons que le lagrangien est quadratique en position et vitesse et pour ce genre de lagrangien le calcul fonctionnel peut se faire simplement en faisant des variations fonctionnelles puisque l'apport de ces variations s'estompe à l'ordre deux de la variation. Ceci est équivalent à dire que les intégrales fonctionnelles sont de type gaussien. Dans ce cas, un résultat simple et important qui relie l'évolution quantique à son analogue classique, dit approximation semi-classique, apparaît comme résultat exact et est donné par

$$K^{(S.C)}(x_b; t_b | x_a; t_a) = \sqrt{\frac{1}{2\pi i \hbar} \frac{\partial^2 S_{cl}(x_b; t_b, x_a; t_a)}{\partial x_b \partial x_a}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_b; t_b, x_a; t_a)\right) \quad (2.16)$$

Dans le cas de l'oscillateur harmonique, on a exactement la formule suivante

$$K^{(S.C)}(x_b; t_b | x_a; t_a) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_b; t_b, x_a; t_a)\right) \int_{(0; t_a)}^{(0; t_b)} D\eta(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \delta^2 S(\eta)\right) \quad (2.17)$$

c'est à dire on a comme calcul exact de ce qu'on appelle le facteur de fluctuation

$$\int_{(0; t_a)}^{(0; t_b)} D\eta(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \delta^2 S(\eta)\right) = \sqrt{\frac{1}{2\pi i \hbar} \frac{\partial^2 S_{cl}(x_b; t_b, x_a; t_a)}{\partial x_b \partial x_a}} = A(t_b, t_a)$$

Occupons alors de l'équation classique d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (2.18)$$

nous avons à résoudre alors l'équation de mouvement classique suivante

$$\ddot{x}_{cl}(t) + \omega^2 x_{cl}(t) = 0 \quad (2.19)$$

Sa solution est de la forme suivante

$$x_{cl}(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (2.20)$$

avec

$$x_a(t) = A \sin \omega t_a + B \cos \omega t_a \quad (2.21)$$

$$x_b(t) = A \sin \omega t_b + B \cos \omega t_b \quad (2.22)$$

et par un calcul simple nous avons

$$A = \frac{x_a \cos \omega t_b - x_b \cos \omega t_a}{\sin \omega(t_b - t_a)} \quad (2.23)$$

$$B = -\frac{x_b \sin \omega t_a - x_a \sin \omega t_b}{\sin \omega(t_b - t_a)} \quad (2.24)$$

Par conséquent, x_{cl} s'écrit sous la forme

$$x_{cl}(t) = x_b \frac{\sin \omega(t - t_a)}{\sin \omega(t_b - t_a)} + x_a \frac{\sin \omega(t_b - t)}{\sin \omega(t_b - t_a)} \quad (2.25)$$

Le calcul de l'action classique est alors

$$S_{cl}(x_b, x_a, t) = \int_{t_a}^{t_b} L(x(t), \dot{x}(t)) dt \quad (2.26)$$

$$S_{cl}(x_b, x_a, t) = \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}_{cl}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x_{cl}^2 \right) dt \quad (2.27)$$

Qui par un intégration par partie et l'utilisation de l'équation de mouvement, nous obtenons

$$S_{cl}(t) = \frac{m\omega}{2 \sin \omega(t_b - t_a)} [(x_b^2 + x_a^2) \cos \omega(t_b - t_a) - 2x_b x_a] \quad (2.28)$$

Le facteur de fluctuation est

$$A(t_b, t_a) = A(t_b - t_a) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega(t_b - t_a)}} \quad (2.29)$$

Et le propagateur de l'oscillateur harmonique est finalement

$$K(x_b; t_b | x_a; t_a) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \sin \omega(t_b - t_a)}} \exp\left\{i \frac{m\omega}{2 \sin \omega(T)} [(x_b^2 + x_a^2) \cos \omega(t_b - t_a) - 2x_b x_a]\right\} \quad (2.30)$$

Il est à noter que l'intégration fonctionnelle quoiqu'elle soit longue donne le résultat puisque toutes les intégrales sont de type gaussien. Enfin pour le modèle de Jaynes-Cummings qu'on va étudier ce type de simplification existe aussi mais en plus des intégrales gaussiennes nous aurons besoin de la méthode des perturbations qui sera exposée implicitement dans l'étude du modèle en question. Avant de passer directement à ce modèle, utilisons encore cet oscillateur harmonique dans l'introduction des opérateurs de création et d'annihilation nécessaires pour le modèle et exposons brièvement leurs propriétés ainsi que leur état propre dit état cohérent.

Chapitre 3

Opérateurs création et annihilation

3.1 Définition des opérateurs création et annihilation d'un oscillateur harmonique quantique

L'oscillateur harmonique quantique est l'un des problèmes fondamentaux de la mécanique quantique et il est aussi un outil précieux pour illustrer les concepts de base et de formalisme ainsi que son développement dans le domaine de l'optique quantique et théorie des champs quantiques en général. L'oscillateur harmonique quantique est un système physique quantique qui est l'analogue quantique de l'oscillateur harmonique classique et jouit de propriétés riches et intéressantes.

L'hamiltonien d'une particule de masse m qui oscille avec une fréquence angulaire ω sous l'influence d'un potentiel harmonique unidimensionnel est

$$\hat{H} = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 \quad (3.1)$$

et les observables P et X vérifient la relation de commutation suivante $[P, X] = i\hbar$

Faisons un changement de variables opératoire comme suit

$$\hat{p} = \frac{P}{\sqrt{m\hbar\omega}}, \hat{x} = \frac{X}{\frac{m\omega}{\hbar}} \quad (3.2)$$

L'opérateur hamiltonien hermitique prend la forme suivante

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{p}^2 + \hat{x}^2) \quad (3.3)$$

où \hat{p} un opérateur "impulsion" et \hat{x} opérateur de "position" sans dimension.

La relation de commutation canonique entre les nouveaux opérateurs \hat{p} et \hat{x} est $[\hat{p}, \hat{x}] = i\hbar$

3.1.1 Opérateurs de création et d'annihilation

On introduit les opérateurs non-hermitiques de création et d'annihilation \hat{a}^+ et \hat{a} adjoints l'un de l'autre respectivement par les formules suivantes

$$\hat{a}^+ = \frac{(\hat{p} + \hat{x})}{\sqrt{2}} \quad (3.4)$$

et

$$\hat{a} = \frac{(\hat{p} - \hat{x})}{\sqrt{2}} \quad (3.5)$$

ce qui permet d'écrire l'opérateur hamiltonien sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}) \\ \hat{H} &= \hbar\omega(\hat{N} + \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

où \hat{N} est appelé l'opérateur "nombre" où opérateur de nombre d'occupation, qui est clairement hermitien. Par l'utilisation de la relations de commutation précédente, il est facile de vérifier la relation de commutation entre \hat{a}^+ et \hat{a}

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 \quad (3.7)$$

Cette relation de commutation est dite bosonique et les opérateurs \hat{a}^+ et \hat{a} sont dits des opérateurs bosoniques ; par contre si \hat{a}^+ et \hat{a} vérifient la relation d'anticommutation $\{\hat{a}, \hat{a}^+\} = 1$, ils sont opérateurs fermioniques. Il est à noter que par la suite dans le modèle de Jaynes-Cummings, on aura à utiliser les deux types d'opérateurs, bosoniques et fermioniques.

Introduisons maintenant l'état discret état propre de \hat{N} noté $|n\rangle$, $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ $n \geq 0$ n un entier, et dont l'action des opérateurs \hat{a}^+ et \hat{a} sur l'état $|n\rangle$ est définie par

$$\hat{a}^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (3.8)$$

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (3.9)$$

Ces états discrets sont d'une importance capitale dans l'étude des systèmes discrets et en particulier dans l'étude de la quantification du champ électromagnétique dont les applications sont énormes en optique quantique et la théorie des champs en général. Dans notre cas du modèle Jaynes-Cummings, nous aurons besoin d'un état continu qui se définit à partir de ces états discrets et qu'on appelle état cohérent.

3.2 Etats cohérents

Les états cohérents ont été étudiés pour la première fois par Schrödinger en 1926 et ont été redécouverts par Klauder, Glauber et Sudarshan au début des années 1960 [6]. Le terme «cohérent» lui-même trouve son origine dans la terminologie utilisée en optique quantique. Depuis lors, ces états cohérents et leurs diverses généralisations ont envahi tous les domaines de la physique quantique et des branches de la physique mathématique [6]. Nous serons alors intéressé et obligé de formuler le propagateur par l'approche intégrales de chemin en représentation des états cohérents pour l'étude de ce modèle Jaynes-Cummings.

Soit \hat{H} l'opérateur hamiltonien d'un système avec $\hat{H} \equiv \hat{H}(\hat{a}^+, a)$ qui est un fonction des opérateurs de creation et d'annihilation qui dans le cas général peuvent être bosoniques ou fermioniques.

Par définition, l'état coherent est état propre de l'opérateur \hat{a} .

3.3 Propriétés des états cohérents

3.3.1 Les états cohérents bosoniques

Définition

Soit \hat{a} l'opérateur bosonique d'annihilation l'état cohérent est défini comme état propre de cet opérateur et est noté $|\alpha\rangle$ avec α un nombre complexe $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$ et vérifiant

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (3.10)$$

Comme on sait que l'état discret fondamental $|0\rangle$ dit états du vide vérifie la relation

$$\hat{a} |0\rangle = 0 \quad (3.11)$$

on peut facilement montrer qu'on peut générer cet état cohérent par l'actio d'un opérateur dit opérateur de déplacement sur cet état du vide. En effet, définissons cet opérateur de déplacement comme $D(\alpha) = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a)$ appliqué à l'état du vide $|0\rangle$, on aura

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a) |0\rangle \quad (3.12)$$

Cette expression peut être prise aussi comme définition d'un état cohérent à partir du vide et elle est équivalente mathématiquement à la précédente, c'est à dire qu'on peut vérifier qu'on a

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

En utilisant la formule Baker-Campbell-Hausdorff

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) \exp\left(-\frac{1}{2}[A, B]\right) \quad (3.13)$$

Nous avons

$$\exp(\alpha a^+ - \alpha^* a) = \exp(\alpha a^+) \exp(-\alpha^* a) \exp\left(-\frac{1}{2}[\alpha a^+, -\alpha^* a]\right) \quad (3.14)$$

Ce qui implique

$$[\alpha a^+, -\alpha^* a] = -\alpha[a^+, a]\alpha^* = \alpha\alpha^* = |\alpha|^2 \quad (3.15)$$

Nous obtenons alors

$$\exp(\alpha a^+ - \alpha^* a) = \exp(\alpha a^+) \exp(-\alpha^* a) \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \quad (3.16)$$

Suivant la définition(3.12) ,nous avons

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \exp(\alpha a^+) \exp(-\alpha^* a) |0\rangle. \quad (3.17)$$

Nous appliquons $\exp(-\alpha^* a)$ sur l'état de vide $|0\rangle$, il vient

$$\exp(-\alpha^* a) |0\rangle = 1 \quad (3.18)$$

Alors

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \exp(\alpha a^+) |0\rangle \quad (3.19)$$

Développons le terme $\exp(\alpha a^+)$ en série

$$\exp(\alpha a^+) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (a^+)^n \quad (3.20)$$

Il vient

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (a^+)^n |0\rangle \quad (3.21)$$

Et comme l'action de $(a^+)^n$ sur l'états du vide $|0\rangle$ est

$$(a^+)^n |0\rangle = \sqrt{n!} |n\rangle \quad (3.22)$$

Ceci permet d'obtenir aussi comme définition de l'état cohérent comme

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (3.23)$$

Relation de fermeture

Pour obtenir la relation de fermeture des états cohérents, nous présentons l'intégrale à valeur opératorielle suivante

$$I = \int \frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi i} |\alpha\rangle \langle \alpha| \quad (3.24)$$

Et nous définissons l'élément de matrice $I_{m,n}$ de cette intégrale à valeur opératorielle par

$$I_{m,n} = \langle m| I |n\rangle \quad (3.25)$$

Ce qui veut dire que

$$I_{m,n} = \int \frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi i} \langle m|\alpha\rangle \langle \alpha|n\rangle \quad (3.26)$$

Avec $\{|n\rangle, n \geq 0\}$ est la base propre de l'opérateur nombre d'occupation. Tenant compte de

$$\langle m|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \langle m|k\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \quad (3.27)$$

Et insérant la relation (3.27) dans (3.26), il vient

$$I_{m,n} = \int \frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi i} \exp\left(-|\alpha|^2\right) \frac{\alpha^m \alpha^n}{\sqrt{m!n!}} \quad (3.28)$$

Par convention

$$\frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi i} = \frac{dx dy}{\pi} = \frac{\rho d\rho d\theta}{\pi} \quad (3.29)$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \frac{1}{\pi} \int \rho d\rho d\theta \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^m |\alpha|^n}{\sqrt{m!n!}} \exp(im\theta) \exp(-in\theta) \\
&= \int_0^\infty \rho d\rho \exp(-\rho^2) \frac{\rho^m \rho^n}{\sqrt{m!n!}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\pi} \exp i(m-n)\theta
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Et l'intégration sur θ donne

$$I_{m,n} = 2 \int_0^\infty \rho d\rho \exp(-\rho^2) \frac{\rho^m \rho^n}{\sqrt{m!n!}} \delta_{mn} \tag{3.31}$$

Avec

$$2\delta_{mn} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\pi} \exp i(m-n)\theta \tag{3.32}$$

Faisons le changement de variable $\rho = x^2$, il vient

$$I_{m,n} = \int_0^\infty dx \exp(-x) \frac{\rho^{2m}}{m!} \delta_{mn} \tag{3.33}$$

Et introduisons la fonction $\Gamma(m+1)$ donné par comme

$$\Gamma(m+1) = \int_0^\infty dx \exp(-x) x^{2m} = m! \tag{3.34}$$

Nous aurons en finale

$$I_{m,n} = \delta_{mn} \tag{3.35}$$

Par conséquent, cette intégrale à valeur opératorielle n'est rien d'autre que l'opérateur identité

$$\int \frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi i} |\alpha\rangle \langle \alpha| = I \tag{3.36}$$

Relation d'orthogonalité

Considérons le produit scalaire de deux états cohérents $\langle \alpha_j |$ et $|\alpha_{j-1}\rangle$

$$\langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha_j|^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha_{j-1}|^2\right) \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j^*)^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\alpha_{j-1})^m}{\sqrt{m!}} \langle n | m \rangle \tag{3.37}$$

il vient

$$\langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha_j|^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha_{j-1}|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j^* \alpha_{j-1})^n}{n!} \tag{3.38}$$

avec

$$\langle n | m \rangle = \delta_{n,m} \quad (3.39)$$

nous obtenons alors la relations d'orthogonalité suivante

$$\langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2} |\alpha_j|^2 - \frac{1}{2} |\alpha_{j-1}|^2 + \alpha_j^* \alpha_{j-1}\right\} \quad (3.40)$$

Intégrale gaussienne

Soit l'intégrale gaussienne suivante

$$\int \frac{\exp(-\bar{\alpha} A \alpha) d\bar{\alpha} d\alpha}{(2\pi i)^n} \quad (3.41)$$

où $\alpha_n, \bar{\alpha}_n$ et A sont des matrices définies par

$$\bar{\alpha}_n = \begin{pmatrix} \alpha_1^* & \alpha_2^* & \dots & \alpha_n^* \end{pmatrix}, \alpha_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Pour effectuer cette intégrale multidimensionnelle sur les états cohérents, diagonalisons la matrice A (en la supposant diagonalisable) en effectuant un changement de base dans l'espace complexe multidimensionnel. Par conséquent, cette intégrale devient le produit de plusieurs intégrale unidimensionnelle de forme gaussienne

$$\int \frac{\exp(-\bar{\alpha} A \alpha) d\bar{\alpha} d\alpha}{(2\pi i)^n} = \prod_{k=1}^{\infty} \int \frac{\exp(-\bar{\alpha}_k a_{kk} \alpha_k) d\bar{\alpha}_k d\alpha_k}{2\pi i} \quad (3.42)$$

Pour chacune des variables séparées, faisons le changement de variable $\alpha = x + iy$ avec

$$\frac{d\bar{\alpha}_k d\alpha_k}{2\pi i} = \frac{dx dy}{\pi} \quad (3.43)$$

nous obtenons alors

$$\int \frac{\exp(-a_{kk}(x^2 + y^2)) dx dy}{\pi} \quad (3.44)$$

L'intégration sur x et y donne alors $\frac{1}{a_{kk}}$ et comme résultat final sur le produit suivant les éléments diagonaux

$$\int \frac{\exp(-\bar{\alpha} A \alpha) d\bar{\alpha} d\alpha}{(2\pi i)^n} = \prod_{k=1}^{\infty} \int \frac{\exp(-\bar{\alpha}_k a_{kk} \alpha_k) d\bar{\alpha}_k d\alpha_k}{2\pi i} = \frac{1}{\det A} \quad (3.45)$$

3.3.2 Etat cohérent fermionique

Définition

Soit ψ une variable de Grassmann, l'état cohérent fermionique est l'état propre de l'opérateur fermionique \hat{a} vérifiant

$$\hat{a} |\psi\rangle = \psi |\psi\rangle \quad (3.46)$$

Mathématiquement, ψ ces objets sont connus sous le nom de variables de Grassmann, ils sont définis par la propriété algébrique

$$\psi_1 \psi_2 = -\psi_2 \psi_1 \quad (3.47)$$

ce qui les rend nilpotents

$$\psi^2 = 0 \quad (3.48)$$

avec

$$\int d\psi = \int d\bar{\psi} = 0 \quad (3.49)$$

$$\int \psi d\psi = \int \bar{\psi} d\bar{\psi} = 1 \quad (3.50)$$

Ces variables de Grassmann assurent le principe d'exclusion de Pauli qui nécessite que les opérateurs de création et d'annihilation pour un mode fermionique obéissent aux règles d'anticommutation

$$\{\hat{a}^+, a\} = 1$$

Ces variables de Grassmann sont anti-commutantes $\{\psi_1, \psi_2\} = 0$ et cette relation illustre que l'état cohérent fermionique est généré à partir d'un état du vide $|0\rangle$ qui est l'analogie du vide bosonique en suivant la définition (3.12) ce qui nous permet d'écrire

$$|\psi\rangle = \exp(-\psi a^+) |0\rangle \quad (3.51)$$

Relation d'orthogonalité

Considerons le produit scalaire des vecteurs $\langle \psi_j |$ et $|\psi_{j-1}\rangle$

$$\langle \psi_j | \psi_{j-1} \rangle = \langle 0 | \exp(\bar{\psi}_j a) \exp(-\psi_{j-1} a^+) | 0 \rangle \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_j | \psi_{j-1} \rangle &= \langle 0 | (1 + \bar{\psi}_j a)(1 - \psi_{j-1} a^+) | 0 \rangle \\ &\quad \langle 0 | (1 - \psi_{j-1} a^+ + \bar{\psi}_j a) | 0 \rangle \end{aligned}$$

$$= \langle 0 | (1 + \bar{\psi}_j \psi_{j-1}) | 0 \rangle$$

$$\langle \psi_j | \psi_{j-1} \rangle = \exp(\bar{\psi}_j \psi_{j-1}) \quad (3.53)$$

où l'on a utilisé $a|0\rangle = 0$, et son conjuguée Grassmanienne $\langle 0|a^+ = 0$ et $\langle 0|0\rangle = 1$ en plus de la commutativité d'un nombre pair de ces variables de Grassmann.

Relation de fermeture

Considerons l'intégrale suivante

$$\int d\bar{\psi} d\psi \exp(-\bar{\psi}\psi) |\psi\rangle \langle \psi| = \int d\bar{\psi} d\psi (1 - \bar{\psi}\psi) \exp(\psi a^+) |0\rangle \langle 0| \exp(\bar{\psi} a) \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} &= \int d\bar{\psi} d\psi \exp(\psi a^+) |0\rangle \langle 0| \exp(\bar{\psi} a) - \int d\bar{\psi} d\psi \bar{\psi}\psi \exp(\psi a^+) |0\rangle \langle 0| \exp(\bar{\psi} a) \\ &= \int d\bar{\psi} d\psi (1 + \psi a^+) |0\rangle \langle 0| (1 + \bar{\psi} a) - \int d\bar{\psi} d\psi \bar{\psi}\psi (1 + 0\psi a^+) |0\rangle \langle 0| (1 + 0\bar{\psi} a) \end{aligned} \quad (3.55)$$

En utilisant les propriétés (3.49, 3.50, 3.47, 3.48) et $a|0\rangle = 0$ et son conjuguée Grassmanienne $\langle 0|a^+ = 0$, et $a^+|0\rangle = |1\rangle$ et son conjuguée Grassmanienne $\langle 0|a = \langle 1|$, on obtient alors la relation de fermeture suivante

$$\int d\bar{\psi} d\psi \exp(-\bar{\psi}\psi) |\psi\rangle \langle \psi| = |1\rangle \langle 1| + |0\rangle \langle 0| = I \quad (3.56)$$

Intégrale gaussienne

Soit l'intégrale gaussienne fermionique multidimensionnelle suivante

$$\int d\bar{\Psi}d\Psi \exp(-\bar{\Psi}A\Psi) \quad (3.57)$$

$$\text{avec } \bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2 & \dots & \bar{\psi}_n \end{pmatrix}, \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Développons les mêmes étapes que dans le cas gaussien bosonique utilisons les propriétés (3.49, 3.50) on obtient alors

$$\int d\bar{\Psi}d\Psi \exp(-\bar{\Psi}A\Psi) = \det A \quad (3.58)$$

3.4 Intégrale de chemin en représentation états cohérents

Ce qui nous intéresse dans cette section est la formulation de l'intégrale de chemin en représentation états cohérents. Comme nous l'avons vu, l'opérateur d'évolution dépendant du temps est défini par

$$U(T) = T_D \exp\left(-i \int_0^T \hat{H}(a, a^+, t) dt\right) \quad (3.59)$$

avec $H(a, a^+, t)$ l'opérateur hamiltonien du système dépendant du temps et T_D l'opérateur chronologique de Dyson.

Et comme nous avons déjà vu, le propagateur est l'amplitude de transition entre l'état initial $|\eta_i\rangle$ (état cohérent) à l'instant t_i vers l'état final $|\eta_f\rangle$ (état cohérent) à l'instant t_f est défini par

$$K(\eta_i, \eta_f, T) = \langle \eta_f | U(T) | \eta_i \rangle \quad (3.60)$$

et où η peut être un état cohérent bosonique ou fermionique

$$K(\eta_i, \eta_f, T) = \langle \eta_f | T_D \exp\left(-i \int_0^T \hat{H}(a, a^+, t) dt\right) | \eta_i \rangle \quad (3.61)$$

Nous subdivisons l'intervalle de temps $[0; T]$ de sorte que $T = N\epsilon$ avec $\epsilon = \frac{t_f - t_i}{N}$ (avec $N \rightarrow \infty$) de manière à écrire

$$K(\eta_i, \eta_f, T) = \langle \eta_f | \left(e^{[-i\epsilon \hat{H}(a, a^+, t)]} \right)^N | \eta_i \rangle \quad (3.62)$$

et insérons $(N - 1)$ relations de fermeture (bosonique et fermionique)

$$\int d\eta_n d\eta_n^* |\eta_n\rangle \langle \eta_n| = 1$$

-pour les bosons

$$\int \frac{d\alpha_n d\alpha_n^*}{2\pi i} |\alpha_n\rangle \langle \alpha_n| = 1 \quad (3.63)$$

-pour les fermions

$$\int d\psi_n d\bar{\psi}_n |\psi_n\rangle \langle \bar{\psi}_n| = 1 \quad (3.64)$$

Dans la suite nous faisons une construction explicite du propagateur $K(\alpha_i, \alpha_f, T)$ en représentation bosonique puis nous la généralisons pour les fermions.

Le propagateur $K(\alpha_i, \alpha_f, T)$ s'écrit sous la forme

$$K(\alpha_i, \alpha_f, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{d\alpha_n d\alpha_n^*}{2\pi i} \prod_{n=1}^N \langle \alpha_n | e^{-(i\epsilon \hat{H}(a, a^+, t))} | \alpha_{n-1} \rangle \quad (3.65)$$

En évaluant l'élément de matrice figurant dans l'équation 3.65 en premier ordre en ϵ comme suit

$$\langle \alpha_n | e^{-(i\epsilon \hat{H}(a, a^+, t))} | \alpha_{n-1} \rangle \simeq \langle \alpha_n | 1 - i\epsilon \hat{H}(a, a^+, t) | \alpha_{n-1} \rangle \quad (3.66)$$

$$\langle \alpha_n | e^{-(i\epsilon \hat{H}(a, a^+, t))} | \alpha_{n-1} \rangle \simeq \langle \alpha_n | \alpha_{n-1} \rangle e^{-(i\epsilon \hat{H}(\alpha^*, \alpha, t))} \quad (3.67)$$

$$= \langle \alpha_n | \alpha_{n-1} \rangle \left[1 - i\epsilon \frac{\langle \alpha_f | \hat{H}(a, a^+, t) | \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_f | \alpha_i \rangle} \right] \quad (3.68)$$

et en posant

$$\hat{H}(\alpha^*, \alpha, t) = \frac{\langle \alpha_f | \hat{H}(a, a^+, t) | \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_f | \alpha_i \rangle} \quad (3.69)$$

nous aurons alors

$$\langle \alpha_n | \exp - \left(i\epsilon \hat{H}(a, a^+, t) \right) | \alpha_{n-1} \rangle \simeq \langle \alpha_n | \alpha_{n-1} \rangle \exp - \left(i\epsilon \hat{H}(\alpha^*, \alpha, t) \right) \quad (3.70)$$

Utilisant la propriété (3.10) on écrira

$$\langle \alpha_n | e^{-i\epsilon \hat{H}(a, a^+, t)} | \alpha_{n-1} \rangle \simeq \exp\left(-\frac{\alpha_i^2}{2} - \frac{\alpha_f^2}{2} + \alpha_f^* \alpha_i\right) \exp\left(-i\epsilon \hat{H}(\alpha^*, \alpha, t)\right) \quad (3.71)$$

Et par conséquent, il vient

$$\begin{aligned}
K(\alpha_i, \alpha_f, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{d\alpha_n d\alpha_n^*}{2\pi i} \exp \left\{ i\epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{i}{2} \left(\frac{\alpha_n^* \alpha_n}{\epsilon} + \frac{\alpha_{n-1}^* \alpha_{n-1}}{\epsilon} - \frac{2\alpha_n^* \alpha_{n-1}}{\epsilon} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \hat{H}(\alpha^*, \alpha, t) \right] \right\} \\
K(\alpha_i, \alpha_f, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{d\alpha_n d\alpha_n^*}{2\pi i} \exp \left\{ i\epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{2} \left[\left(\frac{\alpha_n^* (\alpha_n - \alpha_{n-1})}{\epsilon} + \frac{\alpha_{n-1} (\alpha_{n-1}^* - \alpha_n^*)}{\epsilon} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \hat{H}(\alpha^*, \alpha, t) \right] \right\} \text{ po} \tag{3.72} \\
K(\alpha_i, \alpha_f, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{d\alpha_n d\alpha_n^*}{2\pi i} \exp \left\{ i\epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{i}{2} \left(\frac{\alpha_n^* \Delta \alpha_n}{\epsilon} - \frac{\alpha_{n-1} \Delta \alpha_n^*}{\epsilon} \right) - \hat{H}(\alpha^*, \alpha, t) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Ou bien sous la forme continue

$$K(\alpha_i, \alpha_f, T) = \int D\alpha D\alpha^* \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[\frac{i}{2} (\alpha_n^* \dot{\alpha}_n - \alpha_n \dot{\alpha}_n^*) - \hat{H}(\alpha^*, \alpha, t) \right] \right\} \tag{3.73}$$

En final, une simple généralisation de cette construction donne la forme de l'intégrale de chemin en représentation états cohérents (bosonique ou fermionique notée variable η) s'écrivant comme suit

$$\begin{aligned}
K(\eta_i, \eta_f, T) &= \int D\eta_n D\eta_n^* \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[\frac{i}{2} (\eta_n^* \dot{\eta}_n + a \eta_n \dot{\eta}_n^*) - \hat{H}(\eta^*, \eta, t) \right] \right\} \tag{3.74} \\
a &= -1 \text{ pour les bosons} \\
a &= 1 \text{ pour les fermions}
\end{aligned}$$

Chapitre 4

Modèle de Jaynes-Cummings

4.1 introduction

Le modèle standard de Jaynes-Cummings (JCM) largement utilisé en optique quantique qui est le modèle le plus élémentaire décrivant l'interaction d'atomes à deux niveaux avec des champs électromagnétiques quantifiés dans l'approximation dipolaire. Ce modèle est exactement résoluble dans l'approximation d'onde tournante (RWA) qui consiste à supprimer les termes «non conservateurs d'énergie» de l'hamiltonien et a suscité de nombreuses recherches théoriques et expérimentales au cours des dernières décennies. Le JCM permet de calculer toutes les propriétés de la mécanique quantique du système. Les caractéristiques quantiques les plus intéressantes et les plus frappantes du modèle sont les soi-disant effondrements et reprises des oscillations de Rabi lorsque le champ est initialement préparé dans l'état quantique le plus classique, l'état cohérent ou dans un état de vide pressé. Il a été reconnu que ces effets purement quantiques sont une preuve de la granularité du champ de rayonnement.

L'étude de JCM par le formalisme l'intégrale de chemin en représentation des état cohérent a été faites par plusieurs auteurs. Nous citerons Zaheer et Zubairy [8]

qui on résolu le modèle de J-C dans l'approxiamtion d'onde tournante .Malheureusement, le propagateur est exprimés par une série de perturbations qui n'a pas été évalué pour tous les ordres. Par la même methode Buzek [9] comme Boudjedaa et al [10] ont déterminé le propagateur associé à la généralisation multi photon du modèle J-C . Dans ce cas les séries de perturbation ont été sommée dans des cas particuliers stationnaires (interaction indépendants de temps)

Dans ce qui suit ,nous allons essayer de sommer ces série ,correspondantes au cas non stationnaires ,ayant une forme particulière .

4.2 Hamiltonien de JCM

Dans cette section nous considérons l'hamiltonien du modèle de Jaynes-Cummings généralisé donné par l'expression suivante

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} \\ \hat{H} &= \omega(a^+a + \frac{1}{2}) + \frac{\omega_0}{2}\sigma_3 + g [F(a, a^+, t)\sigma_+ + F^+(a, a^+, t)\sigma_-]\end{aligned}\tag{4.1}$$

Nous remarquons que l'hamiltonien de JCM à trois composantes qui sont

- énergie du champ.
- énergie des transitions atomiques à 2-niveaux.
- énergie de l'interaction du champ des photons avec l'atome

\hat{H}_0 est l' hamiltonien du champs libre (photons)

$$\hat{H}_0 = \omega(a^+a + \frac{1}{2})\tag{4.2}$$

$H_0^{(at)}$ est l'hamiltonien libre des 2-niveaux

$$H_0^{(at)} = \frac{\omega_0}{2}\sigma_3$$

et \hat{H}_{int} est l' hamiltonien d'interaction

$$\hat{H}_{int} = g[F(a, a^+, t)\sigma_+ + F^+(a, a^+, t)\sigma_-]\tag{4.3}$$

où a et a^+ sont les opérateurs de création et d'annihilation du champ de photons, ω est la fréquence du champ, ω_0 est la fréquence de transition entre l'état excité et l'état fondamental de l'atome, $F(a, a^+, t)$ est une fonction de a et a^+ qui est donnée par l'expression suivante

$$F(a, a^+, t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n}(t)a^{+m}a^n\tag{4.4}$$

l'ensemble des matrices $\{\sigma_+, \sigma_-, \sigma_3\}$ sont les matrices de Pauli standards qui décrivent le système à deux niveaux et $C_{m,n}(t)$ est une fonction quelconque du temps et des opérateurs a et a^+ .

4.3 JCM dans sa version intégrale de chemin

Comme nous avons vu, l'hamiltonien du modèle de Jaynes-Cummings est de la forme