Quelques notions de géométrie

2.1 Introduction

La géométrie différentielle sur une surface bidimensionnelle émergée dans un espace tridimensionnel est riche en idées et admet une vaste généralisation pour une surface multidimensionnelle [4, 5, 7, 8]. Nous considérons dans ce chapitre quelques notions fondamentales nécessaires pour traiter les chapitres suivants. Nous nous concentrons essentiellement sur la géométrie de Gauss. Nous commençons par la première forme quadratique qui introduit une métrique. Puis, la deuxième forme quadratique qu'on utilise pour calculer la courbure de lignes se trouvant sur la surface. Nous introduisons les formules de Gauss et de Weingarten qui décrivent la relation entre la première et la deuxième forme. Nous exposons également le tenseur de Riemann et ses propriétés, nous déduisons le tenseur de Ricci et le scalaire de courbure. Nous donnons la relation entre le scalaire de courbure et la courbure de Gauss. Pour éclaircir ces notions, nous considérons, à travers ce chapitre, l'exemple d'une surface sphérique bidimensionnelle plongée dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

2.2 Surfaces dans $\mathbb{R}^3$

Il existe différentes façons de représenter une surface 2-dimensionnelle (S) dans l'espace 3-dimensionnel $\mathbb{R}^3$. L'une est la représentation familière dans laquelle la surface est définie via une équation de la forme $f(x, y, z) = 0$, où x, y et z exprimant les coordonnées cartésiennes et f est une fonction scalaire. On peut également représenter une surface avec les coordonnées cartésiennes x, y et z comme étant des fonctions réelles de deux paramètres réels indépendants

q^1 et q^2 parcourant un domaine $U \subset \mathbb{R}^2$;

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x\left(q^1, q^2\right) \\ y = y\left(q^1, q^2\right) \\ z = z\left(q^1, q^2\right), \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Ici les lettres supérieures sont des indices, pas des exposants.

Il est possible de remplacer les équations (2.1) par une équation vectorielle (vecteur de position) de façon que :

$$\mathbf{r} = \left(x\left(q^1, q^2\right), y\left(q^1, q^2\right), z\left(q^1, q^2\right)\right) = \mathbf{r}\left(q^1, q^2\right) \tag{2.2}$$

Formellement, il est possible qu'à deux points paramétriques différents (q^1, q^2) et $(q^{1\prime}, q^{2\prime})$ il correspond un même point de la surface (S). Mais, pour éviter les auto-intersections, on ne considère pas de telles situations. Pour garantir la bi–univocité, on doit exiger de plus que le *rang* de la matrice de Jacobi suivante

$$M = \frac{\partial\left(x, y, z\right)}{\partial\left(q^1, q^2\right)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q^1} & \frac{\partial y}{\partial q^1} & \frac{\partial z}{\partial q^1} \\ \frac{\partial x}{\partial q^2} & \frac{\partial y}{\partial q^2} & \frac{\partial z}{\partial q^2} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Soit égale à 2. Il en résulte que les deux vecteurs

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} \text{ et } \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \tag{2.4}$$

en un point P de la surface (S) sont *linéairement indépendants*. Ces deux vecteurs sont disposés dans le *plan tangent* de la surface (S) au point correspondant P. Notons ici que ces vecteurs de base $\mathbf{r}_i$, $i = 1, 2$ ne sont pas nécessairement des vecteurs unitaires. On peut écrire donc

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i = \mathbf{r}_i dq^i, \tag{2.5}$$

L'indice répété indique une sommation.

Exemple :

Une surface sphérique de rayon r_0 émergée dans un espace 3-dimensionnel est déterminée par le rayon vecteur :

$$\mathbf{r}\left(\theta, \varphi\right) = \left(r_0 \sin\theta \cos\varphi, r_0 \sin\theta \sin\varphi, r_0 \cos\theta\right) \quad , \quad r_0 = \text{cte} \tag{2.6}$$

soit

$$\mathbf{r}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \left(r_0 \cos\theta \cos\varphi, r_0 \cos\theta \sin\varphi, -r_0 \sin\theta\right) \tag{2.7}$$

et aussi

$$\mathbf{r}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-r_0 \sin\theta \sin\varphi, r_0 \sin\theta \cos\varphi, 0) \tag{2.8}$$

Ainsi, $|\mathbf{r}_\varphi| = r_0 \sin\theta \neq 1$.

2.3 Première forme quadratique

Soit une surface (S) bidimensionnelle paramétrée par q^1 et q^2 et soit le vecteur position $\mathbf{r}(q^1, q^2)$ d'un point P sur cette surface. La distance ds entre P et certain point P', qui est au voisinage de P, s'écrit comme

$$\begin{aligned} ds^2 &= |d\mathbf{r}|^2 = (d\mathbf{r}, d\mathbf{r}) \\ &= g_{ij} dq^i dq^j, \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \tag{2.9}$$

où $g_{ij} = (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$. La forme quadratique dans le second membre de (2.9) est appelée *première forme quadratique* de la surface (S) notée aussi $G(q, dq)$. Cette forme s'écrit explicitement comme suit :

$$\begin{aligned} G(q, dq) &= g_{ij} dq^i dq^j \\ &= E\left(dq^1\right)^2 + 2F dq^1 dq^2 + G\left(dq^2\right)^2 \end{aligned} \tag{2.10}$$

où E, F et G sont les coefficients de la première forme donnés par les expressions

$$E = g_{11} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1), \quad F = g_{12} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad G = g_{22} = (\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2) \tag{2.11}$$

g_{ij} est *la métrique* de la première forme qui est un tenseur d'ordre 2, symétrique. Si de plus cette métrique est diagonale, la base $\{\mathbf{r}_i\ , i = 1, 2\}$ est orthogonale (i.e ; $F = 0$). L'inverse du tenseur g_{ij} est le tenseur g^{ik} de façon qu'on a :

$$g_{ij} g^{ik} = \delta_j^k \tag{2.12}$$

où δ_j^k est le symbole de Kronecker.

Notons le tenseur g_{ij} par la matrice $\mathbf{g}$ (ici le caractère gras du tenseur indique sa représentation matricielle). Le déterminant de la métrique $\mathbf{g}$ est noté g tels que :

$$g = \det(\mathbf{g}) = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = EG - F^2 \tag{2.13}$$

Les composantes de l'inverse de $\mathbf{g}$ sont données par l'expression

$$\mathbf{g}^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

L'équation (2.9) détermine complètement *la géométrie intrinsèque* de la surface (S).

Exemple : si on considère l'exemple de la surface de la sphère précédente, les coefficients de la première forme quadratique de cette sphère, d'après Gauss sont désignés comme suit :

$$g_{\theta\theta} = (\mathbf{r}_\theta \,, \mathbf{r}_\theta) \quad , \; g_{\theta\varphi} = (\mathbf{r}_\theta \,, \mathbf{r}_\varphi) \quad , \; g_{\varphi\varphi} = (\mathbf{r}_\varphi \,, \mathbf{r}_\varphi) \tag{2.15}$$

Après quoi la première forme quadratique, s'exprime :

$$ds^2 = g_{\theta\theta}\, d\theta^2 + 2g_{\theta\varphi}\, d\theta d\varphi + g_{\varphi\varphi}\, d\varphi^2 \tag{2.16}$$

Ainsi, on obtient

$$g_{\theta\theta} = r_0^2 \quad , \quad g_{\theta\varphi} = 0 \quad , \quad g_{\varphi\varphi} = r_0^2 \sin^2\theta \tag{2.17}$$

d'où la métrique s'écrit sous la forme

$$ds^2 = r_0^2\, d\theta^2 + r_0^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \tag{2.18}$$

le tenseur métrique g_{ij} est désigné par la matrice diagonale $\mathbf{g}$ comme

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} r_0^2 & 0 \\ 0 & r_0^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

2.4 Deuxième forme quadratique

Les combinaisons linéaires des vecteurs $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$ peuvent être utilisées pour exprimer tous les vecteurs tangents à (S) en P. Ils forment donc naturellement une base pour ces vecteurs. Cela signifie que le plan tangent à (S) en P est engendré par ces vecteurs. Lorsqu'un vecteur $\mathbf{n}$ perpendiculaire à (S) en P est ajouté à la base naturelle considérée, on obtient une autre base pour $\mathbb{R}^3$. De cette façon, au moins les points dans le voisinage immédiat de la surface (S) peuvent être exprimés en utilisant cette base.

On peut introduire le vecteur unitaire normal $\mathbf{n}$ à la surface (S) au point P qui peut être déterminé comme le produit vectoriel des vecteurs de base du plan tangent ;

$$\mathbf{n}\left(q^1, q^2\right) = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}, \tag{2.20}$$

ce vecteur s'écrit aussi pour une surface définie par une équation de la forme $f(x,y,z) = 0$ comme

$$\mathbf{n}\left(q^1,q^2\right) = \frac{\boldsymbol{\nabla} f}{|\boldsymbol{\nabla} f|} \tag{2.21}$$

Soit (L) une courbe définie sur une surface (S) passant par un certain point P. On sait que, pour une courbe paramétrée avec s, qui est la longueur de cette courbe, on a la formule

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t} \tag{2.22}$$

où $\mathbf{t}$ est le vecteur unitaire tangent à la courbe (L) au point P. Si $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \neq 0$, alors

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa\boldsymbol{\nu} \tag{2.23}$$

avec $\boldsymbol{\nu}$ est le vecteur unitaire orthogonal à $\mathbf{t}$ et se trouvant dans le plan osculateur (plan contenant les vecteurs $\boldsymbol{\nu}$ et $\mathbf{t}$) et κ la courbure de la ligne (L). Ainsi, d'après (2.5) :

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} &= \frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^i}\frac{dq^i}{ds}\right) \\ &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^i\partial q^j}\frac{dq^j}{ds}\frac{dq^i}{ds} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^i}\frac{d^2q^i}{ds^2},\end{aligned} \tag{2.24}$$

utilisons les abréviations

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^i\partial q^j} = \mathbf{r}_{ij} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^i} = \mathbf{r}_i \tag{2.25}$$

et multiplions scalairement par le vecteur unitaire $\mathbf{n}$, nous obtenons :

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2},\mathbf{n}\right) = (\mathbf{r}_{ij},\mathbf{n})\frac{dq^j}{ds}\frac{dq^i}{ds} \tag{2.26}$$

puisque $(\mathbf{r}_i\ ,\mathbf{n}) = 0$. On pose $(\mathbf{r}_{ij},\mathbf{n}) = b_{ij}$, la forme

$$B\,(q,dq) = b_{ij}dq^i dq^j \tag{2.27}$$

s'appelle *deuxième forme quadratique* de la surface (S). Cette forme s'écrit explicitement comme suit :

$$B\,(q,dq) = L\left(dq^1\right)^2 + 2M dq^1 dq^2 + N\left(dq^2\right)^2 \tag{2.28}$$

où $b_{11} = L$, $b_{12} = b_{21} = M$ et $b_{22} = N$. Ainsi, d'après (2.9) et (2.27), le produit scalaire (2.26) s'écrit :

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2},\mathbf{n}\right) = \frac{B\,(q,dq)}{G\,(q,dq)}. \tag{2.29}$$

Le tenseur b_{ij} est un tenseur d'ordre 2, symétrique, on le note par la matrice $\mathbf{b}$ (de même ici le caractère gras du tenseur indique sa représentation matricielle). Le déterminant de la métrique $\mathbf{b}$ est noté b tels que :

$$b = \det(\mathbf{b}) = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = LN - M^2 \; . \tag{2.30}$$

L'équation (2.27) détermine *la géométrie extrinsèque* de la surface (S).

Exemple : on considère toujours l'exemple de la surface de la sphère, les coefficients de la deuxième forme sont

$$b_{\theta\theta} = (\mathbf{r}_{\theta\theta}, \mathbf{n}) \quad , \quad b_{\theta\varphi} = (\mathbf{r}_{\theta\varphi}, \mathbf{n}) \quad \text{et} \quad b_{\varphi\varphi} = (\mathbf{r}_{\varphi\varphi}, \mathbf{n}) \, , \tag{2.31}$$

où le vecteur normal $\mathbf{n}$ est :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi}{\| \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi \|} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \, , \tag{2.32}$$

Ainsi, on arrive à :

$$L = b_{\theta\theta} = -r_0 \quad , \quad M = b_{\theta\varphi} = 0 \quad \text{et} \quad N = b_{\varphi\varphi} = -r_0 \sin^2\theta, \tag{2.33}$$

la deuxième forme quadratique, s'exprime

$$B = -r_0 \; d\theta^2 - r_0 \sin^2\theta d\varphi^2, \tag{2.34}$$

Ainsi, le *tenseur de courbure extrinsèque* b_{ij} est désigné par la matrice diagonale $\mathbf{b}$ associée à B comme

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -r_0 & 0 \\ 0 & -r_0 \sin^2\theta \end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

2.5 Relations entre la première et la deuxième forme quadratique

2.5.1 Formules de Gauss et de Weingarten

Les formules ainsi dénommées décrivent la variation des vecteurs $\mathbf{r}_i \;\; i = 1, 2$ et $\mathbf{n}$ lorsque le point P se déplace sur la surface (S), tout comme les formules de Frénet. Puisque ces vecteurs sont linéairement indépendants, on peut exprimer alors les dérivées de ces vecteurs comme combinaisons de ces mêmes vecteurs avec des coefficients qui sont fonctions des coefficients de la première et la deuxième forme quadratique. Autrement dit, on peut écrire les égalités suivantes

$$\mathbf{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^{k}\mathbf{r}_k + \beta_{ij}\mathbf{n}, \qquad i,j,k = 1,2 \qquad \text{(4 équations)} \tag{2.36}$$

$$\mathbf{n}_i = \alpha_i^{\ k}\mathbf{r}_k + \gamma_i\mathbf{n}, \qquad i,k = 1,2 \qquad \text{(2 équations)} \tag{2.37}$$

où les coefficients Γ_{ij}^{k}, β_{ij}, α_i^k et γ_i sont à déterminer. En effet, En multipliant scalairement l'équation (2.37) par $\mathbf{n}$, on obtient directement

$$\gamma_i = 0, \quad i = 1,2 \tag{2.38}$$

et en multipliant par $\mathbf{n}$ les équations (2.36), on obtient

$$\beta_{ij} = (\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{n}) = b_{ij} \tag{2.39}$$

Puis, en dérivant le produit scalaire nul $(\mathbf{n}, \mathbf{r}_i)$ par rapport au q^j, on obtient

$$(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{ij}) + (\mathbf{n}_j, \mathbf{r}_i) = 0$$

mais $(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{n}) = b_{ij}$, il vient

$$(\mathbf{r}_i, \mathbf{n}_j) = -b_{ij}$$

Maintenant multiplions l'équation (2.37) par $\mathbf{r}_j$, on obtient

$$(\mathbf{r}_j, \mathbf{n}_i) = \alpha_i^k (\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j) \tag{2.40}$$

on aura

$$\alpha_i^k g_{kj} = -b_{ji}, \qquad i,j,k = 1,2 \tag{2.41}$$

multiplions par $g^{j\ell}$ on a

$$\alpha_i^k g_{kj} g^{j\ell} = -b_{ji} g^{j\ell},$$

comme $g_{kj}g^{j\ell} = \delta_k^\ell$ il vient

$$\alpha_i^\ell = -b_{ji} g^{j\ell},$$

c'est-à-dire

$$\alpha_i^\ell = -b_i^\ell, \tag{2.42}$$

donc (2.37) devient

$$\mathbf{n}_i = -b_i^k \mathbf{r}_k \tag{2.43}$$

Les équations (2.41) s'écrivent sous forme matricielle comme :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \tag{2.44}$$

ou bien

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{g} = -\,\mathbf{b} \tag{2.45}$$

c'est-dire

$$\boldsymbol{\alpha} = -\,\mathbf{b}\mathbf{g}^{-1} \tag{2.46}$$

ou explicitement

$$\alpha_1^1 = \frac{1}{g}\left(b_{12}g_{12} - b_{11}g_{22}\right) \quad , \qquad \alpha_1^2 = \frac{1}{g}\left(b_{11}g_{21} - b_{12}g_{11}\right) \tag{2.47}$$

$$\alpha_2^1 = \frac{1}{g}\left(b_{22}g_{12} - b_{21}g_{22}\right) \quad , \qquad \alpha_2^2 = \frac{1}{g}\left(b_{21}g_{21} - b_{22}g_{11}\right), \tag{2.48}$$

Ces formules sont appelées *formules de Weingarten.*

Déterminons maintenant les coefficients Γ_{ij}^k , multiplions (2.36) par $\mathbf{r}_\ell$ on obtient

$$\mathbf{r}_{ij}.\mathbf{r}_\ell = \Gamma_{ij}^k\left(\mathbf{r}_k.\mathbf{r}_\ell\right) \tag{2.49}$$

comme $\mathbf{r}_k.\mathbf{r}_\ell = g_{k\ell}$ on aura

$$\mathbf{r}_{ij}.\mathbf{r}_\ell = \Gamma_{ij}^k g_{k\ell} \tag{2.50}$$

Les quantités $\mathbf{r}_{ij}.\mathbf{r}_\ell = \Gamma_{ij\ell}$ sont appelées *symboles de Christoffel de première espèce.* On peut écrire

$$\Gamma_{ijm}g^{mn} = \Gamma_{ij}^k g_{km}g^{mn} = \Gamma_{ij}^k \delta_k^n = \Gamma_{ij}^n \tag{2.51}$$

les coefficients Γ_{ij}^k connus aussi comme *symboles de Christoffel de deuxième espèce,* sont alors donnés par

$$\Gamma_{ij}^k = \left(\mathbf{r}_{ij}.\mathbf{r}_\ell\right) g^{\ell k}$$

ou bien

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j}.\mathbf{r}^k \tag{2.52}$$

avec $\mathbf{r}_\ell g^{\ell k} = \mathbf{r}^k$. Soit $g_{ij} = (\mathbf{r}_i.\mathbf{r}_j)$ dérivons par rapport à q^k

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = \left(\mathbf{r}_{ik}.\mathbf{r}_j\right) + \left(\mathbf{r}_i.\mathbf{r}_{jk}\right)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} \tag{2.53}$$

de même

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jki} \tag{2.54}$$

et

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{kij} \tag{2.55}$$

comme $\Gamma_{ij\ell} = \Gamma_{ji\ell}$ (puisque $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{ji}$) on détermine les Γ_{ijk} en considérons (2.55)+(2.54)−(2.53) comme

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right)$$

En fin, les coefficients (les connexions) $\Gamma^k_{ij} = g^{\ell k}\Gamma_{ij\ell}$ sont

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{g^{\ell k}}{2}\left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{\ell i}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^\ell}\right) \tag{2.56}$$

Ainsi, les coefficients Γ^k_{ij} s'expriment seulement par les coefficients de la première forme quadratique et leurs dérivées. C'est un fait bien important qui montre que les coefficients Γ^k_{ij}, contrairement à β_{ij} et α^k_i *appartiennent à la géométrie intrinsèque de la surface.* Les équations (2.36) avec les coefficients Γ^k_{ij} et β_{ij} donnés par (2.56) et (2.39) sont appelées *formules de Gauss.*

On a donné ici deux formules pour calculer les coefficients Γ^k_{ij} à savoir (2.56) et (2.52).

Exemple : calculons, par exemple, le coefficient $\Gamma^\varphi_{\theta\varphi}$ pour la surface de la sphère précédente en utilisant la formule (2.52)

$$\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \frac{\partial \mathbf{r}_\theta}{\partial \varphi}.\mathbf{r}^\varphi \tag{2.57}$$

on a

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\theta &= (r_0\cos\theta\cos\varphi, r_0\cos\theta\sin\varphi, -r_0\sin\theta) \\ &\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}_\theta}{\partial\varphi} = (-r_0\cos\theta\sin\varphi, r_0\cos\theta\cos\varphi, 0) \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{r}^\varphi = g^{\varphi i}\mathbf{r}_i \Rightarrow \mathbf{r}^\varphi = g^{\varphi\varphi}\mathbf{r}_\varphi = \frac{\mathbf{r}_\varphi}{g_{\varphi\varphi}} \quad \text{(puisque la métrique est diagonale)}$$

comme

$$\mathbf{r}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\varphi} = (-r_0\sin\theta\sin\varphi, r_0\sin\theta\cos\varphi, 0)$$

il vient

$$\mathbf{r}^\varphi = \frac{1}{r_0^2\sin^2\theta}(-r_0\sin\theta\sin\varphi, r_0\sin\theta\cos\varphi, 0)$$

donc

$$\begin{aligned}\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r_0^2\sin^2\theta}\left(r_0^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi + r_0^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi\right) \\ &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta \end{aligned} \tag{2.58}$$

On peut également utiliser la formule (2.56).

2.6 Les déférentes courbures sur une surface

2.6.1 Formule de Meusnier

Soit (L) une courbe définie sur une surface (S) passant par un certain point P et paramétrée en s. On peut développer le vecteur $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ comme

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \kappa_n\mathbf{n} + \kappa_g\mathbf{s} \tag{2.59}$$

où κ_n et κ_g sont les courbures normales et géodésiques respectivement et $\mathbf{s}$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\mathbf{n}$. Ainsi, on obtient

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \mathbf{n}\right) = (\kappa_n\mathbf{n} + \kappa_g\mathbf{s}, \mathbf{n}) = \kappa_n \tag{2.60}$$

et d'après (2.29), on aura *la formule de Meusnier*

$$\kappa_n = \frac{B\,(q, dq)}{G\,(q, dq)} \tag{2.61}$$

2.6.2 Courbure de Gauss et courbure moyenne

Réécrivons maintenant la courbure normale (2.61) comme fonction de la variable $\lambda = dq_2/dq_1$ de la façon suivante

$$\kappa_n = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2} \tag{2.62}$$

On veut rechercher les extremums de κ_n , pour ce but on considère la dérivée

$$\frac{d\kappa_n}{d\lambda} = 0 \tag{2.63}$$

d'où on déduit

$$\left(E + 2F\lambda + G\lambda^2\right)(N\lambda + M) - \left(L + 2M\lambda + N\lambda^2\right)(G\lambda + F) = 0 \tag{2.64}$$

cela veut dire que

$$\kappa_n = \frac{M + N\lambda}{F + G\lambda} \tag{2.65}$$

notons qu'on peut écrire les égalités

$$\begin{aligned} E + 2F\lambda + G\lambda^2 &= (E + F\lambda) + (F + G\lambda)\,\lambda \\ L + 2M\lambda + N\lambda^2 &= (L + M\lambda) + (M + N\lambda)\,\lambda \end{aligned}$$

A l'aide de ces deux dernières relations l'équation (2.64) s'écrit ainsi comme

$$[(E + F\lambda) + (F + G\lambda)\,\lambda]\,(N\lambda + M) - [(L + M\lambda) + (M + N\lambda)\,\lambda]\,(G\lambda + F) = 0 \tag{2.66}$$

qui peut se simplifier comme suit

$$(E + F\lambda)\,(N\lambda + M) = (L + M\lambda)\,(G\lambda + F) \tag{2.67}$$

Donc la courbure normale donnée par (2.65) s'écrit aussi d'après (2.67) de la façon suivante

$$\kappa_n = \frac{M + N\lambda}{F + G\lambda} = \frac{L + M\lambda}{E + F\lambda} \tag{2.68}$$

Ainsi, on peut former le système suivant

$$\begin{aligned} (F\kappa_n - M)\,\lambda + (E\kappa_n - L) &= 0 \\ (G\kappa_n - N)\,\lambda + (F\kappa_n - M) &= 0 \end{aligned}$$

mais $\lambda = dq_2/dq_1$ c'est-à-dire on a

$$\begin{aligned} (E\kappa_n - L)\,dq_1 + (F\kappa_n - M)\,dq_2 &= 0 \\ (F\kappa_n - M)\,dq_1 + (G\kappa_n - N)\,dq_2 &= 0 \end{aligned}$$

pour avoir une solution non nulle, il faut que le déterminant soit nul, alors

$$\begin{vmatrix} L - E\kappa_n & M - Fk_n \\ M - F\kappa_n & N - Gk_n \end{vmatrix} = 0 \tag{2.69}$$

d'où on tire l'équation de deuxième ordre suivante

$$\kappa_n^2 - \frac{(EN + LG - 2MF)}{(EG - F^2)}\kappa_n + \frac{(LN - M^2)}{(EG - F^2)} = 0 \tag{2.70}$$

réécrivons la dernière relation sous la forme

$$\kappa_n^2 - \frac{(EN + LG - 2MF)}{(EG - F^2)}\kappa_n + \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0 \tag{2.71}$$

notons que $EG - F^2 = g$ et $b = LN - M^2$. On peut écrire la dernière équation sous forme simplifiée comme suit

$$\kappa_n^2 - 2H\kappa_n + \kappa = 0 \tag{2.72}$$

où

$$\kappa = \frac{b}{g} \quad \text{et} \quad H = \frac{EN + LG - 2MF}{2g} = \frac{g_{11}b_{22} + b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12}}{2g} \tag{2.73}$$

κ est *la courbure de Gauss* (totale) et H *la courbure moyenne*. Ces deux quantités peuvent s'écrire aussi en tenant compte des relations (2.47) et (2.48) de la façon suivante

$$H = -\frac{1}{2g}\left(b_{12}g_{12} - b_{11}g_{22}\right) - \frac{1}{2g}\left(b_{21}g_{21} - b_{22}g_{11}\right) = -\frac{1}{2}\left(\alpha_1^1 + \alpha_2^2\right)$$

c'est-à-dire

$$H = -\frac{1}{2}Tr\left(\boldsymbol{\alpha}\right) \tag{2.74}$$

et aussi on a

$$\kappa = \frac{\det\left(\mathbf{b}\right)}{\det\left(\mathbf{g}\right)} = \det\left(\mathbf{b}\right)\det\left(\mathbf{g}^{-1}\right) = \det\left(\mathbf{b}\mathbf{g}^{-1}\right)$$

et d'après (2.46) on obtient

$$\kappa = \det\left(-\boldsymbol{\alpha}\right) = \left(-1\right)^2\det\left(\boldsymbol{\alpha}\right) = \det\left(\boldsymbol{\alpha}\right) \tag{2.75}$$

Revenons maintenant aux extremums de κ_n qui peuvent être donnés en résolvant l'équation algébrique (2.72), on aboutit à

$$\left(\kappa_n\right)_{\max} = H + \sqrt{H^2 - K} \tag{2.76}$$

$$\left(\kappa_n\right)_{\min} = H - \sqrt{H^2 - K} \tag{2.77}$$

Notons ainsi que la courbure de Gauss et la courbure moyenne peuvent être exprimées en fonction de $\left(\kappa_n\right)_{\max}$ et $\left(\kappa_n\right)_{\min}$

$$\kappa = \left(\kappa_n\right)_{\max}\ \left(\kappa_n\right)_{\min} \quad \text{et } H = \frac{1}{2}\left[\left(\kappa_n\right)_{\max} + \ \left(\kappa_n\right)_{\min}\right] \tag{2.78}$$

Ainsi, la courbure moyenne H est la moyenne des courbures minimale et maximale, c'est un nombre réel, dont le signe dépend du choix fait pour orienter la surface (S).

Exemple : On veut calculer la courbure de Gauss κ et la courbure moyenne H pour la surface de la sphère précédente. Pour cela, calculons d'abord la matrice $\boldsymbol{\alpha}$ donnée par (2.46) comme

$$\boldsymbol{\alpha} = -\,\mathbf{b}\mathbf{g}^{-1} \tag{2.79}$$

on a déjà calculer les matrices $\mathbf{g}$ et $\mathbf{b}$ pour la sphère, ainsi on aura

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0} \end{pmatrix} \tag{2.80}$$

donc suite aux formules (2.75) et (2.74) on obtient

$$\kappa = \det(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{r_0^2} \tag{2.81}$$

et

$$H = -\frac{1}{2} Tr\,(\boldsymbol{\alpha}) = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{r_0}\right) = -\frac{1}{r_0} \tag{2.82}$$

2.7 Tenseur de Riemann et courbure de Gauss

2.7.1 Tenseur de Riemann

Le *tenseur de courbure de Riemann* ou *tenseur de Riemann* est le moyen le plus couramment utilisé pour exprimer la courbure des variétés riemanniennes. Il nous montre dans quelle mesure le tenseur métrique n'est pas localement isométrique à celui de l'espace euclidien. C'est une quantité *intrinsèque,* il peut être calculé sans aucune référence à la façon dont la surface est émergée dans l'espace ambiant. Le tenseur de courbure peut également être défini pour toute variété pseudo-riemannienne. Ce tenseur est calculé uniquement en termes du tenseur métrique et ses dérivées comme suit

$$R^a_{bcd} = \frac{\partial \Gamma^a_{bd}}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma^a_{bc}}{\partial x^d} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed} \tag{2.83}$$

ses indices a, b, c et d prennent les valeurs 1 à n ou (0 à $n-1$) pour un espace n-dimensionnel. Le nombre total des composantes est n^4. Il n'est pas difficile de montrer que le tenseur de Riemann vérifie les propriétés de symétrie suivantes :

$$R_{abcd} = g_{ae}R^{e}_{bcd} \tag{2.84}$$

$$R_{aaaa} = 0, \quad \forall\ a = 1,\ n \tag{2.85}$$

$$R_{abcd} = -R_{bacd} \tag{2.86}$$

$$R_{abcd} = -R_{abdc} \tag{2.87}$$

$$R_{abcd} = R_{dcab} \tag{2.88}$$

et la permutation cyclique (identité de Bianchi) :

$$R^{a}_{bcd} + R^{a}_{dbc} + R^{a}_{cdb} = 0 \tag{2.89}$$

En raison de ces propriétés de symétrie, les composantes du tenseur de Riemann ne sont pas toutes indépendantes. En effet, on peut montrer que le nombre des composantes indépendantes est $\frac{1}{12}n^2\left(n^2-1\right)$. Le tableau suivant donne le nombre de ces composantes pour quelques dimensions :

Dimension de l'espace (n)	1	2	3	4
Nombre de composantes (n^4)	1	16	81	256
Nombre de composantes indépendantes $\left(\frac{1}{12}n^2\left(n^2-1\right)\right)$	0	1	6	20

Si toutes les composantes du tenseur de Riemann sont nulles alors l'espace est plat (pas de courbure dans n'importe quelle direction dans cet espace). Le tenseur de Riemann R^{a}_{bcd} peut être contracté (faire une sommation) pour produire le tenseur de *Ricci*. C'est les propriétés de symétrie qui vont nous aider à connaitre quels sont les deux indices qui peuvent être contractés. En effet, si nous contractons le premier indice (a) avec le deuxième (b) on va obtenir un tenseur nul ;

$$R^{a}_{acd} = g^{ai}R_{iacd} = -g^{ia}R_{aicd} = -R^{i}_{icd} = -R^{a}_{acd} \Rightarrow R^{a}_{acd} = 0 \tag{2.90}$$

Il reste deux contractions ; le premier indice avec le troisième ou le premier avec le quatrième. Cependant, remarquons que

$$R^{a}_{bad} = -R^{a}_{bda} \tag{2.91}$$

c'est-à-dire qu'il ya une seule contraction intéressante du tenseur de Riemann. Cette contraction produire le tenseur de Ricci R_{ab} et on écrit

$$R_{ab} = R^{i}_{aib} = -R^{i}_{abi} \tag{2.92}$$

R_{ab} est un tenseur symétrique. En effet, considérons l'identité de Bianchi

$$R^a_{bcd} + R^a_{dbc} + R^a_{cdb} = 0 \tag{2.93}$$

et on pose $d = a$, il vient

$$R^a_{bca} + R^a_{abc} + R^a_{cab} = 0 \tag{2.94}$$

mais comme $R^a_{abc} = 0$ et $R^a_{bca} = -R^a_{bac}$ on obtient

$$-R^a_{bac} + R^a_{cab} = 0 \tag{2.95}$$

c'est-à-dire

$$R_{cb} = R_{bc} \tag{2.96}$$

A ce stade, on peut définir la *courbure scalaire* (ou le *scalaire de Ricci*) $\mathcal{R}$ comme la trace du tenseur de Ricci

$$\mathcal{R} = g^{ab} R_{ab} = Tr\,(R_{ab}) \tag{2.97}$$

Pour une surface bidimensionnelle (espace à 2 dimensions), le tenseur de Riemann n'a qu'une seule composante indépendante, ce qui signifie que le scalaire de Ricci $\mathcal{R}$ détermine complètement le tenseur de Riemann. De plus, ce scalaire est directement proportionnel à la courbure de Gauss κ de cette surface. On va montrer cette proportionnalité dans la suite.

Dans les dimensions supérieures, la courbure de Riemann généralisée la courbure de Gauss, mais on a besoin dans ce cas de toutes les composantes du tenseur de Riemann.

2.7.2 Le scalaire de Ricci et la courbure de Gauss pour une surface à 2 dimensions

On considère une surface (S) bidimensionnelle paramétrée par q^1 et q^2 et soit à nouveau le vecteur position $\mathbf{r}\,(q^1, q^2)$ d'un point P sur cette surface. Les équations de Gauss dans ce cas sont

$$\mathbf{r}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\mathbf{r}_k + b_{ij}\mathbf{n} \quad , \quad i, j, k = 1, 2 \tag{2.98}$$

on doit alors avoir l'égalité

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{ij}}{\partial q^\ell} = \frac{\partial \mathbf{r}_{i\ell}}{\partial q^j} \quad , \quad i, j, \ell = 1, 2 \tag{2.99}$$

cela est dû à la commutativité des dérivées partielles. La dernière relation s'écrit aussi comme

$$\mathbf{r}_{ij\ell} = \mathbf{r}_{i\ell j} \tag{2.100}$$

donc à partir de (2.98) on a

$$\mathbf{r}_{ij\ell} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{k}}{\partial q^{\ell}} \mathbf{r}_k + \Gamma_{ij}^{k} \mathbf{r}_{k\ell} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial q^{\ell}} \mathbf{n} + b_{ij} \mathbf{n}_{\ell}$$

tenons compte des relations (2.98) et (2.43) on aura

$$\mathbf{r}_{ij\ell} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{k}}{\partial q^{\ell}} \mathbf{r}_k + \Gamma_{ij}^{k} \left(\Gamma_{k\ell}^{s} \mathbf{r}_s + b_{k\ell} \mathbf{n} \right) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial q^{\ell}} \mathbf{n} - b_{ij} b_{\ell}^{k} \mathbf{r}_k$$

cette dernière égalité s'écrit en changeant quelques indices de sommation comme

$$\mathbf{r}_{ij\ell} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^{s}}{\partial q^{\ell}} + \Gamma_{ij}^{k} \Gamma_{k\ell}^{s} - b_{ij} b_{\ell}^{s} \right) \mathbf{r}_s + \left(\Gamma_{ij}^{k} b_{k\ell} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial q^{\ell}} \right) \mathbf{n} \tag{2.101}$$

inter changeant maintenant j et ℓ on obtient

$$\mathbf{r}_{i\ell j} = \left(\frac{\partial \Gamma_{i\ell}^{s}}{\partial q^{j}} + \Gamma_{i\ell}^{k} \Gamma_{kj}^{s} - b_{i\ell} b_{j}^{s} \right) \mathbf{r}_s + \left(\Gamma_{i\ell}^{k} b_{kj} + \frac{\partial b_{i\ell}}{\partial q^{j}} \right) \mathbf{n} \tag{2.102}$$

Les vecteurs $\mathbf{r}_s$ et $\mathbf{n}$ sont linéairement indépendants, la relation $\mathbf{r}_{ij\ell} - \mathbf{r}_{i\ell j} = 0$ donne pour le coefficient de $\mathbf{n}$

$$\Gamma_{ij}^{k} b_{k\ell} - \Gamma_{i\ell}^{k} b_{kj} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial q^{\ell}} - \frac{\partial b_{i\ell}}{\partial q^{j}} = 0 \tag{2.103}$$

Cette dernière équation est connue comme équation de *Mainardi-Codazzi*. Pour le coefficient de $\mathbf{r}_s$ on obtient l'équation intéressante suivante

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^{s}}{\partial q^{\ell}} - \frac{\partial \Gamma_{i\ell}^{s}}{\partial q^{j}} + \Gamma_{ij}^{k} \Gamma_{k\ell}^{s} - \Gamma_{i\ell}^{k} \Gamma_{kj}^{s} - b_{ij} b_{\ell}^{s} + b_{i\ell} b_{j}^{s} = 0 \tag{2.104}$$

qui s'écrit aussi sous la forme

$$R_{i\ell j}^{s} = b_{ij} b_{\ell}^{s} - b_{i\ell} b_{j}^{s} \tag{2.105}$$

où $R_{i\ell j}^{s}$ est le tenseur de Riemann, discuté précédemment, il est donné par

$$R_{i\ell j}^{s} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{s}}{\partial q^{\ell}} - \frac{\partial \Gamma_{i\ell}^{s}}{\partial q^{j}} + \Gamma_{ij}^{k} \Gamma_{k\ell}^{s} - \Gamma_{i\ell}^{k} \Gamma_{kj}^{s} \tag{2.106}$$

le tenseur de Ricci dans ce cas est

$$R_{ij} = R_{isj}^{s} = b_{ij} b_{s}^{s} - b_{is} b_{j}^{s} \tag{2.107}$$

par conséquent, la courbure scalaire est

$$\mathcal{R} = g^{ij} R_{ij} = g^{ij} b_{ij} b_{s}^{s} - g^{ij} b_{is} b_{j}^{s} \tag{2.108}$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{R} = b_j^j b_s^s - b_s^j b_j^s \tag{2.109}$$

on a vu dans (2.42) que

$$\alpha_i^\ell = -b_i^\ell \ ,$$

par suite

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \alpha_i^i \alpha_s^s - \alpha_s^j \alpha_j^s = \alpha_1^1 \alpha_1^1 + \alpha_1^1 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_1^1 + \alpha_2^2 \alpha_2^2 \\ &\quad -\alpha_1^1 \alpha_1^1 - \alpha_1^2 \alpha_2^1 - \alpha_2^1 \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \alpha_2^2 \\ &= 2\left(\alpha_1^1 \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \alpha_2^1\right) = 2 \det(\boldsymbol{\alpha})\end{aligned} \tag{2.110}$$

Donc d'après (2.75), on obtient le résultat général important pour une surface bidimensionnelle

$$\mathcal{R} = 2\kappa \tag{2.111}$$

Comme on l'a déjà constaté, le scalaire de courbure $\mathcal{R}$ est proportionnel à la courbure de Gauss κ.

La relation (2.111) est d'une importance fondamentale. Pour une surface bidimensionnelle, le scalaire de Ricci $\mathcal{R}$ détermine complètement le tenseur de Riemann qui dépend du tenseur métrique g_{ij} et ses dérivées ; c'est-à-dire de la première forme. Il s'ensuit, à travers l'égalité (2.111) que la courbure de Gauss κ est indépendante de la deuxième forme. C'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la manière dont la surface est plongée dans l'espace tridimensionnel. Ce résultat constitue le théorème remarquable de Gauss (*Theorema egregium*).

Exemple :

On considère toujours l'exemple précédent de la surface de la sphère définie par le vecteur position $\mathbf{r}(\theta, \varphi)$. On veut déterminer le scalaire de courbure $\mathcal{R}$ en contractant le tenseur de Ricci correspondant, puis on vérifie la relation (2.111).Considérons le tenseur de Ricci

$$\begin{aligned}R_{ij} &= R_{isj}^s \\ &= R_{i\theta j}^\theta + R_{i\varphi j}^\varphi\end{aligned} \tag{2.112}$$

soit

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} R_{\theta\theta} & R_{\theta\varphi} \\ R_{\varphi\theta} & R_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \tag{2.113}$$

le scalaire de courbure est

$$\mathcal{R} = g^{ij} R_{ij} = g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\varphi} \tag{2.114}$$

donc on n'a pas besoin de calculer $R_{\theta\varphi}$ puisque notre métrique g_{ij} est diagonale ;

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} r_0^2 & 0 \\ 0 & r_0^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}, \tag{2.115}$$

Ainsi,

$$R_{\theta\theta} = R^{\theta}_{\theta\theta\theta} + R^{\varphi}_{\theta\varphi\theta} = R^{\varphi}_{\theta\varphi\theta}$$

et

$$R_{\varphi\varphi} = R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi} + R^{\varphi}_{\varphi\varphi\varphi} = R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi}$$

puisque $R^{\theta}_{\theta\theta\theta} = R^{\varphi}_{\varphi\varphi\varphi} = 0$ (voir propriété (2.85)). Donc on aura

$$\mathcal{R} = \frac{1}{r_0^2} R^{\varphi}_{\theta\varphi\theta} + \frac{1}{r_0^2 \sin^2\theta} R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi}$$

mais

$$\begin{aligned} R_{\varphi\theta\varphi\theta} &= g_{\varphi i} R^{i}_{\theta\varphi\theta} = g_{\varphi\varphi} R^{\varphi}_{\theta\varphi\theta} \\ R_{\theta\varphi\theta\varphi} &= g_{\theta i} R^{i}_{\varphi\theta\varphi} = g_{\theta\theta} R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi} \end{aligned}$$

comme $R_{\varphi\theta\varphi\theta} = R_{\theta\varphi\theta\varphi}$ (suite au (2.88)) il vient

$$\mathcal{R} = \frac{2}{r_0^2} R^{\varphi}_{\theta\varphi\theta}$$

il suffit donc de calculer l'élément $R^{\varphi}_{\theta\varphi\theta}$. En effet

$$R^{\varphi}_{\theta\varphi\theta} = \frac{\partial \Gamma^{\varphi}_{\theta\theta}}{\partial\varphi} - \frac{\partial \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}}{\partial\theta} + \Gamma^{e}_{\theta\theta}\Gamma^{\varphi}_{e\varphi} - \Gamma^{e}_{\theta\varphi}\Gamma^{\varphi}_{e\theta}$$

on obtient après un calcul

$$R^{\varphi}_{\theta\varphi\theta} = 1$$

Donc le scalaire de courbure est

$$\mathcal{R} = \frac{2}{r_0^2} \tag{2.116}$$

on a calculé précédemment la courbure de Gauss pour cette surface et on a obtenu $\kappa = 1/r_0^2$. Donc on a bien vérifié la relation

$$\mathcal{R} = 2\kappa. \tag{2.117}$$

Chapitre 3

Mécanique quantique d'une particule non relativiste confinée une surface : méthode de confinement

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons décrire la dynamique d'une particule rigidement liée à une surface par l'action d'un potentiel externe qu'on l'appel potentiel de confinement en se basant sur la référence [1]. Ce potentiel devrait être nul (ou constant) le long de la surface, mais pour chaque petit déplacement de la particule vers la direction normale, ce potentiel augmente fortement et tend vers l'infini. En raison du confinement latéral, les énergies d'excitation quantique dans la direction normale deviennent beaucoup plus élevées que dans la direction tangentielle. Désormais, on peut ignorer le mouvement des particules dans la direction normale. Dans ce cas, on constate qu'en raison de la courbure de la surface, un potentiel scalaire de nature purement quantique apparaît dans l'équation de Schrödinger bidimensionnelle. Ce potentiel s'écrit en fonction de la courbure moyenne et la courbure de Gauss. Ainsi, nous allons expliquer en détail cette méthode de confinement pour une particule non relativiste et nous donnons une application sur une particule confinée entre deux cylindres coaxiaux.

3.2 Particule liée à une surface

On considère une particule de masse m liée à une surface (S) bidimensionnelle d'équations paramétriques $\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(q^1, q^2\right)$. Le voisinage très proche de cette surface est paramétrisé par le vecteur :

$$\mathbf{R}\left(q^1, q^2, q^3\right) = \mathbf{r}\left(q^1, q^2\right) + q^3 \mathbf{n}\left(q^1, q^2\right) \tag{3.1}$$

où $\mathbf{n}$ est un vecteur normal à la surface (S) en un point donné. La coordonnée q^3 indique la distance entre ce point de la surface et un point Q de coordonnées $\left(q^1, q^2, q^3\right)$. Comme évoqué dans l'introduction, on va considérer maintenant le potentiel de confinement qui est modélisé en général par la forme suivante :

$$\lim_{\lambda \to \infty} V_\lambda\left(q^3\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad q^3 = 0 \\ \infty & \text{si} \quad q^3 \neq 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

où λ est un paramètre introduit pour assurer la forme indiquée ci-dessus. Par exemple, on peut penser à un potentiel de confinement harmonique $V_\lambda\left(q^3\right) = \frac{1}{2} m \lambda^2 \left(q^3\right)^2$ où $\lambda \to \infty$.

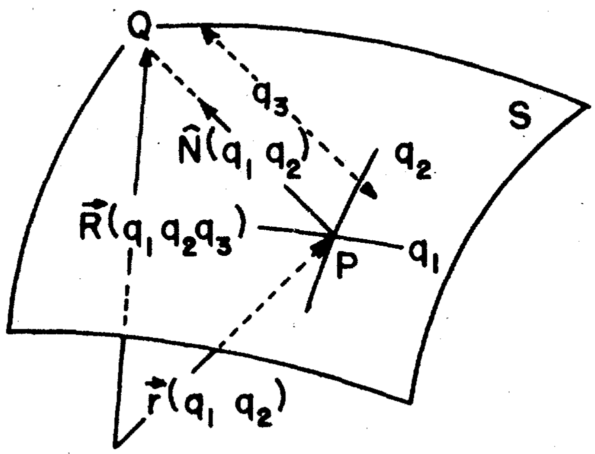

FIG 3-2 : Le voisinage trés proche d'une particule liée sur une surface

On commence par rappeler l'équation (2.37) :

$$\mathbf{n}_i = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q^i} = \alpha_i^k \mathbf{r}_k \ , \quad i, k = 1, 2 \tag{3.3}$$

où les coefficients α_i^k sont donnés explicitement dans le chapitre précédent par les formules de Weignarten (2.47) et (2.48). Dérivons l'équation (3.1) par rapport à q^i

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} + q^3 \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q^i}, \qquad i = 1, 2 \tag{3.4}$$