

# Optique quantique en variables continues

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>B</b>	<b>Variables continues en mécanique quantique</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>C</b>	<b>Relations de commutation – Inégalité de Heisenberg</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>D</b>	<b>Fluctuations du champ</b> . . . . .	<b>10</b>
D.1	État vide – État cohérent . . . . .	10
D.2	Bruit quantique de la lumière . . . . .	10
D.3	État comprimé du rayonnement . . . . .	11
D.4	Linéarisation des fluctuations . . . . .	12
D.5	Mesure des fluctuations du champ . . . . .	13
<b>E</b>	<b>Corrélations quantiques en variables continues</b> . . . . .	<b>14</b>
E.1	Corrélations entre une quadrature de chaque mode . . . . .	14
E.2	Double corrélation . . . . .	17
<b>F</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>23</b>

---

## A Introduction

Dans cette partie sont présentés les aspects les plus utiles pour l'expérimentateur des variables continues en optique quantique. Après avoir introduit la notion de variables continues en mécanique quantique, on s'intéressera plus particulièrement au cas de l'optique. On introduira l'inégalité de Heisenberg, et ses conséquences sur les fluctuations quantiques du champ électromagnétique. La représentation de ces fluctuations dans le plan de Fresnel permettra tout au long de cette thèse une illustration des notions et résultats importants. Enfin on abordera le problème des corrélations quantiques, d'abord entre une quadrature de chaque mode, puis entre les deux quadratures de chaque mode, à l'origine du débat soulevé en 1935 par l'article EPR (pour un système de deux particules, problème analogue à celui de deux modes du champ). Quelques critères permettant de distinguer les différents types de corrélations seront décrits (une étude plus détaillée sera menée dans le chapitre 2). On soulignera enfin le lien étroit existant entre intrication et réduction de bruit.

## B Variables continues en mécanique quantique

La description habituelle des systèmes quantiques est la description de Von Neumann, où chaque opération physique sur un état est décrite par un opérateur. On peut distinguer deux

types d'opérateurs : ceux dont le spectre est discret (éventuellement infini), et ceux dont le spectre est continu.

Du fait de leur simplicité conceptuelle, les systèmes discrets ont été expérimentalement les premiers étudiés. Les systèmes à deux états sont les plus simples, et ont débouché (entre autres) sur le calcul quantique avec des qubits. En particulier, un des exemples les plus utilisés en optique est l'état de polarisation d'un photon unique, qui peut s'exprimer comme combinaison linéaire des polarisations horizontale et verticale :  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{|c_V|^2 + |c_H|^2}} (c_V |V\rangle + c_H |H\rangle)$  où  $(c_V, c_H) \in \mathbb{C}^2$ . C'est cet état (ou son analogue pour le spin) qu'a utilisé Bohm pour "traduire" en termes de variables discrètes l'expérience de pensée de Einstein, Podolsky et Rosen [Bohm, 1951, Einstein *et al.*, 1935]. Par exemple, l'état  $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|V V\rangle + |H H\rangle)$  est un état intriqué de deux photons. De nombreux problèmes en physique atomique se réduisent également à l'étude de systèmes à 2 niveaux (ou quelques niveaux tout au plus).

Plus récemment, l'information quantique s'est intéressée aux variables à spectre continu. Ces variables sont *a priori* beaucoup plus riches que les variables discrètes. Le premier exemple de telles variables en mécanique quantique sont la position et l'impulsion d'une particule, dont l'analogue en optique quantique sont les composantes de quadrature conjuguées d'un mode du champ électromagnétique. Cette analogie résulte directement de la quantification du champ, qui permet de décrire un mode comme un oscillateur harmonique quantique [Grynberg *et al.*, 1997, Fabre, 1997].

On considère un mode du champ électromagnétique, correspondant à une onde plane de polarisation et de direction fixées, de pulsation  $\omega$ . En physique classique, le champ électrique associé peut s'écrire :

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi) = E_P \cos(\omega t) + E_Q \sin(\omega t) \quad (1.1)$$

$E_0$  et  $\varphi$  sont respectivement l'amplitude et la phase de l'onde.  $E_P$  et  $E_Q$  sont les amplitudes des deux quadratures du champ dans le repère de Fresnel. On notera que pour une description en termes de quadratures, comme pour une description en termes de phase et amplitude, il est nécessaire de fixer l'origine des phases (ou de choisir la base dans le plan de Fresnel). Dans le cadre d'une description quantique, le champ électrique se définit à partir des opérateurs de création et d'annihilation de photon :

$$\hat{E}(t) = \mathcal{E}_0(\hat{a} e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}) \equiv \mathcal{E}_0(\hat{P} \cos(\omega t) + \hat{Q} \sin(\omega t)) \quad (1.2)$$

où  $\mathcal{E}_0$  est une constante de normalisation qui correspond au champ électrique associé à un photon.

Ainsi, les opérateurs de quadratures  $\hat{P}$  et  $\hat{Q}$  s'expriment :

$$\hat{P} = \hat{a} + \hat{a}^\dagger \quad (1.3a)$$

$$\hat{Q} = -i(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (1.3b)$$

L'intérêt des variables continues par rapport aux variables discrètes est double. En effet, si les concepts théoriques sont plus difficiles à manipuler, les systèmes expérimentaux sont plus

simples à mettre en œuvre : un faisceau lumineux est directement obtenu à la sortie d'un laser, tandis que la production de photons uniques est encore à l'heure actuelle l'objet à part entière de certaines expériences. Les techniques de mesure sont elles aussi nettement moins complexes et moins coûteuses. Par ailleurs, les possibilités offertes à l'optique quantique en variables continues sont très riches (débit plus important, instruments de mesure plus précis et donc plus sensibles, ...).

## C Relations de commutation – Inégalité de Heisenberg

À partir de la relation de commutation entre les opérateurs création et annihilation :

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \mathbf{1} \quad (1.4)$$

et de la définition des opérateurs de quadratures (1.3), on peut facilement montrer que ces derniers vérifient la même relation de commutation canonique que les opérateur position et impulsion d'une particule :

$$[\hat{P}, \hat{Q}] = 2i \mathbf{1} \quad (1.5)$$

L'ensemble des propriétés quantiques du champ découle de cette relation de commutation. En particulier, elle impose une limite inférieure au produit des variances des deux variables conjuguées ; c'est l'inégalité de Heisenberg :

$$(\Delta \hat{P})^2 \cdot (\Delta \hat{Q})^2 \geq 1 \quad (1.6)$$

où, pour un opérateur  $\hat{Y}$ ,  $\Delta \hat{Y} = \sqrt{\langle \hat{Y}^2 \rangle - \langle \hat{Y} \rangle^2}$ .  $(\Delta \hat{Y})^2$  désigne sa variance.

Ainsi, on ne peut prédire avec une précision infinie le résultat de la mesure simultanée des deux composantes de quadratures : leurs fluctuations constituent le bruit quantique de la lumière, bruit intrinsèque à la nature quantique de la lumière, qui subsiste lorsque toutes les autres sources de bruit ont disparu.

On peut également déduire de ces relations le lien entre le nombre de photons (représenté par l'opérateur nombre  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ ), dont dépend directement l'intensité du champ, et les quadratures :

$$\hat{P}^2 + \hat{Q}^2 = \hat{N} + \frac{1}{2} \quad (1.7)$$

Comme on l'a déjà mentionné, le choix des composantes de quadratures est arbitraire, et correspond à un choix de l'origine des phases dans le plan de Fresnel. Une fois le choix effectué, on peut s'intéresser à un couple de composantes de quadratures conjuguées tourné de  $\theta$  par rapport aux quadratures de référence :

$$\hat{P}(\theta) = \hat{a} e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \quad (1.8a)$$

$$\hat{Q}(\theta) = -i \left( \hat{a} e^{-i\theta} - \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \right) \quad (1.8b)$$

Tout couple de quadratures conjuguées vérifie la relation de commutation (1.5). Notons que  $\hat{Q}(\theta) = \hat{P}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ .

Lorsque la valeur moyenne du champ étudié est non nulle, il existe un couple de quadratures particulier : les quadratures définies par  $\theta = \varphi$ , où  $\varphi$  est la phase du champ, correspondent respectivement aux quadratures d'amplitude et de phase du champ.

## D Fluctuations du champ

### D.1 État vide – État cohérent

Un état particulier est le vide, pour lequel toutes les composantes de quadrature présentent la même variance de bruit :

$$(\Delta\hat{P}_{vac})^2 = (\Delta\hat{Q}_{vac})^2 = 1 \quad (1.9)$$

Cet état définit ainsi une référence pour les fluctuations, qu'on appellera par la suite "limite quantique standard" ou "bruit quantique standard". Ces fluctuations correspondent aux fluctuations d'un oscillateur matériel au repos autour de sa position d'équilibre. Cette référence a longtemps été considérée comme une limite infranchissable – on sait aujourd'hui que ce n'est pas tout-à-fait exact.

L'état quantique dont les propriétés sont les plus proches de celles d'un champ classique est obtenu en superposant à ce dernier les fluctuations du vide. De tels états, introduits par Glauber en 1963 [Glauber, 1963, Glauber, 1965], sont appelés états cohérents. Le vide est donc un état cohérent de valeur moyenne nulle, c'est-à-dire dont le nombre moyen de photons est nul. Les états cohérents sont notés  $|\alpha\rangle$ , et ils sont vecteurs propres de l'opérateur annihilation pour la valeur propre  $\alpha$  :

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (1.10)$$

### D.2 Bruit quantique de la lumière

Il est possible de donner une image simple en termes corpusculaire des fluctuations d'intensité du champ dues à la nature quantique de la lumière, qui sont appelées "bruit de grenaille" ("shot noise" en anglais). En effet, la lumière "classique" (assimilée à un état cohérent) est constituée de photons, qui sont répartis aléatoirement dans le temps au sein du faisceau, suivant une distribution Poissonnienne<sup>1</sup>. Lorsque les photons arrivent sur un détecteur (par exemple une photodiode), si ce dernier est suffisamment rapide, il va détecter des fluctuations autour de la valeur moyenne de l'intensité, dues à l'arrivée pendant le temps d'intégration du détecteur d'un nombre de photons plus ou moins important (*cf.* Fig. 1.1). Le bruit de grenaille de la lumière est ainsi l'analogie optique du bruit que ferait un jet de sable frappant une plaque métallique.

On a vu que la quantification du champ en quadratures conjuguées s'appuie sur la représentation de Fresnel du champ électromagnétique. Pour cette raison, une représentation courante du bruit quantique consiste à superposer dans le plan de Fresnel un champ classique et ses

1. On peut montrer à partir de (1.10) que  $(\Delta\hat{N})^2 = \langle\hat{N}\rangle$  où  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$  est l'opérateur nombre.

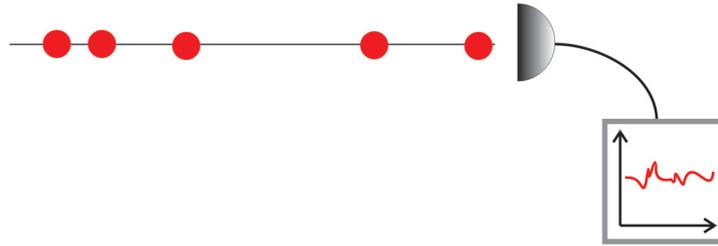


Fig. 1.1: Image corpusculaire du bruit d'intensité d'un faisceau lumineux

fluctuations (*cf.* Fig. 1.2). Le champ classique est représenté – comme à l'habitude – par un vecteur dont la norme donne l'amplitude, et l'angle par rapport à la quadrature de référence donne la phase. La nature quantique de la lumière fait apparaître des fluctuations du champ autour de cette valeur moyenne : la pointe du vecteur devient une notion vide de sens. Simplement, lorsqu'on effectue un grand nombre de mesures de la quadrature  $\hat{P}$ , on va pouvoir établir un histogramme des valeurs obtenues, ce qui donne une distribution Gaussienne de variance  $(\Delta\hat{P})^2$ . Il en est de même pour  $\hat{Q}$  (ou pour tout autre quadrature mesurée). On schématise ces distributions par une surface, le contour de cette surface étant tel que la distance à la position moyenne de la pointe du vecteur donne la variance de bruit pour chaque quadrature. Dans le cas d'un état cohérent, où la variance de bruit pour toutes les quadratures est égale à celle du vide, ce contour est un disque de rayon 1.

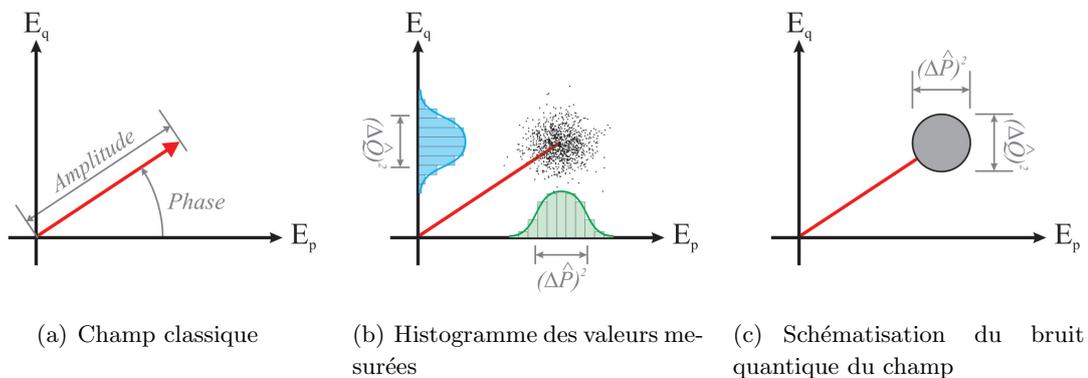


Fig. 1.2: Représentations de Fresnel du champ électromagnétique

### D.3 État comprimé du rayonnement

Si la relation d'incertitude définit une borne inférieure pour le produit des variances de deux quadratures conjuguées, elle n'impose aucune contrainte sur les variances individuelles. Ainsi, des états pour lesquels la symétrie entre les variances des deux quadratures serait brisée ne sont pas interdits. La variance de l'une des quadratures peut ainsi devenir plus petite que la limite quantique standard, à condition que la variance de la quadrature conjuguée augmente proportionnellement.

De tels états “comprimés” (“squeezed states” en anglais) sont représentés dans le diagramme de Fresnel par un champ dont la zone de fluctuations prend la forme d’une ellipse. La direction du petit axe de l’ellipse indique celle de la quadrature la plus comprimée (*cf.* Fig. 1.3).

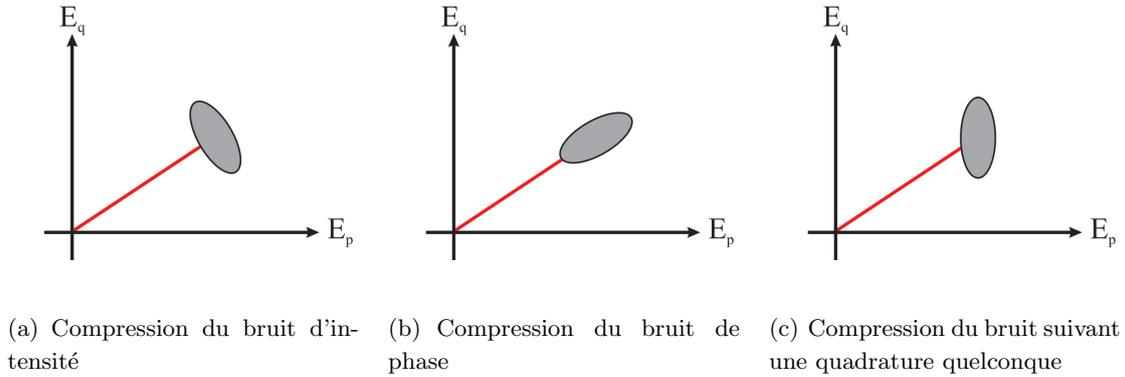


Fig. 1.3: Représentation de Fresnel d'états comprimés selon différentes quadratures

On peut à nouveau proposer une représentation corpusculaire d'un tel état dans le cas d'une compression du bruit d'intensité. Il s'agit d'un faisceau lumineux dont la distribution temporelle des photons serait plus régulière qu'une distribution Poissonnienne – les photons seraient mieux “rangés” (*cf.* Fig. 1.4).

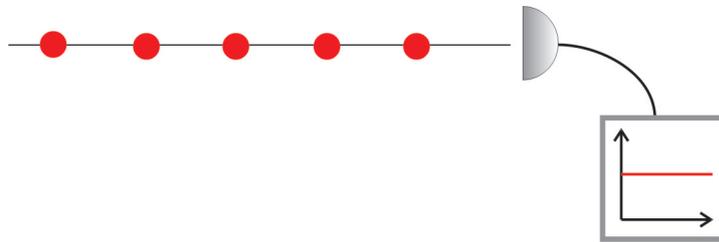


Fig. 1.4: Image corpusculaire d'un faisceau parfaitement comprimé en intensité

Cette image corpusculaire explique également la grande fragilité des états comprimés vis-à-vis des pertes. En effet, toute perte (absorption, réflexion partielle, mauvaise efficacité de détection) prélève aléatoirement des photons, et tend donc à rendre à la distribution statistique son caractère Poissonnien (*cf.* Fig. 1.5).

#### D.4 Linéarisation des fluctuations

On peut toujours écrire un opérateur  $\hat{Y}$  décrivant le champ ( $\hat{Y} = \hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{P}, \hat{Q}, \dots$ ) comme la somme de sa valeur moyenne et de ses fluctuations :

$$\hat{Y} = \langle \hat{Y} \rangle + \delta\hat{Y} \quad (1.11)$$

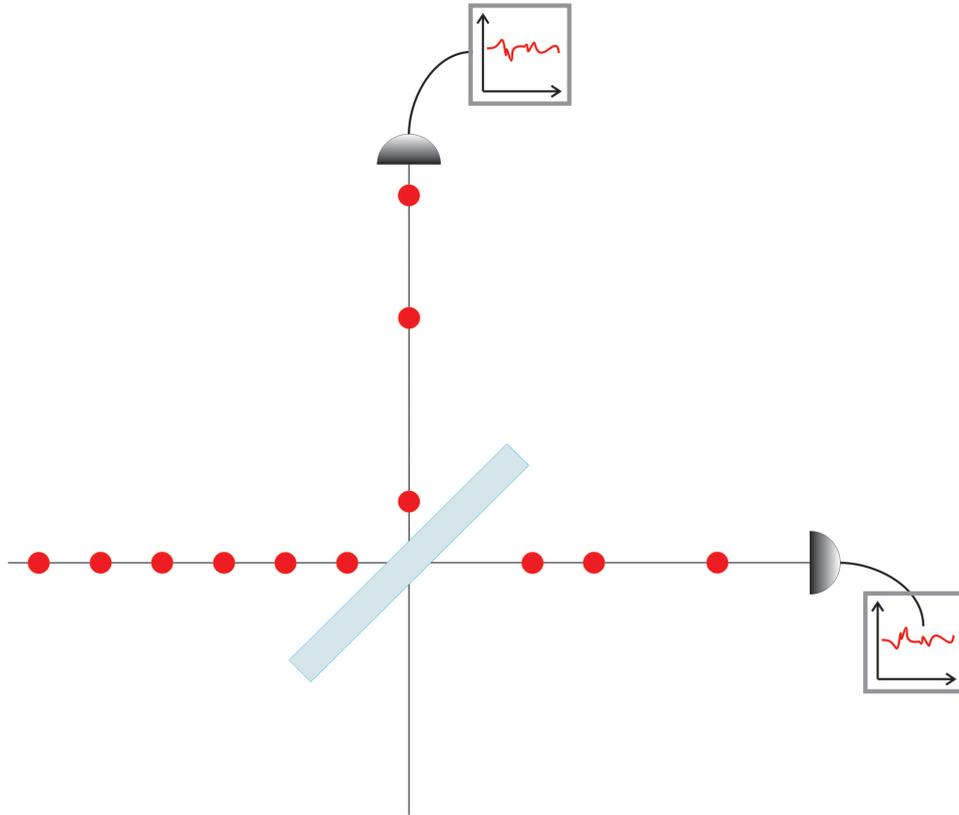


Fig. 1.5: Image corpusculaire de l'effet d'une lame 50/50 sur un faisceau parfaitement comprimé en intensité

Dans toute la suite, on fera l'approximation que les valeurs prises par les modules des éléments de matrice de  $\delta\hat{Y}$  sont très petites<sup>2</sup> devant  $|\langle\hat{Y}\rangle|$ . Dans ce cas, on pourra négliger tous les moments d'ordre supérieur ou égal à 3 des fluctuations.

Il est intéressant de remarquer que dans le cas de faisceaux Gaussiens (qui sont définis au §2.B.2), les moments d'ordre impair étant tous nuls, on ne néglige ainsi que les moments d'ordre 4 ou plus.

## D.5 Mesure des fluctuations du champ

Avec le développement de l'informatique, il est devenu aisé de faire l'acquisition en temps réel d'une séquence de mesure, ce qui donne accès directement aux fluctuations instantanées  $\delta\hat{Y}$ . Cependant, l'ensemble des mesures réalisées dans cette thèse ont consisté à mesurer (avec un analyseur de spectre par exemple) la variance de ces fluctuations, normalisée au bruit quantique standard (également appelée, dans le cas du bruit d'intensité, "facteur de Fano") :

$$(\Delta\hat{Y})^2 = \langle(\delta\hat{Y})^2\rangle = \mathcal{F}(\hat{Y}) \quad (1.12)$$

2. Dans le cas d'un champ vide, cette approximation n'est évidemment pas vérifiée. Cependant, toutes les mesures sont effectuées à l'aide d'une détection homodyne, utilisant un oscillateur local, qui est toujours plus intense que les fluctuations du champ.

Une variance normalisée inférieure à 1 correspond à un état comprimé suivant cette quadrature.

## E Corrélations quantiques en variables continues

La section précédente s'intéressait aux propriétés quantiques des fluctuations d'un seul mode du champ, cette partie s'intéresse aux fluctuations de deux modes<sup>3</sup>. En effet, en considérant deux modes, on peut envisager la possibilité que les fluctuations d'une quadrature d'un mode et celles d'une quadrature de l'autre mode soient corrélées. Ces corrélations quantiques peuvent atteindre différents degrés, que cette section a pour but de décrire, ainsi que les critères permettant de les détecter.

### E.1 Corrélations entre une quadrature de chaque mode

#### a) Faisceaux jumeaux : critère de gemellité

On considère deux modes  $A_1$  et  $A_2$  pouvant être séparés spatialement. On s'intéresse à une quadrature  $\hat{Y}_1$  quelconque du mode  $A_1$ , et une quadrature  $\hat{Z}_2$  quelconque du mode  $A_2$ . La mesure simultanée des fluctuations pour une quadrature de chaque mode permet d'accéder à la corrélation normalisée, définie par :

$$c_{12}(\hat{Y}_1, \hat{Z}_2) = \frac{\langle \delta \hat{Y}_1 \delta \hat{Z}_2 \rangle}{\sqrt{(\Delta \hat{Y}_1)^2 (\Delta \hat{Z}_2)^2}} \quad (1.13)$$

Cette grandeur varie entre  $-1$  (anti-corrélations parfaites) et  $1$  (corrélations parfaites).

La méthode la plus simple pour produire des faisceaux corrélés consiste à envoyer un faisceau "classique" sur une lame 50/50 (cf. Fig. 1.6).

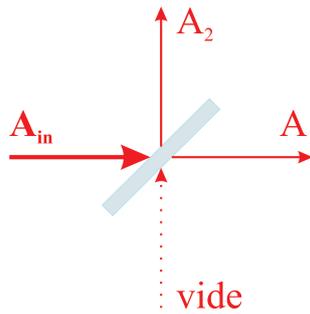


Fig. 1.6: Séparation d'un faisceau en deux à l'aide d'une lame 50/50

Un calcul simple, tenant compte du mode vide entrant par la seconde voie de la lame, fournit l'expression de la corrélation des deux faisceaux de sortie (on considère cette fois-ci la même

3. Dans cette thèse, le terme de "mode" désignera un faisceau lumineux pouvant être exploité (c'est-à-dire mesuré, séparé spatialement, ou tout simplement sur lequel on peut agir) individuellement. On pourra ainsi distinguer des modes de fréquences différentes, de polarisations différentes, ou simplement séparés spatialement.

quadrature  $\hat{Y}$  pour les deux modes sortants, et également pour le mode entrant) :

$$\mathcal{C}_{12}(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2) = \frac{(\Delta\hat{Y}_{in})^2 - 1}{(\Delta\hat{Y}_{in})^2 + 1} \quad (1.14)$$

Lorsque  $(\Delta\hat{Y}_{in})^2$  tend vers l'infini, c'est-à-dire lorsque le bruit du mode vide peut être négligé devant le bruit du faisceau entrant, le facteur  $\mathcal{C}_{12}(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2)$  tend vers 1 : un faisceau très bruité divisé par une lame 50/50 donne deux faisceaux très fortement corrélés. Une corrélation  $\mathcal{C}_{12}(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2)$  proche de 1 n'est donc pas nécessairement le signe d'une corrélation d'origine quantique. Dans l'exemple précédent, c'est même l'inverse, puisqu'elle traduit le fait que les fluctuations quantiques (du vide entrant) peuvent être négligées devant le bruit classique !

Il est donc nécessaire de mettre en place un critère plus adapté, permettant de déterminer si les corrélations observées sont ou non d'origine quantique : la gémellité [Treppe et Fabre, 2005]. Le principe est d'utiliser une opération linéaire passive, qui transforme la corrélation entre  $A_1$  et  $A_2$  en compression sur l'un des champs  $A_a$  et  $A_b$  en sortie de cette opération. Dans le cas de deux faisceaux de même fréquence, l'opération linéaire passive à effectuer est simplement l'opération "lame séparatrice", qui consiste à combiner les deux faisceaux sur une lame de transmittivité  $t$  et de réflectivité  $r$  –  $r$  et  $t$  étant des paramètres ajustables (*cf.* Fig. 1.7). Les phases des champs  $A_1$  et  $A_2$  sont ajustées de telle sorte qu'on mélange les quadratures  $\hat{Y}_1$  et  $\hat{Z}_2$ .

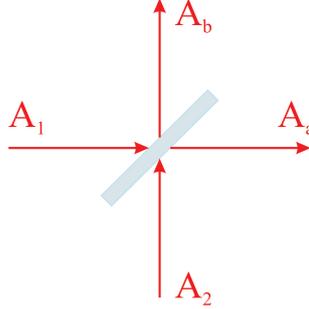


Fig. 1.7: Mélange de deux champs à l'aide d'une lame séparatrice

On considère les fluctuations de la quadrature  $\hat{X}_a$  du champ  $A_a = r A_1 + t A_2$  :

$$\delta\hat{X}_a = r \delta\hat{Y}_1 + t \delta\hat{Z}_2 \quad (1.15)$$

On choisit les paramètres  $r$  et  $t$  de telle sorte que la variance  $\langle(\delta\hat{X}_a)^2\rangle$  soit minimale. Si ce bruit minimal sur le faisceau  $A_a$  est inférieur au bruit quantique standard, nécessairement les corrélations entre  $A_1$  et  $A_2$  ne peuvent être décrites que par un modèle totalement quantique. La définition de la gémellité traduit ce critère ; c'est la variance minimale de  $\hat{Y}_a$  :

$$\mathcal{G} = (\Delta\hat{X}_a)^2 \Big|_{min} = \langle(\delta\hat{X}_a)^2\rangle \Big|_{min} \quad (1.16)$$

On peut montrer que :

$$\mathcal{G} = \frac{(\Delta\hat{Y}_1)^2 + (\Delta\hat{Z}_2)^2}{2} - \sqrt{\left(\mathcal{C}_{12}(\hat{Y}_1, \hat{Z}_2)\right)^2 (\Delta\hat{Y}_1)^2 (\Delta\hat{Z}_2)^2 + \left(\frac{(\Delta\hat{Y}_1)^2 - (\Delta\hat{Z}_2)^2}{2}\right)^2} \quad (1.17)$$

Le critère de gémellité s'écrit donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{G} < 1 \\ \Rightarrow \text{Il est impossible de décrire classiquement les corrélations entre } A_1 \text{ et } A_2. \end{array}} \quad (1.18)$$

Un cas intéressant est celui où les deux faisceaux sont symétriques<sup>4</sup>, et où on s'intéresse à la même quadrature  $\hat{Y}$  des modes  $A_1$  et  $A_2$  de sorte que  $(\Delta\hat{Y}_1)^2 = (\Delta\hat{Y}_2)^2 = (\Delta\hat{Y})^2$ . La gémellité a alors une expression très simple :

$$\mathcal{G} = (\Delta\hat{Y})^2 \left( 1 - \left| \mathcal{C}_{12}(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2) \right| \right) \quad (1.19)$$

Les paramètres  $r$  et  $t$  doivent être pris égaux :  $r = t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , de sorte que :

$$\mathcal{G} = \frac{\langle (\delta\hat{Y}_1 - \delta\hat{Y}_2)^2 \rangle}{2} \quad (1.20)$$

qui n'est autre que le bruit normalisé sur la différence des fluctuations des deux champs ; mesure qui peut être aisément réalisée. Si de tels faisceaux vérifient  $\mathcal{G} < 1$ , ils sont dits "jumeaux".

## b) Critère de corrélation QND

Ce second niveau de corrélations quantiques, toujours entre une quadrature de chaque champ, est associé à la notion de mesure quantique non destructive (QND). Le principe de cette mesure est le suivant. Soient deux champs  $A_1$  et  $A_2$  dont les quadratures  $\hat{Y}_1$  et  $\hat{Z}_2$  sont parfaitement corrélées. On ne peut mesurer  $\hat{Y}_1$  sans détruire – ou tout au moins perturber – le champ  $A_1$ . En revanche, les deux quadratures étant parfaitement corrélées, ceci permet de connaître précisément le résultat de la mesure de  $\hat{Z}_2$  sans avoir eu à mesurer  $A_2$ , et donc sans l'avoir détruit. La mesure effectuée sur  $A_1$  est ainsi une mesure QND sur  $A_2$ .

De nombreuses études ont été consacrées aux mesures QND, ainsi qu'aux critères qui y sont associés [Roch *et al.*, 1997, Grangier *et al.*, 1992, Grangier *et al.*, 1998]. La mesure QND est considérée comme effective lorsque la mesure de  $\hat{Y}_1$  fournit suffisamment d'informations sur les fluctuations instantanées  $\delta\hat{Z}_2$  pour corriger  $\hat{Z}_2$  de ses fluctuations – *via* par exemple une boucle de rétroaction – et transformer  $A_2$  en un état comprimé. Ce critère s'exprime en fonction de la variance conditionnelle  $\mathcal{V}_c(\hat{Z}_2|\hat{Y}_1)$ , qui correspond à la variance des fluctuations du mode 2 connaissant celles du mode 1. D'après la définition précédemment donnée, la mesure est QND lorsque la variance conditionnelle est inférieure à 1 :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{V}_c(\hat{Z}_2|\hat{Y}_1) = (\Delta\hat{Y}_1)^2 - \frac{\langle \delta\hat{Y}_1 \delta\hat{Z}_2 \rangle^2}{(\Delta\hat{Z}_2)^2} < 1 \\ \Rightarrow \text{On peut réduire les fluctuations de } \hat{Z}_2 \text{ sous la limite} \\ \text{quantique standard grâce à la mesure de } \hat{Y}_1. \end{array}} \quad (1.21)$$

Pour deux modes de même valeur moyenne et de même facteur de Fano, et dont on considère la même quadrature  $Y$ , les variances conditionnelles  $\mathcal{V}_c(\hat{Y}_2|\hat{Y}_1)$  et  $\mathcal{V}_c(\hat{Y}_1|\hat{Y}_2)$  sont égales et notées

4. Deux états sont dits *symétriques* s'ils sont invariants par permutation des deux parties. Ici il s'agira donc de faisceaux ayant la même valeur moyenne et la même variance de bruit.

$\mathcal{V}_c(\hat{Y})$ . On peut alors réécrire cette grandeur en fonction de la variance de bruit normalisée  $(\Delta\hat{Y})^2$  et de la gemellité  $\mathcal{G}$ , et ainsi exprimer plus simplement le critère de corrélation QND :

$$\mathcal{V}_c(\hat{Y}) = 2\mathcal{G} - \frac{\mathcal{G}^2}{(\Delta\hat{Y})^2} < 1 \quad (1.22)$$

D'après l'expression de  $\mathcal{V}_c(\hat{Y})$  en fonction de la gemellité :

$$\mathcal{G} \leq \mathcal{V}_c(\hat{Y}) \leq 2\mathcal{G} \quad (1.23)$$

Tous les faisceaux qui vérifient le critère de corrélation QND sont donc jumeaux ; la réciproque n'est pas vraie et dépend du bruit individuel. Par ailleurs, une gemellité inférieure à 0,5 assure toujours une corrélation QND.

## E.2 Double corrélation

On s'intéresse à présent au cas d'une double corrélation : chacun des deux modes possédant deux quadratures, on peut envisager le cas où il existe des corrélations entre les quadratures  $\hat{P}_1$  et  $\hat{P}_2$  d'une part, et entre les quadratures  $\hat{Q}_1$  et  $\hat{Q}_2$  d'autre part. Ce sont des corrélations de ce type qui ont amené Einstein, Podolsky et Rosen à poser le problème souvent appelé "paradoxe EPR"<sup>5</sup>. En outre, selon Schrödinger, il s'agit du trait de la mécanique quantique qui l'éloigne le plus de la mécanique classique.

### a) Le paradoxe EPR

En 1935, dans un article intitulé "*Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete ?*", Einstein, Podolsky et Rosen présentèrent ce qu'ils pensaient être une insuffisance de la mécanique quantique, et qui s'est par la suite révélé être l'un de ses aspects les plus riches [Einstein *et al.*, 1935].

Cet article définit tout d'abord le concept de réalité physique : si on peut, sans perturber un système, prédire avec certitude une de ses grandeurs physiques, il existe un élément de réalité physique associé à cette quantité. On considère alors deux particules 1 et 2 séparées spatialement, et on définit pour chacune d'elles les opérateurs position et impulsion associés  $(\hat{X}_1, \hat{P}_1)$  et  $(\hat{X}_2, \hat{P}_2)$ . Position et impulsion de chaque particule ne commutent pas, et les observables associées ne peuvent donc être connues simultanément avec une précision infinie. En revanche, somme et différence de ces opérateurs commutent :

$$[\hat{P}_1 - \hat{P}_2, \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2] = 0 \quad (1.24)$$

La mécanique quantique prédit donc qu'il est possible de créer des états à deux particules pour lesquels les positions sont parfaitement corrélées et les impulsions parfaitement anti-corrélées, quelle que soit la distance qui les sépare.

Ainsi, en raison de leur corrélation, une mesure de la position de la particule 1 donne avec certitude la position de la particule 2 sans qu'il y ait interaction physique entre les deux particules. Par conséquent, la prédiction de la position de la particule 2 n'a pas perturbé cette

5. Pour une explication plus détaillée du paradoxe EPR, le lecteur pourra se référer à [Aspect, 2002].

dernière. Il doit donc exister un élément de réalité physique associé à la seule particule 2 concernant cette grandeur, c'est-à-dire une valeur pré-déterminée pour sa position. On peut mener un raisonnement analogue en supposant qu'on mesure cette fois l'impulsion de la particule 1. Ainsi l'impulsion de la particule 2 doit elle aussi être pré-déterminée. Ceci implique donc que position et impulsion de la particule 2 sont pré-déterminées (la particule ne peut prévoir quelle mesure sera effectuée!), ce qui est contraire aux fondements de la mécanique quantique puisque  $\hat{X}_2$  et  $\hat{P}_2$  ne commutent pas. Einstein, Podolsky et Rosen en concluent que la mécanique quantique ne donne qu'une description incomplète de l'état d'une particule, soulignant ainsi les problèmes soulevés par la mécanique quantique pour les tenants d'une vision réaliste et locale du monde physique.

Ainsi, à l'origine, le paradoxe EPR – des initiales de ses “découvreurs” – était formulé en termes de variables continues. C'est cependant sa forme discrète – Bohm reformula le paradoxe pour le spin de deux particules ou la polarisation de deux photons [Bohm, 1951] – qui permettra à Bell d'aller plus loin, et d'établir une inégalité dont la violation éliminerait toute théorie réaliste et locale<sup>6</sup> [Bell, 1964]. Sur cette proposition, des expériences montrant des violations de plus en plus importantes des inégalités de Bell ont été mises en place, depuis les expériences fondatrices de Fry et Aspect [Fry et Thompson, 1976, Aspect *et al.*, 1982] jusqu'aux expériences les plus récentes avec une violation de plus de 30 déviations standard [Weihs *et al.*, 1998].

Dans le domaine des variables continues, c'est avec la lumière que les premières propositions d'expériences ont été formulées [Reid et Drummond, 1988, Reid, 1989] (pour des raisons de simplicité expérimentale). En effet, comme on l'a souligné précédemment, on peut faire une totale analogie entre les quadratures du champ électromagnétique et les variables position et impulsion d'une particule. On peut ainsi énoncer le paradoxe EPR de manière équivalente en considérant deux modes du champ dont les composantes de quadratures sont corrélées pour les unes et anti-corrélées pour les autres (*cf.* Fig. 1.8).

## b) Critère EPR en variables continues

Ce critère a été développé par Reid, et il s'appuie sur des considérations très proches de celles développées pour le critère QND [Reid, 1989]. En effet, on parle de corrélations EPR si, à partir d'une mesure sur un système, on peut déduire la valeur d'une observable d'un second système séparé spatialement du premier – et ce pour deux quadratures orthogonales, et non plus une seule comme dans les mesures QND.

Considérons deux modes  $A_1$  et  $A_2$ , tels que leurs composantes de quadratures  $\hat{P}_1$  et  $\hat{P}_2$  sont corrélées, et  $\hat{Q}_1$  et  $\hat{Q}_2$  sont anti-corrélées. Les erreurs sur la prédiction des composantes de quadratures de  $A_2$  par mesure de  $A_1$  sont données par les variances conditionnelles  $\mathcal{V}_c(\hat{P}_2|\hat{P}_1)$

---

6. Il est important de souligner que “paradoxe EPR” et “inégalités de Bell” sont deux choses différentes : Einstein, Podolsky et Rosen ont simplement constaté que la mécanique quantique prévoyait des corrélations entre 2 variables conjuguées. Bell a tenté d'expliquer ces corrélations par une théorie à variables locales cachées ; ce qui impliquait certaines inégalités. En particulier, les faisceaux “EPR” générés au cours de cette thèse ne violent en aucun cas les inégalités de Bell, car le simple fait que les faisceaux soient Gaussiens constitue une possible variable cachée [Treps et Fabre, 2005].

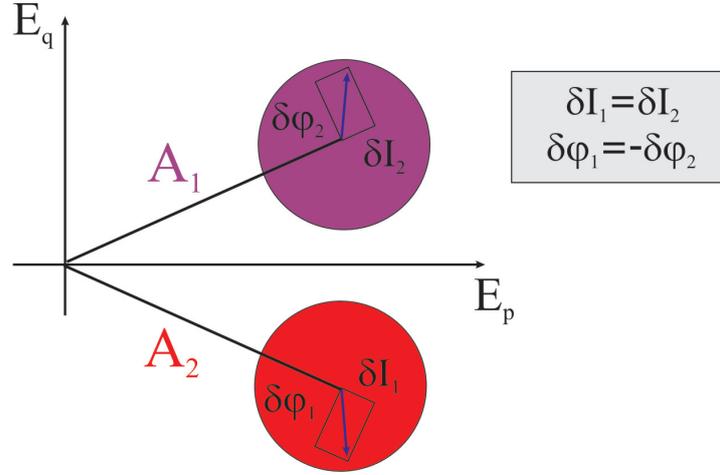


Fig. 1.8: Exemple de faisceaux EPR idéaux : les fluctuations d'intensité  $\delta I$  sont parfaitement corrélées et les fluctuations de phase  $\delta\phi$  sont parfaitement anti-corrélées.

et  $\mathcal{V}_c(\hat{Q}_2|\hat{Q}_1)$ . Le critère de corrélations EPR<sup>7</sup> s'écrit :

$$\mathcal{V}_c(\hat{P}_2|\hat{P}_1) \cdot \mathcal{V}_c(\hat{Q}_2|\hat{Q}_1) < 1 \quad (1.25)$$

⇒ Les corrélations entre  $A_1$  et  $A_2$  sont de type EPR.

La vérification de ce critère implique que l'une au moins des variances conditionnelles est inférieure à 1 : des états EPR vérifient nécessairement le critère de corrélation QND.

Pour des faisceaux symétriques, d'après l'équation (1.19), on peut définir la gémellité  $\mathcal{G}(\hat{P})$  qui évalue les corrélations quantiques entre les quadratures  $\hat{P}_1$  et  $\hat{P}_2$ . On définit également la gémellité  $\mathcal{G}(\hat{Q})$  qui évalue les anti-corrélations entre les quadratures orthogonales  $\hat{Q}_1$  et  $\hat{Q}_2$ . En notant  $(\Delta\hat{P})^2$  et  $(\Delta\hat{Q})^2$  les variances de bruit normalisées des quadratures des champs  $A_1$  et  $A_2$ , on peut réécrire<sup>8</sup> le critère (1.25) :

$$\left(2\mathcal{G}(\hat{P}) - \frac{[\mathcal{G}(\hat{P})]^2}{(\Delta\hat{P})^2}\right) \left(2\mathcal{G}(\hat{Q}) - \frac{[\mathcal{G}(\hat{Q})]^2}{(\Delta\hat{Q})^2}\right) < 1 \quad (1.26)$$

### c) Critère d'inséparabilité

Le critère de corrélations EPR est fondé sur l'expérience de pensée d'Einstein, Podolsky et Rosen, qui est elle-même basée sur la notion de particule (c'est-à-dire d'*objet* quantique). Mais il est également possible de réfléchir aux corrélations quantiques en termes de matrice densité (c'est-à-dire d'*état* quantique), ce qui mène à la définition de la notion de séparabilité.

7. On parle souvent d'une violation *apparente* de l'inégalité de Heisenberg. Mais celle-ci, qui s'écrit  $\mathcal{V}(\hat{P}_i) \cdot \mathcal{V}(\hat{Q}_i) \geq 1$  pour le mode  $i$ , reste bien sûr vérifiée!

8. En remarquant que, quelle que soit la quadrature  $\hat{Y}$  considérée, on a  $2\mathcal{G}(\hat{Y}) - \frac{[\mathcal{G}(\hat{Y})]^2}{(\Delta\hat{Y})^2} \leq 2\mathcal{G}(\hat{Y})$ , on trouve parfois dans la littérature [Mancini *et al.*, 2002] une forme plus simple d'utilisation – mais plus restrictive! – du critère EPR : si  $\mathcal{G}(\hat{P}) \cdot \mathcal{G}(\hat{Q}) < \frac{1}{4}$ , alors les faisceaux sont EPR.

On considère un système à deux modes  $A_1$  et  $A_2$ . Ce système est dit “séparable” si sa matrice densité  $\rho$  peut s’écrire sous la forme d’une superposition statistique d’états factorisables :

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{i_1} \otimes \rho_{i_2} \quad (1.27)$$

où  $\rho_{i_1}$  et  $\rho_{i_2}$  sont des matrices densité des modes  $A_1$  et  $A_2$ , et  $p_i$  les probabilités associées. Un état non séparable est donc un état qui ne peut être décrit par la description indépendante de ses parties, mais nécessairement comme un tout.

Nous reviendrons très en détail sur l’inséparabilité et l’intrication au chapitre 2. Nous allons cependant citer ici les deux critères d’inséparabilité les plus souvent utilisés par la communauté expérimentale : le critère de Duan et Simon (ou “critère somme”), et le critère de Mancini (ou “critère produit”).

#### CRITÈRE DE DUAN ET SIMON

Ce critère dérive directement des considérations sur la matrice de covariance, que nous développerons dans le chapitre 2. Publié simultanément et indépendamment par Duan *et al.* et Simon [Duan *et al.*, 2000, Simon, 2000], il est très utilisé car il en existe une écriture restrictive mais simple, dans laquelle les grandeurs nécessaires sont faciles à mesurer expérimentalement. On considère deux modes  $A_1$  et  $A_2$ . Duan et Simon définissent la séparabilité :

$$\Sigma = \frac{1}{2} \left( \frac{\langle (\delta \hat{P}_1 - \delta \hat{P}_2)^2 \rangle}{2} + \frac{\langle (\delta \hat{Q}_1 + \delta \hat{Q}_2)^2 \rangle}{2} \right) \quad (1.28)$$

Le critère (simplifié) d’inséparabilité de Duan et Simon s’écrit :

Il existe un choix de quadratures  $\hat{P}$  et  $\hat{Q}$  tel que  $\Sigma < 1$ .  
 $\Rightarrow$  Les modes  $A_1$  et  $A_2$  sont inséparables.

(1.29)

Dans le cas de faisceaux symétriques, la séparabilité peut se réécrire :

$$\Sigma = \frac{1}{2} \left( \mathfrak{G}(\hat{P}) + \mathfrak{G}(\hat{Q}) \right) \quad (1.30)$$

Ce critère nécessite qu’au moins l’une des deux gémellités soit plus petite que 1. Des faisceaux non séparables sont donc nécessairement jumeaux. En revanche, le critère QND n’est pas nécessairement vérifié. On constate également que le critère EPR est plus contraignant que le critère de Duan et Simon.

#### CRITÈRE DE MANCINI

Ce critère, publié par Mancini *et al.* dans le cadre d’une proposition d’expérience pour intriquer des objets macroscopiques – des miroirs – à l’aide de la pression de radiation

[Mancini *et al.*, 2002], utilise les mêmes quantités que le critère de Duan :

$$\boxed{\left(\frac{\langle(\delta\hat{P}_1 - \delta\hat{P}_2)^2\rangle}{2}\right) \cdot \left(\frac{\langle(\delta\hat{Q}_1 + \delta\hat{Q}_2)^2\rangle}{2}\right) < 1} \quad (1.31)$$

$\Rightarrow$  Les modes  $A_1$  et  $A_2$  sont inséparables.

Ce qui se réécrit pour des modes symétriques :

$$\mathcal{G}(\hat{P}) \cdot \mathcal{G}(\hat{Q}) < 1 \quad (1.32)$$

#### COMPARAISON DES DEUX CRITÈRES

Chacun de ces critères est une condition nécessaire d'inséparabilité, c'est-à-dire qu'il définit une zone du quart de plan  $(\mathcal{G}(\hat{P}), \mathcal{G}(\hat{Q}))$  dans laquelle on est certain que les états sont intriqués. Il est donc intéressant de comparer les deux zones (dans le cas symétrique, par souci de simplicité), afin de déterminer quel critère est le plus intéressant à utiliser.

Pour le critère de Duan et Simon, la courbe délimitant la portion de plan est une droite (d'équation  $x + y = 2$ ), et pour le critère de Mancini il s'agit d'une hyperbole (d'équation  $x \cdot y = 1$ ). Ces résultats sont résumés sur la figure 1.9. On constate immédiatement que les états intriqués détectés par le critère de Duan et Simon sont tous détectés par le critère de Mancini, qui en détecte d'autres également. Par conséquent, le critère de Mancini est plus performant que le critère de Duan et Simon, même s'il est moins couramment utilisé.

En réalité, ce résultat n'est pas surprenant : bien que les deux critères aient été développés indépendamment, il a été démontré par la suite que le critère de Duan et Simon est un cas particulier du critère de Mancini [Giovannetti *et al.*, 2003]. On ne peut cependant pas faire abstraction du critère de Duan et Simon : appliqué au cas particulier des états Gaussiens, ce dernier est une condition nécessaire et suffisante d'intrication [Duan *et al.*, 2000], tandis que le critère de Mancini ne donne qu'une condition suffisante d'intrication.

#### d) Intrication et compression de bruit

Les divers critères évoqués précédemment montrent qu'il existe un lien très fort entre intrication et compression de bruit. En effet, si on considère deux modes  $A_1$  et  $A_2$ , et qu'on les mélange sur une lame 50/50, on obtient en sortie les deux modes :

$$A_+ = \frac{A_1 + A_2}{\sqrt{2}} \text{ et } A_- = \frac{A_1 - A_2}{\sqrt{2}} \quad (1.33)$$

On peut alors aisément calculer les variances de bruit des deux quadratures  $\hat{P}_-$  et  $\hat{Q}_+$  :

$$\langle(\delta\hat{P}_-)^2\rangle = \frac{\langle(\delta\hat{P}_1 - \delta\hat{P}_2)^2\rangle}{2} = \mathcal{G}(\hat{P}) \text{ et } \langle(\delta\hat{Q}_+)^2\rangle = \frac{\langle(\delta\hat{Q}_1 + \delta\hat{Q}_2)^2\rangle}{2} = \mathcal{G}(\hat{Q}) \quad (1.34)$$

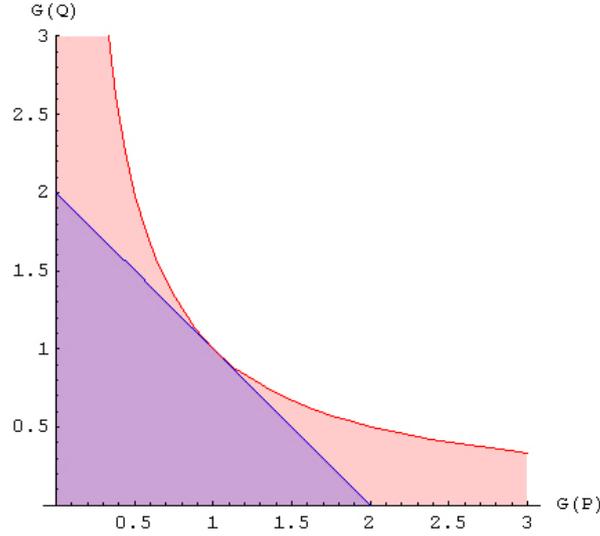


Fig. 1.9: Comparaison du critère de Duan et Simon (en bleu) et du critère de Mancini (en rouge). Les surfaces sous les courbes sont les portions du plan  $(\mathcal{G}(\hat{P}), \mathcal{G}(\hat{Q}))$  dans lesquelles on est certain que les états sont intriqués.

Ainsi, la variance de bruit du mode  $A_+$  pour la quadrature  $\hat{Q}$  est liée aux anti-corrélations suivant  $\hat{Q}$  des modes qui sont mélangés, et de même pour la variance de bruit du mode  $A_-$  pour la quadrature  $\hat{P}$ , qui est liée aux corrélations.

Si  $A_1$  et  $A_2$  sont deux modes EPR idéaux, les variances de bruit (1.34) vont tendre vers 0 : deux faisceaux EPR idéaux mélangés sur une lame 50/50 donnent deux faisceaux parfaitement comprimés suivant des quadratures orthogonales ; et réciproquement (*cf.* Fig. 1.10). Ce fort lien entre intrication et compression de bruit est utilisé, par exemple, pour produire des faisceaux intriqués à partir de faisceaux comprimés [Furusawa *et al.*, 1998, Silberhorn *et al.*, 2001, Bowen *et al.*, 2003].

On peut de même réexprimer les deux critères (1.29) et (1.31) en fonction des variances des modes  $A_+$  et  $A_-$  : dans les deux cas, pour que le critère soit vérifié, il est nécessaire que l'un au moins des modes  $A_+$  et  $A_-$  soit comprimé. On verra dans le chapitre 4.E.3a) l'intérêt expérimental de cette équivalence.

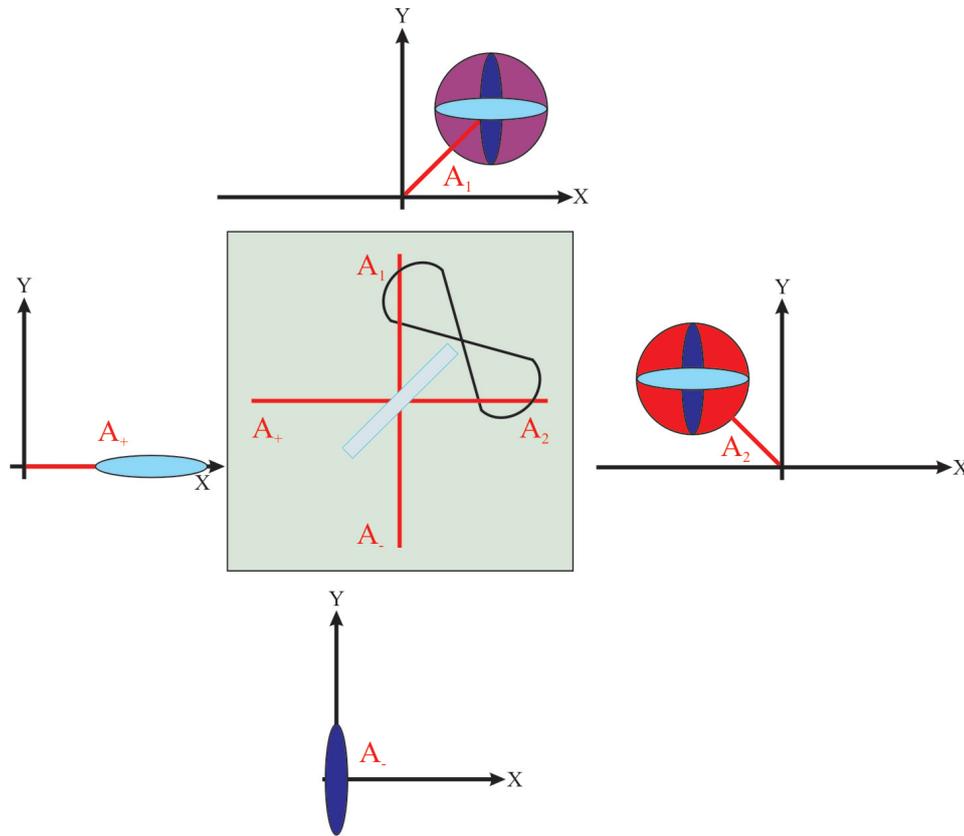


Fig. 1.10: Deux faisceaux comprimés suivant des quadratures orthogonales et mélangés sur une lame 50/50 permettent de générer des faisceaux intriqués, et réciproquement.

## F Conclusion

Dans cette partie, nous avons abordé de façon phénoménologique le problème de l'intrication et de sa caractérisation. Avant de nous intéresser à la production d'états intriqués, nous allons, dans le chapitre suivant, passer en revue les connaissances théoriques actuelles sur l'intrication en variables continues. En effet, de nombreuses questions restent encore sans réponse dans ce domaine très complexe, mais très prometteur du point de vue de ses applications (traitement quantique de l'information, cryptographie, calcul quantique, ...).



## 2. Intrication en variables continues

### Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Introduction</b>	<b>25</b>
<b>B</b>	<b>Formalisme mathématique</b>	<b>26</b>
B.1	Système à $N$ modes	26
B.2	Système Gaussien à $N$ modes : matrice de covariance	26
B.3	Transformations symplectiques	29
B.4	Valeurs propres symplectiques	32
B.5	Résumé	34
<b>C</b>	<b>Quantification de l'information contenue dans un état Gaussien</b>	<b>35</b>
C.1	Pureté	35
C.2	Entropie linéaire	36
C.3	Entropie de von Neumann	36
<b>D</b>	<b>Intrication des états Gaussiens bipartitionnés</b>	<b>37</b>
D.1	Position du problème	37
D.2	Intrication des états purs	38
D.3	Intrication des mélanges statistiques d'états	38
D.4	Séparabilité des états Gaussiens	39
D.5	Quantification de l'intrication pour les états Gaussiens bipartitionnés	43
<b>E</b>	<b>Cas particulier des états Gaussiens à 2 modes</b>	<b>46</b>
E.1	Écriture symplectique d'un état Gaussien à 2 modes	46
E.2	Intrication Gaussienne à 2 modes	47
E.3	Information et intrication extrême	50
<b>F</b>	<b>Conclusion</b>	<b>52</b>

---

### A Introduction

La revue présentée dans ce chapitre a pour but de reprendre en termes familiers à la communauté expérimentale les résultats marquants dégagés par les théoriciens ces dernières années. Elle est essentiellement basée sur les articles [Laurat *et al.*, 2005b] et [Adesso et Illuminati, 2007]. Jusqu'à présent, nous avons considéré des états quelconques du champ électromagnétique. Cependant, caractériser l'intrication pour des états quelconques est un problème non encore résolu ; par contre, un certain nombre de questions sont élucidées en ce qui concerne les états Gaussiens, qui sont aussi les états les plus utilisés expérimentalement (ce sont ceux qui seront manipulés au cours de

cette thèse). Nous allons donc essentiellement nous restreindre au problème des états Gaussiens.

## B Formalisme mathématique

### B.1 Système à $N$ modes

Un système en variables continues de  $N$  modes bosoniques est décrit par l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = \bigotimes_{k=1}^N \mathcal{H}_k$ , produit tensoriel des espaces de Fock de dimension infinie  $\mathcal{H}_k$ , chacun associé à un des  $N$  modes. Dans notre cas, les modes sont ceux du champ électromagnétique. Pour chaque mode  $k$ , on peut définir – comme on l'a fait au paragraphe 1.B – les opérateurs d'annihilation  $\hat{a}_k$  et de création  $\hat{a}_k^\dagger$  d'un photon, ainsi que les opérateurs de quadrature  $\hat{P}_k$  et  $\hat{Q}_k$ . On regroupe ces opérateurs dans le vecteur colonne :

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{Q}_1 \\ \vdots \\ \hat{P}_N \\ \hat{Q}_N \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

L'espace dans lequel évolue ce vecteur  $\hat{R}$  est appelé l'espace des phases.

Cette notation permet une écriture synthétique des relations de commutation entre les opérateurs de phase et de quadrature :

$$\forall (\ell, m) \in \llbracket 1..2N \rrbracket \quad [\hat{R}_\ell, \hat{R}_m] = 2i \Omega_{\ell m} \quad (2.2)$$

où  $\Omega$  est la forme symplectique :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \bigoplus_{k=1}^N \omega, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Ces définitions sont valables pour tout système à  $N$  modes. Nous allons à présent nous intéresser aux systèmes Gaussiens à  $N$  modes.

### B.2 Système Gaussien à $N$ modes : matrice de covariance

L'ensemble des états Gaussiens est l'ensemble des états dont certaines des fonctions caractéristiques dans l'espace des phases (et en particulier la fonction de Wigner<sup>1</sup> par

1. Nous ne développerons pas ici ce qu'est la fonction de Wigner, le lecteur pourra se référer à [Scully et Zubairy, 1997]. Citons cependant le théorème de Hudson-Piquet : seuls les états purs Gaussiens ont une fonction de Wigner positive partout [Schleich, 2001].