

# Instabilité elliptique

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>35</b>
<b>2.2</b>	<b>Approche numérique</b>	<b>40</b>
<b>2.3</b>	<b>Particularités hydrodynamiques</b>	<b>45</b>
<b>2.4</b>	<b>Interaction des marées et de la libration</b>	<b>64</b>
<b>2.5</b>	<b>Interaction des marées et de la précession</b>	<b>70</b>
<b>2.6</b>	<b>Instabilité thermo-elliptique</b>	<b>84</b>
<b>2.7</b>	<b>Synthèse du chapitre 2 et publications</b>	<b>96</b>

---

L'instabilité elliptique est une instabilité tridimensionnelle susceptible d'apparaître dès lors qu'un fluide tournant présente des lignes de courant elliptiques (voir Kerswell, 2002, pour une revue). Cette instabilité générique intervient dans de nombreux systèmes dans lesquels l'ellipticité provient par exemple d'interactions entre tourbillons ou de parois déformées. Elle a été étudiée dans le contexte des sillages d'avions (e.g. Leweke & Williamson, 1998*a,b*), des tourbillons atmosphériques et océaniques (e.g. Afanasyev, 2002), des noyaux liquides planétaires (e.g. Kerswell & Malkus, 1998), des étoiles doubles (Rieutord, 2003) et des disques d'accrétion (e.g. Goodman, 1993; Lubow *et al.*, 1993; Ryu & Goodman, 1994). Plus récemment, les effets magnétohydrodynamiques de l'instabilité elliptique ont été étudiés, avec des applications en turbulence magnétohydrodynamique (Thess & Zikanov, 2007), ou dans le contexte des processus d'induction à l'œuvre à l'échelle planétaire (Lacaze *et al.*, 2006; Herreman *et al.*, 2009).

Dans ce chapitre, des lignes de courant elliptiques, ingrédient fondamental de l'instabilité elliptique, sont obtenues et étudiées en considérant un fluide en rotation au sein d'un ellipsoïde triaxial. Au-delà de l'aspect fondamental de cette étude de mécanique des fluides, la pertinence géo- et astrophysique de cette géométrie permet de quantifier la robustesse de cette instabilité par rapport aux particularités du contexte planétaire. Pour ce faire, nous nous basons sur des simulations numériques, ce qui nous permet de tester l'ajout progressif de complexités naturelles. Ainsi, une fois l'instabilité elliptique introduite (section 2.1), le modèle numérique est présenté et validé en section 2.2 avant d'être utilisé en section 2.3 pour l'étude. L'influence de l'aplatissement polaire d'une planète est

étudiée en section 2.3.1, puis les sections 2.3.2 et 2.3.3 s'intéressent respectivement à l'influence du mouvement orbital et de l'obliquité planétaire. L'outil numérique nous permet également d'étudier des grandeurs d'intérêt difficiles à mesurer expérimentalement telles que par exemple la vigueur de l'écoulement généré par l'instabilité (section 2.3.4 et 2.3.5) ou la dissipation associée (section 2.3.6).

Au-delà des complexités géométriques, la présence d'autres forçages à l'échelle planétaire, tels que les forçages mécaniques ou thermiques, posent aussi la question de l'existence de l'instabilité dans un tel contexte. La section 2.4 considère l'interaction entre le forçage de marées et le forçage de libration. Nous confirmons notamment pour la première fois qu'une instabilité elliptique peut en effet être excitée par librations, et des premiers résultats sur cette instabilité sont donnés. En 2.5, l'interaction de l'instabilité elliptique et de la précession est étudiée. Enfin, la section 2.6 montre que l'instabilité elliptique peut se développer sur des écoulements convectifs, tels que ceux du noyau terrestre, ou thermiquement stratifiés tel que l'est probablement le noyau de Io.

## 2.1 Introduction

### 2.1.1 Historique

Le résumé ci-dessous reprend en partie l'introduction de Kerswell (2002) pour les études sur l'instabilité elliptique entre les années 70 où elle fut découverte et les années 90. L'instabilité elliptique fut découverte de façon simultanée mais indépendante de part et d'autre du rideau de fer. À l'ouest, l'instabilité elliptique émerge des travaux déjà décrits en section 1.1.1, à savoir Crow (1969), Widnall *et al.* (1974), Moore & Saffman (1975), Tsai & Widnall (1976), Vladimirov *et al.* (1983a), Vladimirov & Il'in (1988) et Robinson & Saffman (1984).

Au même moment, un groupe russe étudie expérimentalement des ellipsoïdes triaxiaux de fluide. Leurs résultats sont en accord avec les travaux classiques de Greenhill (1879), Hough (1895) et Poincaré (1910) pour des rotations autour du petit axe (stable) et de l'axe median (instable) mais des instabilités inattendues apparaissent pour les rotations autour du grand axe, a priori stable (Gledzer *et al.*, 1974). Des instabilités similaires sont observées dans un cylindre elliptique (Gledzer *et al.*, 1976), ce que Gledzer *et al.* (1976) confirment par une analyse de stabilité linéaire. Revenant aux ellipsoïdes, Gledzer *et al.* (1977) étendent cette analyse aux perturbations de vitesse quadratiques en variables d'espace. Ces résultats sont confirmés ultérieurement par différentes expériences (Roesner & Schmieg (1980) pour les ellipsoïdes, Chernous'ko (1978) pour les cylindres, ainsi que Vladimirov & Vostretsov (1986)).

L'instabilité elliptique fut redécouverte numériquement par Pierrehumbert (1986), ce qui amena Bayly (1986) à étudier théoriquement la stabilité d'un écoulement elliptique. L'analyse de Floquet de ce dernier révèle qu'un tel écoulement est linéairement instable pour des perturbations tridimensionnelles. Landman & Saffman (1987) montrent que la prise en compte de la viscosité dans cette analyse ne modifie pas le mécanisme de l'instabilité. Une interprétation physique de l'instabilité est donnée par Waleffe (1990) qui montre qu'elle provient d'une élongation exponentielle de la vorticité. Un peu auparavant, Waleffe (1989) avait généralisé l'analyse de Gledzer *et al.* (1976) en géométrie cylindrique, prédisant par une analyse faiblement non-linéaire que l'instabilité devrait être supercritique. Reprenant cette géométrie, Malkus (1989) révèle expérimentalement les aspects non-linéaires de l'instabilité qui peut croître, saturer, puis soudainement rendre l'écoulement complètement turbulent avant que l'écoulement ne se relaminarise : le cycle se reproduit alors à nouveau, produisant un écoulement intermittent. A partir de ce moment, les études se multiplient. Craik (1989)  tudie l'influence d'une rotation de la déformation et obtient des résultats en accord avec les expériences antérieures de Boubnov (1978); Vladimirov *et al.* (1983b). Ses résultats seront confirmés théoriquement par Gledzer & Ponomarev (1992) et Kerswell (1994). Considérant un écoulement non-confiné, Miyazaki & Fukumoto (1992) incluent une stratification de densité axiale et montrent théoriquement que les taux de croissance sont alors toujours réduits. Miyazaki (1993)  tudie les effets combinés d'une telle stratification et d'une rotation de la déformation, aboutissant à une formule analytique du taux de croissance. Revenant à une déformation stationnaire, Kerswell (1993a)  tudie les effets combinés d'un confinement dans un cylindre elliptique avec un éventuel barreau central, d'une stratification axiale ou radiale et d'un champ

magnétique. Il montre que dans ce cas, une stratification axiale est toujours stabilisante tandis qu'une déformation radiale est toujours déstabilisante pour l'instabilité, ce que l'étude de Le Bars & Le Dizès (2006) confirme. Il montre également que l'effet du champ magnétique est également toujours stabilisant (voir aussi Kerswell, 1994). Haj-Hariri & Homsy (1997) étendent l'analyse de Floquet de Bayly (1986) à un fluide viscoélastique, travail qui sera complété plus tard par Fabijonas & Holm (2004b) qui considèrent l'instabilité elliptique au sein de fluides complexes. Goodman (1993) est le premier à étudier la présence de l'instabilité elliptique au sein des disques d'accrétion, portant ainsi son étude dans un contexte astrophysique. Ses résultats seront confirmés par les simulations numériques 2D de Ryu & Goodman (1994) : le transport de moment angulaire par l'instabilité dans une telle configuration n'est pas significatif (voir aussi les études de Lubow *et al.*, 1993; Balbus & Hawley, 1998). Dans le même contexte, Lebovitz & Lifschitz (1996b,a) reconsidèrent le problème classique de la stabilité des ellipsoïdes de Riemann, qui représentent des modèles très simplifiés d'étoiles (voir l'annexe F), et montrent que l'instabilité elliptique peut s'y développer. Le Dizès *et al.* (1996) reviennent à un simple écoulement elliptique non-confiné, et considèrent un vortex évoluant en temps. Kerswell & Malkus (1998) considèrent une oscillation temporelle de la rotation différentielle entre la déformation et le fluide et suggèrent sa présence au sein de Io et Europe. De façon générale, l'inclusion d'une dépendance en temps pour un écoulement elliptique peut être déstabilisante, comme le montrent les travaux de Craik & Allen (1992); Bayly *et al.* (1996); Forster & Craik (1996); Biello *et al.* (2000). L'évolution non-linéaire de l'instabilité et de sa saturation, initiée par Waleffe (1989), est étudiée théoriquement et numériquement par Mason & Kerswell (1999) en géométrie cylindrique, confirmant le mécanisme de saturation proposé. Enfin, de nouvelles expériences étudient l'instabilité elliptique dans les sillages (Leweke & Williamson, 1998b) et dans l'interaction de deux vortex (Leweke & Williamson, 1998a). La littérature sur le sujet se multiplie soudainement à partir des années 2000 et il devient alors difficile de décrire son évolution. Citons quelques contributions de mes prédécesseurs à l'IRPHE qui constituent une part de l'expérience acquise au laboratoire : l'extension de l'instabilité elliptique au cas d'un cisaillement multipolaire est étudiée en géométrie cylindrique par Le Dizès & Eloy (1999); Eloy *et al.* (2000); Le Dizès (2000); Eloy & Le Dizès (2001); Eloy *et al.* (2003), l'apparition de l'instabilité elliptique au sein de vortex par Le Dizès & Laporte (2002); Lacaze *et al.* (2005a, 2007); Le Dizès (2008), son développement en géométrie sphérique, en lien avec des applications géophysiques, par Lacaze *et al.* (2004, 2005b, 2006); Le Bars *et al.* (2007); Herreman *et al.* (2009); Le Bars *et al.* (2010) et Guimbard *et al.* (2010) ont étudié son interaction avec une stratification axiale en géométrie cylindrique.

### 2.1.2 Interprétation physique

Bayly (1986), motivé par les simulations spectrales de Pierrehumbert (1986), montre par une analyse de Floquet que l'écoulement elliptique (1.27) perturbé par des ondes planes est instable en l'absence de viscosité. Cette analyse est étendue au cas visqueux par Landman & Saffman (1987). Il faut cependant attendre le travail de Waleffe (1990) pour obtenir une véritable interprétation physique de l'instabilité. Ce dernier parvient à obtenir une solution exacte visqueuse non-linéaire en considérant l'écoulement de base

(1.26), qu'il écrit sous la forme

$$\mathbf{u}_b = \begin{pmatrix} 0 & -(1+\beta) & 0 \\ 1-\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} , \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{x}$  est le vecteur position et  $\mathbf{D}$  est la matrice de l'écoulement élongationnel de l'écoulement elliptique ( $\beta$  étant l'ellipticité des lignes de courant, définie en section 1.4.4.1). Considérant une perturbation  $\mathbf{u}$  de cet écoulement de base, son évolution est régie par l'équation de Navier-Stokes ou de façon équivalente, par son rotationnel, i.e. l'équation de la vorticité  $\boldsymbol{\omega}$ . Ainsi, la vitesse  $\mathbf{u}_b + \mathbf{u}$  est régie par l'équation

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u}_b \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\omega} + 2\partial_z \mathbf{u} - \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (2.2)$$

sans aucune approximation. Le premier et le second terme du membre de droite représentent respectivement l'inclinaison et l'étirement de la perturbation en vorticité de l'écoulement de base. Le troisième est l'inclinaison et l'étirement de la vorticité de l'écoulement de base par la perturbation. Le quatrième et le cinquième sont les termes non-linéaire et visqueux. Waleffe (1990) considère alors une perturbation qui consiste simplement en une rotation en bloc :

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x} . \quad (2.3)$$

Pour ce type de perturbation, les termes non-linéaire et visqueux sont identiquement nuls. De plus, le premier et le troisième terme se compensent exactement. Ainsi, l'équation (2.2) se réduit à  $\partial_t \boldsymbol{\omega} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\omega}$  i.e. (cf. équation (2.1))

$$\dot{\omega}_1 = -\beta \omega_2 \quad (2.4)$$

$$\dot{\omega}_2 = -\beta \omega_1 \quad (2.5)$$

qui admet un mode propre croissant exponentiellement, donné par  $\omega_1 = -\omega_2$ . Cela démontre qu'une rotation solide avec une vorticité dans la direction de l'élongationnel (i.e. du cisaillement maximum) est une solution croissante exponentielle exacte non-linéaire visqueuse du problème. L'instabilité elliptique, i.e. ici l'étirement exponentiel d'une perturbation de vorticité, sature en s'écartant de la direction d'étirement, comme l'avait proposé Waleffe (1989) dans sa thèse, ce qui a été confirmé expérimentalement par Gledzer *et al.* (1974) et Eloy (2000).

Waleffe (1990) montre également clairement le caractère paramétrique de l'instabilité elliptique en prouvant que cette dernière peut être décrite par un type d'équation usuel pour les oscillateurs paramétriques, une *équation de Ince* (Magnus, 1966). En effet, si l'écoulement de base (1.26) est perturbé par une onde plane d'amplitude  $X$ , alors Waleffe (1990) montre que l'évolution de cette perturbation est donnée par

$$(1 - \xi \cos 2\phi) \ddot{X} + 4 \xi \sin(2\phi) \dot{X} + \xi_2 X = 0 , \quad (2.6)$$

où  $\xi$  et  $\xi_2$  sont des constantes, et  $\phi$  la phase du vecteur d'onde. Avec  $Z = (1 - \xi \cos 2\phi)X$ , cette équation se met sous la forme standard d'une *équation de Hill* :

$$(1 - \xi \cos 2\phi) \ddot{Z} + (C - 4 \xi \cos 2\phi) Z = 0 , \quad (2.7)$$

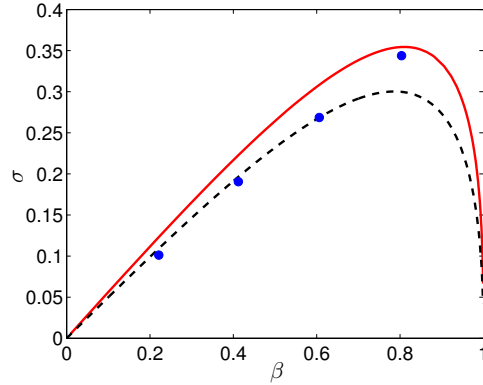


FIGURE 2.1 – Taux de croissance  $\sigma$  de l'instabilité elliptique en fonction de la déformation  $\beta$  des lignes de courant. La ligne continue correspond à l'analyse de Floquet de l'écoulement (1.26), pertinent en géométrie cylindrique. L'accord avec les valeurs obtenues numériquement (ronds) par Pierrehumbert (1986) est excellent jusqu'à des ellipticités de l'ordre de  $\beta \approx 0.8$ . Ces dernières sont légèrement inférieures, probablement du fait des contraintes de conditions aux limites du calcul numérique (Bayly, 1986). La ligne interrompue correspond à l'écoulement (1.24), au sein d'un ellipsoïde avec l'aplatissement optimal  $c = \sqrt{ab} = (1 - \beta^2)^{1/4}$  et un facteur multiplicatif supplémentaire  $\sqrt{1 - \beta^2}$  pour que les échelles de temps soient les mêmes (cf. section 1.4.4.1)

d'une forme très proche de l'équation de Mathieu pour les petits  $A$  (cf. section 1.5), confirmant le caractère paramétrique de l'instabilité. Ce type d'équation étant bien connu, l'arsenal mathématique associé peut alors être utilisé, ce qui permet par exemple à Waleffe (1990) de construire des solutions analytiques localisées, en lien direct avec les résultats antérieurs de Bayly (1986).

Enfin, Waleffe (1990) obtient analytiquement le taux de croissance de cette perturbation dans la limite des petites ellipticités :

$$\sigma = \frac{9}{16} \beta, \quad (2.8)$$

en accord avec l'analyse de Floquet de Bayly (1986). Nous avons mené à nouveau l'analyse décrite par Bayly (1986), et les résultats sont représentés en figure 2.1, montrant que la pente de  $9/16$  à l'origine est une bonne approximation jusqu'à des ellipticités relativement élevées. Notons un maximum  $\sigma \approx 0.354$ , obtenu pour  $\beta \approx 0.81$ .

La stabilité de l'écoulement de base (1.24) dans un ellipsoïde triaxial  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$  a été étudiée par Gledzer *et al.* (1977), étude reprise par Kerswell (2002). Cette analyse de stabilité étant décrite et étendue à un écoulement plus général en annexe D, elle n'est pas reprise ici et nous nous contentons d'en donner le résultat : dans le cas particulier de l'écoulement (1.24), le taux de croissance de petites rotations solides perturbatives est

donné par

$$\sigma = \sqrt{\frac{(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)}} , \quad (2.9)$$

nul pour  $a = c$  ou  $a = b$  (i.e. pour un sphéroïde). Cette expression admet un maximum  $\sigma_{\max} = (b - a)/(a + b)$  pour  $c = \sqrt{ab} = (1 - \beta^2)^{1/4}$ . Pour cet aplatissement optimal, la figure 2.1 montre que  $\sigma$  a la même allure que le taux de croissance donné par l'analyse de Floquet pour un écoulement non-confiné. Le cas limite  $\beta \rightarrow 0$  pour cet aplatissement optimal vaut

$$\sigma = \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^3}{8} + O(\beta^4) \quad (2.10)$$

ce qui donne bien une pente à l'origine légèrement inférieure à  $9/16$ . La figure 2.1 montre qu'un maximum  $\sigma \approx 0.3$  est également obtenu pour  $\beta = [1/2 \cdot (\sqrt{5} - 1)]^{1/2} \approx 0.786$ .

### 2.1.3 Approche locale, approche globale

L'approche locale consiste à considérer de façon lagrangienne un écoulement non-confiné perturbé par une onde plane. Cela revient à ne considérer que des perturbations de courtes longueurs d'onde. Cette approche, initiée par Bayly (1986) et Craik & Criminale (1986) pour l'instabilité elliptique, s'est progressivement raffinée jusqu'aux travaux sur la méthode WKB dans le cadre de l'hydrodynamique de Friedlander & Vishik (1991) et Lifschitz & Hameiri (1991). L'approche locale permet d'obtenir les taux de croissance, souvent sous forme analytique explicite, et permet de prouver qu'une simple ligne de courant elliptique est intrinsèquement instable.

L'approche globale considère un écoulement de base, éventuellement confiné, et le décompose en ses modes normaux. Cette approche permet donc de tenir compte des effets de confinement et de suivre l'évolution de l'instabilité mode par mode. Il est possible d'étendre cette approche à une analyse faiblement non-linéaire : l'évolution temporelle de l'instabilité peut alors être calculée, mode par mode, depuis sa croissance initiale exponentielle jusqu'à sa saturation. Dans le cadre de l'instabilité elliptique, cette approche a été développée par Eloy *et al.* (2000, 2003) en géométrie confinée cylindrique, en se basant sur les modes de Kelvin (section 1.3.2.3). En géométrie confinée sphérique, Lacaze *et al.* (2004, 2005b) ont confirmé la pertinence d'une telle approche. Les instabilités inertielles résultant d'une résonance triadique de modes normaux n'apparaissent alors que si les conditions suivantes, appelées *conditions de résonance*, sont vérifiées :

$$m_2 - m_1 = m \quad (2.11)$$

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega \quad (2.12)$$

$$k_2 - k_1 = k \quad (2.13)$$

où  $m_i$ ,  $\omega_i$  et  $k_i$  sont respectivement les nombre d'onde azimutaux, les pulsations et les nombres d'onde radiaux des deux modes normaux en résonance avec le forçage de nombre d'onde azimutal  $m$ , de pulsation  $\omega$  et de nombre d'onde radial  $k$ . Dans le cas particulier de

l'instabilité multipolaire par exemple, les conditions de résonance pour un élongationnel fixe dans le référentiel inertiel sont données par (e.g. Eloy & Le Dizès, 2001) :  $\omega = 0$  et  $k = 0$ ,  $m$  étant l'ordre de la symétrie de la perturbation élongationnelle ( $m = 2$  pour l'instabilité elliptique). Dans le cas de l'instabilité inertielle de précession en géométrie cylindrique (e.g. Lagrange *et al.*, 2008), le forçage de précession donne  $m = 1$  tandis que  $\omega$  et  $k$  sont la pulsation et le nombre d'onde radial du mode de Kelvin forcé qui constitue l'écoulement de base (e.g. Lagrange *et al.*, 2008, 2011).

## 2.2 Approche numérique

D'un point de vue numérique, la plupart des études de l'instabilité elliptique considèrent la dynamique 3D de deux vortex déformés initialement 2D (e.g. Lundgren & Mansour, 1996; Sipp & Jacquin, 1998; Lacaze *et al.*, 2007; Roy *et al.*, 2008). En effet, le travail pionnier de Pierrehumbert (1986) montre numériquement la présence de cette instabilité pour un écoulement plan associé à un vortex elliptique au sein d'une boîte, avec des conditions de glissement et une périodicité supposée dans la direction axiale : le problème linéaire aux valeurs propres est alors résolu par une méthode spectrale, et le taux de croissance de l'instabilité obtenu. Les études numériques en milieu confiné sont moins nombreuses. Mason & Kerswell (1999) utilisent un système de coordonnées elliptico-polaire non-orthogonal afin de résoudre l'écoulement dans un cylindre déformé par des méthodes spectrales ; l'évolution temporelle non-linéaire de deux modes différents de l'instabilité elliptique est alors calculée avec des conditions d'adhérence sur les parois latérales et des conditions de glissement sur les parois inférieure et supérieure du cylindre. Seyed-Mahmoud *et al.* (2000) obtiennent numériquement les fréquences et les taux de croissance de l'instabilité dans des ellipsoïdes et des coquilles ellipsoïdales en utilisant une méthode de Galerkin linéaire, en projetant l'écoulement sur une sélection d'ondes inertielles. Finalement, Ou *et al.* (2007) étudient la stabilité de domaines fluides ellipsoïdaux compressibles auto-gravitants et soulignent l'apparition de l'instabilité elliptique. Cependant, jusqu'ici, l'évolution non-linéaire visqueuse de l'instabilité elliptique au sein d'un conteneur n'a pas encore été simulée numériquement. Cette section présente une méthode numérique permettant de telles simulations. Le modèle numérique est validé par comparaison avec les résultats de la littérature sur un fluide en rotation au sein d'un ellipsoïde triaxial faiblement déformé.

### 2.2.1 Méthode numérique utilisée

Dans notre étude de l'instabilité elliptique, le problème à résoudre numériquement peut se décrire génériquement sous la forme suivante : au sein d'une géométrie non-axisymétrique à parois fixes, quel est l'écoulement d'un fluide en rotation ? La configuration de référence dans ce travail est issue des études expérimentales dans un ellipsoïde faiblement déformé (Lacaze *et al.*, 2004, 2005b; Herreman *et al.*, 2009; Le Bars *et al.*, 2010). Dans ces expériences, une cavité sphérique de rayon  $R$ , moulée dans un cylindre de silicone, est remplie avec du liquide et mise en rotation à vitesse angulaire constante  $\Omega$  autour de l'axe ( $Oz$ ). Le cylindre est alors légèrement comprimé d'une quantité  $s$  selon ( $Ox$ ), perpendiculairement à l'axe de rotation. La cavité devient alors un ellipsoïde triaxial



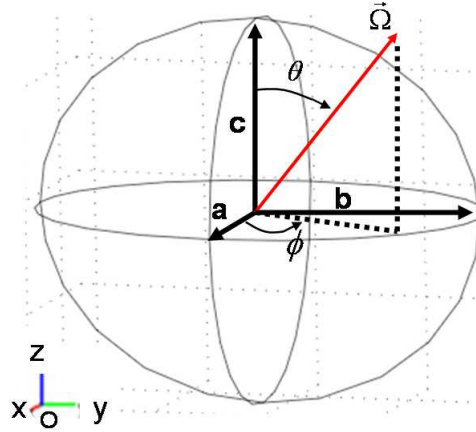


FIGURE 2.2 – Schéma du problème considéré : un fluide est en rotation dans un ellipsoïde triaxial d'axes  $(a, b, c)$ , liés au référentiel  $(Ox, Oy, Oz)$ , avec une vitesse tangentielle constante le long des parois dans chaque plan perpendiculaire à l'axe de rotation  $\Omega$ .

d'axes  $(a, b, c) = (R - s, R + s, R)$ , avec une ellipticité équatoriale  $\beta = (b^2 - a^2)/(a^2 + b^2)$  et une vitesse tangentielle constante le long de la paroi déformée, égale à  $\Omega R$  à l'équateur. Une telle configuration est le modèle le plus simple d'un noyau planétaire liquide sans graine solide interne, au sein d'un manteau déformé par les forces de marées, avec une vitesse tangentielle constante. De façon similaire, notre modèle numérique de référence résout l'écoulement d'un fluide en rotation au sein d'un ellipsoïde d'axes  $(a, b, c)$  liés au référentiel  $(Ox, Oy, Oz)$ , avec une vitesse tangentielle constante le long de la paroi dans chaque plan perpendiculaire à l'axe de rotation  $\Omega$  (fig. 2.2). La longueur  $c$  de l'axe polaire peut être choisie indépendamment des autres longueurs  $a$  et  $b$  (avec  $b > a$ ), ce que ne permettait pas le dispositif expérimental. De plus, l'axe de rotation de l'ellipsoïde peut être incliné par rapport à l'axe polaire, ce qui nous permettra d'étudier l'influence de l'obliquité en section 2.3.3 ou l'interaction avec la précession en section 2.5. Notons cependant que, par défaut,  $c$  sera égal à la moyenne des axes équatoriaux  $R_{eq} = (a + b)/2$ , et l'axe de rotation sera selon  $(Oz)$ , de même que dans le dispositif expérimental. Dans toutes nos simulations, le fluide est initialement au repos, puis soudainement, une vitesse angulaire constante est imposée de sorte que la vitesse tangentielle le long de la paroi déformée dans chaque plan perpendiculaire à l'axe de rotation soit égale à  $\Omega (a' + b')/2$ , où  $a'$  et  $b'$  sont les axes de la paroi elliptique dans ce plan. Nos résultats sont adimensionnés par l'échelle de longueur  $R_{eq}$  et l'échelle de temps  $\Omega^{-1}$ . Ainsi, cinq nombres adimensionnels permettent de caractériser le système : le nombre d'Ekman  $E = \nu/(\Omega R_{eq}^2)$ , où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide, l'ellipticité  $\beta = (b^2 - a^2)/(a^2 + b^2)$  de la déformation, le rapport d'aspect  $c/b$  qui quantifie l'aplatissement de l'ellipsoïde, et finalement l'inclinaison  $\theta$  et la déclinaison  $\phi$  de l'axe de rotation. Le problème résolu numériquement est donc

régi par le système d'équations

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + E \Delta \mathbf{u} - 2 \boldsymbol{\Omega}_c^* \times \mathbf{u}, \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.15)$$

où des conditions d'adhérence à la paroi sont utilisées pour le fluide. Notons que nous travaillons toujours dans un référentiel où les parois de l'ellipsoïde sont fixes, ce qui correspond au référentiel inertiel de référence dans la plupart des cas. La force de Coriolis  $-2 \boldsymbol{\Omega}_c^* \times \mathbf{u}$  est uniquement utilisée en section 2.3.2 où l'ellipsoïde est entièrement soumis à une rotation supplémentaire  $\boldsymbol{\Omega}_c^* \mathbf{e}_z$ .

Dans la plupart des travaux, les études numériques des noyaux liquides planétaires approximent les noyaux par une sphère ou un sphéroïde, ce qui permet d'exploiter l'axisymétrie par décomposition spectrale. Les méthodes spectrales, à la fois rapides et précises, ne peuvent cependant pas être appliquées aisément à notre cas où l'axisymétrie est brisée. Nos simulations sont donc menées avec un code basé sur la méthode des éléments finis. Ce type de code est largement utilisé en ingénierie car des géométries complexes peuvent être considérées, ce qui constitue d'ailleurs un des points forts de ce type de méthode numérique. Ainsi, l'implémentation de notre ellipsoïde triaxial et des conditions aux limites nécessaires se fait assez simplement, le prix à payer étant un coût de calcul accru par rapport à des méthodes spectrales. Avec le logiciel commercial COMSOL Multiphysics<sup>®</sup>, un maillage non-structuré d'éléments tétraédriques est créé. Les éléments utilisés sont des éléments standards de Lagrange  $P1 - P2$ , linéaires pour la pression et quadratiques pour le champ de vitesses. Notons qu'aucune technique de stabilisation n'est utilisée dans ce travail. L'avance en temps est régie par un solveur IDA (Implicit Differential-Algebraic), basé sur un schéma BDF (Backward Differencing Formulas), décrit par Hindmarsh *et al.* (2005). A chaque pas de temps, le système est résolu avec le solveur direct linéaire pour matrices creuses PARDISO<sup>1</sup>.

L'instabilité elliptique induit une déstabilisation 3D des lignes de courant initialement 2D et elliptiques. Pour étudier ses propriétés globales, il est donc naturel d'introduire la valeur moyenne de la vitesse verticale en valeur absolue  $W = \frac{1}{V} \iiint_V |w| \, d\tau$ , avec  $w$  la vitesse adimensionnelle verticale et  $V$  le volume de l'ellipsoïde. L'évolution typique de  $W$  en fonction du temps est représenté en figure 2.3a pour  $E = 1/500$  et  $\beta = 0.317$ . À  $t = 0$ , le fluide est au repos au sein de l'ellipsoïde, et la condition d'adhérence à la paroi met progressivement le fluide en rotation. Le premier pic sur  $W$ , juste après  $t = 0$ , provient du pompage d'Ekman (section 1.3.3) qui apparaît durant le spin-up (section 1.3.5) i.e. sur une durée de l'ordre du temps d'Ekman  $t_E = E^{-1/2} \Omega^{-1}$ , beaucoup plus court que le temps typique de diffusion visqueuse  $t_v = R_{eq}^2/\nu = E^{-1} \Omega^{-1}$  (Benton & Clark, 1974). En figure 2.3a par exemple, le temps adimensionnel d'Ekman donne  $\Omega t_E \approx 22$ , en accord avec l'évolution de  $W$ . Une fois le fluide en rotation, l'écoulement est essentiellement bidimensionnel avec des lignes de courant elliptiques, ce qui correspond à l'écoulement de base de l'instabilité elliptique. Cette dernière croît alors exponentiellement, passe par un overshoot puis atteint un état de saturation stationnaire. Définissant le taux de croissance  $\sigma$  de l'instabilité elliptique comme la constante de temps de la croissance exponentielle,

1. [www.pardiso-project.org](http://www.pardiso-project.org)

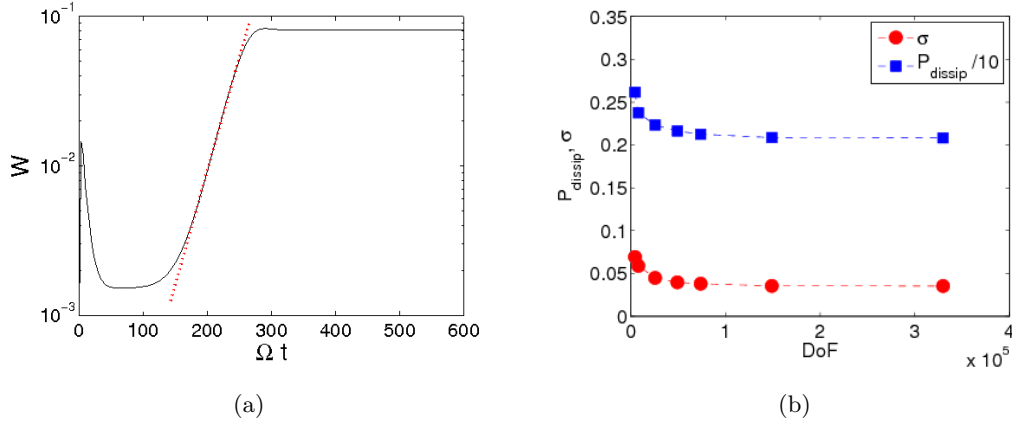


FIGURE 2.3 – Simulations pour  $E = 1/500$ ,  $\beta = 0.317$  et  $c = (a + b)/2$ . (a) Évolution temporelle de la valeur moyenne de la vitesse verticale, montrant la phase de spin-up ( $\Omega t_E \approx 22$ ), la croissance exponentielle de l’instabilité elliptique (fit exponentiel avec un taux de croissance  $\sigma = 0.352$ ) et sa saturation. (b) Convergence avec le nombre de degrés de liberté (DoF) du taux de croissance  $\sigma$  et de la puissance dissipée  $P_{dissip}$  à saturation. Les résultats présentés en (a) sont calculés avec 42459 DoF.

la figure 2.3b représente une étude de convergence numérique du taux de croissance en fonction du raffinement du maillage. Le nombre de degrés de liberté (ou *DoF* pour Degrees of Freedom) du problème est choisi entre  $4 \cdot 10^4$  DoF et  $7 \cdot 10^4$  DoF en fonction de l’ellipticité et du nombre d’Ekman, ce qui est un bon compromis entre précision et temps CPU raisonnable.

### 2.2.2 Validation de la méthode numérique

Une première validation visuelle est donnée en comparant la forme de l’écoulement observée expérimentalement (fig. 2.4a) avec l’écoulement issu des simulations numériques (fig. 2.4b). La forme usuelle en S du spin-over est retrouvée (Lacaze *et al.*, 2004), issue de la rotation supplémentaire qui apparaît dans le plan équatorial, pointant dans le voisinage de la direction d’élongation. Afin de valider quantitativement le modèle numérique, l’évolution du taux de croissance de l’instabilité est comparée en figure 2.5 à la théorie linéaire donnée par Lacaze *et al.* (2004) pour de faibles ellipticités :

$$\frac{\sigma}{\beta} = \frac{1}{2} - K \frac{\sqrt{E}}{\beta}, \quad (2.16)$$

où  $K$  est une constante égale à  $K = 2.62$  dans la limite des petits  $\beta$  (Hollerbach & Kerswell (1995); Lacaze *et al.* (2004)). Notons que le second terme dans le membre de droite de l’équation 2.16 correspond à l’amortissement visqueux du taux de croissance dû à la présence des couches d’Ekman proches des parois (voir Kudlick, 1966; Hollerbach & Kerswell, 1995). L’expression (2.16) donne un nombre d’Ekman critique ( $\sigma = 0$ ) pour le

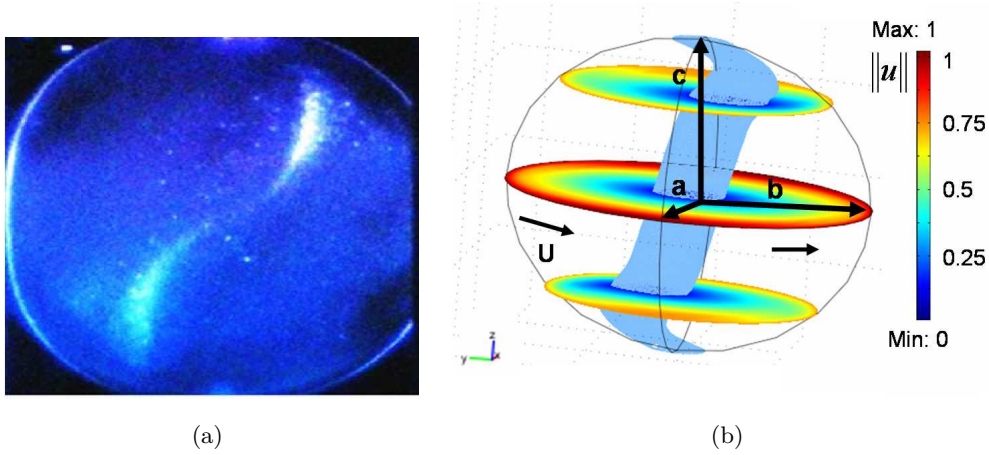


FIGURE 2.4 – Validation des simulations numériques. (a) Visualisation au Kalliroscope du mode de spin-over dans le plan méridien de l'élongation maximale pour  $E = 1/4000$  et  $\beta = 0.16$ . La forme typique en S de l'axe de rotation est due à la combinaison de la rotation principale imposée par la paroi et du mode de spin-over, qui correspond à une rotation dans le plan équatorial. (b) Coupes du champ de vitesse  $\|\mathbf{u}\|$  et iso-surface  $\|\mathbf{u}\| = 0.15$  à saturation de l'instabilité elliptique pour  $E = 1/344$ ,  $\beta = 0.317$ ,  $c = (a + b)/2$  et 49900 DoF. La forme en S du spin-over est retrouvée.

seuil de l'instabilité égal à :

$$E_c = \left( \frac{\beta}{2K} \right)^2. \quad (2.17)$$

Proche du seuil, les résultats numériques sont en très bon accord avec la théorie linéaire, jusqu'à des ellipticités de l'ordre de  $\beta \approx 0.5$ . Notons en particulier que tous les points correspondant à différents  $(\beta, E)$  se superposent lorsque  $\sigma/\beta$  est exprimé en fonction de  $\sqrt{E}/\beta$  (voir formule 2.16). Ce point est particulièrement intéressant pour les applications planétaires pour lesquelles les très faibles valeurs de  $E$  ne sont pas atteignables avec les moyens de calculs actuels mais peuvent être compensées par des ellipticités  $\beta$  plus élevées.

Finalement, lorsque l'ellipticité est trop élevée ( $\beta > 0.5$ ), la figure 2.5 montre que le taux de croissance décroît. L'instabilité elliptique finit par disparaître pour de trop grandes ellipticités, au moment où les couches d'Ekman des parois en opposition se perturbent de manière importante. Notons que la position du taux de croissance maximal  $\sigma$  avec l'ellipticité est obtenue autour de  $\beta = 0.5$ , de façon relativement indépendante du nombre d'Ekman. Cela indique que la décroissance est probablement due à des effets géométriques liés aux fortes ellipticités en jeu, plutôt qu'à des effets d'atténuation visqueuse<sup>2</sup>.

2. Il est difficile de lier ce maximum avec le maximum de la figure 2.1 dans la mesure où les échelles de temps en jeu ne sont pas les mêmes : ici, lorsque  $\beta \rightarrow 1$ , l'écoulement tend vers un écoulement de Couette plan et non vers un écoulement nul (voir section 1.4.4.1 pour plus de détails).

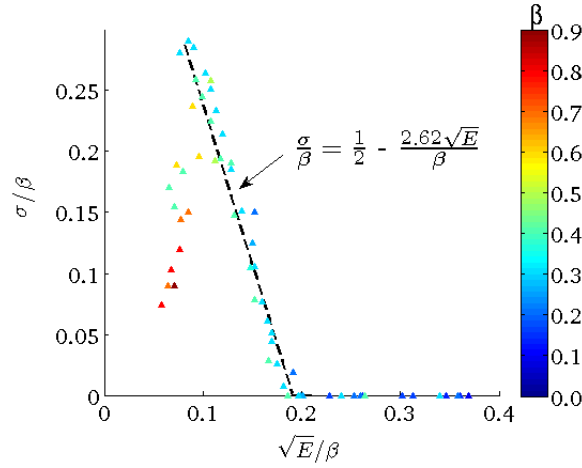


FIGURE 2.5 – Validation des simulations numériques. Évolution du taux de croissance pour ( $E \geq 1/2000$ ,  $\beta \leq 0.95$ ,  $c = (a + b)/2$ ) et comparaison avec la théorie linéaire, représentée par la ligne discontinue. Le coefficient 2.62 est valide dans la limite des faibles ellipticités (Lacaze et al., 2004). Un bon accord est obtenu pour des ellipticités allant jusqu'à des valeurs de 0.5.

## 2.3 Particularités hydrodynamiques

Dans cette section, seule l'hydrodynamique est considérée. Des complications supplémentaires importantes présentes dans un contexte planétaire sont quantifiées : (i) l'influence de l'aplatissement de l'ellipsoïde (e.g. aplatissement au niveau des pôles sur Terre), (ii) l'influence de l'ajout d'une force de Coriolis, ce qui revient à prendre en compte le mouvement orbital de l'astre compagnon responsable de la déformation et (iii) l'influence de l'inclinaison de l'axe de rotation par rapport au plan de déformation i.e. l'obliquité. On s'intéressera également à deux quantités importantes pour les applications planétaires, à savoir (i) l'amplitude de l'instabilité à saturation, et (ii) la puissance dissipée par l'instabilité.

### 2.3.1 Influence de l'aplatissement

Le mode de spin-over est le mode de l'instabilité elliptique le plus connu en géométrie ellipsoïdale. De fait, il correspond au mode excité expérimentalement lorsque l'on déforme une sphère ou une coquille sphérique à l'aide de deux rouleaux fixes (Lacaze *et al.*, 2004, 2006). Cependant, dans ce cas particulier, l'axe médian de l'ellipsoïde est aligné avec l'axe de rotation, ce qui est très rarement le cas des planètes ou des étoiles. En effet, la rotation propre des astres engendre dans la plupart des cas un aplatissement beaucoup plus grand que la déformation de marées, ce qui implique que l'axe polaire est alors le plus petit axe des trois. La situation est encore plus prononcée pour certaines étoiles, comme Regulus A dont le rayon équatorial moyen est d'environ 32% plus grand que son rayon polaire

(McAlister *et al.*, 2005).

Les premiers travaux sur ce point commencent avec Kerswell (1994) qui considère la base des modes inertiels d'un sphéroïde oblate ( $a = b$ ). Valide dans la limite des faibles ellipticités équatoriales, cette approche lui permet de calculer les 60 premières résonances sub-harmoniques exactes et leur taux de croissance  $\sigma$  pour différentes valeurs d'aplatissement  $c/b$ . La modification de  $\sigma$  par l'aplatissement peut être obtenue analytiquement dans le cas particulier du spin-over en partant de l'écoulement de base (1.24) que l'on rappelle ici :

$$\mathbf{u}_b = -\frac{a}{b} y \mathbf{e}_x + \frac{b}{a} x \mathbf{e}_y, \quad (2.18)$$

et en recherchant les perturbations non-visqueuses linéaires en coordonnées d'espace. Ici,  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$  sont respectivement les vecteurs unitaires de  $(Ox)$  et de  $(Oy)$ . Dans un domaine ouvert, cet écoulement correspond à des lignes de courant elliptiques avec une ellipticité  $\beta = (b^2 - a^2)/(b^2 + a^2)$  comme dans le modèle numérique, avec une vitesse tangentielle variable. La figure 2.6 montre que cet écoulement théorique représente une très bonne approximation de notre écoulement de base même si une vitesse tangentielle constante est imposée à notre paroi elliptique, ce qui génère une petite recirculation visqueuse en proche paroi. Pour un tel écoulement, nous avons vu (section 2.1) que le taux de croissance non-visqueux est :

$$\sigma = \sqrt{\frac{(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)}} \quad (2.19)$$

Ce taux de croissance théorique est valable pour le spin-over, i.e. pour  $a \leq c \leq b$  seulement, et est nul pour  $c = b$  ou  $c = a$ . Un maximum  $\sigma_{\max} = (b - a)/(a + b)$  est obtenu pour  $c = \sqrt{ab}$ . On peut remarquer que l'expression (2.16) conduisant à  $\sigma = \beta/2$  dans le cas non-visqueux est retrouvée avec  $a = R_{eq} + s$  et  $b = R_{eq} - s$  dans la limite  $s \ll R_{eq}$  et donc  $\beta \rightarrow 0$ . Notons que la valeur expérimentale  $c = (a + b)/2$  est très proche de  $c = \sqrt{ab}$  pour de faibles ellipticités, ce qui conduit à des taux de croissance voisins; même pour une ellipticité de 0.7 par exemple, la différence entre le taux de croissance calculé pour  $c = (a + b)/2$  et la valeur maximale (obtenue pour  $c = \sqrt{ab}$ ) est de seulement 2 %.

Les résultats numériques sont présentés en figure 2.7. Afin de les comparer avec la prédiction analytique non-visqueuse (2.19), un terme d'amortissement visqueux  $-K\sqrt{E}$  est ajouté à (2.19). Un excellent accord théorie/simulations est trouvé pour  $a \leq c \leq b$ , ce qui représente une validation supplémentaire de notre approche. Cependant, on trouve une constante  $K \approx 2.5$  légèrement différente de la constante théorique  $K = 2.62$  attendue pour le mode de spin-over dans la limite des faibles ellipticités. En fait, cette constante varie avec la déformation comme l'indique notre étude systématique à  $\beta = 0.42$  qui mène, par ajustement, à  $K = 2.78$ . Néanmoins, on peut remarquer que  $K$  reste toujours du même ordre de grandeur. On peut également remarquer qu'en raison d'une relative dispersion des résultats numériques présentés en figure 2.5, une constante  $K = 2.5$  par exemple reste correcte. Par conséquent, dans ce qui suit, nous utiliserons  $K = 2.5$ .

En plus de confirmer la loi théorique de Gledzer & Ponomarev (1992), nous sommes maintenant en mesure d'explorer la gamme  $c \leq a$  ou  $c \geq b$ , où d'autres modes, non-linéaires en coordonnées d'espace, peuvent se développer. Comme le montre la figure 2.7,

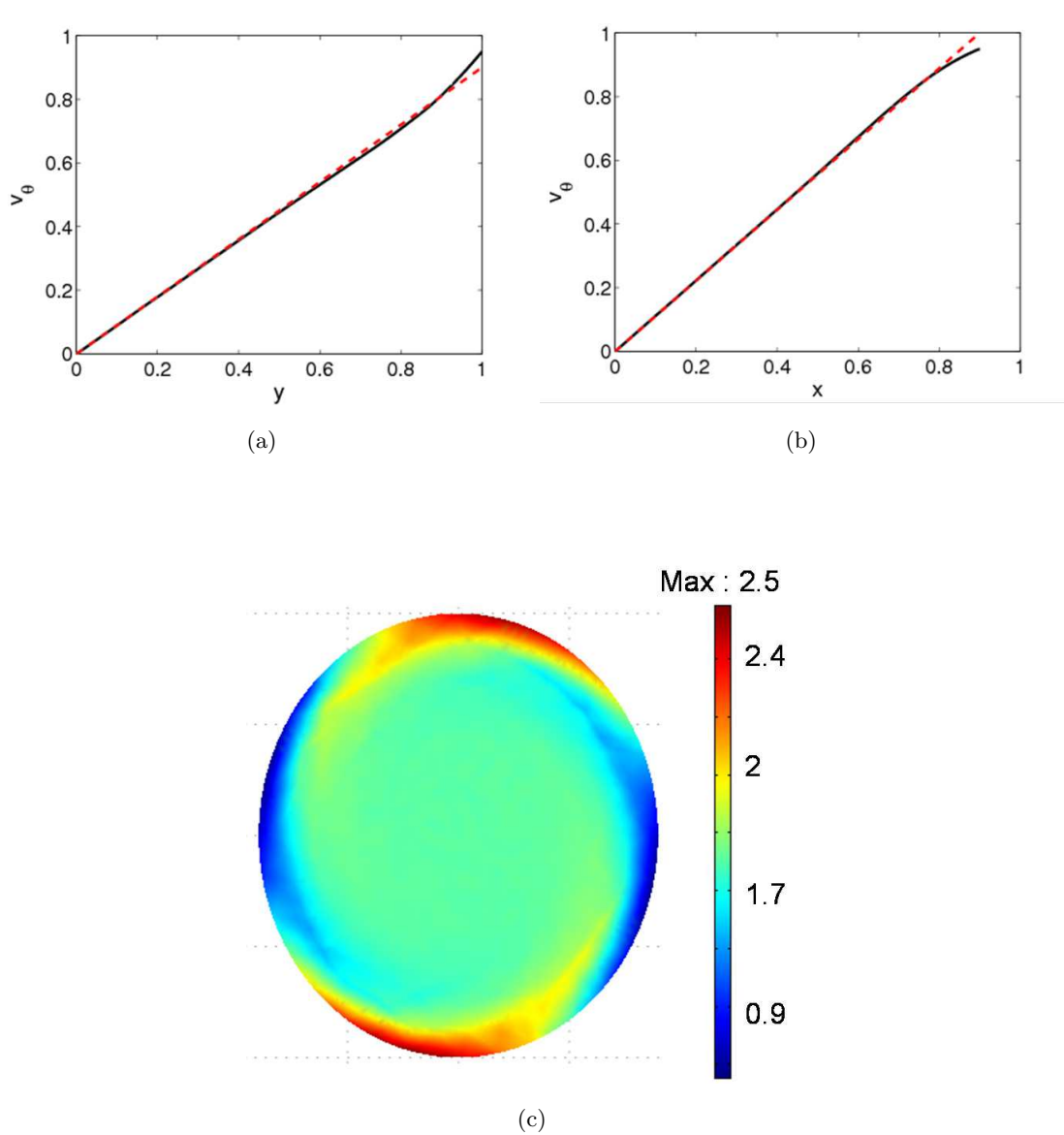


FIGURE 2.6 – Vitesse azimuthale  $v_\theta$  pour  $E = 0.011$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $c = \frac{a+b}{2}$ . (a) Coupe selon  $(Oy)$  à  $x = 0$ . (b) Coupe selon  $(Ox)$  à  $y = 0$ . (c) Coupe dans le plan équatorial de la composante selon  $(Oz)$  de la vorticité (lignes continues). Les lignes discontinues rouges en figures (a) et (b) représentent l'écoulement de base théorique (2.18), qui admet une vitesse tangentielle variable le long des lignes de courant elliptiques. Un bon accord est obtenu avec les résultats numériques, excepté dans la fine couche visqueuse de proche paroi, où des cellules de recirculation apparaissent afin de raccorder la condition de vitesse constante à la paroi.

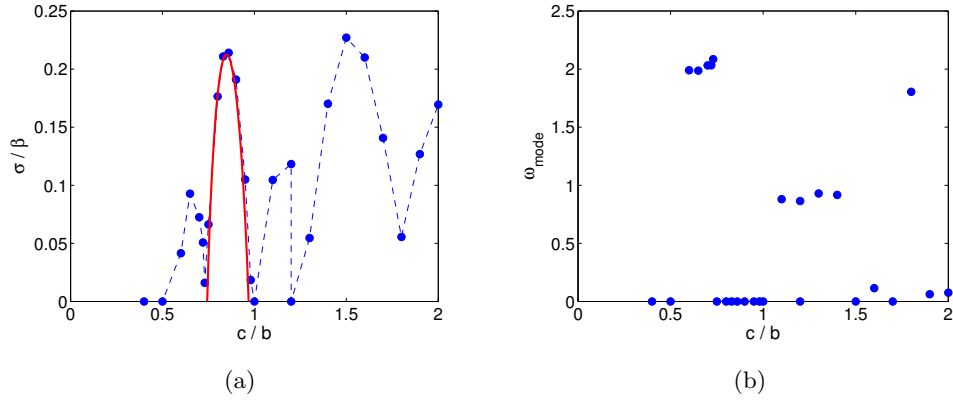


FIGURE 2.7 – Influence de la longueur  $c$  de l'axe polaire de l'ellipsoïde (aligné avec l'axe de rotation) sur la sélection de mode de l'instabilité elliptique ( $E = 1/688, \beta = 0.317$ ). (a) Variation du taux de croissance  $\sigma$  en fonction de l'aplatissement  $c/b$ . Un excellent accord entre l'expression (2.19), représentée par la ligne continue, et les calculs numériques est obtenu. (b) Variation de la fréquence principale du mode sélectionné, déterminée par une analyse de Fourier une fois l'état saturé atteint. Notons qu'un mode de spin-over avec une longueur d'onde de 1 est obtenu pour  $c/b \approx 1.6$  ( $\omega_{mode} \approx 0$ ).

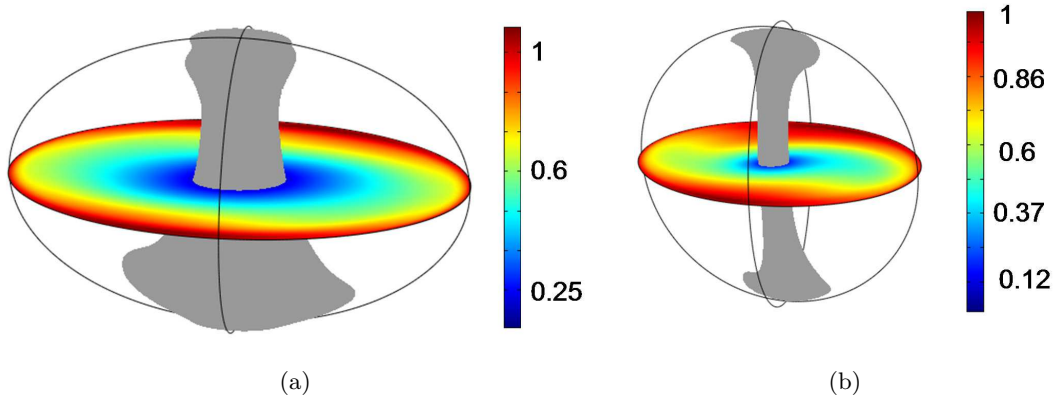


FIGURE 2.8 – Visualisations des champs de vitesses de différents modes de l'instabilité elliptique (paramètres :  $E = 1/700, \beta = 0.317$ ). (a) Coupe équatoriale du champ de vitesse  $\|\mathbf{u}\|$  et iso-surface  $\|\mathbf{u}\| = 0.22$  pour le mode  $(1,3)$  ( $c/b = 0.65$ ). (b) Coupe équatoriale du champ de vitesse  $\|\mathbf{u}\|$  et iso-surface  $\|\mathbf{u}\| = 0.18$  pour le mode  $(0,2)$  ( $c/b = 1.1$ ).



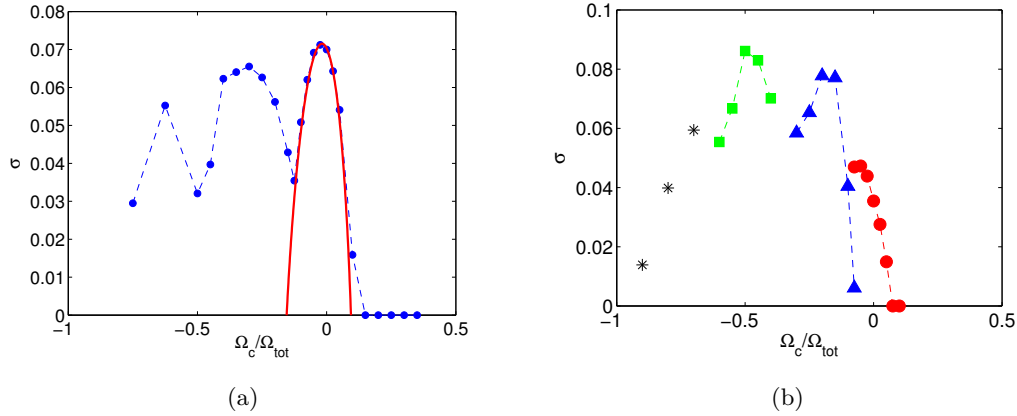


FIGURE 2.9 – Évolution du taux de croissance en présence d'une rotation globale ( $\beta = 0.317$  et  $E_{tot} = \nu/(\Omega_{tot} R_{eq}^2) = 10^{-3}$ , où  $\Omega_{tot}$  prend en compte la rotation globale et la rotation du fluide, i.e.  $\Omega_{tot} = \Omega_c + \Omega$ ). (a)  $c = (a + b)/2$ , i.e.  $c/b = 0.86$  : le spinover est alors excité en l'absence de rotation globale (i.e. pour  $\Omega_c = 0$ ). Un bon accord est trouvé avec la solution analytique (ligne continue rouge). Lorsque  $\Omega_c$  diminue, d'autres modes apparaissent avec une plus petite longueur d'onde. (b)  $c/b = 0.65$  : le mode (1,3) est alors excité en l'absence de rotation globale. D'autres modes peuvent être excités : ● représente le mode (1,3), ▲ le spinover, ■ le mode  $(-1,1)$  avec une longueur d'onde le long de l'axe de rotation, et les \* correspondent à d'autres modes.

différents modes de l'instabilité elliptique, caractérisés par leur fréquence d'oscillation principale, apparaissent selon le rapport  $c/b$  (voir aussi la figure 2.8 pour une visualisation de ces modes instationnaires). La variation de l'aplatissement est donc similaire à la variation du rapport d'aspect dans le cas d'un cylindre elliptique déformé (Eloy *et al.*, 2003). Puisque l'instabilité elliptique provient d'une résonance paramétrique de deux ondes inertielles de nombres azimutaux  $m$  et  $m + 2$  avec le champ de cisaillement imposé, le mode correspondant est noté  $(m, m + 2)$ , et oscille à la fréquence  $\omega_{mode} = m + 1$ . Par exemple, le mode de spin-over correspond au mode stationnaire  $(-1, 1)$  avec une demi-longueur d'onde le long de l'axe de rotation. Selon la figure 2.7b, le mode (1,3) peut être observé lorsque  $c < b$  et le mode (0,2) lorsque  $c > a$ . Pour des rapports encore plus grands, le mode  $(-1, 1)$  réapparaît mais avec un plus grand nombre de longueurs d'onde que le spin-over. Notons enfin que le confinement géométrique interdit tout mode stationnaire pour  $c < a$ .

### 2.3.2 Influence de la rotation de la déformation

En géo- ou astrophysique, la déformation de marées d'un corps (planète, satellite ou étoile) n'est pas immobile mais en rotation du fait du mouvement orbital de l'attracteur. L'influence de cette rotation, appelée rotation globale ci-dessous, sur l'instabilité elliptique a été étudiée théoriquement par une approche WKB (Craik, 1989; Miyazaki,

1993; Leblanc, 1997; Le Dizès, 2000), une analyse en modes normaux (Gledzer & Ponomarev, 1992; Kerswell, 1994) mais aussi numériquement pour des vortex particuliers tels que des vortex de Stuart (Leblanc & Cambon, 1998; Potylitsin & Peltier, 1999) ou de Taylor-Green (Sipp *et al.*, 1999). L'influence de cette rotation a également été étudiée expérimentalement dans des cylindres déformés (Vladimirov *et al.*, 1983b; Le Bars *et al.*, 2007) et des ellipsoïdes (Boubnov, 1978; Le Bars *et al.*, 2010). Tous ces travaux montrent que cette rotation globale a un effet stabilisant sur les vortex cycloniques, et un effet déstabilisant sur les vortex anti-cycloniques, excepté dans le cas où la rotation globale compense quasiment la rotation de l'écoulement de base, auquel cas l'instabilité elliptique disparaît.

L'expression théorique du taux de croissance pour des perturbations linéaires en espace (ce qui correspond au spinover usuel) peut être obtenue à l'aide de l'approche développée par Gledzer & Ponomarev (1992) que l'on étend ici au cas où une rotation globale à la vitesse angulaire  $\Omega_c \mathbf{e}_z = \Omega_c^* \Omega \mathbf{e}_z$  est présente :

$$\sigma = \sqrt{\frac{(b^2 - c^2 + 2 \Omega_c^* a b)(c^2 - a^2 - 2 \Omega_c^* a b)}{(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)}}. \quad (2.20)$$

Notons que ceci est un cas particulier d'une analyse de stabilité plus générale développée en annexe D dans le cas d'un ellipsoïde en précession. Ainsi, en présence de rotation globale, la gamme d'existence du spinover est modifiée et s'échelonne entre  $c = b\sqrt{1 + 2\Omega_c^* a/b}$  et  $c = a\sqrt{1 + 2\Omega_c^* b/a}$ , le maximum théorique étant maintenant atteint pour  $\frac{c^2}{ab} = \Omega_c^* + \sqrt{1 + \Omega_c^* (a/b + b/a + \Omega_c^*)}$ . Dans notre modèle numérique, l'ajout d'une force de Coriolis est immédiat<sup>3</sup> et les résultats numériques sont présentés en figure 2.9a. Une fois encore, ils sont en accord avec la prédiction théorique dès lors que le terme d'amortissement visqueux  $-2.5\sqrt{E}$ , trouvé en section 2.3.1 est ajouté à l'expression non-visqueuse (2.20). D'autres modes sont excités en dehors de la bande de résonance du spinover, ce qui avait déjà été observé expérimentalement par Le Bars *et al.* (2010).

Finalement, on peut étudier comment l'aplatissement et la rotation globale interagissent l'un avec l'autre. Considérant par exemple un ellipsoïde oblate avec un rapport d'aspect  $c/b$  tel que le mode (1, 3) soit excité en l'absence de rotation globale, la figure 2.9b montre que le spinover est retrouvé lorsque l'on diminue  $\Omega_c$ . Plus généralement, on trouve que le mode  $(-1, 1)$  est le plus instable dans le domaine anticyclonique jusqu'à une valeur  $\Omega_c/\Omega_{tot} \lesssim -1$  où l'écoulement se restabilise, en accord avec les conclusions de Le Bars *et al.* (2010).

### 2.3.3 Influence de l'obliquité

Dans les noyaux planétaires, les déformations de marée sont généralement dans le plan orbital plutôt que dans le plan équatorial, ce qui signifie qu'elles ne sont pas orthogonales à l'axe de rotation. Les travaux antérieurs ne prennent pas en compte ce phénomène, même si l'obliquité peut être importante, par exemple  $23^\circ 26'$  pour la Terre. Dans cette section, nous étudions donc l'effet d'obliquité en considérant que la forme du corps reste un ellipsoïde triaxial en première approximation.

3. La déformation elliptique reste ainsi fixe dans le référentiel de calcul.

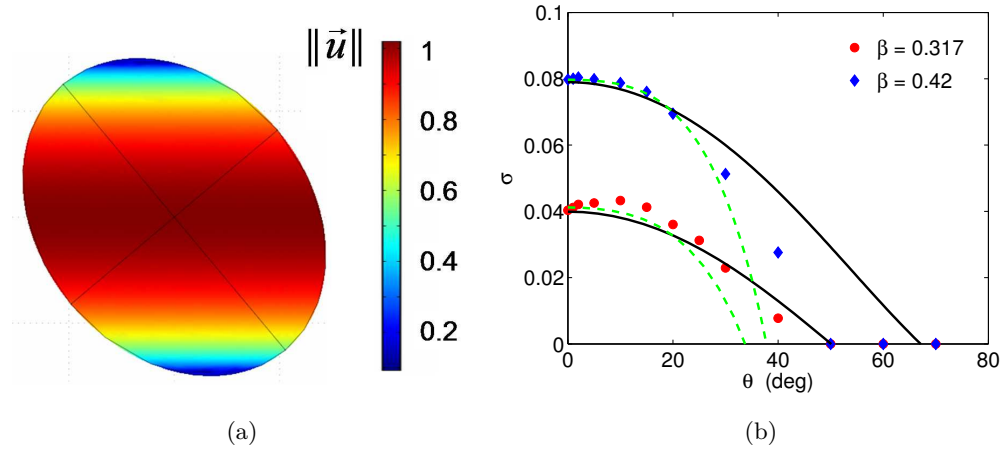


FIGURE 2.10 – (a) Norme de la vitesse à la paroi externe de l'ellipsoïde. (b) Évolution du taux de croissance  $\sigma$  avec l'obliquité  $\theta$  pour  $E = 1/600$  (vitesse angulaire fixée) et deux valeurs d'ellipticité  $\beta = 0.317$  et  $\beta = 0.42$ . Les lignes  $--$  correspondent à l'expression (2.19), qui prend en compte les valeurs apparentes des axes vues du plan équatorial, tandis que les lignes continues correspondent à l'expression (2.16) en considérant simplement la valeur de l'ellipticité apparente vue du plan équatorial. Le coefficient  $K$  (correction visqueuse de  $\sigma$ ) est déterminé pour  $\theta = 0^\circ$  puis maintenu constant.

Du point de vue numérique, l'axe de rotation est incliné et orienté selon le vecteur unitaire  $\mathbf{k}_c = (\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta))$ , où  $\phi$  est l'azimut, et  $\theta$  la colatitute en coordonnées sphériques (fig. 2.2). Supposant par exemple que l'axe de rotation est incliné dans le plan  $(Oxz)$  (i.e.  $\phi = 0$ ), on peut étudier l'influence de l'obliquité  $\theta$  sur l'instabilité elliptique. Pour  $\theta = 0$ , on retrouve naturellement la configuration usuelle avec  $\beta = (b^2 - a^2)/(b^2 + a^2)$  et un rapport d'aspect  $c/b$ . Pour  $\theta = \pi/2$ , on retrouve les résultats de la section 2.3.1 en échangeant  $a$  et  $c$ , i.e.  $\beta = |b^2 - c^2|/(b^2 + c^2)$  et le rapport d'aspect vaut maintenant  $a/b$ . Entre ces deux cas limites, les lignes de courant dans les plans perpendiculaires à l'axe de rotation restent des ellipses, mais leurs centres ne sont plus sur l'axe de rotation, excepté pour le plan équatorial  $z = 0$ . Notons que même si cela ressemble à l'écoulement considéré par Kerswell (1993b), le référentiel considéré est ici celui du laboratoire et il manque donc ici la force de Coriolis pour que l'instabilité inertielle de précession puisse se développer. Vu du plan équatorial, la longueur apparente de l'axe de l'ellipsoïde aligné avec l'axe de rotation est  $\tilde{c} = (\sin^2(\theta)/a^2 + \cos^2(\theta)/c^2)^{-1/2}$  tandis que le grand et le petit axes des lignes de courant elliptiques sont respectivement  $\tilde{b} = b$  et  $\tilde{a} = (\cos^2(\theta)/a^2 + \sin^2(\theta)/c^2)^{-1/2}$ . Le taux de croissance de l'instabilité peut donc être estimé avec les formules (2.16) ou (2.19) en utilisant ces longueurs apparentes. La figure 2.10 montre que les résultats numériques pour le spinover sont en accord avec ces estimations jusqu'à des obliquités d'environ  $\theta \sim 20^\circ$ . Ensuite, les taux de croissances diffèrent significativement, probablement du fait que la géométrie est alors assez différente d'un ellipsoïde apparent avec une rotation autour de l'un de ses axes. Cependant, les

valeurs obtenues restent entre les deux expressions proposées. Notons que pour le nombre d'Ekman étudié ici, l'instabilité elliptique ne réapparaît pas autour de  $\theta \sim 90^\circ$ , ce qui serait le cas pour des nombres d'Ekman plus faibles : comme l'étude de la section 2.3.1 le montre, d'autres modes pourraient en effet apparaître du fait de la modification de l'aplatissement.

### 2.3.4 Amplitude de l'instabilité : loi d'échelle

L'amplitude de l'écoulement généré par l'instabilité à saturation est une quantité clé pour les applications géo- et astrophysiques. En effet, elle permet de comparer l'impact d'une instabilité elliptique sur l'écoulement par rapport aux autres forçages, par exemple la convection thermique. Afin d'étudier l'amplitude de l'écoulement lié à l'instabilité à saturation, on définit l'amplitude  $A^*$  par

$$A^* = \max_V \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_b\| \quad (2.21)$$

où  $V$  est le volume de fluide,  $\mathbf{u}$  le champ de vitesse adimensionnel et  $\mathbf{u}_b$  l'écoulement de base théorique (2.18). L'évolution de  $A^*$  en fonction du nombre d'Ekman est montrée en figure 2.11a pour différentes ellipticités : il apparaît clairement que  $A^*$  est non-nul au dessous du seuil de l'instabilité elliptique du fait des différences au voisinage de la paroi entre l'écoulement de base théorique et l'écoulement imposé par la vitesse tangentielle constante sur la frontière (fig. 2.6). En fait, la différence est maximale sur la paroi, le long du petit axe équatorial où la vitesse théorique est maximale. On peut donc calculer l'amplitude correspondante  $\lambda_{(\beta)}$  théoriquement :

$$\lambda_{(\beta)} = \frac{b}{(a+b)/2} - 1 = \frac{2}{1 + \sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)}} - 1 \quad (2.22)$$

qui dépend seulement de  $\beta$ . On définit ensuite l'amplitude de l'écoulement lié à la présence de l'instabilité par  $A = A^* - \lambda_{(\beta)}$ , égal à zéro sous le seuil (fig. 2.11b).

Loin du seuil, l'instabilité secondaire apparaît, qui induit une dynamique superposée à l'état saturé primaire ; par exemple pour  $\beta = 0.317$ ,  $E = 1/1500$ ,  $c = (a+b)/2$ , le spin-over n'est plus stationnaire et se met à osciller légèrement autour de l'écoulement moyen, à une pulsation adimensionnelle d'environ  $\omega_{sec} \approx 1.4$ . Notons que ceci est en accord avec Kerswell (2002) qui prédit que la saturation de l'instabilité primaire n'est stable que pour une petite gamme de déformation (voir section 2.3.7 pour plus de détails sur cette instabilité secondaire). Ainsi, l'amplitude  $A$  doit être moyennée en temps pour s'affranchir de ces fluctuations de petite échelle. Puisque ces fluctuations ont une échelle de temps typique de l'ordre d'une révolution  $2\pi/\Omega$ , tandis que le temps caractéristique de l'instabilité elliptique donné par le taux de croissance dimensionnel est de l'ordre de  $(\Omega \beta/2)^{-1}$ , la moyenne est menée sur un temps typique de  $\Omega^{-1} \sqrt{4\pi/\beta}$ , moyenne géométrique de ces deux échelles de temps.

La figure 2.11b montre que tous les résultats numériques se regroupent sur une courbe maîtresse au-dessus du seuil, pourvu que la variable  $E_c/E - 1$  soit utilisée, ce qui est confirmé par les mesures expérimentales de Herreman *et al.* (2010). Loin du seuil, l'amplitude semble saturer autour de 1, ce qui signifie que les vitesses générées par l'instabilité

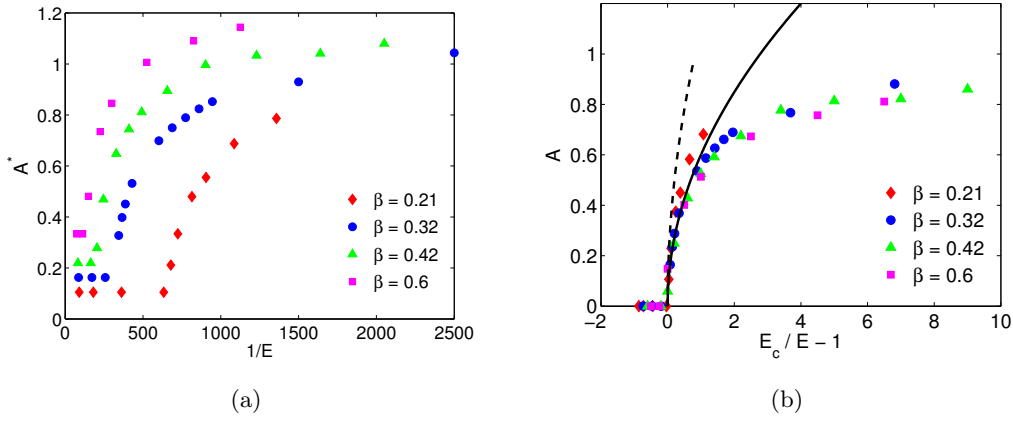


FIGURE 2.11 – Variation de l'amplitude à saturation de l'écoulement associé à l'instabilité elliptique pour différentes ellipticités  $\beta$  et différents nombres d'Ekman  $E$ . (a) Valeur maximum de la différence entre la vitesse obtenue et la vitesse théorique de l'écoulement de base (2.18). (b) Amplitude de l'instabilité elliptique prenant en compte la correction due aux cellules de recirculation (fig. 2.6c) : tous les points se superposent sur une courbe maîtresse lorsque la variable de distance au seuil ( $E_c/E - 1$ ) est utilisée. La courbe discontinue correspond à la loi d'échelle (2.40), tandis que la ligne continue correspond à un ajustement du préfacteur i.e.  $A \approx 0.6\sqrt{E_c/E - 1}$ .

elliptique sont comparables à la rotation imposée initialement entre le fluide et la déformation.

Près du seuil, une loi en racine  $A \approx 0.6 \sqrt{E_c/E - 1}$  reproduit correctement les résultats, ce qui est représentatif d'une bifurcation fourche. En fait, cette loi d'échelle peut être retrouvée analytiquement en partant du modèle développé par Lacaze *et al.* (2004) pour décrire l'évolution non-linéaire visqueuse du mode de spinover. Ce modèle, d'abord utilisé par Hough (1895) et Poincaré (1910) pour étudier la rotation solide d'un fluide non-visqueux dans un sphéroïde, peut s'écrire (voir aussi l'annexe C) :

$$\dot{\omega}_x = -\alpha_1 (1 + \omega_z) \omega_y - \nu_{so} \omega_x, \quad (2.23)$$

$$\dot{\omega}_y = -\alpha_2 (1 + \omega_z) \omega_x - \nu_{so} \omega_y, \quad (2.24)$$

$$\dot{\omega}_z = \beta \omega_x \omega_y - \nu_{ec} \omega_z + \nu_{nl} (\omega_x^2 + \omega_y^2) \quad (2.25)$$

où  $\boldsymbol{\omega}$  est le vecteur rotation du spinover,  $\alpha_1 = \beta/(2 - \beta)$  et  $\alpha_2 = \beta/(2 + \beta)$ . Les termes d'amortissement sont obtenus théoriquement (aucun paramètre ajustable) :  $\nu_{so} = 2.62 \sqrt{E}$  est le taux d'amortissement visqueux linéaire du spinover déjà obtenu par Greenspan (1968),  $\nu_{ec} = 2.85 \sqrt{E}$  est le taux d'amortissement visqueux linéaire de la rotation axiale, et  $\nu_{nl} = 1.42 \sqrt{E}$  est l'effet de la couche d'Ekman sur l'interaction non-linéaire du spinover avec lui-même (voir Greenspan, 1968, pour plus de détails). Même si ce modèle ne prend pas en compte tous les termes visqueux d'ordre  $O(\sqrt{E})$ , ni les corrections non-linéaires induites par les couches de cisaillement internes, il est en bon accord avec les expériences,

que ce soit pour le taux de croissance ou la saturation non-linéaire (Lacaze *et al.*, 2004). Ce modèle peut donc légitimement être utilisé pour étudier l'évolution non-linéaire visqueuse du spinover.

De simples manipulations algébriques permettent d'obtenir un état stationnaire non-trivial pour  $\beta > 2\nu_{so}$  :

$$\omega_x = \pm \sqrt{\frac{\nu_{ec} [\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} - \nu_{so}]}{\alpha_2 \beta - \nu_{nl} [\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} + \alpha_2^2 / \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}]}} \approx \pm \sqrt{\frac{\nu_{ec} [\beta - 2 \nu_{so}]}{\beta^2 - 2 \nu_{nl} \beta}}, \quad (2.26)$$

$$\omega_y = \mp \sqrt{\frac{\nu_{ec} [\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} - \nu_{so}]}{\alpha_1 \beta - \nu_{nl} [\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} + \alpha_1^2 / \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}]}} \approx \mp \sqrt{\frac{\nu_{ec} [\beta - 2 \nu_{so}]}{\beta^2 - 2 \nu_{nl} \beta}} \approx \mp \omega_x, \quad (2.27)$$

$$\omega_z = \frac{\nu_{so}}{\beta} \sqrt{4 - \beta^2} - 1 \approx \frac{2 \nu_{so}}{\beta} - 1, \quad (2.28)$$

où les approximations sont faites en supposant  $\beta \ll 1$ . Ce modèle prédit également un taux de croissance de l'instabilité elliptique donné par (Herreman *et al.*, 2009)

$$\sigma = \frac{\beta}{\sqrt{4 - \beta^2}} - 2.62\sqrt{E}, \quad (2.29)$$

ce qui implique, pour de faibles ellipticités, un seuil  $\beta/E^{1/2} > 5.24$  et donc un paramètre de contrôle de l'instabilité  $\chi = \beta/E^{1/2}$ . En utilisant l'écart au seuil normalisé  $\delta = (\chi - 5.24)/5.24$ , les équations (2.26), (2.27) et (2.28) se réécrivent

$$\omega_x \approx \mp \omega_y \approx \pm \sqrt{\frac{\nu_{ec}}{2 [\nu_{so}(1 + \delta) - \nu_{nl}]} \frac{\delta}{1 + \delta}}, \quad (2.30)$$

$$\omega_z \approx \frac{1}{1 + \delta} - 1, \quad (2.31)$$

ce qui donne, pour  $\delta \gg 1$  (loin du seuil)

$$\omega_x \approx \mp \omega_y \approx \pm \sqrt{\frac{\nu_{ec}}{2 \nu_{so}} \frac{1}{\delta}} \approx \pm \frac{0.74}{\sqrt{\delta}}, \quad (2.32)$$

$$\omega_z \approx -1 + \frac{1}{\delta}, \quad (2.33)$$

tandis qu'au premier ordre en  $\delta \ll 1$  (i.e. proche du seuil), on obtient

$$\omega_x \approx \mp \omega_y \approx \pm \sqrt{\frac{\nu_{ec}}{2 (\nu_{so} - \nu_{nl})}} \delta \approx \pm 1.1 \sqrt{\delta}, \quad (2.34)$$

$$\omega_z \approx -\delta. \quad (2.35)$$

La figure 2.12a montre que ces approximations sont en excellent accord avec le calcul complet des équations (2.26), (2.27) et (2.28), avec un changement de régime obtenu pour

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial \delta} = 0 \Rightarrow \delta = \sqrt{1 - \frac{\nu_{nl}}{\nu_{so}}} \approx 0.68, \quad (2.36)$$

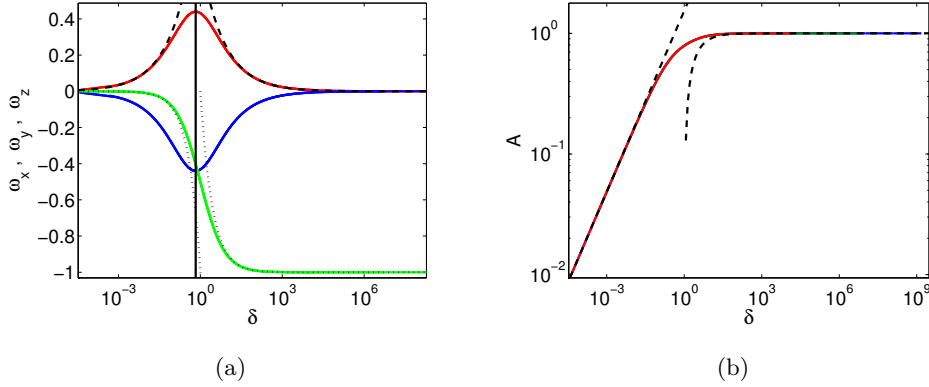


FIGURE 2.12 – (a) Comparaison des composantes  $\omega_x$  (rouge),  $\omega_y$  (bleu) et  $\omega_z$  (vert), calculées à partir des équations (2.26), (2.27) et (2.28) pour  $\beta \in [10^{-11}; 0.8]$  et  $E = 10^{-20}$ ,  $E = 10^{-15}$ ,  $E = 10^{-10}$ , avec les lois d'échelles asymptotiques : tirets pour  $\omega_x$  (eq. 2.32 et 2.34), pointillés pour  $\omega_z$  (eq. 2.33 et 2.35). Les extrema de  $\omega_x$  et  $\omega_y$  sont obtenus pour  $\delta \approx 0.68$ , comme attendu. (b) Comparaison de l'amplitude du spinover  $A = \|\boldsymbol{\omega}\|$ , obtenue à partir des équations (2.26), (2.27) et (2.28) pour  $\beta \in [10^{-11}; 0.8]$  et  $E = 10^{-20}$ ,  $E = 10^{-15}$ ,  $E = 10^{-10}$ , en ligne continue, avec les équations asymptotiques (2.37) et (2.38), représentées par les tirets noirs.

en utilisant l'équation (2.30). Pour  $\delta \gg 1$ , l'amplitude du spinover  $A = \|\boldsymbol{\omega}\|$  est alors donnée par

$$A \approx 1 - \frac{1}{\delta}. \quad (2.37)$$

tandis que pour  $\delta \ll 1$ ,  $A$  vaut

$$A \approx \sqrt{\frac{\nu_{ec}}{\nu_{so} - \nu_{nl}}} \delta \approx 1.5 \sqrt{\delta}, \quad (2.38)$$

ce qui est confirmé en figure 2.12b.

En figure 2.11b, afin de comparer aux calculs numériques, nous avons représenté  $A$  en fonction de  $E_c/E - 1$ , paramètre analogue à  $\delta$ . Les mêmes calculs que ci-dessus donnent alors pour  $\delta \gg 1$

$$A \approx 1 - \frac{1}{2\delta}. \quad (2.39)$$

tandis que pour  $\delta \ll 1$ ,

$$A \approx \sqrt{\frac{\nu_{ec}}{\nu_{so} - \nu_{nl}}} \left( \frac{E_c}{E} - 1 \right) \approx 1.5 \sqrt{\frac{E_c}{E} - 1}, \quad (2.40)$$

en accord avec l'expression  $A \approx 0.6 \sqrt{E_c/E - 1}$  obtenue à partir des simulations<sup>4</sup>. Même si on peut penser que l'écart sur le préfacteur provient des déformations finies utilisées

4. Dans Cébron *et al.* (2010a), une coquille donne une expression différente du préfacteur (un facteur 2 non-désiré au dénominateur, et un préfacteur de 1.1 au lieu de 1.5).

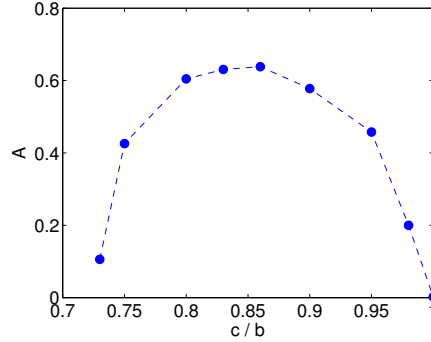


FIGURE 2.13 – Amplitude  $A$  de l'instabilité elliptique en fonction de l'aplatissement ( $E = 1/688$ ,  $\beta = 0.317$ ).

dans les simulations, nous verrons en section 3.5.1 que c'est plutôt la méthode de calcul de  $A$  qui mène à cette différence.

Enfin, reprenant les simulations de la section 2.3.1, l'évolution de l'amplitude du mode de spinover en fonction de l'aplatissement est donnée en figure 2.13. L'amplitude est maximale lorsque le taux de croissance (donc l'écart au seuil de l'instabilité) est maximal.

### 2.3.5 Angle du spin-over et amplitude

Nous avons vu que le mode de spin-over fait tourner le fluide autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de forçage du fluide. L'effet conjoint de ces deux rotations est donc une inclinaison de l'axe de rotation fluide. La condition d'adhérence à la paroi donne finalement la forme de 'S' caractéristique observée expérimentalement et numériquement. Il est alors naturel de se demander ce qui contrôle l'angle de rotation observé  $\theta_{so}$ , et s'il est possible de prédire cette grandeur caractéristique de la saturation de l'instabilité.

D'un point de vue théorique, le modèle de Lacaze *et al.* (2004), qui a été utilisé en section 2.3.4, prédit trois angles caractéristiques pour le spin-over<sup>5</sup> : sa colatitude de saturation aux temps longs  $\theta_{sat}$ , sa colatitude maximum durant la croissance de l'instabilité, i.e. l'angle à l'overshoot  $\theta_{max}$  et son déphasage en azimut à saturation  $\phi_{sat}$ . Les trois angles théoriques donnés par ce modèle sont représentés en figure 2.14 en fonction de l'écart au seuil normalisé  $\delta = (\chi - 5.24)/5.24$ , avec  $\chi = \beta/E^{1/2}$  (cf. section 2.3.4). On montre aisément à l'aide des formules (2.26), (2.27) et (2.28) les résultats suivants :

1. La colatitude à saturation tend vers  $90^\circ$  dans la limite des grands  $\delta$
2. L'azimut à saturation est donné par  $\tan \phi_{sat} = -\sqrt{(2-\beta)/(2+\beta)}$  et ne dépend donc pas de  $E$  mais qu'uniquement de  $\beta$ . Ainsi,  $\phi_{sat}$  tend vers  $-30^\circ$  (resp.  $-45^\circ$ ) dans la limite des grands (resp. petits)  $\delta$ .

ce qui est en excellent accord avec les figures 2.14a et c. La figure 2.14b montre que l'overshoot en colatitude prévu par le modèle peut être très important et semble tendre

5. Notons que ce modèle ne prédit pas d'overshoot en azimut.



vers  $90^\circ$  loin du seuil. Naturellement, en réalité, il existe des dissipations supplémentaires, et il n'est pas possible d'obtenir des colatitudes supérieures à  $45^\circ$  : les figures 2.14a et b montrent donc les limites de ce modèle sur ces prédictions. Enfin, la figure 2.14d montre que l'azimut à saturation est en fait quasiment indépendant de l'écart au seuil et varie quasi-linéairement avec l'ellipticité, de  $-45^\circ$  à  $\beta \rightarrow 0$  à  $-30^\circ$  à  $\beta \rightarrow 1$ .

Lacaze *et al.* (2004) ont effectué les premières comparaisons des résultats du modèle aux mesures expérimentales dans un ellipsoïde pour ( $\beta = 0.16 / E \in [2 \cdot 10^{-4}; 4 \cdot 10^{-4}]$ ) et trouvent que l'angle observé est correctement prédit par  $\theta_{max}$ , plutôt que par  $\theta_{sat}$ , ce qui pourrait provenir de la technique de visualisation (Kalliroscope) selon les auteurs. Les mesures sous champ magnétique dans un cylindre de Herreman *et al.* (2009) confirment que l'évolution de l'amplitude de saturation, à laquelle  $\theta_{so}$  est lié, suit l'évolution de  $\theta_{max}$  plutôt que  $\theta_{sat}$ , avec cependant,  $\theta_{so} \approx 1.42 \theta_{max}$  au lieu de la suggestion  $\theta_{so} \approx \theta_{max}$  de Lacaze *et al.* (2004). C. Morize a mené une campagne de mesures systématiques de la colatitude à saturation, en partie publiée dans Morize *et al.* (2009), et repris en figure 2.14e. La comparaison avec les figures 2.14a et b confirme les remarques de la littérature : l'angle observé suit plutôt l'évolution de  $\theta_{max}$  que celle de  $\theta_{sat}$ . En revanche, les simulations numériques semblent plutôt en accord avec la figure 2.14a, ce qui laisse penser que l'angle visualisable au Kalliroscope ne reflète pas directement le rapport entre vorticité équatoriale et vorticité axiale. Notons par ailleurs que les simulations numériques confirment que l'azimut à saturation du spin-over est en effet quasiment uniquement fonction de l'ellipticité. Enfin, notons que l'amplitude  $A$  étudié en section 2.3.4 s'écarte de la loi en racine dès lors que la colatitude du spin-over commence à saturer à sa valeur maximum de  $\sim 45^\circ$  (à cause des dissipations).

### 2.3.6 Dissipation visqueuse de l'instabilité : loi d'échelle

Lors de la synchronisation d'un système binaire, l'évolution orbitale et la variation de la vitesse de rotation sont directement liées à l'énergie dissipée par les marées (Rieutord, 2003; Le Bars *et al.*, 2010) qui reste cependant mal contrainte par nos connaissances géophysiques, même pour la Terre (e.g. Williams, 2000; Touma & Wisdom, 1994). Dans la plupart des modèles usuels, la dissipation visqueuse dans les noyaux planétaires fluides est supposée négligeable devant les autres sources de dissipation telles que la dissipation liée à la composante non-élastique du manteau solide. Cependant, même si cette approximation semble a priori justifiée, elle doit être réexaminée en présence d'instabilité elliptique : nous avons vu en section 2.3.4 que cette dernière pouvait générer un écoulement aussi important que l'écoulement de base et donc induire des cisaillements significatifs entre l'intérieur du fluide et la paroi. Notre objectif ici est d'étudier l'évolution de cette dissipation avec la déformation et le nombre d'Ekman.

L'équation usuelle du bilan de puissance pour un fluide incompressible permet d'écrire

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\tilde{u}^2}{2} \right) d\tau = \iint_S (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_v \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} ds - \iiint_V \bar{\boldsymbol{\sigma}}_v : \nabla \tilde{\mathbf{u}} d\tau, \quad (2.41)$$

où  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_v = \eta (\nabla \tilde{\mathbf{u}} + {}^t \nabla \tilde{\mathbf{u}})$  est le tenseur des efforts visqueux d'un fluide newtonien,  $S$  est la surface de l'ellipsoïde,  $\tilde{\mathbf{u}} = \Omega R_{eq} \mathbf{u}$  est le champ de vitesse dimensionnel,  $\rho$  la masse

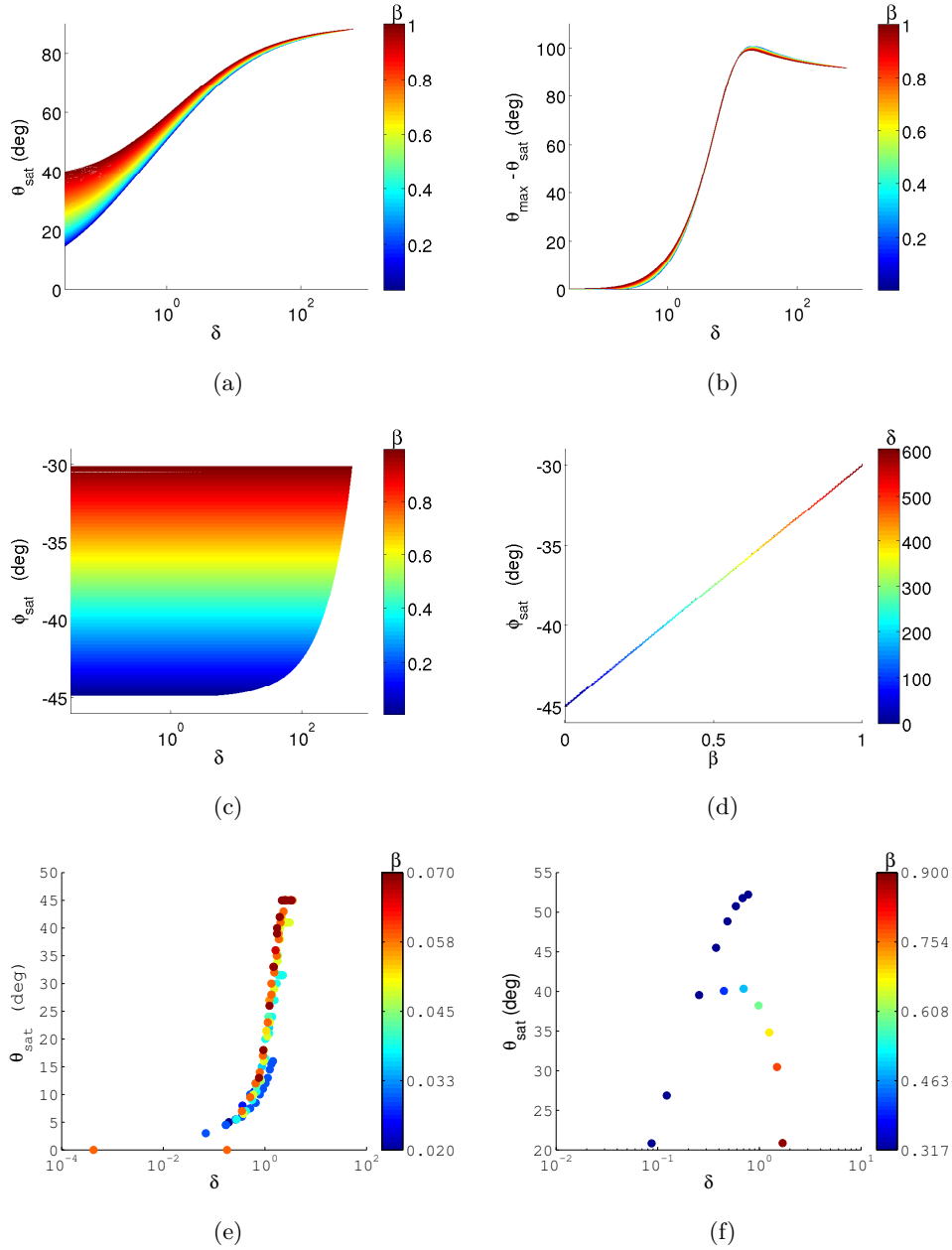


FIGURE 2.14 – Angles caractéristiques du spinover. (a) Colatitude à saturation prédite par le modèle en fonction de l'écart au seuil normalisé  $\delta$ . (b) Overshoot en colatitude durant la croissance de l'instabilité prédit par le modèle en fonction de l'écart au seuil normalisé  $\delta$ . (c) Déphasage en azimuth à saturation prédit par le modèle en fonction de l'écart au seuil normalisé  $\delta$ . (d) Déphasage en azimuth à saturation prédit par le modèle en fonction de l'ellipticité  $\beta$ . (e) Mesures expérimentales de C. Morize de la colatitude à saturation, déjà présentées en partie dans Morize et al. (2009). (f) Simulations numériques : angle à saturation calculé à partir de la vorticité hors des couches visqueuses ( $\tan\theta$  étant donné par le rapport entre vorticité équatoriale et vorticité selon l'axe de rotation).

volumique et  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide. Cette section considère uniquement le spinover. Ce mode étant stationnaire, les deux termes du membre de droite de l'équation (2.41) se compensent : le premier permet de maintenir la rotation du fluide par adhérence aux parois tandis que le second est la puissance dissipée en volume  $P$  dans le fluide. Dans la suite, on utilise comme échelle typique de puissance, la puissance dissipée durant le spin-down d'une sphère de rayon équivalent  $R_{eq}$  et de moment d'inertie  $I_\Delta$  ( $I_\Delta = 2/5 MR^2$  pour une sphère homogène de masse  $M$  et de rayon  $R$ ), i.e. l'énergie cinétique de rotation  $E_c = \frac{1}{2} I_\Delta \Omega^2$  divisé par le temps d'Ekman  $t_E$ . Notons que la puissance dissipée provient majoritairement du cisaillement en proche paroi : son estimation numérique est donc délicate et doit être regardée avec attention comme le montre par exemple la figure 2.3b.

Sous le seuil, la puissance dissipée n'est pas tout à fait nulle du fait des recirculations (fig. 2.6). Cette dissipation est liée à l'écoulement élongationnel induit par l'ellipticité, qui varie comme  $\beta \Omega R$  pour les petites ellipticités. Ainsi, la puissance dissipée dimensionnelle sous le seuil varie simplement comme

$$\iiint_V \bar{\sigma}_v : \nabla \tilde{\mathbf{u}} \, d\tau \sim \eta \beta^2 \Omega^2 R^3, \quad (2.42)$$

ce que confirment nos simulations numériques.

Loin du seuil, le modèle proposé par Le Bars *et al.* (2010) considère que le spinover est simplement une rotation solide supplémentaire équatoriale  $\mathbf{\Omega}_{SO}$  en dehors des couches visqueuses d'Ekman, d'épaisseur  $h = \xi \sqrt{\nu/\Omega_{SO}}$ ,  $\xi$  étant d'ordre 1. Ainsi, dans ce modèle, la dissipation est uniquement localisée dans la couche visqueuse de proche paroi, où l'écoulement suit la rotation de la paroi par adhérence. Dans cette modélisation simple mais a priori suffisante, le couple exercé par le conteneur sur le fluide est  $\mathbf{C}^{\mathbf{m}/\mathbf{c}} = -2 M \nu \frac{R}{h} \mathbf{\Omega}_{SO}$ , et la puissance dissipée par le système est  $P = -\frac{2}{\xi} M R \sqrt{\nu} \Omega^{5/2} A^{5/2}$ , où  $A$  est l'amplitude adimensionnelle du spin-over (voir. section 2.3.4). La puissance adimensionnelle  $P_{dissip}$  donnée par ce modèle s'écrit finalement

$$P_{dissip} = \frac{|P|}{\frac{1}{2} I_\Delta \Omega^3 \sqrt{E}} = \frac{10}{\xi} A^{5/2}, \quad (2.43)$$

où  $A$  est de l'ordre de 1 dans la limite des faibles nombres d'Ekman.

L'évolution de  $P_{dissip}$  mesurée sur nos simulations est donnée en figure 2.15. Ces résultats confirment le comportement prédit par (2.43), avec une saturation loin du seuil, et  $\xi \approx 1$ , comme attendu<sup>6</sup>, ce qui confirme que  $P$  provient essentiellement de la dissipation par cisaillement au niveau des couches d'Ekman.

### 2.3.7 Instabilité secondaire

Proche du seuil, l'instabilité elliptique apparaît à travers une bifurcation, dite *primaire*. L'instabilité elliptique primaire ne peut saturer et rester stable qu'uniquement dans une certaine gamme de forçage, donnée en géométrie cylindrique par (Kerswell, 2002)

$$\beta - \beta_c = O(E) \quad (2.44)$$

6.  $\xi$  semble en fait légèrement supérieur à 1, de l'ordre de 1.5, ce qui est en accord avec Lorenzani (2001) qui trouve une épaisseur de couche d'Ekman de  $1.4 E^{1/2}$  pour des sphères en rotation.

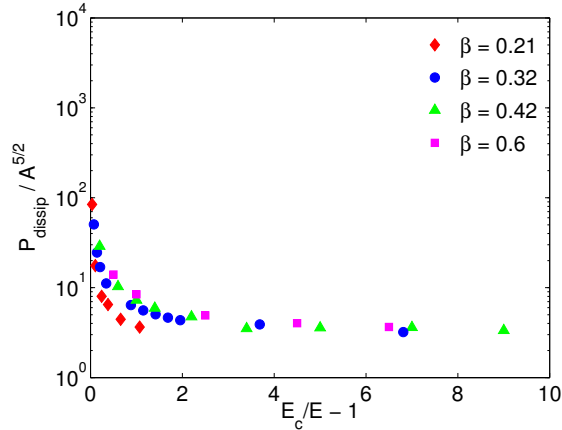


FIGURE 2.15 – *Dissipation visqueuse par l’instabilité elliptique en fonction de la distance au seuil. Les résultats se rassemblent sur une courbe maîtresse et semblent converger vers une saturation vers une valeur d’ordre 1 loin du seuil.*

où  $\beta_c$  est l’ellipticité critique i.e. au seuil. Au-delà de cette fenêtre, une instabilité secondaire apparaît, déstabilisant l’écoulement saturé de l’instabilité primaire (Waleffe, 1989; Mason & Kerswell, 1999; Eloy *et al.*, 2000). Cette instabilité secondaire, déjà évoquée en section 2.3.4, a été étudiée par des analyses de stabilité faiblement non-linéaires de l’instabilité elliptique : les analyses initiales de Hellberg & Orszag (1988) et Waleffe (1989) ont été développées par Mason & Kerswell (1999), Lebovitz & Saldanha (1999) et Sipp (2000), puis complétées par Rodrigues & De Luca (2009) et Fukumoto & Hirota (2008); Mie & Fukumoto (2010); Fukumoto *et al.* (2010). Notre étude numérique montre qu’en géométrie ellipsoïdale, elle apparaît autour de  $E = 1/1000$  pour  $\beta = 0.317$  et  $c = (a + b)/2$ , ce qui donne  $\beta - \beta_c \sim 100 E$ . Il semble donc que la fenêtre (2.44) soit une borne inférieure pour l’apparition de l’instabilité secondaire. Notons également que les expériences de Lacaze confirment que le mode de spin-over en géométrie ellipsoïdale est beaucoup plus stable qu’en géométrie cylindrique<sup>7</sup>. D’autres bifurcations sont en théorie possibles, même si elles n’ont pas été observées avec certitude. Ainsi, l’analyse faiblement non-linéaire en géométrie ellipsoïdale de Lebovitz & Saldanha (1999) donne quatre types de bifurcations possibles. L’explosion turbulente de l’écoulement observée par Malkus (1989) et Eloy *et al.* (2000) semble indiquer qu’un petit nombre de bifurcations successives est suffisant pour amorcer la transition à la turbulence de l’écoulement, ce qui est cohérent avec le scénario de transition de Ruelle-Takens (Kerswell, 2002).

### 2.3.8 Extension à la coquille : influence d’une graine interne

Dans un contexte planétaire, une graine interne solide peut être présente, comme c’est le cas pour la Terre. Il est alors légitime de se demander quelle est son influence sur l’in-

7. Notons aussi que les fortes déformations utilisées dans nos simulations modifient aussi la fenêtre de stabilité de l’instabilité elliptique primaire.

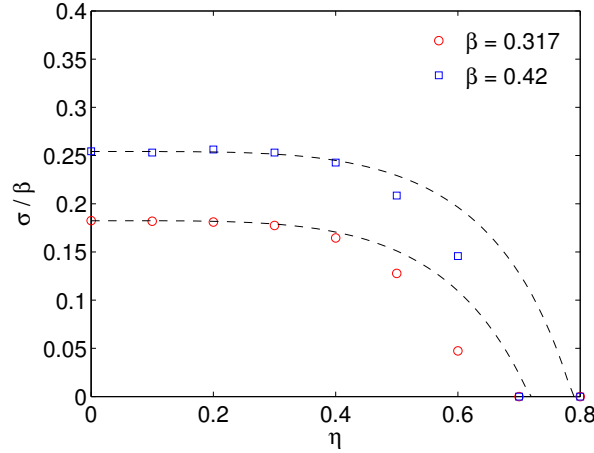


FIGURE 2.16 – Évolution du taux de croissance de l'instabilité elliptique avec le rapport d'aspect de la graine interne ellipsoïdale pour  $E = 0.0017$ .

stabilité elliptique. Lacaze *et al.* (2005b) ont étudié théoriquement le problème pour une graine interne sphérique, et ont comparé les résultats théoriques à l'expérience pour un rapport d'aspect de la coquille  $\eta = 0.3$  ( $\eta$  étant ainsi le rapport du rayon intérieur au rayon extérieur). Les modes inertiels dans une telle géométrie n'étant pas connus analytiquement (voir section 1.3.2.3), une analyse globale de stabilité n'est pas possible. Lacaze *et al.* (2005b) suggèrent donc d'adapter le modèle qu'ils ont proposé dans Lacaze *et al.* (2004) pour le mode de spin-over (voir section 2.3.4) en tenant compte de l'amortissement supplémentaire dû à la couche d'Ekman introduite par la graine interne. Hollerbach & Kerswell (1995) ont montré que le terme d'amortissement surfacique du spin-over dans une coquille sphérique est donné par  $-2.62 f(\eta) \sqrt{E}$ , avec la correction<sup>8</sup>  $f(\eta) = (1 + \eta^4)/(1 - \eta^5)$ , ce qui donne bien  $-2.62 \sqrt{E}$  pour la sphère pleine ( $\eta = 0$ ). Pour en tenir compte, Lacaze *et al.* (2005b) multiplient tous les termes visqueux de (2.23), (2.24) et (2.25) par  $f(\eta)$ , et montrent que cela permet de prédire correctement le taux de croissance ainsi que les valeurs d'overshoot et saturation de la vitesse verticale pour  $\eta = 1/3$ . Ainsi, avec cette modification, les formules (2.29) pour le taux de croissance, et (2.26), (2.27), (2.28) pour la saturation, restent valides.

Nous présentons ici l'analogie numérique de l'étude de Lacaze *et al.* (2005b), et menons la première étude systématique du taux de croissance en fonction de  $\eta$ . Cependant, nous choisissons ici de considérer une graine ellipsoïdale, homothétique de la paroi externe. La figure 2.16 montre que même aux fortes ellipticités utilisées ici, la formule théorique (2.29) adaptée au cas de la coquille

$$\sigma = \frac{\beta}{\sqrt{4 - \beta^2}} - 2.62 f(\eta) \sqrt{E} \quad (2.45)$$

8. La différence entre cette expression et celle de Lacaze *et al.* (2005b) est due au nombre d'Ekman, ici basé sur le rayon externe et non sur l'épaisseur de la coquille.

est en bon accord avec les simulations numériques. Notons que l'écart à la théorie observé aux grands  $\eta$  est attendu dans la mesure où les couches visqueuses des parois internes et externes finissent par entrer en interaction pour les nombres d'Ekman considérés ici.

### 2.3.9 Extension : instabilités multipolaires

L'écoulement de base de l'instabilité elliptique étant la superposition d'une rotation solide et d'un écoulement élongationnel, une généralisation naturelle consiste à considérer la superposition d'une rotation solide et d'un écoulement élongationnel multipolaire i.e. ayant une symétrie de révolution d'ordre  $n \geq 2$  (voir section 1.4.4.2). L'étude de la stabilité d'un tel écoulement commence avec l'analyse locale de Le Dizès & Eloy (1999), basée sur la méthode de Lifschitz & Hameiri (1991). Les auteurs montrent que pour  $n \in [2; 4]$ , un tel écoulement est instable pour des perturbations non-visqueuses de courte longueur d'onde dès lors que  $\beta > 0$ , avec un taux de croissance proportionnel au paramètre d'asymétrie  $\beta_n$  (voir section 1.4.4.2). Pour  $n \geq 5$ , l'écoulement n'est instable que s'il est suffisamment déformé, i.e. si  $\beta_n$  est plus grand qu'une certaine valeur critique dépendant de  $n$ . Cette étude de stabilité est confirmée expérimentalement par Eloy *et al.* (2000) dans un cylindre déformé, pour les symétries  $n = 2$  (instabilité elliptique) et  $n = 3$  (instabilité dite *tripolaire* ou *triangulaire*). Simultanément, Le Dizès (2000) inclue une force de Coriolis à l'analyse locale de stabilité, étendant ainsi l'étude au cas où la déformation est en rotation. Considérant les modes de Kelvin d'un vortex de Rankine en milieu infini, Eloy & Le Dizès (2001) mènent une analyse de stabilité globale de l'instabilité multipolaire et confirment qu'elle résulte de résonances d'ondes inertielles. Enfin, cette analyse est étendue au cas d'un vortex confiné en géométrie cylindrique (Eloy *et al.*, 2003).

Dans cette section, nous montrons que l'instabilité multipolaire reste présente en géométrie sphérique à l'aide des premières simulations numériques de cette instabilité. Afin de se rapprocher de la configuration expérimentale de L. Lacaze, nous avons choisi de considérer un conteneur de géométrie

$$r(\theta, z) = [1 + \beta \cos(n\theta)] \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}, \quad (2.46)$$

ce qui correspond bien à une sphère légèrement déformée dans des plans équatoriaux, avec un rayon polaire invariant égal à  $c$ . De même que pour l'étude numérique de l'instabilité elliptique, on impose une vitesse tangentielle  $U\sqrt{1 - z^2}$  le long de la paroi déformée, dans chaque plan perpendiculaire à l'axe de rotation. Ainsi, pour le cas particulier  $n = 3$ , dans chaque plan perpendiculaire à l'axe de rotation, l'écoulement est celui de Eloy & Le Dizès (2001), qui établissent l'écoulement de base (1.28), de vorticité constante, avec un cylindre en rotation déformé par trois rouleaux. Les simulations numériques montrent que l'instabilité tripolaire existe également en géométrie sphéroïdale (fig. 2.17c), ce qui avait déjà été observé par L. Lacaze expérimentalement et décrit dans sa thèse de doctorat (Lacaze, 2004, pp. 136-137) ainsi que sur une présentation en ligne<sup>9</sup> (Lacaze, 2005). Afin de comparer plus quantitativement nos simulations à la théorie, les taux de croissance

9. [www.phys.ens.fr/~dormy/MHD/GdR/PDF/Ondes/Lacaze.pdf](http://www.phys.ens.fr/~dormy/MHD/GdR/PDF/Ondes/Lacaze.pdf)

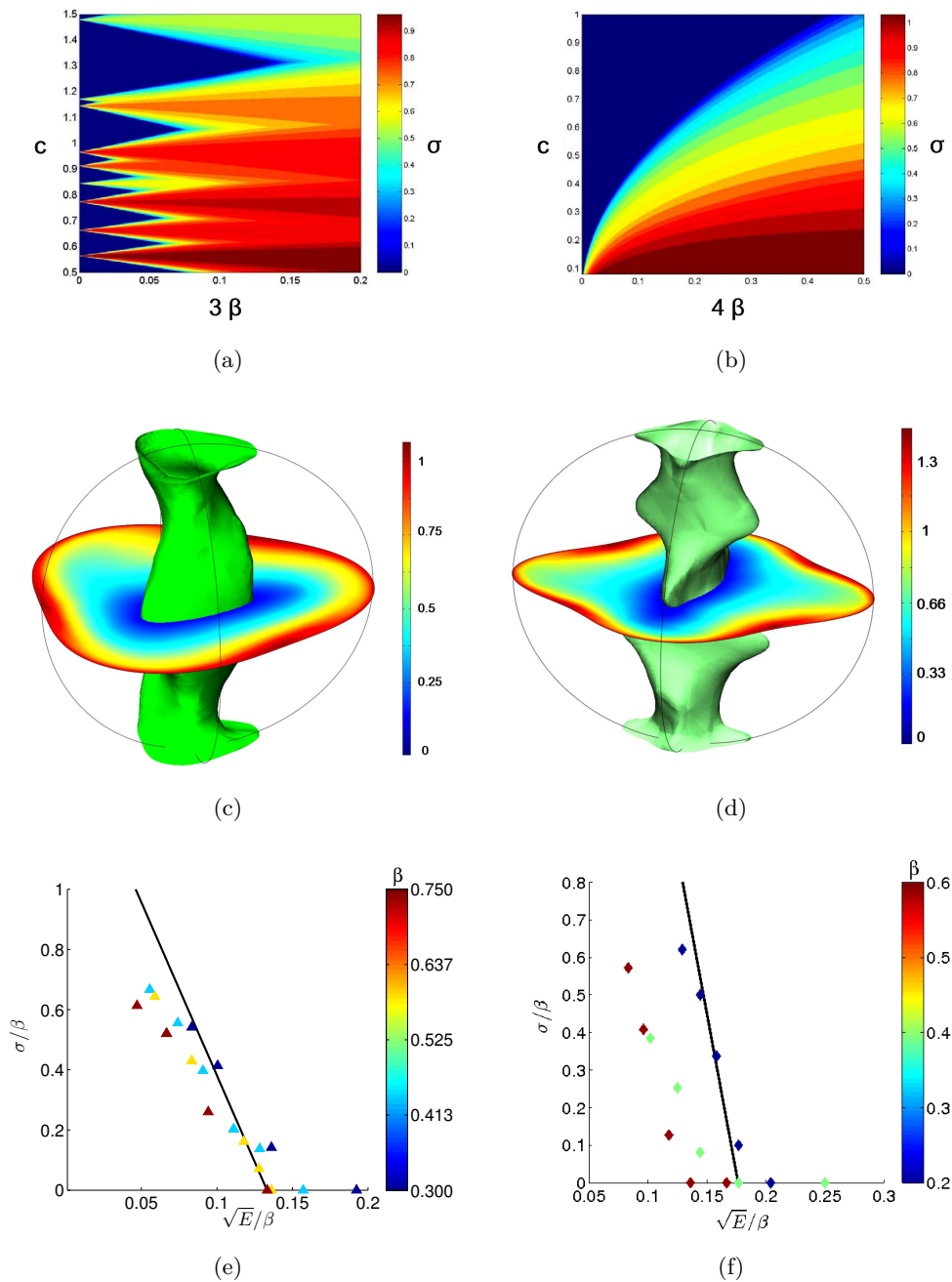


FIGURE 2.17 – (a) (resp. b) Taux de croissance théorique  $\sigma$  obtenu par Lacaze (2005) pour l'instabilité tripolaire (resp. quadripolaire) en fonction du rayon polaire  $c$  et de  $n\beta$ . (c) (resp. d) représente l'instabilité tripolaire (resp. quadripolaire) à saturation avec une coupe équatoriale du champ de vitesse  $\|\mathbf{u}\|$  et une iso-surface  $\|\mathbf{u}\| = 0.125$  (resp.  $\|\mathbf{u}\| = 0.16$ ) pour  $\beta = 0.1$ ,  $c = 1$ ,  $E = 0.0025$  (resp.  $E = 0.0033$ ) et 75000 DoF. (e) (resp. f) Évolution du taux de croissance de l'instabilité tripolaire (resp. quadripolaire) pour  $E \geq 1/1600$ ,  $\beta \in [0.1; 0.25]$ ,  $c = 1$ . La théorie linéaire (2.47) est représentée par une ligne continue noire avec  $K \approx 11.5$  (resp.  $K \approx 17$ ) pour l'instabilité tripolaire (resp. quadripolaire).

obtenus sont comparés en figure 2.17e au taux de croissance théorique de l'instabilité multipolaire déterminé par Le Dizès (2000) dans la limite  $\beta \ll 1$  :

$$\sigma = \frac{(n+4)^2}{64} (n-1) \beta - K \sqrt{E} \quad (2.47)$$

où  $K$  est le coefficient d'amortissement surfacique visqueux, et  $(n-1) \beta$  est le cisaillement local (voir Le Dizès, 2000, pour plus de détails). Les taux de croissance numériques de l'instabilité tripolaire (fig. 2.17e) sont en accord avec la théorie linéaire, le coefficient d'amortissement visqueux étant pris égal à  $K \approx 11.5$ .

Concernant l'instabilité quadripolaire, la figure 2.17b, issue des calculs théoriques de Lacaze (2005) suggère son existence en géométrie sphéroïdale. Les simulations numériques présentées (fig. 2.17d et f) confirment pour la première fois l'existence de cette instabilité<sup>10</sup>. Les taux de croissance obtenus sont également en accord avec la tendance prévue par la théorie (2.47). Notons cependant une plus grande dispersion des points.

## 2.4 Interaction des marées et de la libration

Jusqu'à très récemment, la libration n'avait été étudiée qu'au sein de conteneurs axisymétriques (cf. section 1.4.3). Cette géométrie permet en effet d'isoler les effets du couplage visqueux et donc de l'étudier indépendamment des autres couplages possibles. Cependant, dans un contexte naturel, les corps sont déformés par les forces de marées et sont donc plutôt de formes ellipsoïdales. Il semble donc important d'étudier l'interaction de ces deux forçages mécaniques.

L'étude menée dans cette section trouve son origine dans les expériences menées par J. Noir et J. M. Aurnou à UCLA. Suite à nos discussions, nous avons mené des simulations numériques et développé une analyse WKB permettant d'interpréter leur résultats expérimentaux, ce qui a ainsi confirmé l'existence d'une instabilité elliptique au sein d'un ellipsoïde en libration. Ce travail a donné lieu à une publication commune, et je détaille ci-dessous ma contribution à cette étude.

### 2.4.1 Écoulement de base

On considère un fluide homogène incompressible au sein d'un ellipsoïde triaxial en libration. Dans le référentiel lié au conteneur, l'équation de la paroi ellipsoïdale s'écrit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (2.48)$$

où  $(x, y, z)$  est le système de coordonnées d'origine le centre de l'ellipsoïde,  $(Ox)$  et  $(Oy)$  respectivement le long du grand et du petit axe équatorial, et  $(Oz)$  le long de l'axe de rotation de longueur  $c$ . L'ellipticité est  $\beta = (a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$  et le rapport d'aspect est défini comme  $c^* = c/R$ , avec  $R = \sqrt{(a^2 + b^2)}/2$ . Dans le référentiel absolu, le mouvement

10. Notons que pour des raisons de contraintes expérimentales, l'instabilité quadripolaire n'a pas non plus été observée en géométrie cylindrique.



de libration longitudinal du conteneur est modélisé par une évolution temporelle de sa vitesse de rotation :

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \Delta\phi\omega_l \sin(\omega_l t) , \quad (2.49)$$

où  $\Omega_0$  est sa vitesse angulaire moyenne,  $\Delta\phi$  l'amplitude de libration en radians et  $\omega_l$  sa pulsation de libration.

Dans le référentiel lié au conteneur, les équations du mouvement, adimensionnées par l'échelle de longueur  $R$ , et l'échelle de temps  $\Omega_0^{-1}$ , s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2(1 + \epsilon \sin ft) \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} \\ = -\nabla\pi + E \nabla^2 \mathbf{u} - \epsilon f \cos(ft) (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) , \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.51)$$

avec la force de Coriolis  $2(1 + \epsilon \sin ft)\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}$ , la pression réduite  $\pi$ , qui inclut la force centrifuge, et la force de Poincaré  $\epsilon f \cos ft(\mathbf{e}_z \times \mathbf{r})$ . Le nombre d'Ekman est défini par  $E = \nu/(\Omega_0 R^2)$ , où  $\nu$  est la viscosité cinématique. La pulsation adimensionnelle de libration  $f$  est définie par  $f = \omega_l/\Omega_0$ , tandis que le paramètre de forçage en libration est défini par  $\epsilon = \Delta\phi f$ . La condition d'adhérence impose à la paroi  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

La solution de l'équation (2.50) vérifie une condition d'adhérence à la paroi de l'ellipsoïde (2.48). Dans la limite des faibles nombres d'Ekman, l'écoulement peut se décomposer en une composante non-visqueuse  $\mathbf{U}$  en volume et un écoulement de couche limite  $\tilde{\mathbf{u}}$ . Kerswell & Malkus (1998) proposent une solution aux équations non-visqueuses du mouvement vérifiant la non-pénétration aux parois :

$$\mathbf{U} = -\epsilon \sin ft (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r} - \beta \nabla xy) , \quad (2.52)$$

On établit facilement que les contraintes de Reynolds associées à (2.52) sont compensées par le gradient de pression. Ainsi, les interactions non-linéaires dans l'intérieur fluide quasiment non-visqueux ne peuvent générer d'écoulement zonal moyen (Greenspan, 1968; Busse, 2010). Néanmoins, la condition d'adhérence n'est pas vérifiée par cette solution, ce qui implique l'existence de corrections visqueuses dans la couche d'Ekman, dont les interactions non-linéaires peuvent générer un écoulement zonal dans l'intérieur (Wang, 1970; Busse, 2010; Calkins *et al.*, 2010; Noir *et al.*, 2010; Sauret *et al.*, 2010).

Nos simulations numériques, présentées en section 2.4.3, nous permettent de confirmer que (2.52) correspond effectivement à l'écoulement de base en dépit des valeurs modérées des nombre d'Ekman de nos simulations ( $E = 5 \cdot 10^{-4}$ ). De plus, les simulations montrent clairement que cet écoulement de base peut exciter une instabilité elliptique, dite *LDEI* pour *Libration-Driven Elliptical Instability*, ce qui est en accord avec les analyses de stabilité présentées ci-dessous.

### 2.4.2 Analyse de stabilité

Comme le mentionnent Kerswell & Malkus (1998), deux ondes inertielles d'un fluide en rotation peuvent être couplées par l'écoulement de base (2.52), à partir duquel elles

extraient leur énergie. Puisque l'écoulement de base est de nombre azimuthal  $m = 2$  et de fréquence  $f$ , cette résonance triadique ne peut apparaître que pour les conditions de résonance suivantes :

$$m_a - m_b = \pm 2 \quad \text{et} \quad \lambda_a - \lambda_b = \pm f, \quad (2.53)$$

où  $m_a, m_b$  sont les nombres d'ondes azimutaux des deux ondes inertielles en résonance, et  $\lambda_a, \lambda_b$  sont leur fréquences adimensionnalisées par  $\Omega_0$ . En outre, les deux ondes doivent avoir des structures poloïdales proches pour interagir, ce qui correspond aux *résonances principales* de Eloy *et al.* (2000). Une analyse globale de la LDEI se baserait sur cet ensemble de conditions en considérant les modes inertiels de la géométrie considérée. Malheureusement, les modes inertiels dans une géométrie triaxiale restent encore très peu connus, ce qui ne permet pas de mener une telle analyse.

Une étude récente dans la limite des faibles ellipticités de Zhang *et al.* (2011) suggère qu'une libration longitudinale ne peut pas faire résoner de mode inertiel par forçage direct. Toutefois, il est important de noter que cela ne signifie aucunement qu'aucune résonance triadique de modes inertiels ne peut exister dans un ellipsoïde triaxial<sup>11</sup>. Ainsi, comme le montrent Kerswell & Malkus (1998) pour  $\beta \ll 1$  et  $f = 1$ , les modes se propageant à la même vitesse mais dans des directions azimutales opposées peuvent entrer en résonance avec le forçage de libration.

Au vu de l'état actuel des connaissances sur les modes inertiels en géométrie triaxiale, une analyse globale de la LDEI aux valeurs finies d'ellipticité considérées dans ce travail est hors de portée. Une approche locale, indépendante par essence de la géométrie du conteneur, semble donc indiquée. Une telle étude a été menée dans Herreman *et al.* (2009) dans le cas particulier  $f = 1$ , et complétée en section 4.2 (voir aussi l'annexe E.2). Le taux de croissance non-visqueux  $\sigma_{inv}$  au premier ordre donne alors :

$$\sigma_{inv} = \frac{16 + f_{res}^2}{64} \beta \epsilon, \quad (2.54)$$

où  $f_{res} \neq 0$  est la fréquence résonante de forçage.

Dans la limite WKB  $k \gg 1$ , la relation de dispersion entre la fréquence de forçage et les ondes planes excitées montre que toutes les pulsations de forçage entre  $-4$  et  $+4$  sont résonantes. Toutefois, en prenant en compte la forme du conteneur et l'inévitable amortissement visqueux, seules quelques valeurs de fréquence de forçage seront en fait résonantes. Ces résonances se produiront lorsque les ondes planes théoriques seront des approximations suffisamment correctes des ondes inertielles en jeu au sein du conteneur considéré et lorsque le forçage de libration sera suffisamment fort pour compenser la dissipation visqueuse. Il est possible de montrer que l'excitation de l'instabilité n'est pas seulement possible à la résonance exacte  $f_{res}$  mais est également possible autour de cette valeur, dans une bande  $f \in [f_{res} - \sigma_{inv}; f_{res} + \sigma_{inv}]$ , où le taux de croissance est donné par :

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{inv}^2 - (f_{res} - f)^2} - KE^{1/2}. \quad (2.55)$$

11. On retrouve la distinction entre résonance directe (forçage) et résonance triadique (instabilité) déjà évoquée en section 1.5.

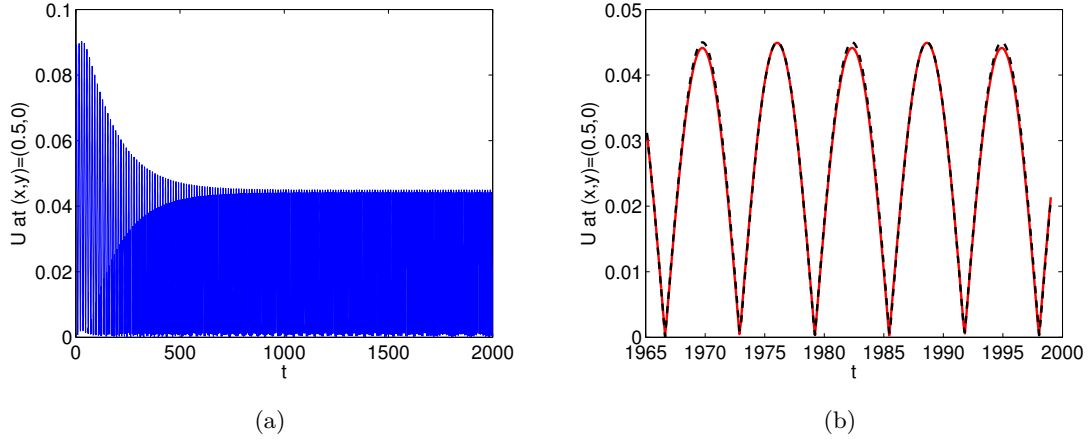


FIGURE 2.18 – (a) Évolution temporelle de la norme de la vitesse au point de coordonnées  $(x = 0.5, y = 0)$  pour  $f = 0.5$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$  et  $E = 4 \times 10^{-4}$ . (b) Zoom de (a) une fois l'écoulement établi : la ligne continue rouge représente les résultats numériques, et la ligne discontinue noire représente l'écoulement théorique (2.52).

La constante  $K$  est d'ordre 1, et dépend du mode excité. Le premier terme du membre de droite de (2.55) définit la gamme de fréquences instables autour d'une résonance particulière  $f_{res}$ ; le second terme décrit l'amortissement visqueux de l'instabilité. Au-delà de la limite stricte WKB, nos résultats précédents (e.g. Le Bars *et al.*, 2010) nous incitent à penser que cette équation a une portée générale, une fois les valeurs de fréquence résonance  $f_{res}$  et le coefficient de dissipation visqueux  $K$  déterminés. Notons que ces deux grandeurs dépendent des modes inertiels excités, et donc de la forme du conteneur.

### 2.4.3 Validation de l'écoulement de base et instabilité

Une première série de simulations a été menée en 2D en partant d'un fluide au repos ( $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ), et en initiant les librations à partir de  $t = 0$ , dans le repère du conteneur. La figure 2.18 représente l'évolution typique obtenue : après un transitoire relativement long, de l'ordre du temps visqueux  $E^{-1}$  (voir fig. 2.18a), l'écoulement théorique (2.52) est effectivement établi dans l'intérieur fluide (fig. 2.18b) et les corrections nécessaires pour vérifier la condition d'adhérence aux parois se localisent dans la couche d'Ekman, d'épaisseur  $E^{-1/2}$ . Une petite dissymétrie persiste entre les phases prograde et rétrograde des cycles de libration, mais son amplitude reste limitée à de faibles valeurs (par exemple autour de 2.5% à  $E = 4 \times 10^{-4}$ ). Notons qu'en 3D, le pompage d'Ekman accélère significativement l'établissement de l'écoulement de base (voir section 1.3.5).

Considérant à présent un ellipsoïde triaxial, l'ellipticité est fixée à  $\beta = 0.44$  afin de maximiser le taux de croissance (voir fig. 2.5, qui considère un cas un peu différent de l'instabilité elliptique). Une étude systématique est alors menée en fonction de la fréquence de forçage pour confirmer l'apparition de l'instabilité et la validité de la loi (2.55) pour le

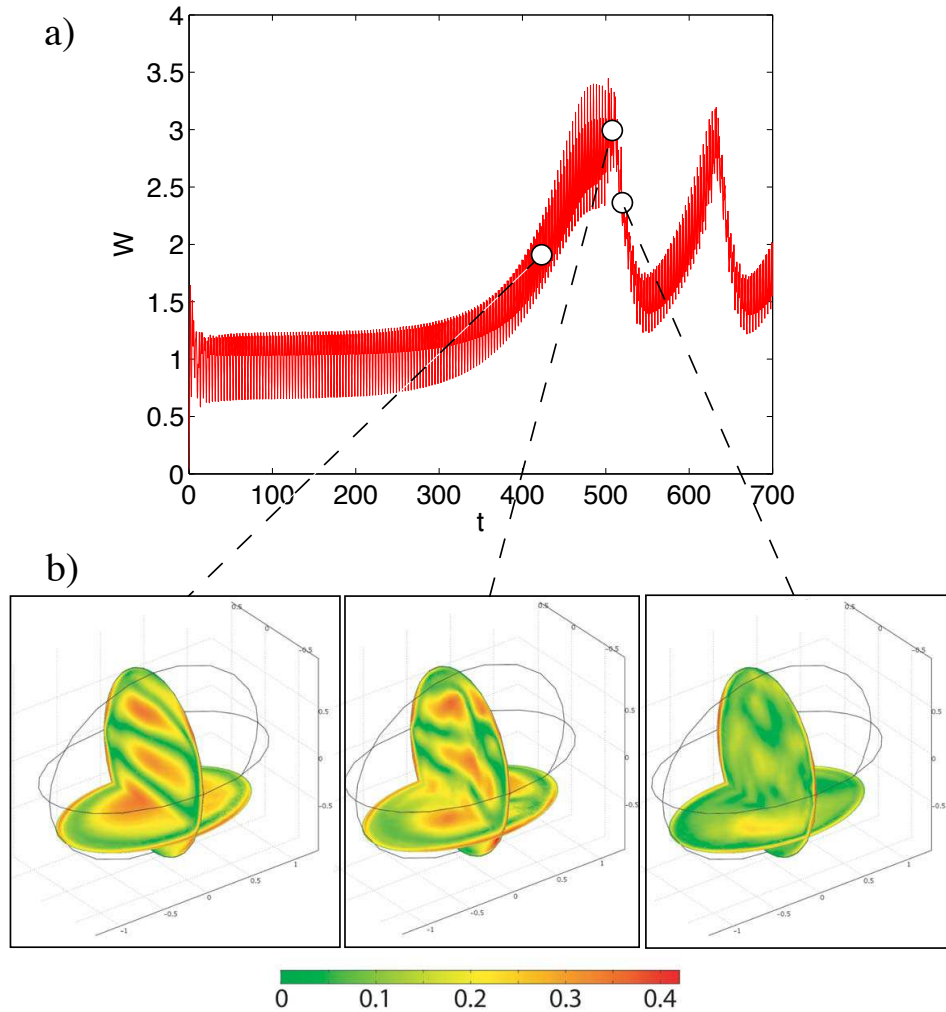


FIGURE 2.19 – (a) Évolution temporelle de la moyenne de la valeur absolue de la vitesse verticale, normalisée par sa valeur moyenne entre  $t = 100$  et  $t = 200$  (i.e. après la phase de spin-up et avant la possible déstabilisation) pour  $E = 5 \times 10^{-4}$ ,  $\beta = 0.44$ ,  $f = 1.76$ ,  $\epsilon = 0.92$  and  $c^* = 0.95$ . (b) Norme de la vitesse  $||\mathbf{u}||$  dans un plan méridien et un plan de coordonnée  $z = -0.5$ . La séquence montre, de gauche à droite, l'évolution typique de  $||\mathbf{u}||$  durant une croissance exponentielle, une saturation et un retour vers l'écoulement de base.

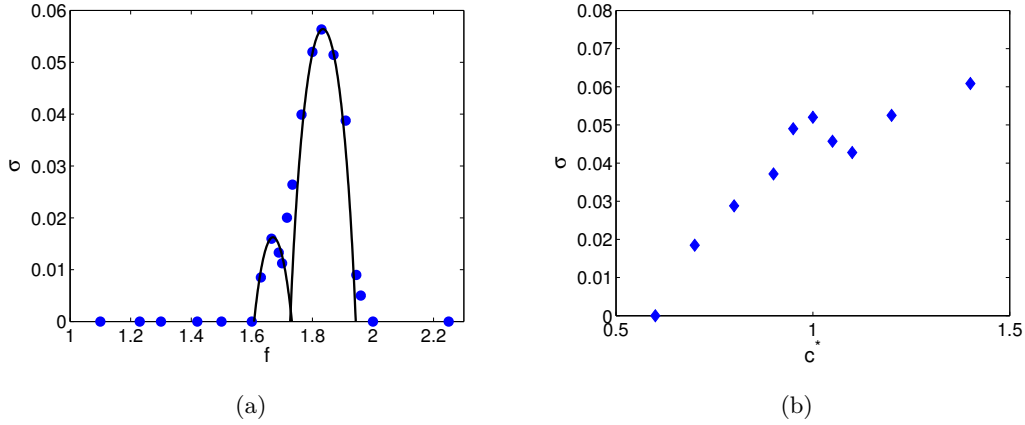


FIGURE 2.20 – (a) Taux de croissance de la LDEI en fonction de la fréquence de libration  $f$  ( $E = 5 \times 10^{-4}$ ,  $\beta = 0.44$ ,  $\epsilon = 0.9913$ , et  $c^* = 1$ ). La courbe continue représente le taux de croissance analytique (2.55), où  $f_{res}$  et  $K$  sont déterminés en ajustant la formule théorique à chaque maximum local du taux de croissance ( $K \approx 3.38$  pour  $f_{res} \approx 1.835$  et  $K \approx 5$  pour  $f_{res} \approx 1.67$ ). (b) Taux de croissance en fonction du rapport d'aspect  $c^*$  ( $E = 5 \times 10^{-4}$ ,  $\beta = 0.44$ ,  $\epsilon = 0.9913$  et  $f = 1.8$ ).

taux de croissance. Le taux de croissance est déterminé en minimisant l'écart, en norme, de la vitesse verticale en valeur absolue  $W$  (voir section 2.2.1) à une exponentielle avec offset i.e. à une fonction  $A_0 + A_1 \exp(\sigma t)$ . Des simulations supplémentaires avec  $0.75 < c^* < 1.1$  sont également présentées pour illustrer l'effet de la géométrie sur la stabilité de l'écoulement.

Un exemple d'évolution temporelle est présenté en figure 2.19a, où  $W$  est normalisé par sa valeur moyenne entre  $t = 100$  et  $t = 200$  (i.e. après la phase de spin-up et avant la possible déstabilisation). L'instabilité elliptique est clairement présente et dans ce cas précis, une dynamique temporelle assez riche est observée, en accord avec les résultats expérimentaux de J. Noir. En particulier, des cycles de croissance et saturation sont observés. L'écoulement typique au cours d'un tel cycle est illustré en figure 2.19b, qui représente la norme de la vitesse dans un plan méridien et un plan de coordonnée  $z = -0.5$ .

L'étude systématique du taux de croissance en fonction de  $f$  pour  $c^* = 1$  est représentée en figure 2.20a et comparée à la formule analytique (2.55). L'instabilité elliptique est obtenue au sein de deux bandes de fréquences centrées en  $f_{res} \approx 1.835$  et  $f_{res} \approx 1.67$  et un excellent accord avec (2.55) est obtenu. La figure 2.20b représente l'évolution du taux de croissance avec le rapport d'aspect  $c^*$  à une fréquence de résonance fixée à  $f = 1.8$ . De même que le décalage (ou *detuning*) en fréquence autour de la fréquence résonante, le facteur géométrique  $c^*$  modifie significativement le taux de croissance de l'instabilité elliptique, qui disparaît même pour  $c^* \lesssim 0.6$ . Les formes de cloche observées correspondent à des modes différents, et  $c^* = 1$  maximise le taux de croissance d'un mode, en accord avec l'étude menée en section 2.3.1. Ces simulations numériques confirment que la libration en longitude peut exciter une instabilité elliptique, et valident la formule (2.55) de l'analyse

WKB.

## 2.5 Interaction des marées et de la précession

Dans les systèmes naturels, aussi bien la rotation que les marées déforment un corps en un ellipsoïde triaxial (au moins en première approximation), ce qui pose la question d'une éventuelle présence de l'instabilité elliptique. De plus, un forçage de précession est également à prendre en compte pour des systèmes géo ou astrophysiques et il est donc nécessaire d'étudier son interaction avec le forçage de marées, en présence ou non des instabilités associées à chacun de ces deux forçages. Le problème complet est assez complexe et implique trois référentiels différents en rotation : le référentiel en précession, avec par exemple une période  $T_p \approx 26000$  ans pour la Terre, le référentiel lié à la marée, avec une période de  $T_d \approx 27$  jours pour le système Terre-Lune, et le référentiel du manteau, avec une période de 23.93 heures pour la Terre. Avant de mener cette étude complexe, une première étape est de considérer le cas particulier d'une précession synchrone avec les marées ( $T_d = T_p$ ) car dans ce cas, l'ellipsoïde triaxial est fixe dans le référentiel de précession et la théorie peut être menée analytiquement (voir schéma en fig. 2.21). Cette étude a été menée en collaboration avec P. Meunier et a fait l'objet d'une publication dans *Physics of Fluids* (Cébron *et al.*, 2010b).

### 2.5.1 Écoulement de base : solution analytique

Dans cette section, l'étude de Poincaré (1910) est reconsidérée au sein d'un ellipsoïde triaxial, et l'écoulement d'un fluide non-visqueux en précession est résolu explicitement. Dans un second temps, la viscosité est prise en compte en étendant l'étude de Busse (1968) selon l'approche de Noir *et al.* (2003). Comme indiqué en figure 2.21, on considère l'écoulement tournant au sein d'un ellipsoïde triaxial en précession d'axes principaux notés  $(a_1, a_2, a_3)$  dans cette section<sup>12</sup>. On définit  $(Ox_1, Ox_2, Ox_3)$  dans le référentiel du bourrelet de marées, confondu ici avec le référentiel de précession, de telle sorte que  $Ox_i$  est aligné avec l'axe  $a_i$  du conteneur, et  $(Ox_3)$  est l'axe de rotation du manteau. On note  $\Omega$  la vitesse imposée de rotation et on utilise  $\Omega^{-1}$  comme échelle de temps. On introduit aussi le rayon moyen équatorial  $R_{eq} = (a_1 + a_2)/2$ , utilisé comme échelle de longueur. Finalement, le problème peut être décrit par six nombres adimensionnels : l'ellipticité  $\beta = (a_1^2 - a_2^2)/(a_1^2 + a_2^2)$ , le rapport d'aspect  $a_3/a_1$ , le nombre d'Ekman  $E = \nu/(\Omega R_{eq}^2)$ , où  $\nu$  est la viscosité cinématique, et les trois composantes adimensionnelles du vecteur précession  $\mathbf{\Omega}_p$ , i.e. l'angle  $\theta$  entre  $\mathbf{\Omega}_p$  et  $\mathbf{e}_{x_3}$ , l'angle  $\theta_2$  entre  $\mathbf{\Omega}_p$  et  $\mathbf{e}_{x_1}$  et la vitesse angulaire de précession  $\Omega_p$ , positive (resp. négative) pour une précession prograde (resp. rétrograde).

12. La notation  $(a_1, a_2, a_3)$  n'est utilisée qu'uniquement dans cette section, afin de simplifier l'écriture des équations. Nous reviendrons par la suite à l'écriture des demi-grand axes  $(a, b, c)$ .

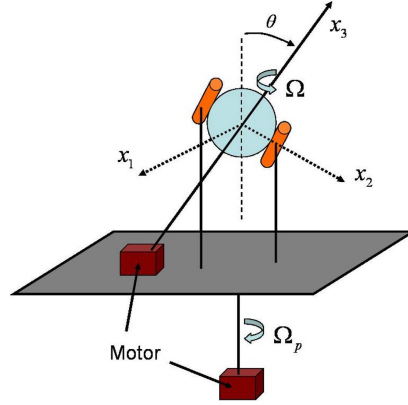


FIGURE 2.21 – Schéma du problème considéré. Un sphéroïde creux et déformable est rempli de liquide et mis en rotation à vitesse angulaire constante  $\Omega$  le long de son axe ( $Ox_3$ ). L'axe du sphéroïde est incliné à un angle de précession  $\theta$  et fixé sur une table tournant à la vitesse de précession  $\Omega_p$ . Enfin, deux rouleaux alignés avec ( $Ox_3$ ) déforment le sphéroïde en un ellipsoïde triaxial par compression le long de l'axe ( $Ox_2$ ), perpendiculaire à l'axe de rotation.

### 2.5.1.1 Extension de l'écoulement de Poincaré

On cherche un écoulement de base, solution des équations d'Euler dans le référentiel de précession i.e.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p - 2 \boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{u}, \quad (2.56)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.57)$$

pour le fluide contenu dans l'ellipsoïde. Dans ce référentiel, avec l'équation de l'ellipsoïde

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1, \quad (2.58)$$

on transforme la géométrie ellipsoïdale en une sphère avec la transformation  $(x'_k) = (x_k/a_k)_{k \in (1,2,3)}$  et la vitesse du fluide au sein de la sphère s'écrit donc

$$(U'_k) = \left( \frac{U_k}{a_k} \right)_{k \in (1,2,3)}. \quad (2.59)$$

Suivant l'approche de Poincaré (1910), on considère ce qu'il appelle des *mouvements simples*, c'est-à-dire des vitesses  $\mathbf{U}(U_1, U_2, U_3)$  pouvant être décrites comme des combinaisons linéaires des coordonnées de l'espace. Cette hypothèse nous mène à considérer une rotation solide quelconque dans la sphère, i.e.  $\mathbf{U}' = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'$ , où  $\boldsymbol{\omega}'(\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3)$  dépend du temps a priori. L'équation (2.59) donne alors le champ de vitesse

$$\mathbf{U} = (U_k)_{k \in (1,2,3)} = \left( \frac{a_k}{a_{k-1}} \omega'_{k+1} x_{k-1} - \frac{a_k}{a_{k+1}} \omega'_{k-1} x_{k+1} \right)_{k \in (1,2,3)}, \quad (2.60)$$

où on utilise des permutations circulaires sur  $k \in (1, 2, 3)$  pour les indices.

Nous allons maintenant chercher les *mouvements simples* solutions des équations d'Euler pour la partie solénoïdale de notre écoulement, en prenant en compte les conditions aux limites de non-pénétration pour sa partie irrotationnelle. Cet écoulement est appelé *écoulement de Poincaré*. On choisit de suivre la démarche proposée par Tilgner (1999c) dans sa thèse d'habilitation, et reprise par Noir (2000) dans sa thèse de doctorat, plutôt que la formulation lagrangienne de Poincaré (1910), un peu plus laborieuse. On déduit le vecteur rotation  $\boldsymbol{\omega}$  du champ de vitesse (2.60) :

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{U} = (\omega_k)_{k \in (1,2,3)} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{a_{k-1}}{a_{k+1}} + \frac{a_{k+1}}{a_{k-1}} \right) \omega'_k \right]_{k \in (1,2,3)}. \quad (2.61)$$

Notons que  $\boldsymbol{\omega}'$  est indépendant des variables d'espace de telle sorte que  $\boldsymbol{\omega}$  est uniforme. En prenant le rotationnel de l'équation (2.56), les équations non-visqueuses pour  $\boldsymbol{\omega}$  donnent les trois équations scalaires suivantes

$$\frac{d\omega_k}{dt} + (\alpha_{k+1,k} - \alpha_{k-1,k})\omega_{k-1}\omega_{k+1} = \alpha_{k-1,k}\Omega_{p,k-1}\omega_{k+1} - \alpha_{k+1,k}\Omega_{p,k+1}\omega_{k-1} \quad (2.62)$$

pour des permutations des indices sur  $k \in (1, 2, 3)$ , avec les coefficients  $\alpha_{i,j} = 2/(\eta_{ij} + 2) = 2(\eta_{ji} + 1)/(\eta_{ji} + 2)$  et les différentes ellipticités  $\eta_{ij} = (a_i^2 - a_j^2)/a_j^2$  de l'ellipsoïde. Les équations pour le cas particulier d'un sphéroïde sont naturellement retrouvées avec  $a_1 = a_2$ .

Considérant uniquement les solutions stationnaires du problème, on résout le système (2.62) analytiquement :

$$\omega_1 = \frac{\omega_3}{\beta_{12}} \frac{a_3^2 + a_2^2}{\gamma_1} \Omega_{p,1}, \quad (2.63)$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_3}{\beta_{12}} \frac{a_3^2 + a_1^2}{\gamma_2} \Omega_{p,2}, \quad (2.64)$$

où  $\beta_{ij} = (a_i^2 + a_j^2)/(2a_i a_j) = \beta_{ji}$  et  $\gamma_i = \omega_3(a_i^2 - a_3^2)/\beta_{12} + 2\Omega_{p,3} a_1 a_2$ . Le champ de vitesse associé s'écrit alors :

$$U_1 = a_1 \frac{\omega_3}{\beta_{12}} \left( -\frac{x_2}{a_2} + \frac{2 a_1 \Omega_{p,2} x_3}{\gamma_2} \right), \quad (2.65)$$

$$U_2 = a_2 \frac{\omega_3}{\beta_{12}} \left( \frac{x_1}{a_1} - \frac{2 a_2 \Omega_{p,1} x_3}{\gamma_1} \right), \quad (2.66)$$

$$U_3 = a_3 \frac{\omega_3}{\beta_{12}} \left( \frac{2 a_3 \Omega_{p,1} x_2}{\gamma_1} - \frac{2 a_3 \Omega_{p,2} x_1}{\gamma_2} \right). \quad (2.67)$$

Notons que le choix de  $\omega_3$  est arbitraire ici. En fait,  $\omega_3$  est fixé par la couche visqueuse d'Ekman et ne peut donc être déterminé que par une étude visqueuse, du type de celle de Busse (1968) par exemple, menée dans la section 2.5.1.2. Notons aussi que le champ de vitesse diverge pour  $\gamma_1 = 0$  et  $\gamma_2 = 0$ . Cette étude non-visqueuse donne donc deux résonances, qui correspondent à une résonance entre la fréquence du forçage de précession et celle du tilt-over (voir Noir *et al.* (2003) pour plus de détails). Naturellement, l'amplitude



de ces résonances est fixée par la viscosité et nécessite donc une étude visqueuse pour être décrite. Ces résonances linéaires sont obtenues pour deux fréquences de précession particulières (dépendantes du rapport d'aspect), qui sont :

$$\Omega_{p,3} = \frac{a_3^2 - a_i^2}{a_1^2 + a_2^2} \omega_3 \quad (2.68)$$

pour  $i \in (1, 2)$ . Il vient immédiatement que les ellipsoïdes oblates ( $a_1, a_2 > a_3$ ) ont leurs résonances dans le régime rétrograde (i.e. dans la zone  $\Omega_{p,3} < 0$ ) tandis que les ellipsoïdes prolates ( $a_1, a_2 < a_3$ ) ont leurs résonances dans le régime prograde. Notons que, comparé au cas sphéroïdal déjà traité dans la littérature, un résultat important ici est l'apparition d'une deuxième résonance, liée à la triaxialité du conteneur.

### 2.5.1.2 Extension de l'écoulement de Busse

En suivant l'approche de Busse (1968), la viscosité peut être prise en compte dans notre étude d'un ellipsoïde triaxial en précession. Ici, on choisit de suivre l'approche équivalente de Noir *et al.* (2003) basée sur l'équilibre entre le couple d'inertie  $\mathbf{\Gamma}_i$ , le couple de pression (ou topographique)  $\mathbf{\Gamma}_p$ , et le couple visqueux  $\mathbf{\Gamma}_v$ . A l'ordre dominant, l'équation d'équilibre des couples donnée par Busse (1968), pour un écoulement tournant stationnaire  $\mathbf{q} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  dans le référentiel de précession au sein d'un volume  $V$  de surface  $\Sigma$  s'écrit :

$$\overbrace{2 \int_V \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{q}) dV}^{\mathbf{\Gamma}_i} = - \overbrace{\oint_{\Sigma} p \mathbf{r} \times \mathbf{n} d\Sigma}^{\mathbf{\Gamma}_p} + \overbrace{E \int_V \mathbf{r} \times \nabla^2 \mathbf{q} dV}^{\mathbf{\Gamma}_v}, \quad (2.69)$$

où  $\mathbf{r}$  est le vecteur position et  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire sortant normal à  $\Sigma$  (voir Noir *et al.*, 2003). Il reste à expliciter ces termes pour notre ellipsoïde triaxial.

Au premier ordre, le gradient de pression équilibre la force centrifuge, ce qui donne :

$$p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[ (\omega_{i+1}^2 + \omega_{i-1}^2) x_i^2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \omega_i \omega_j x_i x_j \right]. \quad (2.70)$$

Ainsi, dans la limite des faibles ellipticités, i.e. au premier ordre en  $\eta = 1 - a_3/a_1$  et  $\eta_2 = 1 - a_2/a_1$ , le couple de pression s'écrit :

$$\mathbf{\Gamma}_p = - \oint p \mathbf{r} \times \mathbf{n} d\Sigma = (\Gamma_{p,k})_{k \in (1,2,3)} = I \begin{pmatrix} (\eta - \eta_2) \omega_2 \omega_3 \\ -\eta \omega_1 \omega_3 \\ \eta_2 \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix}, \quad (2.71)$$

où  $I$  est le moment d'inertie dans l'approximation sphérique. Notons que l'expression de Noir *et al.* (2003) est retrouvée pour le sphéroïde (i.e.  $a_1 = a_2$  donc  $\eta_2 = 0$ ).

Après quelques manipulations algébriques, le couple de précession s'écrit simplement :

$$\mathbf{\Gamma}_i = I \boldsymbol{\Omega}_p \times \boldsymbol{\omega}. \quad (2.72)$$

Finalement, les équations (2.71) et (2.72) donnent  $\mathbf{\Gamma}_p \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$  et  $\mathbf{\Gamma}_i \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ , et donc avec l'équation (2.69), on a  $\mathbf{\Gamma}_v \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ . Ainsi, l'écoulement étant stationnaire, il n'y a aucune rotation différentielle selon  $\boldsymbol{\omega}$  :

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_{x_3} = \omega^2. \quad (2.73)$$

En effet, dans le référentiel tournant du fluide, la vitesse angulaire du conteneur selon  $\boldsymbol{\omega}$  est nulle : la seule rotation différentielle entre le fluide et le conteneur est dans le plan équatorial de sorte qu'il n'y a aucun spin-up. Cela peut aussi être retrouvé avec une analyse de couche visqueuse, suivant l'approche de Busse (1968), qui montre que le pompage volumique d'Ekman est solution des équations d'Euler dès lors que la condition dite de solvabilité (2.73) est vérifiée. Selon cette équation, aussi appelée la *condition de non spin-up* par Noir *et al.* (2003), le seul mouvement relatif entre l'intérieur et la paroi est une rotation équatoriale donnée par  $\boldsymbol{\omega}_{eq} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}$ . Nous devons donc calculer le couple visqueux associé à cette rotation différentielle équatoriale. Ce calcul repose sur l'idée suivante : pour maintenir un écoulement stationnaire, le couple délivré au fluide pour compenser les frottements visqueux est donné par le taux de décroissance qui serait obtenu si la précession était brutalement stoppée à un temps  $t$ . Ce taux est simplement le taux de dissipation d'énergie par un mode de Poincaré dans un système non-forcé, à  $t = 0$ . Ce taux est donné par la théorie de Greenspan (1968), valide dans le référentiel tournant avec le fluide. Ainsi, la solution linéaire pour la décroissance visqueuse du spinover nous amène à introduire un nouveau nombre d'Ekman  $E_f = E/\omega$  et une nouvelle unité de temps  $\tilde{t} = t\omega$ , basés sur la vitesse de rotation du fluide  $\omega$ . Selon Greenspan (1968), l'évolution temporelle de  $\boldsymbol{\omega}_{eq}$  dans le référentiel galiléen est :

$$\boldsymbol{\omega}_{eq}(\tilde{t}) = e^{\lambda_r \tilde{t}} \sqrt{E_f} \left[ \cos(\lambda_i \tilde{t} \sqrt{E_f}) \boldsymbol{\omega}_{eq}(0) - \sin(\lambda_i \tilde{t} \sqrt{E_f}) \frac{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_{eq}(0)}{\omega} \right] \quad (2.74)$$

avec  $\lambda_r = -2.62$  et  $\lambda_i = 0.259$ . Notons que rigoureusement parlant, dans un ellipsoïde triaxial, l'ellipticité modifie les valeurs propres des modes inertiels, ainsi que les corrections visqueuses de ces valeurs propres (Greenspan, 1968). Ainsi, dans le cas particulier d'un sphéroïde oblate ( $a_1 = a_2$ ) d'excentricité  $e = (1 - a_3^2/a_1^2)^{1/2}$ , la fréquence propre du mode de Poincaré est donnée par  $2/(2 - e^2)$ , tandis que  $\lambda_r$  et  $\lambda_i$  sont donnés à l'ordre 2 par (Zhang *et al.*, 2004) :

$$\lambda_r = -\frac{3(19 + 9\sqrt{3})}{28\sqrt{2}} + \frac{-1039 + 171\sqrt{3}}{1232\sqrt{2}} \eta_{31}^2 + O(e^4) \approx -2.62 - 0.426 e^2 \quad (2.75)$$

$$\lambda_i = -\frac{3(-19 + 9\sqrt{3})}{28\sqrt{2}} + \frac{1039 + 171\sqrt{3}}{1232\sqrt{2}} \eta_{31}^2 + O(e^4) \approx 0.258 + 0.766 e^2 \quad (2.76)$$

expressions comparées<sup>13</sup> aux valeurs exactes en figure 2.22. Dans la limite des faibles ellipticités considérée ici, cette correction peut être négligée<sup>14</sup>.

13. Notons que la valeur usuelle  $\lambda_i \approx 0.259$  utilisée depuis Greenspan (1968) est en fait égale à  $\lambda_i \approx 0.258$  selon les valeurs exactes données par Zhang *et al.* (2004).

14. Remarquons également que le facteur d'amortissement visqueux  $\lambda_r = -2.62$ , d'intérêt pour l'instabilité elliptique, reste toujours inférieur à  $-3.3$  pour un sphéroïde prolata ( $a_1 = a_2$ ).

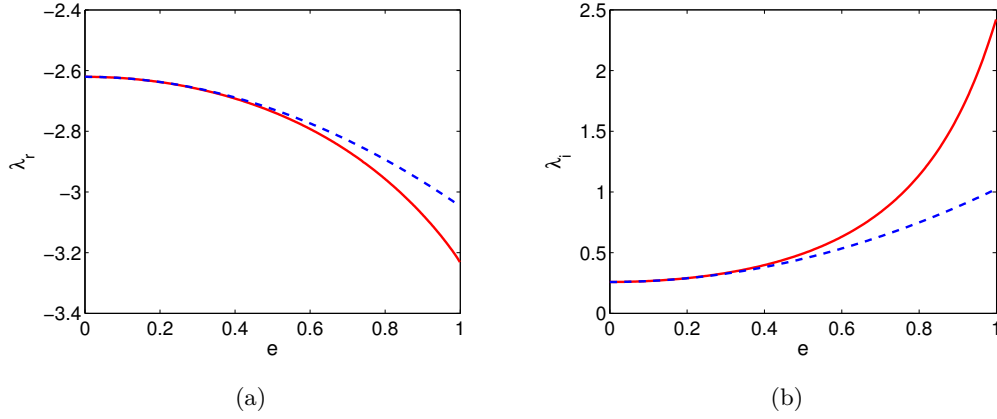


FIGURE 2.22 – Évolution avec l'excentricité  $e = (1 - a_3^2/a_1^2)^{1/2}$  des corrections visqueuses  $\lambda_r$  (fig. a) et  $\lambda_i$  (fig. b) des valeurs propres du mode de Poincaré pour un sphéroïde oblate ( $a_1 = a_2$ ). Les lignes continues correspondent aux valeurs exactes obtenues avec la théorie de Zhang et al. (2004), tandis que les lignes discontinues représentent les développements à l'ordre  $e^2$  de cette théorie (équations (2.75) et (2.76)).

Revenant aux variables  $E$  et  $t$ , cette équation permet d'écrire le couple équatorial visqueux :

$$\mathbf{\Gamma}_v = I \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}_{eq}}{dt} \right)_{t=0} = I\sqrt{\omega E} \begin{pmatrix} \lambda_r \omega_1 + \lambda_i \omega_2/\omega \\ \lambda_r \omega_2 - \lambda_i \omega_1/\omega \\ \lambda_r (\omega_3 - 1) \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

Finalement, l'équilibre des couples donné par (2.69) projeté sur l'axe de rotation du fluide  $\boldsymbol{\omega}$  (la condition de non spin-up (2.73)) et sur les axes principaux  $\mathbf{e}_{x_1}$  et  $\mathbf{e}_{x_3}$  donne le système d'équations suivant :

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_3 (1 - \omega_3), \quad (2.78)$$

$$\Omega_{p,2} \omega_3 - \Omega_{p,3} \omega_2 = (\eta - \eta_2) \omega_2 \omega_3 + \left( \lambda_r \omega_1 \omega_3^{1/4} + \lambda_i \frac{\omega_2}{\omega_3^{1/4}} \right) \sqrt{E}, \quad (2.79)$$

$$\Omega_{p,1} \omega_2 - \Omega_{p,2} \omega_1 = \eta_2 \omega_1 \omega_2 - \lambda_r \omega_3^{1/4} (1 - \omega_3) \sqrt{E}. \quad (2.80)$$

Ce système non-linéaire peut être résolu efficacement par une méthode de continuation (perturbations successives sur la longueur  $a_2$ ) en partant de la solution de Busse (1968) dans un sphéroïde. Un exemple est donné en figure 2.23 où la solution dans le cas sphéroïdal (le cas  $\nu = 10^{-5} m^2/s$  de la figure 3 de Noir et al. (2003), ce qui donne un nombre d'Ekman  $E = 3 \cdot 10^{-5}$ ) est comparée au cas d'un ellipsoïde triaxial légèrement déformé ( $\beta = 0.03$ ) avec le même rapport d'aspect  $a_3/a_1$ . Notons que même une très faible déformation  $\beta$  change significativement la solution obtenue.

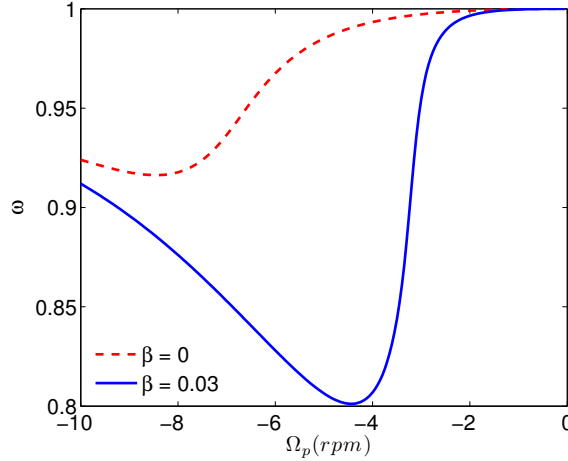


FIGURE 2.23 – Amplitude théorique de la vitesse angulaire  $\omega$  du mode de tilt-over dans un sphéroïde ( $\beta = 0$ ), et pour un ellipsoïde triaxial légèrement déformé ( $\beta = 0.03$ ). Les autres paramètres utilisés dans cette figure sont ceux de Noir et al. (2003) : vitesse angulaire du conteneur  $\Omega = 207$  rpm et  $a_1 = 0.125$  m (de sorte que le nombre d’Ekman est  $E = 3 \cdot 10^{-5}$ ),  $\theta = 9^\circ$ ,  $a_3/a_1 = 0.96$  et  $\theta_2 = 0^\circ$ . Le cas sphéroïdal correspond au cas  $\nu = 10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s en figure 3 de Noir et al. (2003). On peut noter que même une faible déformation équatoriale modifie significativement la solution obtenue.

## 2.5.2 Validation numérique et expérimentale

Dans cette section, nous validons et testons la gamme de validité de nos solutions analytiques par comparaison avec des résultats numériques et expérimentaux.

### 2.5.2.1 Résolution numérique

Nous considérons un fluide en rotation au sein d’un ellipsoïde triaxial d’axes  $(a_1, a_2, a_3)$  (fig. 2.21). Nous travaillons dans le référentiel en précession. Avec un fluide initialement au repos dans ce référentiel, une vitesse tangentielle constante  $U \sqrt{1 - (x_3/a_3)^2}$  est imposée à  $t = 0$  à la paroi externe dans chaque plan de coordonnées  $x_3$  perpendiculaire à l’axe de rotation ( $Ox_3$ ), où  $U$  est la vitesse imposée à la paroi le long de l’équateur. L’échelle de temps  $\Omega^{-1}$  est fixée en écrivant la vitesse tangentielle à l’équateur  $U = \Omega R_{eq}$ . Les équations de Navier-Stokes avec des conditions de non-glissement sont alors résolues, en prenant en compte la force de Coriolis associée à la précession  $\mathbf{\Omega}_p$ . Ainsi, dans le référentiel  $(Ox_1, Ox_2, Ox_3)$  liée à la déformation ellipsoïdale, qui est aussi le référentiel de précession dans nos hypothèses de travail, nous résolvons :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + E \Delta \mathbf{u} - 2\mathbf{\Omega}_p \times \mathbf{u}, \quad (2.81)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.82)$$

Dans ce travail, la gamme de paramètres étudiée est  $E \geq 10^{-3}$  et  $\beta \leq 0.32$ . Une fois un

état permanent atteint (stationnaire ou périodique), nous déterminons la vitesse angulaire de rotation de l'intérieur du fluide, i.e. en-dehors de la couche visqueuse de paroi. Pour ce faire, nous introduisons au sein du fluide un ellipsoïde centré sur l'origine, homothétique de la paroi externe dans un rapport  $\kappa$ . Nous définissons alors la rotation angulaire  $\omega$  dans l'intérieur fluide comme la valeur moyenne de la rotation angulaire au sein de cet ellipsoïde homothétique. Afin de nous prémunir de l'influence des couches visqueuses, nous considérons une couche visqueuse d'une épaisseur adimensionnelle (e.g. Owen & Rogers, 1989)  $\delta_\nu \approx 5\sqrt{E}$ , et fixons donc notre rapport d'homothétie à  $\kappa \approx 1 - \delta_\nu \approx 1 - 5\sqrt{E}$ . Nos calculs sont menés avec la méthode éléments finis décrite en section 2.2.

### 2.5.2.2 Dispositif expérimental

Les détails du dispositif expérimental figurent dans Meunier *et al.* (2008) et Lagrange *et al.* (2008), traitant le cas d'un cylindre en précession. Ici, le dispositif a été légèrement modifié afin d'étudier la précession d'un sphéroïde. Cela permet de valider la théorie à des nombres d'Ekman inaccessibles numériquement. Malheureusement, le dispositif est pour l'instant limité au cas d'une géométrie sphéroïdale ( $a_1 = a_2$ ) et n'est donc pas encore à même de valider la théorie développée ici pour un ellipsoïde triaxial. Des modifications supplémentaires seraient nécessaires pour rendre le plan équatorial elliptique, comme par exemple l'utilisation de deux rouleaux comprimant le sphéroïde (voir fig. 2.21).

Le sphéroïde, fait au laboratoire, a été obtenu en assemblant deux cavités hémisphéroïdales usinées dans des cylindres solides de Plexiglas. La précision machine (10 microns) garantit que le saut entre les deux parties est inférieur à la taille de la couche d'Ekman (de l'ordre de  $300\mu\text{m}$  à  $E = 10^{-5}$ ). Ce sphéroïde, de diamètre équatorial 17 cm et de rapport d'aspect  $a_3/a_1 = 0.85$  est rempli avec de l'eau et monté sur un moteur qui est lui-même placé sur une plate-forme tournante. Les vitesses angulaires du sphéroïde et de la plate-forme sont stables à moins de 0.1% et l'angle de précession  $\theta$  entre les deux axes varie de  $5^\circ$  à  $15^\circ$  avec une exactitude de  $0.1^\circ$ .

Des lasers pulsés YAG sont utilisés pour créer un plan lumineux perpendiculaire à l'axe de rotation de la plate-forme. Une caméra PIV (Particle Image Velocimetry) est située sur la plate-forme tournante, alignée avec l'axe de rotation du sphéroïde. Ceci permet d'obtenir des mesures PIV dans un plan presque parallèle au plan équatorial ( $x_1, x_2$ ) et situé à une distance  $x_3 = 5$  cm au-dessus. Les lasers YAG n'étant pas montés sur la plate-forme, le plan de mesure est incliné d'un angle  $\theta$  par rapport au plan équatorial, ce qui induit une erreur d'au plus 2 cm (pour  $\theta = 15^\circ$ ) sur la position axiale des vecteurs vitesses. Cependant, les composantes de vitesse mesurées correspondent exactement aux composantes  $x_1, x_2$  de vitesse car la caméra est alignée avec l'axe de rotation du sphéroïde. Il n'y a aucune distorsion d'images à l'interface air-Plexiglas (interface plane) mais il y a des distorsions dues à l'interface sphéroïdale Plexiglas-eau. Ces déformations restent petites car les indices de réfraction du Plexiglas et de l'eau sont très proches. Ces distorsions ont été calculées analytiquement et vérifiées expérimentalement avec une grille. Elles apparaissent principalement à la surface du sphéroïde et introduisent une erreur maximum de 15% sur le déplacement radial des particules. Cela ne biaise pas les mesures car seule la région centrale du champ de vitesse a été utilisée pour le traitement des données. Les images PIV ont été tournées numériquement afin de supprimer la rotation de base de

l'écoulement avant d'être traitées par un algorithme de cross-correlation PIV (DPIVsoft : voir Meunier & Leweke, 2003).

Dans le référentiel du manteau, le champ de vitesse 2D s'est avéré être un écoulement quasi-uniforme de translation dont la direction et l'amplitude varient avec la fréquence  $\Omega_p$  de précession. Cet écoulement moyen est lié aux composantes équatoriales de la vitesse angulaire  $(\omega_1, \omega_2)$  qui créent un écoulement uniforme de translation  $(\alpha_{31} x_3 \omega_2, -\alpha_{32} x_3 \omega_1)$  dans le plan  $x_3 = 5$  cm. Cet écoulement correspond aux derniers termes dans les équations (2.65) et (2.66) dans le cas  $a_1 = a_2$ . Les premiers termes de ces équations correspondent à la rotation angulaire axiale  $\omega_3$ , égale à  $(\omega_3 - 1)$  dans le référentiel du sphéroïde, et donc relativement petite hors des zones de résonances. Les mesures de vitesse moyenne et de vorticité moyenne permettent donc de remonter simplement aux trois composantes du vecteur rotation  $\boldsymbol{\omega}$ . C'est la première fois que de telles mesures sont menées dans un sphéroïde en précession, et elles seront comparées aux résultats numériques et théoriques dans la section suivante.

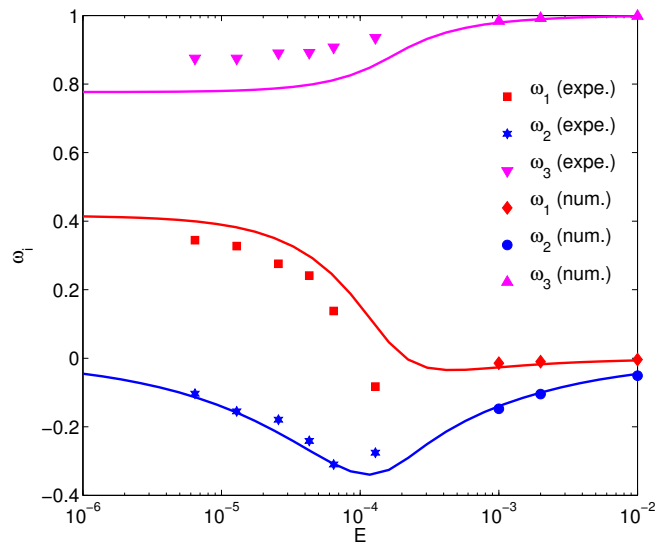
### 2.5.2.3 Validation en géométrie sphéroïdale

En figure 2.24, la théorie proposée par Busse (1968) est validée sur plus de trois décades en nombre d'Ekman pour deux angles de précession différents. L'intérêt des résultats présentés est double. Tout d'abord, ils valident le modèle numérique, qui peut maintenant être utilisé pour étudier les ellipsoïdes triaxiaux. De plus, ils complètent les validations précédentes de la théorie de Busse (e.g. Noir *et al.*, 2001; Tilgner & Busse, 2001; Lorenzani & Tilgner, 2001; Noir *et al.*, 2003), en particulier pour des nombres d'Ekman assez grands. Notons comme Tilgner & Busse (2001) que l'analyse théorique requiert que l'angle entre le vecteur rotation du conteneur et le vecteur rotation du fluide soit petit afin que l'analyse de couche d'Ekman reste valide. Cela pourrait expliquer les différences entre les mesures expérimentales et les prédictions théoriques pour le plus grand des angles de précession considéré ici ( $\theta = 15^\circ$ ). Une validation supplémentaire du modèle numérique et de la théorie de Busse est donnée en figure 2.25 (a) où les composantes de l'axe de rotation du tilt-over sont en excellent accord sur une large gamme de vitesse de précession. Notons que loin de la résonance, on retrouve les résultats non-visqueux de Poincaré (1910) avec  $\omega_3 = 1$ .

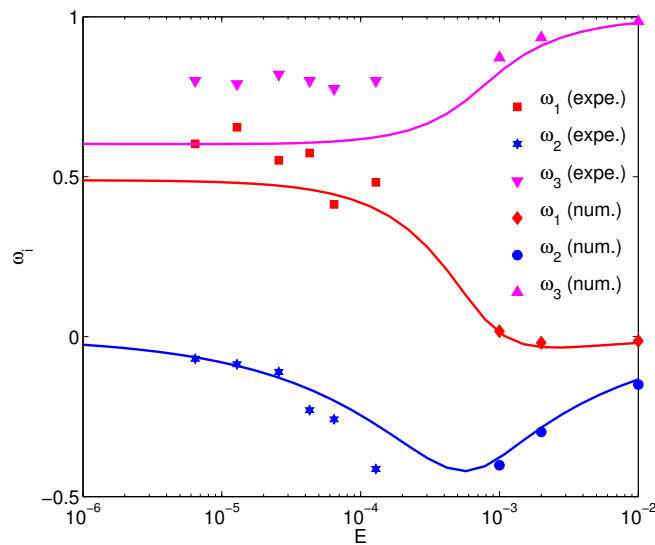
### 2.5.3 Précession et instabilité elliptique

Une première série de simulations a été menée pour  $a_3/a_1 = 0.86$ ,  $\theta = 10^\circ$ ,  $\theta_2 = 45^\circ$ ,  $E = 1/600$ ,  $\beta = 0.1$  et différentes vitesses de précession. Les résultats sont montrés en figure 2.25 (b). L'excellent accord entre les simulations numériques et la solution analytique visqueuse sur l'ensemble de la gamme étudiée confirme la validité de notre généralisation théorique. Notons que l'écoulement non-visqueux de Poincaré est retrouvé loin des résonances. Comme attendu, une seconde résonance apparaît pour l'ellipsoïde triaxial, les deux résonances restant dans le domaine rétrograde ici car  $a_1, a_2 > a_3$  (voir. eq. 2.68). Enfin, comme Noir *et al.* (2003) l'ont déjà fait remarquer, la viscosité lisse les pics de résonance mais modifie également leur position.

Le tilt-over est donc bien décrit par notre solution analytique à des nombres d'Ekman

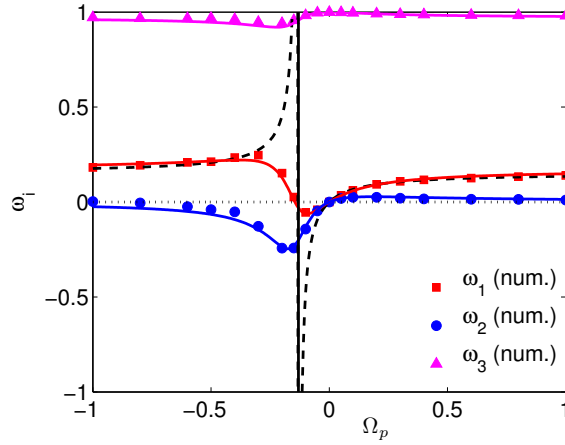


(a)

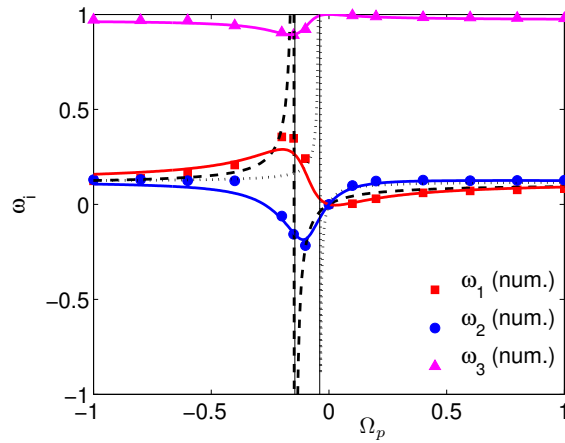


(b)

FIGURE 2.24 – Comparaison des composantes de vitesse angulaire de la solution de Busse pour un sphéroïde (lignes continues) avec les mesures expérimentales PIV et les simulations numériques sur une large gamme de nombre d'Ekman pour  $\Omega_p = -0.14$  et  $a_3/a_1 = 0.85$ . (a) Pour un angle de précession de  $5^\circ$ . (b) Pour un angle de précession de  $15^\circ$ .



(a)



(b)

FIGURE 2.25 – Les composantes du vecteur rotation de l'écoulement dans le sphéroïde, montrées en (a) sont comparées en figure (b) à celles dans l'ellipsoïde triaxial de même rapport d'aspect  $a_3/a_1 = 0.86$  ( $\theta = 10^\circ$ ,  $\theta_2 = 45^\circ$  et  $E = 1/600$ ). La théorie non-visqueuse de Poincaré et son extension à l'ellipsoïde triaxial sont données par les tirets noirs en choisissant  $\omega_3 = \beta_{12} = (a_1^2 + a_2^2)/(2a_1a_2)$  (voir l'étude de stabilité en annexe D). La théorie de Busse et son extension aux ellipsoïdes triaxiaux sont représentées par les lignes continues. Les deux résonances non-visqueuses  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont indiquées par les lignes verticales noires. (a) Dans le sphéroïde, le bon accord avec la théorie de Busse sur une large gamme de vitesse de précession confirme la validité du modèle numérique. (b) Dans l'ellipsoïde triaxial de même rapport d'aspect, mais avec  $\beta = 0.1$ , notre solution analytique est en bon accord avec les résultats numériques.

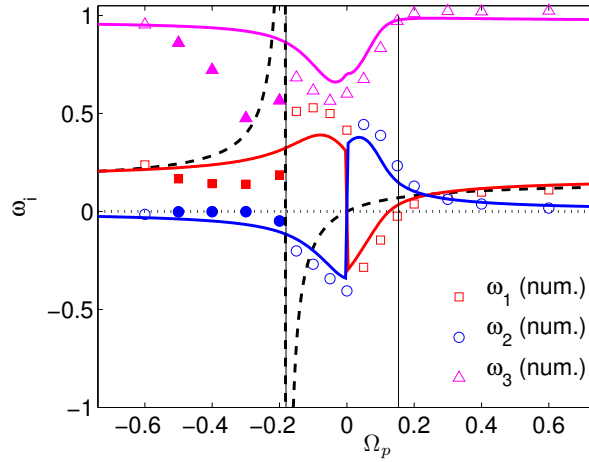


relativement larges et des déformations équatoriales modérées. Cependant, deux types d'instabilité peuvent apparaître dans ce cas : l'instabilité elliptique pour des nombres d'Ekman suffisamment petits et/ou des déformations assez grandes, et l'instabilité de précession pour des nombres d'Ekman suffisamment petits et/ou des vitesses de précession assez importantes. Notre étude portant sur l'instabilité elliptique, le nombre d'Ekman est maintenu suffisamment grand pour ne pas exciter d'instabilité de précession, et la déformation équatoriale est augmentée afin d'être au-dessus du seuil de l'instabilité elliptique.

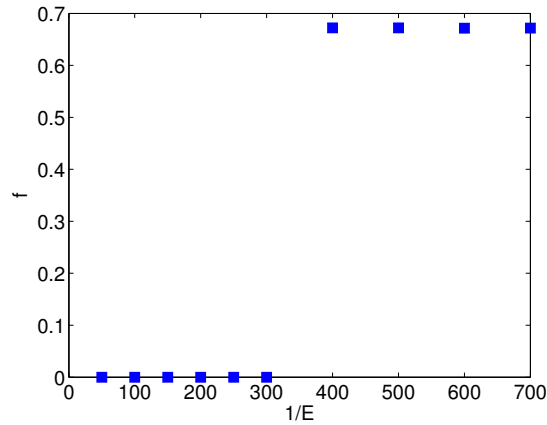
L'apparition et la forme de l'instabilité elliptique en présence d'une rotation globale (i.e. une rotation de la déformation équatoriale selon un axe parallèle à l'axe de rotation du conteneur) a été étudié en section 2.3.2 (voir aussi Le Bars *et al.*, 2007, 2010, pour une étude expérimentale). Dans les notations utilisées ici, ce cas correspond au cas particulier  $\theta = 0^\circ$ . Le mode usuel de l'instabilité elliptique dans la sphère est le mode de spinover, qui apparaît pour de faibles vitesses de rotation de la déformation équatoriale. L'analyse théorique de stabilité menée en annexe D montre que ce mode est susceptible de pousser sur l'écoulement de Poincaré. Notons que le spinover, qui est le mode usuel de l'instabilité elliptique, et le tilt-over, qui est l'écoulement de base de la précession, correspondent au même écoulement : notre solution analytique doit donc les décrire tous les deux. La figure 2.26 (a) montre que c'est en effet le cas autour de  $\Omega_p = 0$  où la théorie et les simulations sont en bon accord. De plus, par comparaison avec ce que l'on sait de l'instabilité elliptique dans le cas particulier  $\theta = 0^\circ$  (voir la section 2.3.2 pour les détails), on s'attend à ce que l'instabilité elliptique mène à un écoulement instationnaire lorsque  $\Omega_p$  est en-dessous de la bande de résonance du spinover, et à ce que l'instabilité disparaisse au-dessus de cette bande. Ces résultats sont retrouvés en figure 2.26 (a), où les écoulements oscillants sont en effet observés pour  $\Omega_p \in [-0.5; -0.2]$ , tandis qu'un bon accord théorie/simulations est obtenu pour les écoulements stationnaires de la gamme  $\Omega_p > 0$ . Enfin, une étude systématique de la pulsation du mode excité en fonction du nombre d'Ekman pour  $\Omega_p = -0.4$  est donnée en figure 2.26 (b). En accord avec les prédictions de l'analyse théorique de stabilité présentée en annexe D, la transition d'un écoulement stationnaire à un écoulement instationnaire est obtenue pour  $E \approx 1/300$ .

#### 2.5.4 L'instabilité de précession

L'instabilité de précession a été introduite en section 1.5. Rappelons qu'en géométrie sphérique, seule l'instabilité visqueuse de précession est susceptible d'apparaître (e.g. Tilgner, 2005). En revanche, en géométrie sphéroïdale, Kerswell (1993b) montre que deux autres instabilités peuvent apparaître : l'instabilité inertielle de précession et l'instabilité elliptique (voir section 1.5). En effet, même si le conteneur n'est pas un ellipsoïde triaxial, l'inclinaison des lignes de courant par le mode de tilt-over dans un conteneur sphéroïdal rend ces dernières elliptiques. La compétition entre ces deux instabilités inertielles dépend de leur taux de croissance respectifs. Afin de s'affranchir de l'instabilité elliptique, Kerswell (1993b) considère un fluide non-confiné en rotation dont l'axe de rotation précesse à  $90^\circ$  : l'écoulement dans le référentiel en précession est alors simplement constitué de lignes de courant circulaires dont les centres se décalent progressivement le long d'une droite. Ainsi, la vitesse de précession adimensionnée par la vitesse angulaire de rotation



(a)



(b)

FIGURE 2.26 – Paramètres fixés :  $\theta = 10^\circ$ ,  $a_3/a_1 = 0.86$ ,  $\theta_2 = 0$  et  $\beta = 0.317$  (ce qui correspond à  $(a_1 + a_2)/2 = a_3$ ). (a) Évolution des composantes du vecteur rotation de l'écoulement avec l'amplitude de la vitesse de précession pour  $E = 1/600$ . Le code couleur est celui de la figure 2.25 (b). Les symboles pleins correspondent aux cas où l'écoulement est oscillant, tandis que les symboles vides correspondent à des écoulements stationnaires. Notons que le changement de signe à  $\Omega_p = 0$  est dû aux deux orientations possibles du spinover associé à la saturation de l'instabilité elliptique. (b) Considérant à présent  $\Omega_p = -0.4$  pour lequel l'écoulement est oscillant à  $E = 1/600$  selon la fig. (a), la pulsation  $f$  de l'écoulement est tracée en fonction du nombre d'Ekman. Il apparaît alors clairement que l'écoulement est stationnaire pour  $E \gtrsim 1/300$ , puis oscille à la pulsation constante  $f \approx 0.67$  pour des nombres d'Ekman inférieurs.

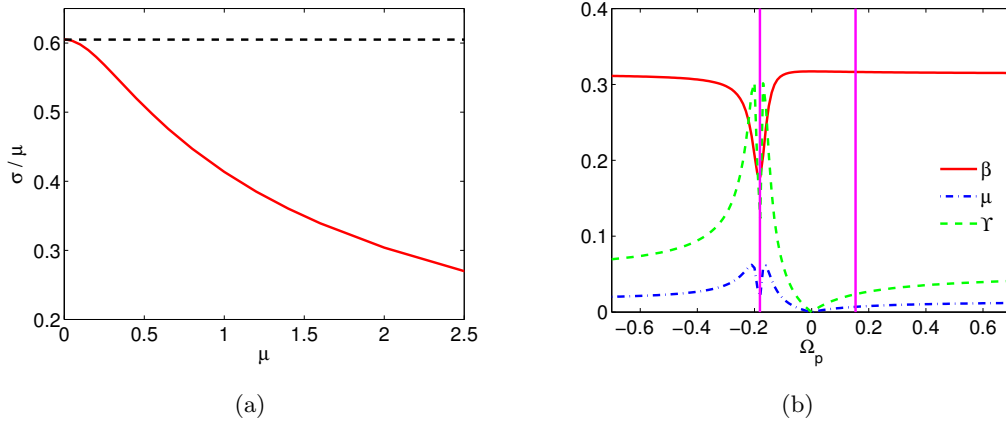


FIGURE 2.27 – (a) Le taux de croissance maximum de l’instabilité inertielle de précession obtenu par analyse de Floquet est représenté en fonction de  $\mu$  (ligne continue rouge). La ligne discontinue noire représente l’expression analytique  $\sigma/\mu = 5\sqrt{15}/32$  obtenue dans la limite  $\mu \ll 1$ . (b) Évolution de l’ellipticité  $\beta$  et du cisaillement  $\mu$  des lignes de courant de l’écoulement de Poincaré pour les cas considérés en section 2.5.3 ( $\theta = 10^\circ$ ,  $a_3/a_1 = 0.86$ ,  $\theta_2 = 0^\circ$  et  $\beta = 0.317$ , ce qui correspond à  $(a_1 + a_2)/2 = a_3$ ). L’évolution de  $\Upsilon$ , défini par l’équation (2.84) peut ainsi être calculée et montre que l’instabilité elliptique est effectivement attendue. Les lignes verticales représentent les deux résonances (ici  $\theta_2 = 0^\circ$ ).

du fluide se confond avec le cisaillement  $\mu$ . Le taux de croissance  $\sigma$  peut alors être calculé par une analyse de Floquet, qui a été reprise et représentée pour une plus large gamme de  $\mu$  en figure 2.27a. Dans la limite des faibles cisaillements ( $\mu \ll 1$ ), Kerswell (1993b) obtient une formule analytique :

$$\sigma = \frac{5\sqrt{15}}{32} \mu. \quad (2.83)$$

Considérant un écoulement de base un peu différent de celui de Kerswell (1993b), Naing & Fukumoto (2009) aboutissent au même taux de croissance<sup>15</sup>. Afin d’estimer le résultat de la compétition entre cette instabilité et l’instabilité elliptique, il semble intéressant de comparer leurs taux de croissance. On considère donc le même écoulement avec des lignes de courant légèrement elliptiques ( $\beta \ll 1$ ). L’effet de la précession dans la limite  $\mu \ll 1$  est alors d’ordre  $\beta\mu^2$  et le ratio  $\Upsilon$  des taux de croissance pour un tel écoulement est donc

$$\Upsilon = \frac{\frac{5\sqrt{15}}{32} \mu}{\frac{9}{16} \beta} = \frac{5\sqrt{15}}{18} \frac{\mu}{\beta} \approx \frac{\mu}{\beta}. \quad (2.84)$$

Ainsi, pour  $\Upsilon \ll 1$ , on s’attend à observer l’instabilité elliptique, et pour  $\Upsilon \gg 1$ , on s’attend à observer l’instabilité inertielle de précession. Dans le cas par exemple de l’ellipsoïde

15. Naing & Fukumoto (2009) l’appellent instabilité de Coriolis ou instabilité précessionnelle.

triaxial étudié en section 2.5.3, il est possible de tracer  $\Upsilon$  en fonction de la vitesse de précession. Pour ce faire, on considère l'écoulement de Poincaré dans un tel ellipsoïde, et on en déduit l'ellipticité des lignes de courant ainsi que le cisaillement induit par l'inclinaison du mode de Poincaré dans un tel conteneur. La figure 2.27b représente les résultats, confirmant d'une autre façon que l'écoulement oscillant observé est bien dû à l'instabilité elliptique<sup>16</sup>.

Notons enfin que les limites  $\Upsilon \ll 1$  et  $\Upsilon \gg 1$  ont été étudiées par Naing & Fukumoto (2009) par une analyse de stabilité locale de l'écoulement non-confiné  $\mathbf{U} = (-(1-\beta)y, (1+\beta)x, -2\mu y)$ . Notons que dans le plan  $xy$ , les lignes de courant sont elliptiques, avec un grand axe selon  $x$  pour  $\beta < 0$ , et selon  $y$  pour  $\beta > 0$ . Naing & Fukumoto (2009) obtiennent alors le taux de croissance de l'instabilité elliptique pour  $\mu \ll 1$  :

$$\sigma = \frac{9}{16} \beta \left[ 1 - \frac{2}{3} \beta - \frac{3}{32} \mu^2 \right]. \quad (2.85)$$

La correction au taux de croissance  $\sigma/\beta = 9/16$  montre que la présence de la force de Coriolis considérée par Naing & Fukumoto (2009) est toujours stabilisante, contrairement au cas où elle est alignée avec l'axe de rotation (voir section 2.3.2). Dans la limite  $\Upsilon \gg 1$ , le taux de croissance de l'instabilité inertielle de précession est donné par :

$$\sigma = \frac{5\sqrt{15}}{32} \mu \left[ 1 + \frac{669}{640} \beta \right]. \quad (2.86)$$

Cette correction montre que l'ellipticité des lignes de courant stabilise l'instabilité lorsque l'axe de précession est aligné avec le grand axe ( $\beta < 0$ ) tandis que l'ellipticité est déstabilisante si l'axe de précession est aligné avec le petit axe ( $\beta > 0$ ).

La reconsidération de ces résultats est en cours, à la fois théoriquement et numériquement, notamment afin de quantifier l'interaction entre instabilité de précession et instabilité elliptique. En effet, la compétition entre ces deux instabilités n'a jamais été vraiment étudiée alors même qu'elles sont toutes deux susceptibles d'être excitées au sein des noyaux liquides planétaires (voir Wicht & Tilgner, 2010, pour une présentation récente de leurs pertinences respectives en géophysique).

## 2.6 Instabilité thermo-elliptique

Jusqu'ici, les études portant sur l'instabilité elliptique considéraient un fluide isotherme en rotation, éventuellement soumis à une turbulence homogène isotrope (Fabijonas & Holm, 2003, 2004a). Pourtant, dans tous les systèmes naturels, la température joue un rôle important, créant soit une stratification, soit de la convection thermique. Il est donc nécessaire de reprendre les études précédentes afin de quantifier l'influence d'un champ thermique sur l'instabilité elliptique : si, en effet, la convection thermique s'avérait empêcher sa croissance, sa pertinence dans un contexte géophysique serait clairement discutable. D'un autre côté, du point de vue thermique, de nombreuses études ont été menées sur la convection thermique en géométrie sphérique (voir par exemple Aurnou, 2007, et

16. En réalité, la forme de l'écoulement obtenu ne laisse pas de doute à ce sujet.

les références citées). Cependant, puisque la plupart des corps astrophysiques sont déformés par des forces de marées, ces études doivent être reprises pour tenir compte d’une éventuelle présence de l’instabilité elliptique. Notons que le lien entre résonance d’ondes gravito-inertielles induites par les forces de marées et champ thermique a été proposé dans une étude géophysique peu connue de Kumazawa *et al.* (1994). Cependant, cette étude considère le forçage résonant d’une onde donnée par les marées, ce qui est différent de l’instabilité elliptique, basée sur une résonance paramétrique d’ondes. Jusqu’ici, le seul travail combinant effets thermiques et instabilité elliptique était l’étude théorique de Le Bars & Le Dizès (2006), qui ont considéré l’influence d’un profil de température diffusif sur l’instabilité elliptique. Dans leur travail, l’instabilité elliptique est interprétée comme la résonance d’ondes gravito-inertielles et son taux de croissance déterminé dans le cas particulier d’une gravité créée par force centrifuge. Afin de compléter ces travaux, nous avons pour objectif de répondre aux questions suivantes : (i) Quelle est l’influence d’une différence de température imposée en géométrie ellipsoïdale sur le taux de croissance de l’instabilité elliptique, et donc en particulier le seuil de l’instabilité ? (ii) Est-il possible d’exciter une instabilité elliptique sur un écoulement de convection thermique ? (iii) Quelle est l’influence d’une instabilité elliptique sur le flux de chaleur et quelles sont les lois d’échelle impliquées ? Notons qu’en complément à notre étude numérique, une étude parallèle de Lavorel & Le Bars (2010) considère le problème du point de vue expérimental.

### 2.6.1 Définition du problème et nombres adimensionnels

Comme indiqué en figure 2.28, le modèle numérique de la section 2.3 est repris avec une coquille ellipsoïdale d’axes  $(a, b, c)$ , au lieu d’un simple ellipsoïde, avec une vitesse tangentielle  $U\sqrt{1 - (z/c)^2}$  imposée à la paroi externe dans chaque plan de coordonnées  $z = \text{cte}$  perpendiculaire à l’axe de rotation ( $Oz$ ), où  $U$  est la vitesse imposée à la paroi dans le plan équatorial. Un ellipsoïde homothétique, d’un rapport d’aspect  $\eta = 0.3$ , est placé au centre de l’ellipsoïde externe, et une vitesse constante tangentielle  $\eta U\sqrt{1 - (z/c)^2}$  est imposée sur sa paroi. Le rayon moyen  $R_{eq} = (a + b)/2$  est choisi comme échelle de longueur, et l’échelle de temps  $\Omega^{-1}$  est définie en écrivant la vitesse tangentielle à la paroi  $U = \Omega R_{eq}$ . Le problème hydrodynamique est donc décrit par quatre nombres sans dimension : l’ellipticité  $\beta = (b^2 - a^2)/(a^2 + b^2)$ , le rapport d’aspect de la coquille  $\eta$  (i.e. le rapport homothétique de la paroi interne à la paroi externe), l’aplatissement  $c/b$  et le nombre d’Ekman  $E_k = \nu/(\Omega R_{eq})$ , où  $\nu$  est la viscosité cinématique. Dans les simulations considérées dans cette section, l’axe polaire  $c$  est fixé à  $R_{eq} = (a + b)/2$ , de même que dans les expériences de Lacaze *et al.* (2005b), ce qui permet d’exciter le mode spin-over.

En plus de ces considérations purement hydrodynamiques, l’équation de température est également résolue, avec des températures constantes uniformes  $T_i$  et  $T_e$  imposées respectivement sur les parois interne et externe. La force de flottabilité est modélisée sous l’approximation de Boussinesq<sup>17</sup> (avec une densité linéaire en température). La force de gravité dans les équations de Navier-Stokes s’écrit donc  $\rho \mathbf{g}_* = \rho(T_e) [1 - \alpha(T_* - T_e)] \mathbf{g}_*$ , où  $\rho$  est la densité du fluide,  $\alpha$  le coefficient volumique de dilatation thermique,  $\mathbf{g}_*$  la gravité locale, qui dépend de la position, et  $T_*$  la température locale. Dans ce modèle, la gravité

17. Voir e.g. Anufriev *et al.* (2005) pour une discussion sur la légitimité de cette approximation en géophysique, en particulier pour le noyau terrestre.

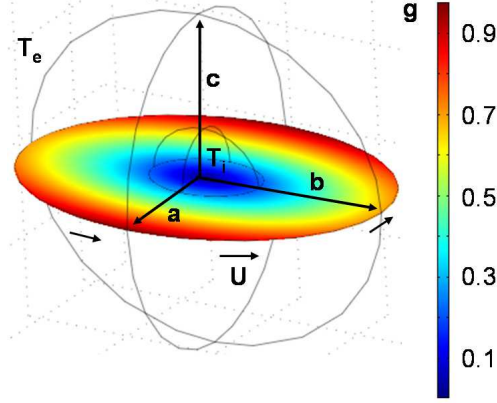


FIGURE 2.28 – Schéma du problème considéré. Le champ de gravité, représenté ici dans le plan équatorial, est calculé explicitement, supposant que la paroi externe est une équipotentielle de gravité  $\phi = 0$ .

est calculée en résolvant l'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel  $\phi$ , la paroi externe correspondant à une équipotentielle<sup>18</sup>. Ainsi, les aspects thermiques du problème sont caractérisés par deux nombres adimensionnels : le nombre de Prandtl  $Pr = \nu/\kappa$ , où  $\kappa$  est la diffusivité thermique, et le nombre de Rayleigh  $Ra = (\alpha g_0 (T_i - T_e) d^3)/(\kappa \nu)$ , où  $d = R_{eq}(1 - \eta)$  est l'épaisseur de la coquille et  $g_0$  la gravité à la surface de la paroi externe de la sphère correspondante, i.e.  $g_0 = (4/3) \pi G R_{eq} \rho(T_e)$  avec  $G$  la constante de gravitation. Notons que la viscosité cinématique du fluide est supposée indépendante de la température dans cette étude.

Finalement, le problème résolu est décrit par le système d'équations sans dimension suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + E_k \Delta \mathbf{u} - \frac{Ra E_k^2}{Pr (1 - \eta)^3} T \mathbf{g}, \quad (2.87)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{E_k}{Pr} \Delta T, \quad (2.89)$$

$$\Delta \phi = 3, \quad (2.90)$$

$$\mathbf{g} = -\nabla \phi, \quad (2.91)$$

où  $T$  est l'anomalie (adimensionnelle) de température  $T = (T_* - T_e)/(T_i - T_e)$ . Toutes les conditions aux limites sont données ci-dessus. Un tel modèle numérique correspond par exemple à un noyau planétaire liquide, avec une graine interne et une différence de température imposée aux frontières. Notons que dans un contexte géophysique, du fait de la compressibilité, la différence de température  $\Delta T = T_i - T_e$  à considérer est l'écart à l'adiabat entre la graine interne et la paroi noyau-manteau (CMB). Tous les nombres

18. Notons que l'étude avec une gravité purement radiale a également été menée mais n'est pas présentée ici car des instabilités baroclines apparaissent alors, parasitant l'étude de l'instabilité elliptique.

adimensionnels, leurs valeurs dans cette étude, et les valeurs typiques pour les noyaux de la Terre et de Io sont donnés dans la table 2.1.

Toutes les simulations de cette section sont menées selon la même procédure : partant d'un fluide au repos dans une coquille sphérique de rayon  $R_{eq}$  avec un profil initial de température diffusif, la coquille est mise en rotation à vitesse angulaire constante  $\Omega$ . Une fois l'écoulement établi par résolution des équations ci-dessus, la coquille est déformée en une coquille ellipsoïdale de façon instantanée, et la simulation se poursuit. Cette déformation instantanée permet d'étudier le taux de croissance de l'instabilité elliptique sur un état de base conductif ou convectif connu. Notons qu'ont également été menées des simulations avec un changement graduel de déformation, ainsi que des simulations partant directement d'une coquille ellipsoïdale afin de vérifier que l'état final n'était pas modifié par la procédure.

Deux quantités ont été systématiquement étudiées : (i) le taux de croissance  $\sigma$  de l'instabilité, qui permet ici de quantifier la rétroaction du champ de température sur l'instabilité elliptique, et (ii) le nombre de Nusselt  $Nu$ , qui quantifie la rétroaction de l'instabilité elliptique sur les propriétés thermiques du système. Puisque l'instabilité elliptique correspond à une forte déstabilisation tridimensionnelle de l'écoulement initial,  $\sigma$  est déterminé en mesurant la constante de temps de la croissance exponentielle de la valeur moyenne de la vitesse verticale en valeur absolue  $W = \frac{1}{V} \int_V |w| d\tau$ , où  $w$  est la vitesse verticale adimensionnelle, et  $V$  le volume de la coquille ellipsoïdale. Le nombre de Nusselt est calculé en divisant le flux de chaleur moyen à la paroi externe (une fois le régime établi) par la valeur théorique du flux conductif dans une sphère de rayon  $R_{eq}$ . La différence entre ce flux analytique et le flux calculé numériquement pour un ellipsoïde purement conductif est inférieure à 2% pour l'ensemble des simulations présentées.

Les aspects purement hydrodynamiques de ces simulations ont déjà été validés en section 2.3. Une validation complémentaire de la résolution des effets thermiques a été menée en calculant le flux thermique dans une coquille parfaitement sphérique en rotation : en figure 2.29, les résultats à  $E = 1/344$  sont comparés à la compilation de résultats donnée par Aurnou (2007) pour le nombre de Nusselt modifié  $Nu^* = \frac{Nu E}{Pr}$ , où  $E = \frac{\nu}{\Omega d^2}$  est le nombre d'Ekman basé sur l'épaisseur de la coquille i.e.  $E = (1 - \eta)^{-2} E_k$ . Notons que ces simulations se positionnent à un endroit où peu de données étaient disponibles, et sont en accord avec la tendance générale. De plus, ces résultats ont été comparés avec succès à la loi d'échelle proposée par Christensen (2002), obtenue à partir de simulations numériques :

$$Nu^* = 0.077 (Ra_Q^*)^{5/9} \quad (2.92)$$

où  $Ra_Q^* = Ra Nu E^3 / Pr^2$  est le nombre de Rayleigh basé sur le flux de chaleur au lieu de la différence de température, et qui ne prend pas en compte les effets visqueux ou de diffusion thermique. Un excellent accord est obtenu, validant ainsi le modèle numérique.

### 2.6.2 Etude théorique et numérique

Dans leur analyse WKB de stabilité linéaire, Le Bars & Le Dizès (2006) considèrent des lignes de courant elliptiques en présence d'un champ thermique diffusif, et obtiennent le taux de croissance de l'instabilité elliptique. Ainsi, dans la limite des faibles déformations

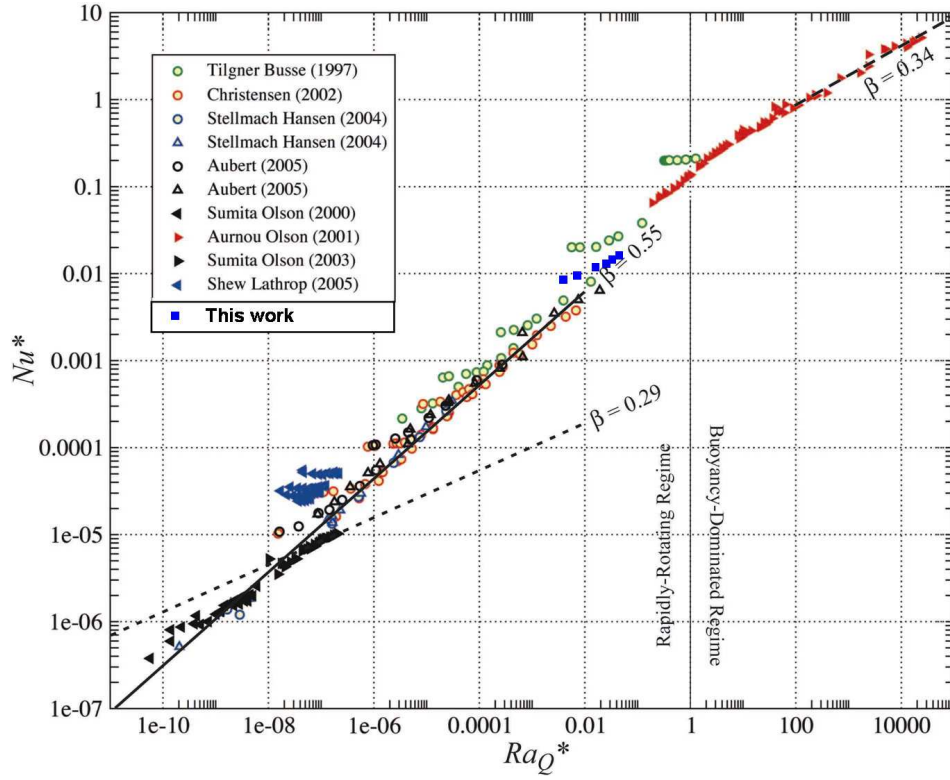


FIGURE 2.29 – Évolution du nombre de Nusselt modifié dans le cas d'une coquille en rotation ( $\beta = 0$ ) pour  $Pr = 1$  et  $\eta = 0.3$ . Comparaison pour  $E_k = 1/344$  avec la compilation de résultats numériques et expérimentaux de Aurnou (2007).

TABLE 2.1 – Paramètres adimensionnels et leur valeurs dans les simulations numériques présentées. Des estimations, obtenues à partir de la littérature, pour le noyau liquide de la Terre et de Io sont également données.

Definition	Valeurs considérées	Noyaux liquides : Terre & Io
$\beta = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}$	0 – 0.32	$10^{-7}$ – $10^{-4}$
$\eta$	0 – 0.3	0.35 – ?
$c/b$	0.86 – 1	997/1000 – 995/1000
$E_k$	$\geq 0.001$	$10^{-15}$ – $10^{-13}$
$E = (1 - \eta)^{-2} E_k$	$\geq 0.002$	$10^{-15}$ – $10^{-13}$
$Pr = \nu/\kappa$	1	0.25 – 0.25
$Ra = \frac{\alpha g_0 (T_i - T_e) d^3}{\kappa \nu}$	$-3.8 \cdot 10^5$ – $10^6$	$10^{23}$ – ?
$Ra_Q^* = Ra Nu E^3 / Pr^2$	$-2.6 \cdot 10^{-5}$ – 0.24	$10^{-13}$ – ?
$Nu = Q_{total} / Q_{conduction}$	1 – 5.6	$10^6$ – ?
$Nu^* = \frac{Nu E}{Pr}$	$\geq 0.002$	$10^{-8}$ – ?
$Ro = \frac{\sqrt{\frac{1}{V} \int U^2 d\tau}}{\Omega R_{eq}}$	0 – 0.4	$10^{-6}$ – ?



d'un fluide non-visqueux, le taux de croissance pour des isothermes elliptiques et des équipotentielles de pesanteur circulaires :

$$\sigma = \frac{9 - 3\tilde{Ra}}{16 - 4\tilde{Ra}}\beta, \quad (2.93)$$

où  $\tilde{Ra} = \frac{\eta-1}{\ln(\eta)} \frac{RaE^2}{Pr}$  est un nombre de Rayleigh modifié, supposé d'ordre 1. L'expression (2.93) montre l'influence des effets thermiques sur l'instabilité elliptique, qui correspond ici à une résonance paramétrique de 2 ondes gravito-inertielles avec la déformation de marées. Le Bars & Le Dizès (2006) montrent également que l'instabilité elliptique ne peut pousser pour  $\tilde{Ra} > 3$  car aucune résonance n'est alors possible. Comme le montre la figure 2.31a, la même tendance avec le nombre de Rayleigh est retrouvée dans une coquille sphérique, même si les résultats diffèrent de cette estimation théorique locale.

Comme le montre la figure 2.31a, un premier résultat remarquable des simulations numériques est l'augmentation du taux de croissance de l'instabilité elliptique avec la stratification thermique (i.e.  $Ra < 0$ ). Il peut sembler surprenant qu'un effet a priori stabilisant comme la stratification favorise la déstabilisation de l'écoulement, mais un tel phénomène a déjà été observé. Ainsi, un écoulement stable de Taylor-Couette peut être déstabilisé par une stratification axiale, menant à l'instabilité dite strato-rotationnelle (voir par exemple les expériences de Le Bars & Le Gal, 2007). Un second résultat, important dans un contexte géophysique, est la possibilité pour l'instabilité elliptique de pousser sur un écoulement convectif établi. Comme le montre la figure 2.30, l'écoulement s'organise alors complètement différemment. En effet, en l'absence d'instabilité elliptique, l'écoulement de convection dans une sphère en rotation rapide s'organise usuellement en colonnes, dites de Busse (fig. 2.30a) ; l'écoulement est principalement 2D, avec une faible vitesse verticale provenant uniquement du pompage d'Ekman au sein des colonnes. La figure 2.30b montre que ces colonnes de Busse sont détruites par la croissance de l'instabilité elliptique dont le champ de vitesses est complètement tridimensionnel. La figure 2.31a montre que le taux de croissance  $\sigma$  de l'instabilité elliptique décroît progressivement lorsque le nombre de Rayleigh est augmenté. En effet, la convection thermique peut être vue comme une perturbation de l'écoulement qui se superpose à l'écoulement de base isotherme de l'instabilité elliptique (i.e. une rotation le long de lignes de courant elliptiques) : quand le nombre de Rayleigh est augmenté, la vitesse convective typique augmente et l'ellipticité de l'écoulement de base est de moins en moins ressentie par les particules fluides, qui ont de plus en plus tendance à suivre le forçage de convection. Cette idée peut être quantifiée avec le nombre de Rossby, rapport entre la moyenne quadratique (ou 'valeur rms') de la vitesse convective et la vitesse de rotation typique  $\Omega R_{eq}$  :  $Ro = \sqrt{\frac{1}{V} \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV}$ , où  $\mathbf{u}$  est la vitesse adimensionnelle dans le référentiel tournant. L'instabilité elliptique devrait alors disparaître pour un nombre de Rossby de l'ordre de 1. Comme l'indique la figure 2.31b, si l'on considère un écoulement légèrement au-dessus du seuil de l'instabilité elliptique (paramètres :  $Pr = 1$  et  $E_k = 1/344$ ), le nombre de Rossby critique, défini par un taux de croissance nul, est en effet trouvé autour de  $Ro \approx 0.25$ . Cependant, à plus haut Reynolds, plus loin du seuil de l'instabilité elliptique donc, le nombre de Rossby critique semble augmenter (cf. fig. 2.31a pour  $E_k = 1/688$ ), si toutefois il existe. En effet, quand le nombre de Rayleigh augmente, la vitesse convective typique augmente aussi tandis

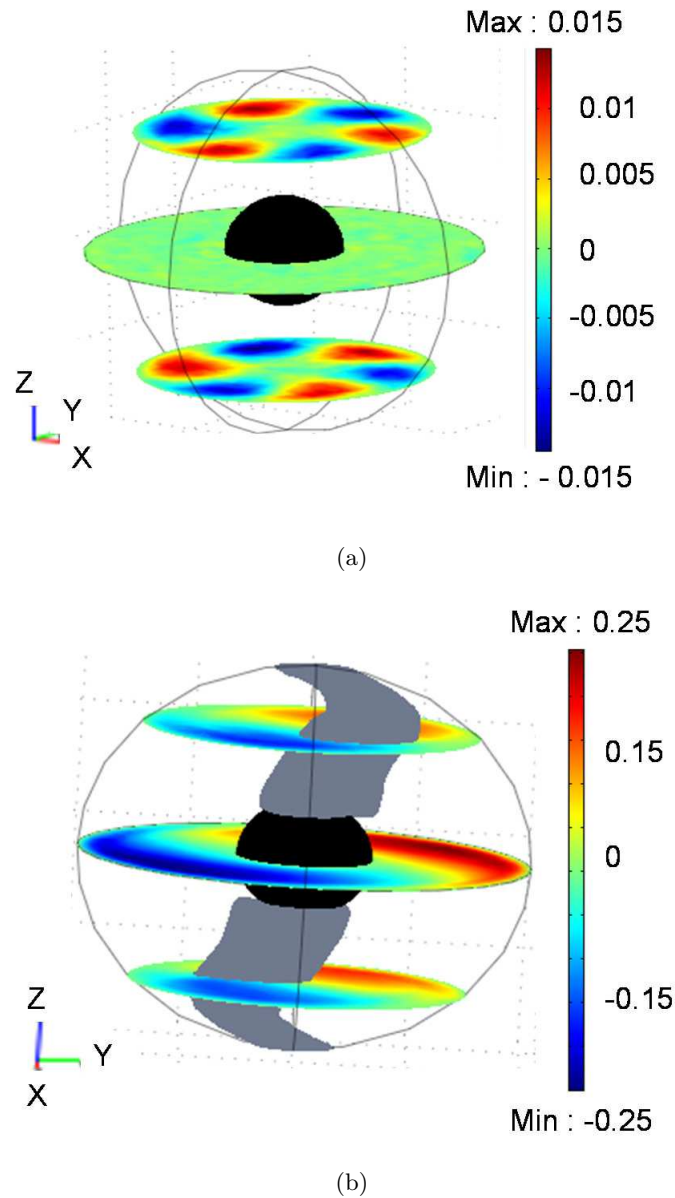


FIGURE 2.30 – Comparaison entre l'écoulement convectif en l'absence d'instabilité elliptique ( $a$ ,  $\beta = 0$ ), et en présence de l'instabilité elliptique ( $b$ ,  $\beta = 0.317$ ) pour les mêmes valeurs de nombre d'Ekman  $E_k = 1/344$ , nombre de Rayleigh  $Ra = 18762$  et nombre de Prandtl  $Pr = 1$ . La vitesse verticale est montrée dans trois plans différents. En figure (b) est également représentée une isosurface de norme de la vitesse  $\|\mathbf{u}\| = 0.19$ , montrant clairement la forme de 'S' du mode de spin-over.

que l'échelle spatiale typique liée à la convection  $L_{conv}$  décroît simultanément. Dans la limite des forts nombres de Rayleigh,  $L_{conv}$  est très petit et les mouvements turbulents deviennent complètement 3D. Les mouvements convectifs peuvent alors être vus comme une viscosité turbulente, ce qui devrait favoriser la croissance de l'instabilité elliptique selon Fabijonas & Holm (2003). L'étude systématique de ce régime serait très intéressante, mais reste hors de portée de nos moyens de calcul. Néanmoins, nos résultats permettent d'utiliser le nombre de Rossby critique  $Ro_c = 0.25$ , déterminé pour  $E_k = 1/344$ , comme borne inférieure pour des nombres d'Ekman inférieurs. Ce résultat est suffisant pour nos applications planétaires et stellaires, comme nous le verrons plus loin.

Quand les instabilités elliptique et thermique sont simultanément présentes, les transferts de chaleurs sont déterminés par la compétition entre la convection thermique naturelle et la convection forcée engendrée par l'instabilité elliptique. Dans ce dernier cas, l'écoulement associé à l'instabilité peut être décomposé en trois zones distinctes : un intérieur homogène, brassé et isotherme, et deux couches visqueuses d'Ekman proches des parois (externe et interne) où les variations de température sont purement diffusives. Le flux de chaleur advecté par l'instabilité est alors déterminé par la taille de la couche d'Ekman  $\delta_\nu$ , selon  $Nu - 1 \sim d/\delta_\nu$ . Avec le scaling usuel des couches visqueuses, on obtient  $Nu - 1 = \alpha_1/\sqrt{E^*}$ , où  $\alpha_1$  est une constante,  $E^* = \nu/(u_{ei}d)$  le nombre d'Ekman associé à l'écoulement généré par l'instabilité elliptique, et  $u_{ei}$  la vitesse du fluide associée à l'instabilité. Comme on l'a vu en section 2.3.4, cette vitesse  $u_{ei}$  peut être estimée numériquement en l'absence de température par soustraction de l'écoulement de base à l'écoulement calculé à saturation.  $u_{ei}/(\Omega R)$  est en  $\alpha_2 (1 - \eta)^2 \sqrt{E_c/E - 1}$  proche du seuil de l'instabilité, où  $\alpha_2 \approx 0.6$  a été obtenu numériquement et où  $E_c$  est le nombre d'Ekman critique associé au seuil de l'instabilité. Plus loin du seuil,  $u_{ei}/(\Omega R)$  tend à saturer vers 1. Gardant les mêmes lois en présence d'effets thermiques, le nombre de Nusselt près du seuil varie comme

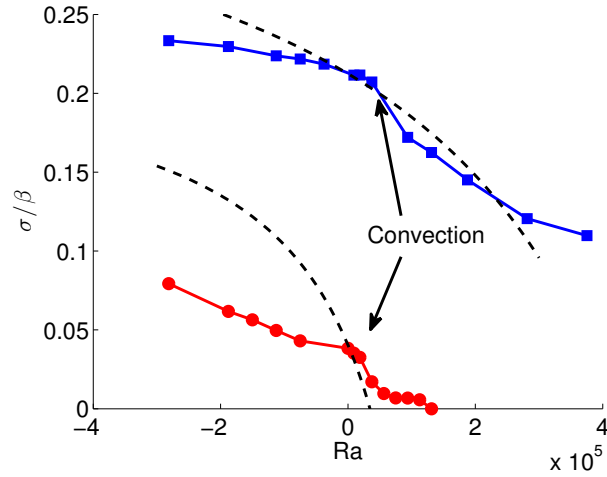
$$Nu - 1 = \alpha_1 \sqrt{\alpha_2} (1 - \eta)^2 (E_c/E - 1)^{1/4} E^{-1/2} . \quad (2.94)$$

Nos résultats numériques, montrés en figure 2.32a, valident cette loi d'échelle avec  $\alpha_1 \approx 0.01$  (valeur retrouvée expérimentalement par Lavorel & Le Bars, 2010). Plus loin du seuil,  $E^* = E$  et la loi d'échelle s'écrit alors

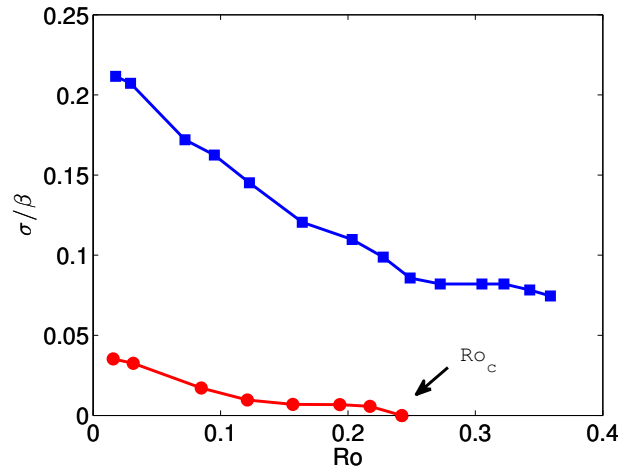
$$Nu - 1 \approx Nu = \alpha_1/\sqrt{E} . \quad (2.95)$$

Notons que selon ce modèle, le nombre de Nusselt est une mesure de l'amplitude de l'instabilité. L'accord entre nos résultats et la loi d'échelle confirme donc que l'amplitude de l'instabilité n'est pas inhibée par une forte stratification, à condition d'être assez loin du seuil.

Une étude systématique de la variation du nombre de Nusselt avec le nombre de Rayleigh est montrée en figure 2.32b. En absence d'instabilité (elliptique ou convective),  $Nu$  reste égal à 1 (transfert de chaleur purement diffusif). En présence de l'instabilité elliptique, le flux de chaleur reste constant, supérieur à 1, jusqu'à un nombre de Rayleigh de transition dépendant de  $E$ , où la convection naturelle devient plus efficace que la convection forcée. En effet, (2.94) et (2.95) décrivent un flux de chaleur associé à une convection forcée uniquement, et sont donc valides en-dessous du seuil de convection



(a)



(b)

FIGURE 2.31 – (a) Influence du nombre de Rayleigh sur le taux de croissance de l'instabilité elliptique pour  $\beta = 0.317$ ,  $c = (a+b)/2$ ,  $Pr = 1$  et  $E_k = 1/344$  (ronds rouges),  $E_k = 1/688$  (carrés bleus). Le taux de croissance donné par l'équation (2.93) est aussi montré avec un terme d'amortissement visqueux surfacique  $-K E_k^{1/2}$ , où  $K$  est une constante de l'ordre de 1 (Lacaze et al., 2005b). La valeur de  $K$  est déterminée par comparaison avec la valeur théorique à  $Ra = 0$ , ce qui donne  $K = 3.07$  pour  $E_k = 1/344$  (ronds rouges) et  $K = 2.91$  pour  $E_k = 1/688$  (carrés bleus). (b) Evolution pour  $E_k = 1/344$  (ronds rouges) et  $E_k = 1/688$  (carrés bleus) du taux de croissance de l'instabilité elliptique avec le nombre de Rossby, calculé selon la loi d'échelle donnée par Christensen & Aubert (2006)  $Ro = 0.85 (Ra_Q^*)^{0.41}$ . Pour  $E_k = 1/344$  (ronds rouges), l'instabilité disparaît pour  $Ro \approx 0.25$ .

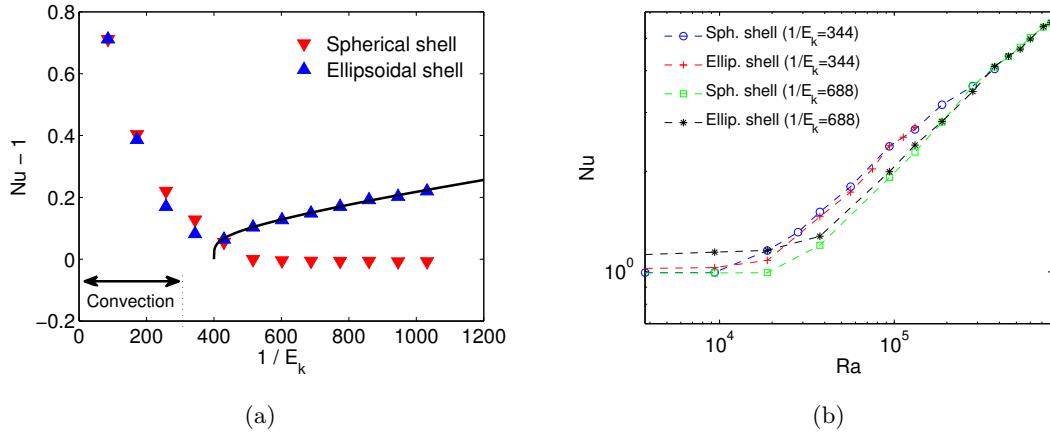


FIGURE 2.32 – (a) Influence de  $E_k$  sur  $Nu$  pour un écoulement convectif avec  $\beta = 0.317$ ,  $c = (a + b)/2$ ,  $Pr = 1$  et  $Ra = 18762$ . La ligne continue noire représente la loi d'échelle proposée (2.94). (b) Évolution du nombre de Nusselt avec le nombre de Rayleigh dans des coquilles sphériques et ellipsoïdales ( $\beta = 0.317$ ,  $c = (a+b)/2$ ) pour  $Pr = 1$  et  $E_k = 1/344$ ,  $E_k = 1/688$ . Notons que la dépendance usuelle du Rayleigh critique de convection  $Ra_c \propto E_k^{-4/3}$  (voir par exemple Tilgner & Busse, 1997) est visible : la croissance du nombre d'Ekman modifie le seuil et donc, augmente la vigueur de la convection.

naturelle  $Ra_c$  i.e. pour  $Ra < Ra_c$ . Pour  $Ra > Ra_c$ , les instabilités convective et elliptique sont en compétition et le flux de chaleur est celui du plus efficace des deux mécanismes (King *et al.*, 2009). Selon les lois d'échelle (2.92) et (2.95), la transition entre la convection forcée et la convection naturelle apparaît pour un nombre de Nusselt de transition  $Nu_t^* = NuE/Pr = 0.077 (Ra_Q^*)^{5/9} = \alpha_1 \sqrt{E}/Pr$ , ce qui correspond à un nombre de Rayleigh de transition

$$Ra_t \approx 2.5 E^{-8/5} Pr^{1/5}. \quad (2.96)$$

Ainsi, pour  $Ra > Ra_t$ , le flux de chaleur est contrôlé par les mouvements de convection naturelle, tandis que pour  $Ra < Ra_t$ , il est contrôlé par l'advection liée à l'instabilité elliptique. En vu de l'application de ces résultats aux planètes, il est intéressant de réécrire ce résultat en terme de *nombre de Rayleigh-flux*, défini par  $Ra_f = Ra Nu$ , pour lequel la transition apparaît pour

$$Ra_{f_t} \approx 0.025 E^{-21/10} Pr^{1/5}. \quad (2.97)$$

### 2.6.3 Applications planétaires et stellaires

Ainsi que le détaillent Sumita & Yoshida (2003), une stratification stable en densité à travers l'ensemble du noyau externe liquide de la Terre primitive est tout à fait envisageable. Elle aurait même pu être suffisamment importante pour inhiber le démarrage

d'une dynamo. Cette stratification initiale doit alors avoir été détruite par un mécanisme qui pourrait être graduel (Lister & Buffett, 1998). Cependant, il pourrait aussi être de type catastrophe, induit par exemple par la nutation trimestrielle forcée (Williams, 1994) ou par un forçage résonant d'ondes gravito-inertielles (Kumazawa *et al.*, 1994). Notre travail propose un mécanisme alternatif basé sur une résonance triadique d'ondes plutôt que sur une résonance directe d'onde. En effet, nous avons montré que la stratification favorisait la résonance triadique de l'instabilité elliptique.

Il est également possible de s'interroger sur la pertinence d'une instabilité elliptique pour le noyau terrestre actuel. Afin d'estimer les ordres de grandeurs en jeu, appliquons les lois d'échelles obtenues en section 2.6.2 au noyau terrestre actuel, dont les mouvements sont générés par la convection. Selon Christensen & Aubert (2006), les valeurs typiques sont  $E \approx 5 \cdot 10^{-15}$ ,  $Ra_Q^* \approx 3 \cdot 10^{-13}$  et  $Ra_f \approx 10^{29}$  pour  $Pr = 0.25$ . Une première conséquence immédiate est que  $Ro \sim 10^{-6}$  selon la loi d'échelle  $Ro = 0.85(Ra_Q^*)^{0.41}$  donnée par Christensen & Aubert (2006). Ainsi,  $Ro$  est clairement plus petit que la borne inférieure  $Ro_c \approx 0.25$  de disparition de l'instabilité (cf. section 2.6.2) : la convection n'empêche pas le développement de l'instabilité elliptique. De plus, la loi d'échelle (2.97) permet d'estimer le nombre de Rayleigh de transition à  $Ra_{f_t} \sim 2 \times 10^{28}$ . Le noyau terrestre est donc juste au-dessus de la transition entre les deux types de convection vus en section 2.6.2, et le flux de chaleur est contrôlé par la convection naturelle. Cependant, le nombre de Rayleigh de transition est très proche du nombre de Rayleigh actuel. Ainsi, un régime où le flux de chaleur est contrôlé par les marées n'est pas exclu, à d'autres époques ou dans d'autres systèmes planétaires, et dans tous les cas, cette proximité des estimations montre la pertinence de l'instabilité elliptique comme processus majeur à l'oeuvre dans les noyaux planétaires.

Pour finir, de nombreux auteurs supposent qu'une fine couche, appelée *océan du noyau*, en surface du noyau externe, est stratifiée stable : voir e.g Stanley & Mohammadi (2008) pour une revue récente de la littérature sur le sujet. En fait, comme le décrit ce travail, de nombreux indices montrent qu'une telle couche stratifiée stable serait présente dans les régions conductrices d'électricité de plusieurs planètes. La situation est contraire, mais de dynamique similaire, au sein des étoiles peu massives (typiquement de masse inférieure à deux masses solaires) : sous la photosphère existe une zone convective, sus-jacente d'une zone stratifiée appelée zone radiative. Se posent alors les questions suivantes : une telle configuration bi-couche permet-elle à l'instabilité elliptique de pousser ? Dans quelle zone, i.e. sur la zone stratifiée, sur la zone convective ou sur les deux ? Le flux de chaleur est-il complètement modifié par l'instabilité ? Une unique simulation est présentée en figure 2.33, illustrant notre réponse. Dans cette simulation, la même température  $T = 0$  est imposée aux frontières, et une température  $T = 1$  est imposée sur une frontière interne neutre correspondant à un ellipsoïde homothétique de ratio  $\eta_2 = 0.7$  : cela permet d'obtenir une couche interne stratifiée stable et une couche externe convective, avec des cellules de convection clairement visibles (fig. 2.33a). Une fois l'instabilité elliptique excitée, la figure 2.33b montre que l'instabilité pousse sur l'ensemble des couches, et contrôle le flux de chaleur. Ainsi, en présence de l'instabilité elliptique, une stratification thermique (i.e. un profil de température subadiabatique) n'est plus synonyme d'isolation thermique.

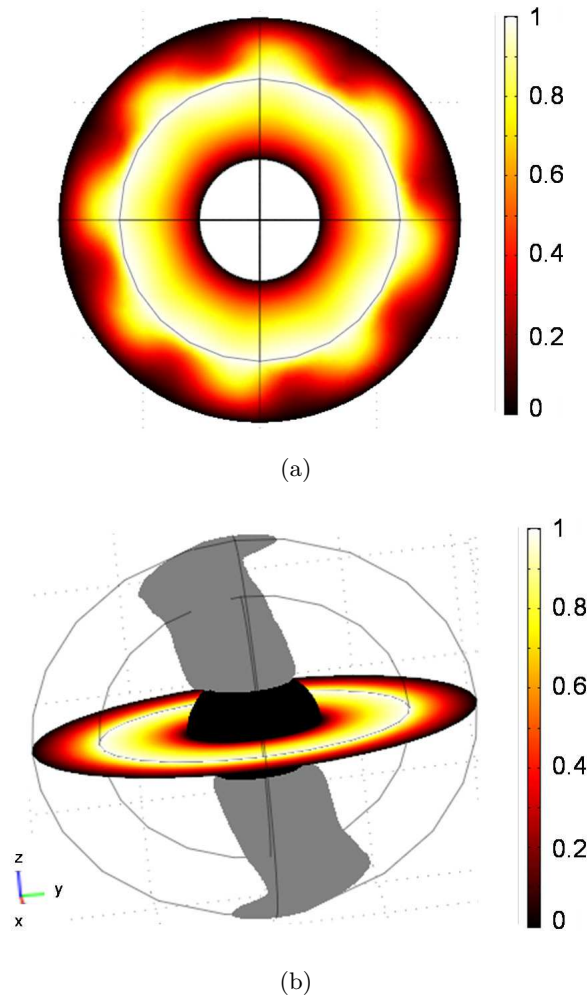


FIGURE 2.33 – Visualisation de la température réduite  $T$  dans le cas d'une couche stratifiée sous-jacente à une zone convective ( $E_k = 1/344$ ,  $c = (a + b)/2$ ). Les frontières interne et externe vérifient  $T = 0$  et une température  $T = 1$  est imposée sur un ellipsoïde de rapport  $\eta_2 = 0.7$ , de sorte que le nombre de Rayleigh basé sur l'épaisseur de la coquille est  $Ra = 18762$ , tandis que le nombre de Rayleigh basé sur  $\eta_2$  est égal à  $Ra_2 = Ra (1 - \eta_2)^3 / (1 - \eta)^3 \approx 1512$ . (a) Température dans le plan équatorial pour une coquille sphérique de rayon  $R_{eq} = c$ . (b) Température dans le plan équatorial et iso-surface  $\|\mathbf{u}\| = 0.19$  à saturation de l'instabilité elliptique pour la coquille ellipsoïdale correspondante, pour  $\beta = 0.317$ .

## 2.7 Synthèse du chapitre 2 et publications

Cette section a tout d'abord présenté les premières études numériques de l'instabilité elliptique au sein d'un ellipsoïde. L'approche numérique a permis de compléter les résultats précédents, en particulier sur les effets présents dans un contexte planétaire tels que l'influence de l'aplatissement, de l'ajout d'une force de Coriolis, de l'obliquité ou de la présence d'une graine interne solide. Elle a également permis de valider des lois d'échelles sur l'amplitude de l'écoulement associé à l'instabilité et la puissance dissipée par viscosité. L'ensemble de ce travail a fait l'objet d'une publication dans *Physics of the Earth and Planetary Interiors* (Cébron *et al.*, 2010a).

Dans un second temps, l'interaction de l'instabilité elliptique avec les autres forçages mécaniques systématiquement présents dans un contexte naturel, i.e. la libration et la précession, a été étudiée. Concernant la libration, la prédiction théorique de Kerswell & Malkus (1998) a été confirmée : il est possible d'exciter une instabilité elliptique par une oscillation de la rotation différentielle entre le fluide et la déformation. Afin de distinguer cette forme d'instabilité elliptique du cas usuel où la rotation différentielle est constante, nous les nommons respectivement LDEI (Libration Driven Elliptical Instability) et TDEI (Tide Driven Elliptical Instability). Une analyse théorique de stabilité fournit une formule analytique pour le seuil de l'instabilité, dont la validité est confirmée par les simulations. Ce travail, qui a complété les mesures expérimentales menées par J. Noir et J. Aurnou, a fait l'objet d'une soumission commune à *Physics of the Earth and Planetary Interiors*.

L'interaction de l'instabilité elliptique avec la précession a également été étudiée. Tout d'abord, une solution analytique de l'écoulement de base dans un ellipsoïde triaxial en précession a été obtenue. La simulation numérique du problème valide cette solution sur une large gamme de vitesse de précession. Une étude théorique de stabilité montre que l'instabilité elliptique est encore susceptible d'être excitée dans une telle configuration, ce que confirment les simulations. Un tel écoulement mène ainsi à une compétition entre l'instabilité elliptique et l'instabilité de précession, ce qui reste encore un problème ouvert. Cette étude a été menée en collaboration avec P. Meunier et a fait l'objet d'une publication dans *Physics of Fluids* (Cébron *et al.*, 2010b).

La section se termine en considérant l'interaction de l'instabilité elliptique et d'un champ thermique. En particulier, nous avons montré que l'instabilité elliptique était favorisée par une stratification radiale en géométrie ellipsoïdale, et qu'elle était capable de croître sur des mouvements convectifs, prenant la place des colonnes de Busse usuelles. Enfin, une étude systématique du flux de chaleur montre que ce dernier peut être contrôlé par l'instabilité elliptique plutôt que par la convection naturelle. Ce travail a fait l'objet d'une publication dans *Geophysical Journal International* (Cébron *et al.*, 2010c).