

d'effets de retard dans le transport (on parle alors d'effets de mémoire).

Le modèle fMIM incluant des dérivées d'ordre non entier ou fractionnaire en temps est une généralisation du modèle de l'équation d'advection dispersion. Rappelons que l'équation d'advection dispersion modélise la diffusion classique dont la représentation à petite échelle est donnée par des marches aléatoires gaussiennes dont la limite hydrodynamique est le mouvement Brownien.

## Notion de variable aléatoire

La notion de variable aléatoire peut être directement liée à la définition du hasard. En d'autres termes, une variable aléatoire représente le résultat d'une épreuve dont on ne connaît pas par avance le résultat, qu'on ne peut donc pas prédire de manière exacte. Une variable aléatoire est donc particulièrement indiquée pour représenter le résultat d'une mesure : en général on ne trouve pas le même résultat lorsqu'on recommence la mesure.

Une variable aléatoire est caractérisée par l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre et par l'expression mathématique de la probabilité d'avoir ces valeurs. Cette expression définit la loi de probabilité (ou distribution de probabilité) de l'épreuve considérée. Ainsi, à une épreuve donnée on peut associer une variable aléatoire et identifier la loi suivie par celle-ci.

Dans notre situation, les grandeurs aléatoires qu'on souhaite modéliser sont à valeurs réelles, ce sont des variables aléatoires continues. Pour une variable aléatoire  $X$ , l'expression donnant la probabilité pour que  $X$  prenne sa valeur dans un intervalle de valeurs possibles se définit de la manière suivante : Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  un espace probabilisé où  $\Omega$  est l'univers et  $\mathcal{A}$  une  $\sigma$ -algèbre de  $\Omega$  qui représente l'ensemble des évènements et  $\mathcal{P}$  une mesure de probabilité, telle que  $\mathcal{P}(\Omega) = 1$ . Pour tout intervalle  $[a, b] \in \mathcal{A}$ , on a :

$$\mathcal{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \quad (2.1)$$

où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est la densité de probabilité de  $X$ .

Pour pouvoir considérer  $\mathcal{P}(a < X \leq b)$  pour  $a < b \in \mathbb{R}$ , il faut que  $\forall a < b \in \mathbb{R}$  l'intervalle  $]a, b[$  appartienne à l'ensemble  $\mathcal{A}$  des ensembles mesurables. La fonction densité de probabilité  $f(x)$  doit être positive. Elle doit de plus admettre une primitive et vérifier

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \quad \text{pour que } \mathcal{P}(\Omega) = 1 \quad (2.2)$$

D'un point de vue infinitésimal, on a

$$\mathcal{P}(X \in [x, x + dx]) = f(x)dx. \quad (2.3)$$

La variable aléatoire peut aussi être caractérisée par la fonction de répartition définie par

$$F(x) = \mathcal{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad (2.4)$$

$F(x)$  est une fonction monotone continue à gauche. C'est en fait une primitive de la densité de probabilité  $f$  et elle constitue dans certains cas un meilleur moyen que  $f(x)$  pour estimer la loi d'une variable aléatoire. La figure 2.1 représente une illustration de la relation entre la fonction de répartition  $F(x)$  et la densité de probabilité correspondante. Un autre intérêt pratique de la fonction de répartition est qu'elle permet de calculer la probabilité de tout intervalle dans  $\mathbb{R}$  :

$$\mathcal{P}(X \in [a, b]) = F(b) - F(a). \quad (2.5)$$

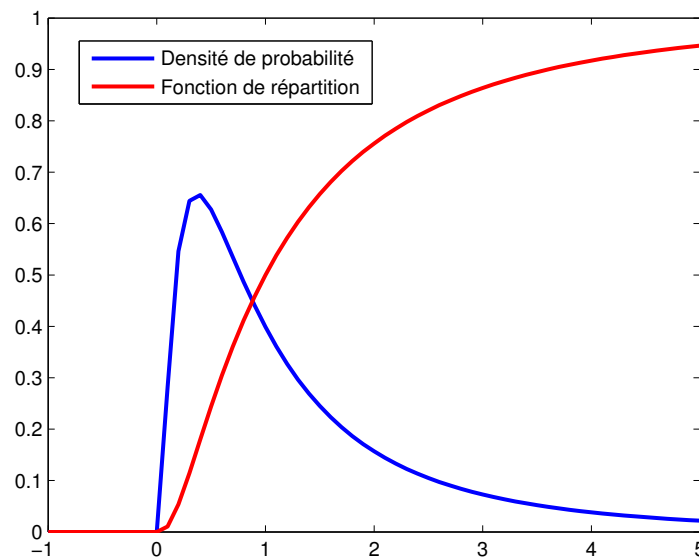


FIGURE 2.1 – Exemple de densité de probabilité (ici une loi lognormale) et de fonction de répartition d'une variable aléatoire continue

Une autre grandeur qui décrit la loi de distribution d'une variable aléatoire est la fonction caractéristique. Elle permet de déterminer, de façon unique, la loi de probabilité de  $X$ . Si  $X$  a pour densité  $f$ , la fonction caractéristique est la transformée de Fourier de la densité de probabilité. Les valeurs en zéro des dérivées successives de la fonction caractéristique permettent de calculer les moments de la variable aléatoire. La fonction s'écrit donc comme :

$$\varphi_X(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} f(t) dt. \quad (2.6)$$

La fonction caractéristique est parfois le meilleur moyen de caractériser une variable aléatoire lorsque celle-ci ne possède pas de forme explicite pour sa densité de probabilité. Nous verrons que c'est le cas des variables aléatoires suivant les lois stables de Lévy.

### 2.2.1 Moments d'une variable aléatoire

Une variable aléatoire  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de densité  $f$  est dite :

(i) - intégrable si  $\int_{\mathbb{R}} |x| f(x) dx < +\infty$ .

Ceci est le moment d'ordre 1, soit la moyenne pondérée :

$$\mathbb{E}(X) = \mu = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx;$$

(ii) - de carré intégrable si  $\mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx < +\infty$ .

**La variance** est le moment d'ordre 2 dont la racine carrée est l'écart-type, c'est la mesure de dispersion de  $X$  autour de son espérance :

$$Var(X) = \sigma^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

Pour définir des moments d'ordre supérieur, il existe une relation entre les moments et la fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Lorsque les moments de la variable aléatoire  $X$  existent alors :

$$\phi_X(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^k w_k}{k!} t^k \quad (2.7)$$

où  $w_k$  est le moment d'ordre  $k$  de la variable  $X$ . Il est facile de voir par exemple que

$$1 = \phi_X(0); \quad \mathbb{E}(X) = -i\phi'_X(0); \quad \mathbb{E}(X^2) = \phi''_X(0).$$

### 2.2.2 Loi de probabilité gaussienne

La loi normale appelée aussi loi gaussienne, est une des principales distributions de probabilité qu'on évoque fréquemment pour interpréter les observations. Elle se présente comme une limite de nombreuses distributions. Elle est décrite par une courbe en "cloche" symétrique autour de la valeur moyenne (qu'on notera  $\mu$ ). On sait, par exemple, qu'une loi de probabilité binômiale de

paramètre  $n$  tend vers la loi normale quand ce paramètre  $n$  devient très grand. Plus généralement, on remarque souvent que lors d'observations expérimentales, la moyenne calculée sur un échantillon tend à suivre une loi normale quand la taille de l'échantillon augmente, même si l'échantillon initial a une toute autre distribution de probabilité. Ces simples constatations montrent l'importance de la loi normale et traduisent le fait qu'elle attire d'autres lois de probabilité. Cette importance de la loi normale qui se présente comme un attracteur s'énonce par la propriété plus générale du théorème de la limite centrale vu à la fois comme modèle pour décrire des situations pratiques mais aussi comme un outil théorique dont on en parlera dans le paragraphe qui suit après avoir défini ce qu'est une loi de probabilité "attracteur".

On dit que la variable aléatoire  $X$  suit une loi gaussienne (ou normale) de paramètre  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma^2 > 0$  et on note  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  si  $X$  possède la densité de probabilité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\sigma^2\pi)}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2.8)$$

Lorsque les deux paramètres  $\mu = 0$  et  $\sigma^2 = 1$  on dit que la variable aléatoire qui suit une loi normale est centrée réduite. Les figures 2.2 et 2.3 représentent des lois de distribution de probabilité normales.

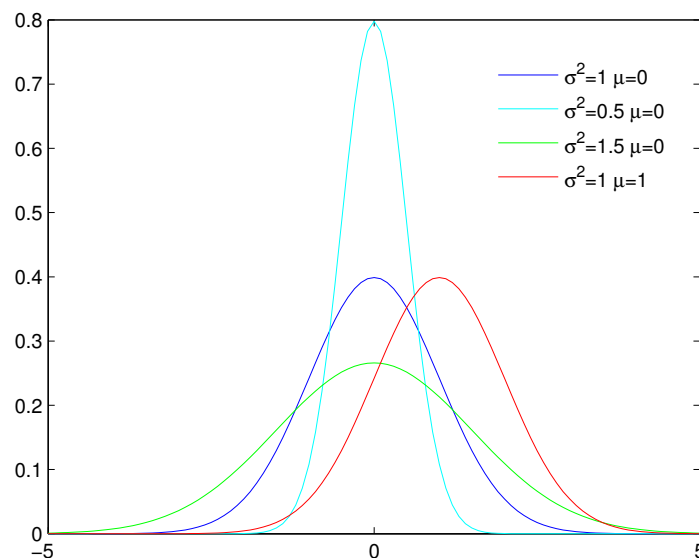


FIGURE 2.2 – Exemples de densités de probabilité de variables aléatoires suivant la loi normale

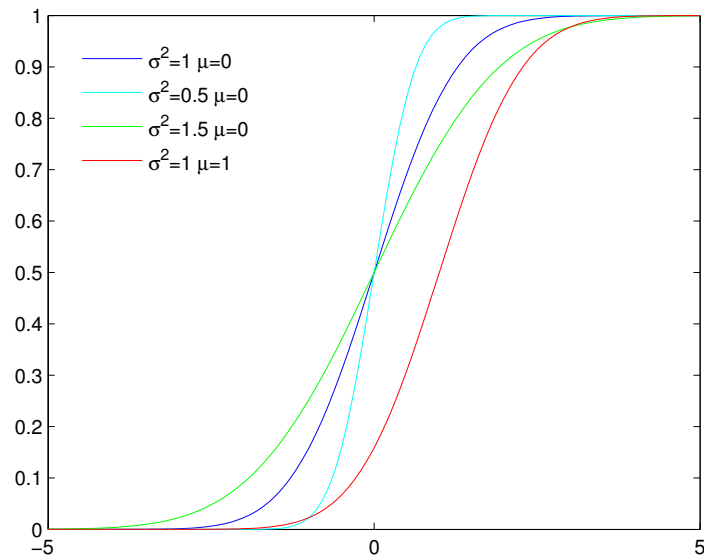


FIGURE 2.3 – Exemple de fonction de répartition de variable aléatoire de loi normale

Le terme d'attracteur est utilisé dans plusieurs domaines de la science, avec des sens qui peuvent être différents. Rappelons ce que signifie ce mot en termes de probabilités.

### Notion d'attracteur

**Définition :** (d'après Feller [36]) Soit  $F$  la fonction de répartition d'une suite de variables aléatoires indépendantes  $X_n$ . On dit qu'une loi de probabilité de fonction de répartition  $G$  est un attracteur pour la loi de fonction de répartition  $F$  ou encore que  $F$  est dans le domaine d'attraction de  $G$ , s'il existe une suite de nombres  $(A_n)$  et  $(B_n)$  avec  $B_n \geq 0$  telle que la fonction de répartition de

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{B_n} - A_n \quad \text{tend vers } G \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

### Domaine d'attraction d'une loi de probabilité

Nous admettons le résultat suivant : seules les lois stables (que nous aborderons après avoir parlé de la loi normale), ont un domaine d'attraction non vide, comme l'indique le théorème suivant : *"Une loi de probabilité  $G$  possède un domaine d'attraction non vide si et seulement si elle est stable. Il existe un grand nombre de lois stables mais qui se distinguent par leur comportement asymptotique."* (Gnedenko et Kolmogorov [42]). Ceci permet de préciser le terme d'attracteur utilisé pour la loi normale.

### 2.2.3 Version simplifiée du théorème de la limite centrale

Le théorème de la limite centrale nous dit à quoi on peut s'attendre en matière d'une somme de variables aléatoires indépendantes (de même loi) et identiquement distribuées lorsqu'on la centre, en lui soustrayant sa moyenne, et qu'on la réduit, en la divisant par son écart-type. Sous des conditions assez larges, la loi de probabilité (de la moyenne) tend vers une loi normale centrée réduite, ce qu'on peut écrire :

Soit  $(X_n)_{n>1}$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées telles que  $\mu = \mathbb{E}(X_1) < +\infty$  et  $\sigma^2 = \sqrt{\text{Var}(X_1)} > 0$ . On note  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$  la moyenne empirique. Alors pour  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)) \rightarrow Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

On peut écrire encore

$$Y_1 + \dots + Y_n \approx n\mu + \sigma\sqrt{n}\mathcal{N}(0, 1) \quad (2.9)$$

Comme bon nombre de phénomènes naturels sont dûs à la superposition de causes nombreuses plus ou moins indépendantes, il est tout à fait légitime de s'attendre à ce qu'ils soient distribués selon des lois possédant la propriété d'attractivité. Or, une vaste classe de lois plus générales que la loi normale joue le même rôle lorsque les  $X_n$  n'ont pas de variance finie. Pour ces lois, il faut réduire la somme des variables aléatoires dans (2.9) par un coefficient différent de  $n^{\frac{1}{2}}$ . Ces lois forment la famille des lois  $\alpha$ -stables. Elles ont été introduites par Lévy [61].

Après avoir parlé de la simulation d'une variable aléatoire de loi gaussienne sur ordinateur, on abordera la notion de loi  $\alpha$ -stable et la généralisation du théorème centrale limite.

### 2.2.4 Simulation de la réalisation d'une variable aléatoire

Afin de réaliser des simulations numériques de marche aléatoire, il est nécessaire de pouvoir simuler numériquement les sauts et les temps d'attente associés. Il s'agit donc de simuler la réalisation de variables aléatoires dont on connaît les lois de distribution de probabilité. Une telle approche est communément appelée "méthode de Monte-Carlo". D'une manière générale, toutes les procédures de simulation d'échantillons pseudo-aléatoires sont basées sur le théorème suivant qui stipule que toutes les distributions sont liées à la loi uniforme :

**Théorème de la réciproque :** Pour une variable aléatoire de fonction de répartition  $F$ , on note  $G$  sa réciproque généralisée, définie par

$$G(\omega) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq \omega\}.$$

Si  $U$  désigne une variable aléatoire réelle uniforme sur  $[0,1]$ , alors la variable aléatoire  $X = G(U)$  a pour fonction de répartition  $F$ . Par exemple la variable aléatoire  $Y = -\ln(U)/\lambda$  est distribuée selon la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , [64].

### Principes de la simulation

Pour simuler des variables aléatoires d'une loi donnée, on dispose principalement de deux moyens :

1. L'inversion de la fonction de répartition. En effet si la fonction de répartition de la loi est  $F$  et  $U$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[0, 1]$  alors la loi de  $X = F^{-1}(U)$  a comme fonction de répartition  $F$ .  $F^{-1}$  est ici l'inverse à droite de  $F$ , c'est-à-dire que

$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{x, F(x) \geq \alpha\}. \quad (2.10)$$

On utilise cette méthode pour la simulation de variables aléatoires à valeurs discrètes telles que, la loi exponentielle, ou la loi de Weibull.

2. Dans le cas où la fonction de répartition ne s'inverse pas bien mais où l'on connaît la densité  $f$ , on utilise la méthode de rejet. L'idée de la méthode de rejet repose sur le théorème suivant : Soit  $f$  une fonction de densité de probabilité. On suppose qu'il existe une densité de probabilité  $g$  telle que :

$$\exists K > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq Kg(x).$$

Soit alors  $Z$  une variable aléatoire distribuée suivant la loi de densité  $g$  et  $Y$  une variable uniforme sur  $[0, Kg(Z)]$ . Alors la variable aléatoire  $X = \{Z|Y \leq f(Z)\}$  est distribuée selon la loi de probabilité  $f$ .

Pour effectuer des simulations probabilistes sur ordinateur, on utilise un générateur de nombres pseudo-aléatoires. Un tel générateur retourne une suite  $(x_n)_n$  de nombres réels compris entre 0 et 1. Ces réels sont calculés avec un algorithme déterministe simulant une réalisation de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Le bon comportement de la suite est vérifié à l'aide de tests statistiques. En supposant qu'on dispose d'un bon générateur de

nombres pseudo-aléatoires uniformément distribués, nous pouvons construire une variable aléatoire de loi donnée, avec une attention particulière pour les lois usuelles notamment, la loi exponentielle, la loi normale.

### Méthode polaire pour la simulation de la loi normale centrée réduite

**Proposition :** Soient  $R$  de loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{2}$  et  $\Theta$  de loi uniforme sur  $[0, 2\pi]$  indépendantes alors  $X = \sqrt{R} \cos(\Theta)$  et  $Y = \sqrt{R} \sin(\Theta)$  sont des variables indépendantes, de loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ , de densité  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ .

Nous appliquons la méthode de la fonction muette : Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X, Y)) &= \mathbb{E}(f(\sqrt{R} \cos \Theta, \sqrt{R} \sin \Theta)) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(\sqrt{\varrho} \cos \theta, \sqrt{\varrho} \sin \theta) e^{-\frac{\varrho}{2}} d\varrho d\theta. \end{aligned}$$

Le changement de variable  $(x, y) = \varphi(\varrho, \theta) = (\sqrt{\varrho} \cos \theta, \sqrt{\varrho} \sin \theta)$  est une bijection  $C^1$  ainsi que son inverse de  $]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ . Sa matrice jacobienne est

$$\frac{D(x, y)}{D(\varrho, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)/(2\sqrt{\varrho}) & -\sqrt{\varrho} \sin(\theta) \\ \sin(\theta)/(2\sqrt{\varrho}) & \sqrt{\varrho} \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

ce qui entraîne que  $dx dy = \frac{1}{2} d\theta d\varrho$ . Nous concluons par la formule de changement de variable que

$$\mathbb{E}(f(X, Y)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy$$

D'après ce qui précède si  $(U_1, U_2)$  est un couple de variables uniformes sur  $[0, 1]$  indépendantes  $(-2 \ln(U_1), 2\pi U_2) = (R, \Theta)$ . Ce qui entraîne que

$$(\sqrt{-2 \ln(U_1)} \cos(2\pi U_2), \sqrt{-2 \ln(U_1)} \sin(2\pi U_2)) = (X, Y)$$

Nous concluons que  $X$  et  $Y$  sont deux variables gaussiennes normales centrées réduites indépendantes. La simulation d'une gaussienne non réduite  $\mathcal{N}(m, \sigma)$  s'en déduit par une transformation affine.

$$Z = m + \sigma X \quad \text{ou} \quad Z = m + \sigma Y.$$

Pour simuler une variable aléatoire gaussienne, on a donc besoin de 2 variables aléatoires uniformes. Par contre on obtient 2 variables aléatoires pour prix d'une.



### 2.2.5 Lois $\alpha$ -stables de Lévy

Comme nous l'avons souligné précédemment, la loi la plus utilisée est la loi gaussienne. En fait il lui correspond un ensemble de variables aléatoires qui s'obtiennent toutes à partir de l'une d'elles en lui faisant subir des translations et des dilatations : elles dépendent de deux paramètres liés à ces transformations. Sa propriété, de stabilité, suffit à la caractériser. De plus, le théorème de la limite centrale fait que cette loi représente de nombreuses situations expérimentales. Parmi ces situations, nous avons le phénomène classique d'advection dispersion utilisé pour modéliser le transport dans le milieu poreux.

Bien que les calculs d'estimation, de prévision, soient rapides avec l'hypothèse d'une fluctuation gaussienne, on se rend compte qu'elle est trop restrictive. Souvent, c'est parce qu'il faut prendre en compte une plus grande variabilité des données. Mais il a aussi été rapporté que certains traitements de données d'observations finies utilisant une estimation empirique de la variance peuvent produire un résultat de variance parfois très grande ou surtout dépendant nettement de la taille de l'échantillon. Ce fait amène naturellement à se poser la question de savoir si la variance théorique est finie ou infinie. Or dans le cadre des distributions à variance infinie sont apparues les lois  $\alpha$ -stables, dont le moment d'ordre 2 est infini dès que le paramètre  $\alpha$  est strictement inférieur à 2. La loi normale est précisément une loi stable d'exposant de stabilité égal à 2. Les lois stables d'exposant de stabilité inférieur à 1 n'ont, elles, pas d'espérance finie.

#### 2.2.5.a Définition de la loi $\alpha$ -stable

Une variable aléatoire réelle  $X$  est dite stable si et seulement si chaque fois qu'on prend deux variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  indépendantes distribuées comme  $X$ , il existe des réels  $a$  et  $b$  tels que  $X_1 + X_2$  soit distribuée comme  $aX + b$ . Lorsque ceci est vérifié, on obtient une variable aléatoire distribuée comme  $a_k X + b_k$  chaque fois qu'on additionne les  $k$  variables aléatoires indépendantes de  $X$ .

**Propriété :** Si la variable aléatoire  $X$  est stable, pour tout  $k$  et toute famille  $X_1, \dots, X_k$  i.i.d (indépendantes et indentiquement distribuées) de même loi que  $X$ , il existe  $a_k > 0$  et  $b_k \in \mathbb{R}$  tels que

$$X_1 + \dots + X_k = a_k X + b_k,$$

où  $X_1 + X_2, \dots, X_k$  sont des copies indépendantes de  $X$ . Lorsque  $b_k = 0$ , on dit que  $X$  est strictement stable. On peut montrer [36] qu'il existe alors une constante  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 2$ , telle que  $a_k = k^{\frac{1}{\alpha}}$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Il n'y a pas d'expression commode de la densité d'une loi stable, sauf dans quelques cas particuliers, parmi lesquels figure la loi normale. Cependant, on sait expliciter la fonction caractéristique d'une loi stable.

### 2.2.5.b Fonction caractéristique

Si  $X$  est une variable aléatoire  $\alpha$ -stable, la fonction caractéristique admet la forme suivante :

$$\phi_X(t) = \begin{cases} \exp(i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha [1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2} (|\sigma t|^{1-\alpha} - 1)]) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp(i\mu t - \sigma |t| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(t) (\ln |t| + \ln \sigma)]) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

On note  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  la distribution associée à cette fonction caractéristique. Les paramètres  $\alpha, \beta, \sigma$  et  $\mu$  s'interprètent comme suit :

- $\alpha$  est l'exposant caractéristique,  $0 < \alpha \leq 2$ . Il décrit le comportement asymptotique de la densité et de la distribution et intervient dans la constante de renormalisation qui apparaît dans l'énoncé de la propriété décrivant la stabilité.
- Le paramètre d'asymétrie  $\beta$ ,  $\beta \in [-1, 1]$ . Si  $\beta = \pm 1$ , on dit que la distribution est totalement asymétrique. Si  $\alpha < 1$ , le support de  $X$  est  $\mathbb{R}^+$ . Si  $\beta = 0$ , la distribution est symétrique.
- Le paramètre d'échelle  $\sigma$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^+$ , aussi appelé paramètre de dispersion. Lorsque  $\alpha = 2$ ,  $\sigma$  représente l'écart type de  $X$ . C'est un réel positif quelconque, il intervient parce que chaque fois qu'on dilate une variable aléatoire stable on en obtient une autre.
- Le paramètre de position  $\mu$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ . Si  $\alpha > 1$ , ce paramètre est égal à l'espérance mathématique.

Avec la définition ci-dessus de  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ , qu'on appelle paramétrisation standard, la fonction caractéristique présente des discontinuités pour  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$ . Au lieu de la paramétrisation standard notée  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ , nous suivons la paramétrisation  $S^0$  proposée par Zolotarev [114] utilisée par Weron [110] et notée  $S_\alpha^0(\sigma, \beta, \mu_0)$ .

Les paramètres  $\alpha, \beta$ , et  $\sigma$  de la paramétrisation  $S^0$  sont les mêmes que ceux de la paramétrisation standard  $S$ , cependant  $\mu$  et  $\mu_0$  sont reliés par :

$$\mu = \begin{cases} \mu_0 - \beta \tan \frac{\alpha\pi}{2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \mu_0 - \frac{2}{\pi} \log \sigma & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Les densités des lois stables n'ont en général pas d'expression explicite. On sait par contre en donner des formulations intégrales, qui servent à les calculer.

### 2.2.5.c Densité des lois $\alpha$ -stables

#### Forme analytique de la densité de probabilité

La fonction de densité de probabilité des variables aléatoires stables existe et est en général une fonction continue, mais à quelques exceptions près, aucune forme analytique n'est connue. Toutefois Nolan [85] a obtenu des formules similaires à celles de Zolotarev [115], utilisant une représentation intégrale de la densité de probabilité et de la fonction de répartition des variables aléatoires stables. Cette représentation intégrale s'écrit :

$$\zeta = \zeta(\alpha, \beta) = \begin{cases} -\beta \tan \frac{\alpha\pi}{2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ 0 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\Theta_0 = \Theta_0(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \arctan(\beta \tan \frac{\alpha\pi}{2}) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$c_1 = \begin{cases} \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} - \Theta_0) & \text{pour } \alpha < 1 \\ 0 & \text{si } \alpha = 1 \\ 1 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

$$V(\Theta, \alpha, \beta) = \begin{cases} \left( \cos \alpha \Theta_0 \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left( \frac{\cos \Theta}{\sin \alpha(\Theta_0 + \Theta)} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \frac{\cos(\alpha(\Theta_0 + (\alpha-1)\Theta))}{\cos \Theta} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \left( \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi + \beta \Theta}{\cos \Theta} \right) \right) \exp\left( \frac{1}{\beta} \left( \frac{\pi}{2} + \beta \Theta \right) \tan \Theta \right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

**Théorème 1 :** *Si  $X$  suit la loi  $S_\alpha^0(1, \beta, 0)$  alors la densité  $f$  et la fonction de répartition  $F$  de  $X$  sont données par :*

1. Si  $\alpha \neq 1$  et  $x > \zeta$

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\alpha(x - \zeta)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\pi |\alpha - 1|} \int_{-\Theta_0}^{\frac{\pi}{2}} V(\Theta, \alpha, \beta) \exp(-(x - \zeta)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} V(\Theta, \alpha, \beta)) \, d\Theta$$

et

$$F(x; \alpha, \beta) = c_1(\alpha, \beta) + \frac{\text{sign}(1 - \alpha)}{\pi} \int_{-\Theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \exp(-(x - \zeta)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} V(\Theta, \alpha, \beta)) d\Theta$$

2. Si  $\alpha \neq 1$  et  $x = \zeta$

$$f(\zeta; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha}) \cos \Theta_0}{\pi(1 + \zeta^2)^{\frac{1}{2\alpha}}}$$

et

$$F(\zeta; \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \Theta_0 \right)$$

3. Si  $\alpha \neq 1$  et  $x < \zeta$  :

$$f(x; \alpha, \beta) = -f(-x; \alpha, -\beta)$$

et

$$F(x; \alpha, \beta) = 1 - F(-x; \alpha, -\beta)$$

4. Si  $\alpha = 1$  :

$$f(x; 1, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{2|\beta|} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V(\Theta, 1, \beta) \exp(-e^{-\frac{\pi x}{2\beta}} V(\Theta, 1, \beta)) d\Theta & \text{pour } \beta \neq 0 \\ \frac{1}{\pi(1+x^2)} & \text{pour } \beta = 0 \end{cases}$$

et

$$F(x; 1, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp(-e^{-\frac{\pi x}{2\beta}} V(\Theta, 1, \beta)) d\Theta & \text{pour } \beta > 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x & \text{pour } \beta = 0 \\ 1 - F(x; \alpha, -\beta) & \text{pour } \beta < 0 \end{cases}$$

Pour la démonstration du théorème voir [85].

**Les quelques formes explicites :** C'est seulement dans les trois cas suivants que la densité d'une loi  $\alpha$ -stable est donnée par une formule.

1. La loi normale :  $S_2(\sigma, \beta, \mu)$  de densité

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{4\sigma^2}\right) \quad -\infty \leq x \leq +\infty$$

2. la loi de Cauchy  $S_1(\sigma, 0, \mu)$  de densité

$$f(x) = \frac{\sigma}{\pi((x - \mu)^2 + \sigma^2)} \quad -\infty \leq x \leq +\infty$$

3. La loi de Lévy  $S_{0.5}^0(\sigma, 1, \mu)$  de densité

$$f(x) = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{1}{(x - \mu)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(\frac{-\sigma^2}{2(x - \mu)}\right) \quad \mu \leq x \leq +\infty.$$

Les figures 2.4 et 2.5 représentent les densités de quelques lois stables. La figure 2.4 montre que leurs densités font apparaître un pic plus aigu lorsque l'exposant de stabilité diminue. En même temps, les ailes s'épaississent : la variable correspondante prend moins de valeurs intermédiaires, plus de valeurs extrêmes sans dégarnir le voisinage immédiat de 0. La figure 2.3 montre des densités de lois "extrêmement dissymétriques" obtenues avec une valeur extrême du paramètre de dissymétrie  $\beta$  ( $\beta = 1$ ). Même en prenant  $\beta = 1$  on obtient pour  $\alpha$  proche de 2 des densités peu dissymétriques (voire pas dissymétriques du tout pour  $\alpha = 2$ ). Au contraire, pour  $\alpha < 1$  la dissymétrie correspond à un support égal à  $\mathbb{R}^+$  (pour  $\beta = 1$ ) ou  $\mathbb{R}^-$  (pour  $\beta = -1$ )

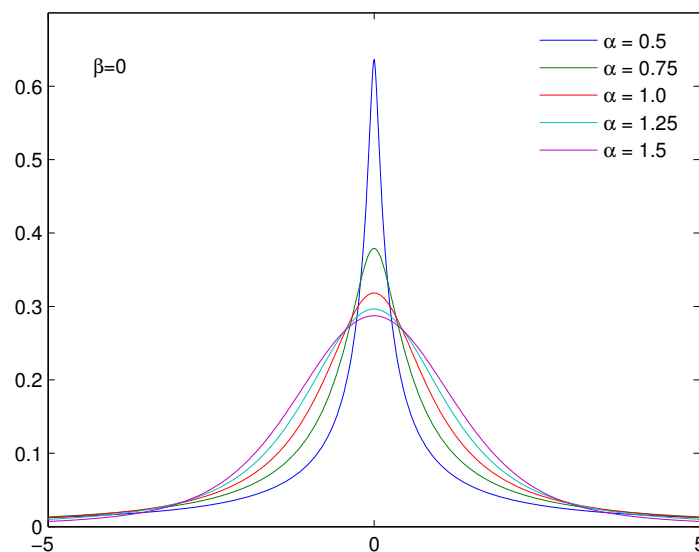


FIGURE 2.4 – Densité de probabilité de lois  $\alpha$ -stables symétriques calculées numériquement. Toutes les densités représentées correspondent à la valeur maximale  $\beta = 1$  du paramètre de dissymétrie. C'est seulement avec  $\alpha < 1$  qu'on obtient des densités dont le support est  $\mathbb{R}^+$

Comme nous l'avons mentionné plus haut, l'exposant de stabilité d'une loi stable décrit son comportement asymptotique. On parle d'"ailes épaisses" même si c'est impropre, parce que cet exposant décrit la décroissance plus ou moins lente des ailes de la densité d'une loi stable, et pas vraiment une épaisseur localisée. Il s'agit d'une propriété globale.

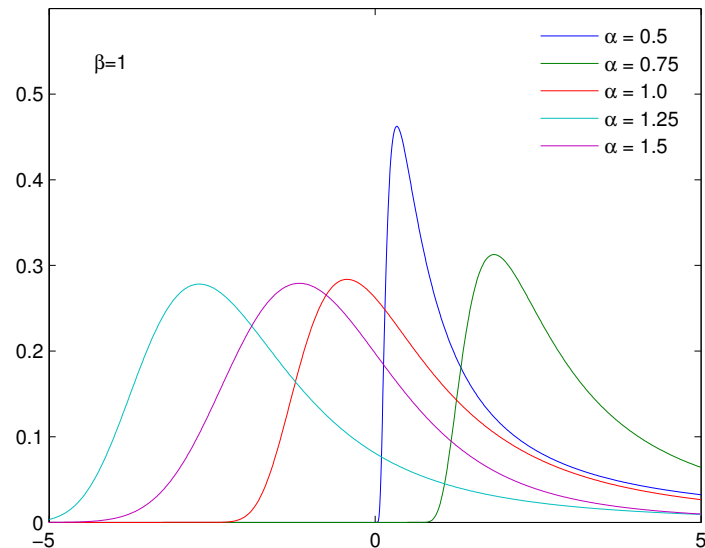


FIGURE 2.5 – Densité de probabilité de lois  $\alpha$ -stables asymétriques calculées numériquement. Toutes les densités représentées correspondent à la valeur maximale  $\beta = 1$  du paramètre de dissymétrie. C'est seulement avec  $\alpha < 1$  qu'on obtient des densités dont le support est  $\mathbb{R}^+$

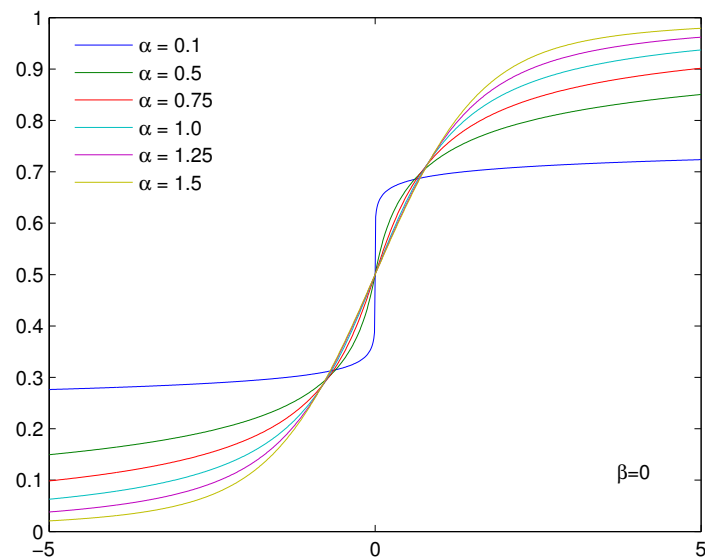


FIGURE 2.6 – Fonction de répartition de lois  $\alpha$ -stables symétriques calculées numériquement.

**Ailes épaisses :** C'est la caractérisation du comportement asymptotique de la variable aléatoire réelle.

Si  $X$  est une variable aléatoire de loi  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ , avec  $\alpha \neq 2$  on a les deux résultats suivants

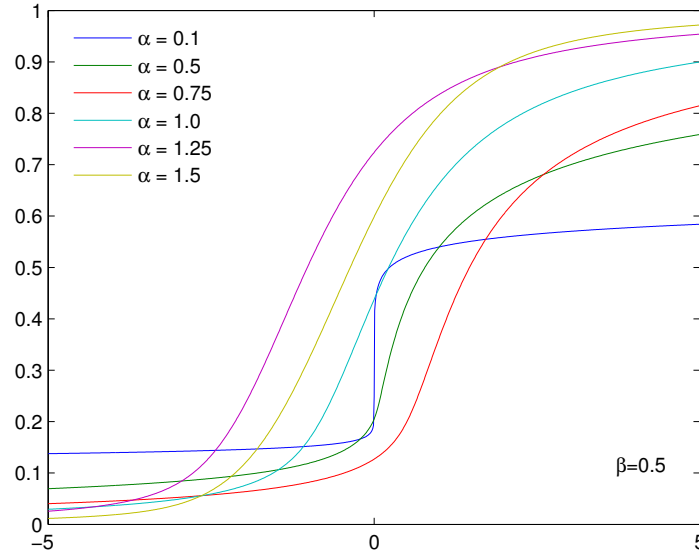


FIGURE 2.7 – Fonction de répartition de lois  $\alpha$ -stables asymétriques calculées numériquement.

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha \mathcal{P}(X > t) = \sigma C(\alpha) \frac{1+\beta}{2} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha \mathcal{P}(X < -t) = \sigma C(\alpha) \frac{1-\beta}{2} \end{cases}$$

où  $C(\alpha)$  est une grandeur qui dépend de  $\alpha$ .

**Support :** Le support d'une variable aléatoire stable est en général  $\mathbb{R}$  tout entier, sauf pour  $0 < \alpha \leq 1$ , à condition d'avoir, en plus,  $\beta = \pm 1$ . Dans ce cas et dans ce cas seulement le support est  $\mathbb{R}^+$  ou  $\mathbb{R}^-$ . Lorsque  $\alpha = 1$ , on obtient des variables dégénérées, ici des masses de Dirac. Ceci implique en particulier que des variables aléatoires stables d'exposant  $\alpha > 1$  sont incapables de représenter des durées.

**Convergence asymptotique :** L'égalité précédente nous fait penser à la caractérisation des lois de Pareto. En effet, une variable aléatoire suit une loi du type Pareto si :

$$\mathcal{P}(X \geq x) = x^{-\alpha} h(x)$$

où  $h(x)$  est une fonction à variation lente, c'est-à-dire pour tout  $t > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = 1.$$

Mandelbrot [69] a montré que pour les lois  $\alpha$ -stables, nous avons

$$\mathcal{P}(X \leq x) = x^{-\alpha}[f_1(\alpha) + f_2(\alpha)x^{-\alpha} + o(-2\alpha)].$$

Par passage à la limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , on s'aperçoit que les lois stables sont asymptotiquement parétiennes.

Lévy avait montré que quand  $\alpha < 2$  les distributions  $\alpha$ -stables convergent vers une loi de Paréto lorsque  $x \rightarrow \infty$ , suivant, pour  $X > 0$ ,

$$\begin{cases} \mathcal{P}(X > x) = 1 - F(x) \rightarrow C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \sigma^\alpha x^{-\alpha} \\ \mathcal{P}(X > -x) = F(-x) \rightarrow C_\alpha \frac{1-\beta}{2} \sigma^\alpha x^{-\alpha} \end{cases}$$

avec

$$C_\alpha = \left( \int_0^\infty x^{-\alpha} \sin x dx \right)^{-1} = \frac{2}{\pi} \Gamma(\alpha) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)\cos(\frac{\pi\alpha}{2})} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

### 2.2.6 Moments

Une conséquence directe de la décroissance "lente" des lois de probabilité  $\alpha$ -stables est que si  $X$  est une variable aléatoire suivant une loi stable de paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$  et  $\mu$ , avec  $\alpha \neq 2$ , alors

$$\begin{cases} \mathbb{E}|Z|^p < \infty & \text{pour tout } p \in ]0, \alpha[ \\ \mathbb{E}|Z|^p = \infty & \text{pour tout } p \geq \alpha. \end{cases}$$

Nous avons noté plus haut que les lois stables sont des attracteurs. Chacune d'elles attire des lois de probabilité qu'ont le même comportement asymptotique.

### 2.2.7 Théorème de la limite centrale généralisée

Soit  $\alpha$  un réel, avec  $0 < \alpha < 2$ , et soit  $X$  une variable aléatoire dont la fonction de répartition vérifie les conditions suivantes, qui concernent son comportement asymptotique :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(X > x) \sim Cpx^{-\alpha} & \text{et} \\ \mathcal{P}(X < -x) \sim Cqx^{-\alpha} & \text{pour } x > 0 \text{ assez grand.} \end{cases}$$

Supposons de plus que  $p$  et  $q$  soient des réels positifs vérifiant  $p + q = 1$ . La somme d'un grand nombre de copies indépendantes de  $X$  tend à se rapprocher d'une variable aléatoire stable lorsque le nombre augmente, d'après le résultat suivant, Feller [36], Meerschaert [74] :



**Théorème2 :** Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  une suite de variables aléatoires indépendantes distribuées selon la loi de la variable  $X$ . Il existe une variable aléatoire  $Z$  stable d'exposant de stabilité  $\alpha$  et deux suites de réels  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que

$$\frac{X_1 + \dots + X_k}{a_k} - b_k$$

convergent en probabilité vers  $Z$ . Ceci signifie que pour chaque  $\epsilon > 0$

$$\mathcal{P}\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{a_n} + b_n - Z\right| > \epsilon\right) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

### 2.2.8 Simulation de variables aléatoires $\alpha$ -stables

Une première solution au problème de la génération de variables aléatoires stables a été trouvée par Kanter [54]. Dans [54], Kanter a développé une méthode directe pour la génération de variables de loi  $S_\alpha(1, 1, 0)$  pour  $\alpha < 1$ . Puis cette méthode a été étendue au cas général. Chambers et al.[114] ont été les premiers à obtenir une formule en se basant sur la représentation intégrale de la densité. Il y a aussi les formules de Chambers, Mallows, Stuck [22] qui permettent de générer les lois  $\alpha$ -stables dont la description a été faite ci dessous.

On génère deux variables aléatoires,  $U$  de loi uniforme sur  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  et  $W_a$  de loi exponentielle de paramètre 1. Mais avant cela, on génère d'abord deux variables aléatoires de loi uniforme, à l'aide d'un générateur de nombres pseudo aléatoires représenté par la fonction "Random Number" en *Fortran*,  $U_1$  et  $U_2$  sur  $]0; 1[$ . Puis par changement de variable

$$(b_s - b_i)U_1 - b_s,$$

où  $b_s$  et  $b_i$  sont respectivement la borne supérieure et la borne inférieure, on obtient :

$$U = \pi U_1 - \frac{\pi}{2}$$

et par transformation inverse on obtient

$$W_a = -\log(1 - U_2)$$

On fabrique une variable aléatoire  $X$  donnée par :

- pour  $\alpha \neq 1$

$$\mathbb{B}(\alpha, \beta) = \left( \frac{\arctan(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2})}{2} \right)$$

$$S(\alpha, \beta, 0) = \left( 1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\pi\alpha}{2} \right)^{\frac{1}{2\alpha}}$$

$$X = S(\alpha, \beta, 0) \frac{\sin \alpha(U + \mathbb{B}(\alpha, \beta))}{(\cos U)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\cos(U - \alpha(U + \mathbb{B}(\alpha, \beta)))}{W_a} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

- Pour  $\alpha = 1$

$$X = \frac{2}{\pi} \left( \left( \frac{\pi}{2} + \beta U \right) \tan U - \beta \log \left( \frac{W_a \cos U}{\frac{\pi}{2} + \beta U} \right) \right)$$

de loi  $S_\alpha^0(1, \beta, 0)$ . On passe à une variable aléatoire  $Y$  de distribution  $S_\alpha^0(\sigma, \beta, \mu)$  par :

$$Y = \begin{cases} \sigma X + \mu & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ \sigma X + \frac{2}{\pi} \sigma \log \sigma + \mu & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases}$$

suit une loi stable de paramètres  $\alpha, \beta, \sigma, \mu$ .

Les figures suivantes illustrent l'implémentation numérique de la méthode de génération d'échantillons décrite ci-dessus.

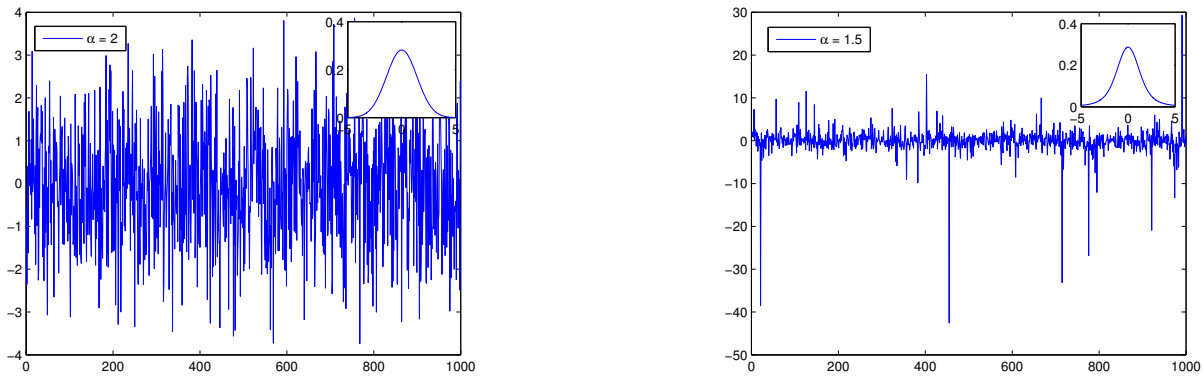


FIGURE 2.8 – Simulations numériques d'échantillons de variable aléatoire de loi  $\alpha$ -stable avec  $\alpha = 2$  et  $\alpha = 1.5$ .

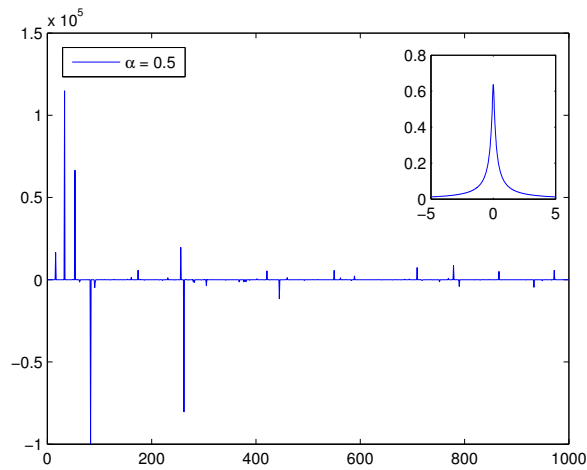


FIGURE 2.9 – Simulation numérique d'échantillons de variable aléatoire de loi  $\alpha$ -stable avec  $\alpha = 0.5$ .

Les figures 2.8 et 2.9 montrent des échantillons de lois  $\alpha$ -stables avec un paramètre d'asymétrie nul ( $\beta = 0$ ), un paramètre de localisation nul ( $\mu = 0$ ) et un paramètre d'échelle qui vaut l'unité ( $\sigma = 1$ ). Elles mettent en évidence l'effet de l'exposant de stabilité.

En particulier, on remarque que les échantillons présentent des valeurs extrêmes, qui augmentent en grandeur et en fréquence, quand l'exposant de stabilité  $\alpha$  diminue. Pour cette raison, les lois stables permettent de prendre en compte les événements extrêmes. Cette propriété trouve une importance fondamentale dans toutes les applications où la dynamique étudiée est soumise à des variabilités aléatoires brutales (crack boursier,...). Les figures 2.10 et 2.11

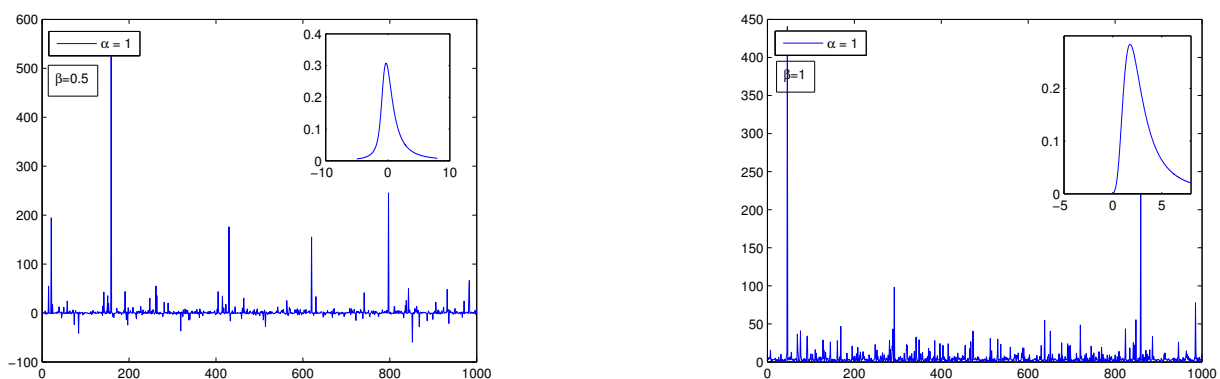


FIGURE 2.10 – Simulation numérique d'échantillons de variable aléatoire de loi  $\alpha$ -stable avec  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0.5$  et  $\beta = 1$ .

montrent des échantillons de lois  $\alpha$ -stables avec des paramètres d'asymétrie  $\beta$  non-nuls. Elles montrent en particulier que lorsque le paramètre d'asymétrie  $\beta$  est maximal ( $\beta = 1$ ) alors toutes les réalisations de la variable aléatoire de loi

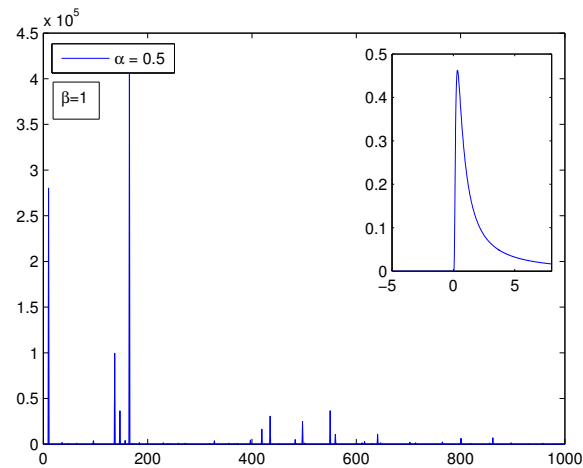


FIGURE 2.11 – Simulation numérique d'échantillons de variable aléatoire de loi  $\alpha$ -stable avec  $\alpha = 0.5$  et  $\beta = 1$ .

$\alpha$ -stable prennent systématiquement des valeurs positives quand l'exposant de stabilité  $\alpha$  est inférieur ou égal à 1. Cette propriété qui se démontre mathématiquement présente un intérêt capital dans notre utilisation des lois  $\alpha$ -stables. En effet, nous allons utiliser dans le chapitre suivant une variable aléatoire de loi  $\alpha$ -stable pour modéliser des temps d'immobilité (donc toujours positifs) de marcheurs aléatoires qui représentent les déplacements de particules de soluté dans un milieu poreux.

Les variables aléatoires sont indispensables pour décrire de nombreux phénomènes physiques. Cependant cette notion ne suffit pas, on a aussi besoin de fonctions d'un paramètre dont les valeurs seraient elles mêmes des variables aléatoires et non pas des nombres.

## 2.3 Fonction aléatoire ou processus stochastique

Comme on vient de le souligner, la variable aléatoire se situe à la base de la caractérisation des phénomènes du hasard. Le caractère aléatoire peut également s'appliquer à une fonction d'une ou plusieurs variables. Un tel objet constitue ce que nous appelons fonction aléatoire. Généralement, la fonction aléatoire s'interprète comme une collection de variables reliées entre elles par la dynamique du système considéré.

Par exemple si nous considérons une fonction aléatoire  $X(t)$  où  $t$  représente le temps alors pour chaque  $t_i$ ,  $X(t_i)$  est une variable aléatoire. La probabilité pour que sa valeur à l'instant  $t$  appartienne à  $]x - \frac{dx}{2}, x + \frac{dx}{2}[$  peut être notée  $P(x, t)dx$ ,  $P(x, t)$  est la densité de probabilité de  $X(t)$ .

Cependant la notion de fonction aléatoire permet de gérer aussi des évènements qui concernent les variables aléatoires  $X(t_1)$  et  $X(t_2)$  : par exemple la probabilité pour que  $X(t_1)$  appartienne à  $]x_1 - \frac{dx_1}{2}, x_1 + \frac{dx_1}{2}[$  et  $X(t_2)$  appartienne à  $]x_2 - \frac{dx_2}{2}, x_2 + \frac{dx_2}{2}[$  est notée  $P(x_1, x_2, t_1, t_2)dx_1dx_2$  où  $P(x_1, x_2, t_1, t_2)$  est la densité de probabilité jointe. Plus généralement la densité de probabilité jointe correspond à la probabilité que  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ , ces variables, appartiennent à

$]x_1 - \frac{dx_1}{2}, x_1 + \frac{dx_1}{2}[, \dots, ]x_n - \frac{dx_n}{2}, x_n + \frac{dx_n}{2}[$ . Elle est associée à la densité  $P(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$ .

A partir de cette loi de probabilité jointe, il est possible d'écrire des probabilités conditionnelles qui permettent en particulier de relier les états passés de la fonction aléatoire à son présent. La densité  $P(x, t)$  est loin de suffire à représenter un tel objet, et les probabilités qui lui correspondent.

### Probabilité conditionnelle

On définit la densité de probabilité conditionnelle de la séquence  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$  aux instants  $t_i, t_{i+1}, \dots, t_n$  sachant que la séquence  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a eu lieu aux instants  $t_1, t_2, \dots, t_{i-1}$  comme

$$P(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots, x_{i-1}, t_{i-1} \mid x_i, t_i; x_{i+1}, t_{i+1}; \dots, x_n, t_n) = \frac{P(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots, x_n, t_n)}{P(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots, x_{i-1}, t_{i-1})} \quad (2.12)$$

On définit la probabilité marginale  $P(x_2, t_2)$  d'une probabilité conjointe  $P(x_1, t_1; x_2, t_2)$  comme la somme des évènements  $x_1$  qui sont apparus à l'instant  $t_2$ .

$$P(x_2, t_2) = \int_{\mathbb{R}} dx_1 P(x_1, t_1; x_2, t_2) \quad (2.13)$$

De la même manière, on peut généraliser ce type d'équation pour la probabilité d'avoir un évènement  $x_3$  à  $t_3$ .

$$P(x_1, t_1; x_3, t_3) = \int_{\mathbb{R}} dx_2 P(x_1, t_1; x_2, t_2 \mid x_3, t_3) \quad (2.14)$$

$$P(x_1, t_1; x_3, t_3) = \int_{\mathbb{R}} dx_2 P(x_1, t_1, x_2, t_2 \mid x_3, t_3) P(x_1, t_1 \mid x_2, t_2) \quad (2.15)$$

### Fonction aléatoire Markovienne

L'estimation de ces probabilités conditionnelles permet d'évaluer l'importance des états passés et donc de donner une idée sur la capacité du phénomène

aléatoire à mémoriser son passé ("effet mémoire"). Il existe une classe de fonction aléatoire "sans mémoire" dont la dépendance au passé se limite à l'état au temps  $t_{i-1}$ . La densité de probabilité conditionnelle d'une telle fonction s'écrit :

$$P(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1} \dots x_2, t_2, x_1, t_1) = P(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) \quad (2.16)$$

De telles fonctions sont dites "Markoviennes". Il est possible de montrer dans ce cas que la probabilité de transition d'un état  $(i-1)$  à l'état  $(i)$  suit une équation de Chapman-Kolmogorov. Plus précisément, la loi de probabilité conditionnelle

$$P(x, t) = P(x, t | x_0, 0) \quad (2.17)$$

évolue selon une équation de Fokker-Planck

$$\partial_t P(x, t) = -\partial_x(a(x)P(x, t)) + \frac{1}{2}\partial_x^2(b(x)P(x, t)) \quad (2.18)$$

Le mouvement Brownien est un processus de Markov.

### Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien physique, en référence au nom de l'auteur, a été observé au microscope en 1827 par le Botaniste anglais Robert Brown sur les particules de grains de pollen animés d'un mouvement erratique indescriptible, aléatoire, posant une réelle difficulté d'interprétation immédiate. Albert Einstein fut le premier en 1905 à décrire la correspondance qu'il y a entre le mouvement Brownien à l'échelle microscopique et l'équation de diffusion à l'échelle macroscopique en s'inspirant du raisonnement probabiliste pour la démonstration de la loi de Fick en 1905. Plus tard, Jean Perrin, mesura les trajectoires des particules soumises au mouvement Brownien et confirma ainsi l'analyse théorique d'Einstein. Marian Smoluchowski introduisit la notion de "marche aléatoire" en 1906. Paul Langevin en 1908 donna une formulation mécaniste du mouvement Brownien correspondant au déplacement désordonné de particules dans un fluide provoqué par les collisions entre particules voisines sous la forme d'une équation différentielle stochastique comportant une force aléatoire. A partir de ces observations, les mathématiciens ont défini puis étudié des processus aléatoires indexés par une variable réelle positive, le temps, et qu'on appelle mouvement Brownien. Lorsque nous parlerons de mouvement Brownien, nous ferons référence à celui-ci, celui des mathématiciens, qui possède une définition

claire et des propriétés décrites sous forme de théorèmes. Le mouvement Brownien sert de modèle mathématique pour certains processus physiques. Il est utilisé ici pour décrire les déplacements aléatoires des particules de soluté dans un milieu poreux. L'une des propriétés importantes du mouvement Brownien est l'absence de mémoire, c'est un processus Markovien.

Parmi les processus Markoviens, nous portons particulièrement notre attention sur le mouvement Brownien car il est le modèle à petite échelle et à grande échelle du phénomène de diffusion classique tel que nous allons le rappeler dans le chapitre suivant. D'un point de vue plus formel, un mouvement Brownien standard  $(W_t, t \geq 0)$  est un processus stochastique (ou fonction aléatoire) construit sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  tel que

- $\forall \omega \in \Omega$  on a  $W_0(\omega) = 0$ . Cette propriété indique que toutes les réalisations d'un mouvement Brownien commencent par une valeur nulle.
- $\forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \dots \leq t_{i-1} \leq t_i$  alors les incréments  $(W_{t_1} - W_{t_0})$ ,  $(W_{t_2} - W_{t_1})$ , ...,  $(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$ , constituent une suite de variables aléatoires indépendantes.
- $\forall t, s \geq 0$  tels que  $s < t$  alors l'incrément  $(W_t - W_s)$  du mouvement Brownien est distribué selon une loi normale d'espérance 0 et de variance  $t - s$ . Ces incréments forment une autre fonction aléatoire appelée aussi "bruit blanc gaussien".
- $\forall \omega \in \Omega$ , la trajectoire (réalisation) du mouvement Brownien  $t \rightarrow W_t(\omega)$  est dérivable nulle part mais continue partout.

On peut montrer que la loi de distribution de probabilité du mouvement Brownien est donnée par la solution de l'équation de Fokker-Planck (2.18) quand les paramètres associés deviennent constants  $a(x) = 0$  et  $b(x) = \lambda$ . En calculant les moments d'ordre un et deux du mouvement Brownien, on trouve les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \langle W_t(\omega) \rangle &= 0 \\ \langle W_t(\omega)^2 \rangle &= 2\lambda t \\ \text{cov}(W_{t_1} W_{t_2}) &= 2\lambda \min(t_1, t_2) \end{aligned}$$

La figure 2.12 illustre ces propriétés par une simulation numérique d'un mouvement Brownien unidimensionnel. Pour compléter ce paragraphe sur le mouvement Brownien, nous allons établir de manière simple une relation avec le théorème de la limite centrale qui a été énoncé auparavant. En effet si on pose  $n = \frac{t}{\delta t}$  dans l'équation (2.9), nous obtenons

$$Y_1 + \dots + Y_n \approx t \frac{\mu}{\sqrt{\delta t}} + \frac{\sigma}{\sqrt{\delta t}} \sqrt{t} \mathcal{N}(0, 1) \quad (2.19)$$

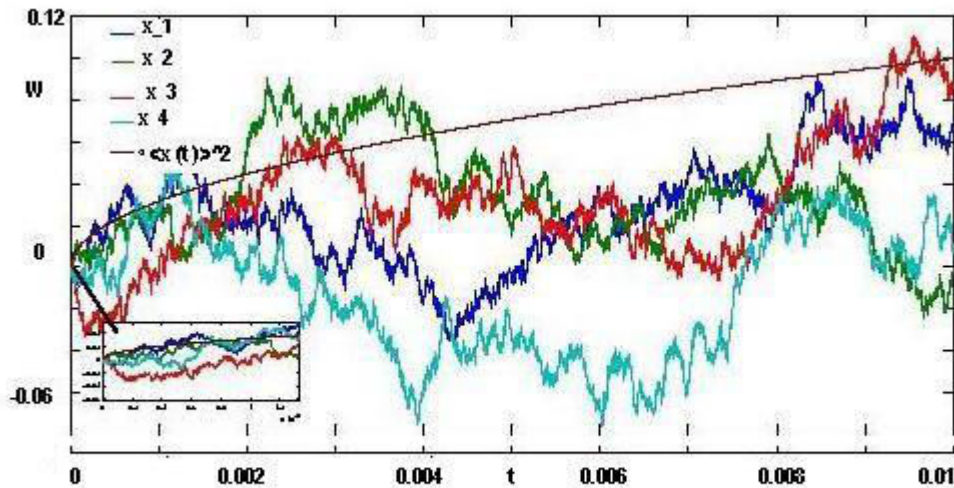


FIGURE 2.12 – Simulation numérique de différentes trajectoires d'un mouvement Brownien ( $W_t, t \geq 0$ ).

où l'on peut remarquer que le terme de droite se présente comme un mouvement Brownien avec dérive. De même, si on note  $\langle v \rangle = \frac{\mu}{\delta t}$  et  $D = \frac{\sigma^2}{2\delta t}$  dans l'équation (2.19), on montre que le mouvement Brownien possède un lien direct avec la diffusion normale (modèle ADE) que nous avons décrite dans le chapitre précédent par l'équation (1.3). Dans ce cas la partie  $\sqrt{2Dt}\mathcal{N}(0, 1)$  représente la dispersion et  $\langle v \rangle$  une vitesse moyenne d'advection. En adoptant ceci, on trouve comme loi de probabilité associée au mouvement Brownien une densité gaussienne

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x - \langle v \rangle t)^2}{4Dt}\right) \quad (2.20)$$

qui est précisément la solution exacte de l'équation (1.3). Ces résultats suggèrent que par additivité, les déplacements de marcheurs individuels suivant une loi gaussienne aboutissent à l'échelle macroscopique à un nuage de marcheurs animé par un phénomène de diffusion normale. On peut aussi dire plus formellement que le mouvement Brownien est la limite hydrodynamique d'une marche aléatoire gaussienne. A cause du théorème de la limite centrale, c'est encore vrai pour des marches aléatoires accumulant des déplacements distribués par une loi de variance finie (pensons par exemple à une variable aléatoire de Bernoulli). Il est important de noter ici qu'il existe un certain nombre de modèles microscopiques décrivant des phénomènes de diffusion anormale qui mettent en jeu des marcheurs aléatoires avec des distributions de probabilité différentes de celles du mouvement Brownien. En particulier, nous citons les modèles de type vols de Lévy ou marches aléatoires subordonnées en temps



qui utilisent les lois  $\alpha$ -stables de Lévy que nous avons introduites dans le paragraphe précédent. Ces modèles conduisent à l'échelle macroscopique à une généralisation du modèle ADE en introduisant des dérivations et des intégrations d'ordre non entier. Ces opérateurs fractionnaires représentent des effets non-locaux en espace ou en temps. Les effets de mémoire sont un cas particulier associés aux opérateurs fractionnaires en temps. La section suivante est consacrée au rappel de ces notions de dérivation et d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, de Grünwald-Letnikov et de Caputo.

## 2.4 Les opérateurs fractionnaires

Historiquement, c'est au 17<sup>ème</sup> siècle dans une lettre de Leibniz à L'Hopital qu'on trouve la première mention à la différentielle fractionnaire  $d^{\frac{1}{2}}x$ , qualifiée alors de "paradoxe apparent". Dès le 18<sup>ème</sup> siècle, les prémices du concept de dérivation fractionnaire, c'est-à-dire d'un opérateur de dérivation d'ordre non entier, apparaissent dans des écrits d'Euler, de Lagrange. Les avancées les plus marquantes sont celles de Liouville dans ses multiples mémoires à l'Ecole Polytechnique entre 1832 et 1835, puis la contribution de Riemann en 1847, faisant que les noms de ces deux mathématiciens restent attachés à la fameuse transformation que nous rappellerons plus loin. C'est Lacroix (1879) qui montre que pour  $f(x) = x^a$ , et  $a > 0$ .

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}f(x)}{d^{\frac{1}{2}}x} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}x^{\alpha-\frac{1}{2}} \quad (2.21)$$

Plusieurs ouvrages sont dédiés à l'analyse fractionnaire notamment les pionniers Oldham et Spanier [87], Miller et Ross [78] et Samko et al.[97] qui représentent une source très complète. Le calcul fractionnaire permet d'interpoler entre les dérivées d'ordre entier, ainsi qu'entre des intégrations multiples. Il existe diverses théories qui permettent d'interpoler entre les dérivées d'ordre entier, c'est à dire de trouver des opérateurs indexés par un réel (l'ordre de dérivation) et tels que lorsque cet ordre vaut l'entier naturel  $m$  l'opérateur soit la dérivée d'ordre  $n$ . Celle que nous allons présenter généralise aux ordres quelconques une formule de Cauchy pour l'intégration répétée  $n$ -fois. Nous définirons ensuite des dérivées d'ordre non entier qui permettront d'inverser ces opérateurs intégraux. Les mathématiciens qui ont mis en place ces opérateurs cherchaient à unifier une théorie. Mais ce n'est pas pour cette raison que nous nous intéressons aux intégrales et aux dérivées fractionnaires. Notre motivation

est le fait que ces opérateurs interviennent lorsqu'on veut calculer des flux de particules, celles-ci effectuant certains types de marches au hasard.

### 2.4.1 Les opérateurs fractionnaires d'intégration

Soit  $f(x)$  une fonction intégrable en  $(a, \infty)$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors l'intégrale de Cauchy :

$$I_{a,x}^n f(x) = \int_a^x du_1 \int_a^{u_1} du_2 \dots \int_a^{u_{n-1}} f(u_n) du_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-u)^{n-1} f(u) du \quad (2.22)$$

peut être généralisée à une intégrale d'ordre  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  en remplaçant  $(n-1)!$  par la fonction gamma  $\Gamma$  d'Euler. On a ainsi

$$I_{a,x}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-u)^{\alpha-1} f(u) du \quad (2.23)$$

et

$$I_{x,a}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^a (u-x)^{\alpha-1} f(u) du \quad (2.24)$$

Les équations (2.23) et (2.24) définissent les opérateurs d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville. Remarquons qu'on définit ainsi une intégrale fractionnaire pour chaque intervalle d'intégration. De plus les bornes de cet intervalle ne jouent pas de rôles symétriques. La fonction  $I_{a,x} f(x)$  dépend du comportement de  $f$  dans l'intervalle  $]a, x[$  tout entier, cependant les valeurs de  $f$  en des  $u$  proches de  $x$  ont plus d'influence que pour  $u$  loin de  $x$ . La borne  $a$  peut être finie ou non. Dans le cas  $a = -\infty$  l'intervalle d'intégration devient  $] -\infty, x[$  dans  $I_{-\infty,x}^\alpha$ . Dans le cas  $a = +\infty$  l'intervalle d'intégration qui correspond à  $I_{x,+\infty}^\alpha$  est  $]x, +\infty[$ . La définition de l'intégration fractionnaire est explicitement associée à un intervalle et il en est de même pour la dérivation fractionnaire.

### 2.4.2 Dérivées d'ordre non entier

La dérivation fractionnaire  $D_{a,x}^\alpha$  dans  $[a, x]$  est définie comme l'inverse à gauche de l'opérateur  $I_{a,x}^\alpha$  :  $D_{a,x}^\alpha I_{a,x}^\alpha \varphi = \varphi$  pour toute fonction  $\varphi$  intégrable ou continue dans un intervalle contenant  $[a, x]$ . De même la dérivation fractionnaire d'ordre  $\alpha$  dans l'intervalle  $[x, a]$  est l'inverse à gauche de  $I_{x,a}^\alpha$  :  $D_{x,a}^\alpha I_{x,a}^\alpha \varphi = \varphi$ . On parle aussi de dérivée à gauche pour  $D_{a,x}^\alpha$  et à droite  $D_{x,a}^\alpha$ . Ces opérateurs  $D_{a,x}^\alpha$  et  $D_{x,a}^\alpha$  peuvent être calculés de différentes façons. Les formules suivantes sont aussi appelées "dérivées de Riemann-Liouville".

$$\mathbf{D}_{a,x}^\alpha f(x) \equiv \frac{d^n}{dx^n} I_{a,x}^{n-\alpha} f(x) \quad (2.25)$$

$$\mathbf{D}_{a,x}^\alpha f(x) \equiv (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} I_{x,a}^{n-\alpha} f(x) \quad (2.26)$$

$$\mathbf{D}_{a,x}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha + n + 1)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \int_a^x (x-u)^{n-\alpha} f(u) du \quad (2.27)$$

avec

$$n \leq \alpha < n + 1$$

L'expression (2.25) est la définition la plus connue de la dérivée fractionnaire. Elle est souvent appelée la définition de Riemann-Liouville, mais il s'agit simplement d'une façon d'expliciter l'inverse à gauche de l'opérateur  $I_{a,x}$ . D'autres méthodes, largement aussi utiles, seront abordées par la suite. Nous accorderons une importance particulière aux dérivées d'ordre compris entre 0 et 1. Dans ces conditions, le théorème suivant permet d'inverser (à gauche) l'opérateur d'intégration d'ordre  $\alpha$  sur un intervalle donné. On montre Samko [97] que lorsque  $f$  est de la forme  $f(x) = I_{a,x}^\alpha \varphi$ , la limite (si elle existe) quand  $\epsilon \rightarrow 0^+$  de

$$\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_\epsilon^{+\infty} \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{\alpha+1}} dt \quad \text{n'est autre que } \varphi.$$

Le théorème suivant établit ceci avec plus de précision.

**Théorème3 :** *Soit  $\alpha$  tel que  $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ . Si  $f(x) = I_{-\infty,+}^\alpha \varphi$  avec  $\varphi$  définie dans  $L^p(\mathbb{R})$ , alors*

$$\varphi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_\epsilon^{+\infty} \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{\alpha+1}} dt \quad (2.28)$$

Cette limite est prise dans  $L^p(\mathbb{R})$  et elle donne aussi un résultat valable pour presque tout  $x$ . Ce théorème s'adapte à  $L^p(] - \infty, a])$ . Ce théorème établit que la limite ci-dessus est une inverse à gauche pour l'opérateur  $I_{-\infty,x}^\alpha$ . Donc c'est une dérivée fractionnaire. On l'appelle la dérivée de Marchaud. Ce n'est pas une nouvelle dérivée, mais simplement une façon (plus générale que les formules de Riemann-Liouville) de calculer l'inverse à gauche de  $I_{-\infty,x}^\alpha$ , c'est à dire une dérivée fractionnaire.

Les indices  $a$  et  $x$  désignent les deux bornes liées à l'opération de différentiation fractionnaire. On utilise deux notations pour désigner l'intégrale. Les cas  $a = 0$  et  $a = \infty$  présentent un intérêt particulier :

– i) pour  $a = 0$  la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire est

$$\mathcal{L}[I_{0,x}^\alpha f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}[x^{\alpha-1}] \mathcal{L}[f(x)] = s^{-\alpha} \hat{f}(s) \quad (2.29)$$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville qui lui correspond est

$$\mathcal{L}[D_{0,x}^\alpha f(x)] = s^\alpha \hat{f}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} D_x^{(k)} I_{0,x}^{n-\alpha} s^{m-1-k} \quad (2.30)$$

L'intégration et la dérivation fractionnaire ont un comportement différent des opérateurs d'ordre entier. En particulier on peut voir que la dérivée d'une puissance est une puissance, mais celle d'une constante n'est pas nulle :

$$D^{\alpha} t^q = \frac{\Gamma(1+q)}{\Gamma(1+q-\alpha)} t^{q-\alpha}$$

$$D^{\alpha} 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{q-\alpha}$$

$$\mathcal{L}[I_{0,x}^\alpha x^\mu] = \frac{(\mu+1)}{s^{\mu+\alpha+1}}, \quad \mu \geq -1$$

$$\mathcal{L}[I_{0,x}^\alpha e^{mt}] = \frac{1}{s^\alpha(s-m)}$$

– ii) Pour  $a = \infty$  les opérateurs intégraux (2.23) et (2.24) sont connus sous le nom d'opérateur de Weyl. Il convient de recourir à la transformée de Fourier, car dans l'espace de Fourier les équations (2.23) et (2.24) sont des convolutions définies par

$$TF[I_{-\infty,x}^\alpha] = (ik)^\alpha \tilde{f}(k), \quad TF[I_{x,+\infty}^\alpha] = -(ik)^\alpha \tilde{f}(k). \quad (2.31)$$

Les dérivées  $D_{a,x}^\alpha$  et  $D_{x,a}^\alpha$  s'obtiennent aussi par les formules de Grünwald-Letnikov, qui font intervenir des différences finies d'ordre fractionnaire généralisant la définition de la dérivée d'ordre 1 faisant intervenir la limite du taux d'accroissement. Ces formules permettent de discrétiser ces opérateurs comme les développements limités dans le cadre de la dérivation d'ordre entier.

### 2.4.3 Les formules de Grünwald-Letnikov pour la dérivée fractionnaire

Comme il vient d'être dit, les formules de Grünwald-Letnikov pour représenter  $D_{a,x}^\alpha$  et  $D_{x,a}^\alpha$  font intervenir des limites de différences finies d'ordre fractionnaire. Cette approche est importante pour la discrétisation de nos équations

incluant des opérateurs d'ordre non entier. Les différences finies d'ordre  $\alpha$  et de pas  $h$  d'une fonction  $f$  sont, pour  $\alpha > 0$

$$(\Delta_h^\alpha f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh). \quad (2.32)$$

Le terme  $\binom{\alpha}{\beta}$  est défini par

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\alpha - \beta + 1)}$$

où  $\Gamma$  représente la fonction gamma d'Euler (Samko [97]). On peut aussi voir que  $\Delta_h^\alpha f$  généralise les différences finies d'ordre entier. Considérons une fonction continue  $f(x) \in C^n$  dérivable  $n$ -fois ( $f$  de classe  $C^n$ ), la dérivée première de la fonction  $f$  est donnée par

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - h)}{h} \quad (2.33)$$

L'application de cette définition deux fois nous donne la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x - h)}{h} \\ f''(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x - h) + f(x - 2h)}{h^2} \end{aligned} \quad (2.34)$$

En utilisant (2.33) et (2.34) nous obtenons

$$f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3f(x - h) + 3f(x - 2h) - f(x - 3h)}{h^3} \quad (2.35)$$

et par récurrence on peut établir que

$$\begin{aligned} f^n(x) &= \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh) \\ \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Considérons

$$f_h^{(p)}(x) = \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{p}{k} f(x - kh), \quad (2.37)$$

une expression généralisant (2.33)-(2.36), où  $p$  est un entier arbitraire ;  $n$  est aussi un entier, comme ci-dessus, avec  $p \leq n$  (pour plus de détails voir [105]) on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(x) = f^{(p)}(x) = \frac{d^p f(x)}{dx^p} \quad (2.38)$$

L'expression (2.38) est pour la valeur de  $p$  positive. Considérons le cas où  $p$  prend des valeurs négatives. On pose :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} &= \frac{p(p+1)\dots(p+k-1)}{k!} \\ \binom{-p}{k} &= \frac{-p(-p-1)\dots(-p-k+1)}{k!} = (-1)^k \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et en remplaçant  $p$  dans l'équation (2.38) par  $-p$  on peut écrire

$$f_h^{(-p)}(x) = \frac{1}{h^{-p}} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} f(x - kh) \quad (2.39)$$

où  $p$  est un nombre entier positif, [105]. Si  $p$  est fixé, alors  $f_h^{(-p)}(x)$  tend vers une limite nulle quand  $x \rightarrow 0$ . Pour arriver à une limite non nulle, on suppose que  $n \rightarrow \infty$  quand  $x \rightarrow 0$ . On peut prendre  $h = \frac{x-a}{n}$ , où  $a$  est une constante réelle, et on considère la valeur limite, soit finie ou infinie, de  $f_h^{(-p)}(x)$ , que l'on notera comme suit :

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(-p)}(x) = {}_a D_x^{-p} f(x) = I_{a,x}^p f(x) \quad \text{avec } nh = x - a$$

Ce qui permet, d'après tout calcul fait, d'aboutir à :

$$\begin{aligned} D_{a,x}^{-p} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^p \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} f(x - kh) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^x (x-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \\ &= I_{a,x}^p f(x) \end{aligned} \quad (2.40)$$

On peut prouver par récurrence [105] que si l'expression (2.40), de droite, est vérifiée au rang  $p$  alors elle est aussi vérifiée pour  $p+1$ . De même on peut aussi montrer qu'elle est une représentation d'une intégrale répétée  $p$ -fois qui permet d'aboutir au résultat suivant :

$$D_{a,x}^p f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{p}{k} f(x - kh) \quad (2.41)$$

qui représente la dérivée d'ordre  $m$  si  $p = m$  et l'intégrale si  $p = -m$ . Cette observation entraîne naturellement l'idée d'une généralisation des notions de différentiation et d'intégration en imposant à  $p$  d'être un nombre réel, ou même complexe. On se restreindra ici aux valeurs réelles de  $p$ . Ainsi sans rentrer dans les détails mathématiques :

**L'intégrale donne :**

$$I_{a,x}^p f(x) = D_{a,x}^{-p} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^p \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} f(x - kh) = \frac{1}{(p)!} \int_a^x (x - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (2.42)$$

Si la dérivée  $f'(x)$  est continue dans  $[a, b]$ , alors en intégrant par parties on pourra écrire sous la forme

$$I_{a,x}^p f(x) = \frac{f(a)(x-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^x (x-\tau)^p f'(\tau) d\tau \quad (2.43)$$

et si la fonction  $f(x)$  est de classe  $C^{m+1}$ , alors

$$I_{a,x}^p f(x) = D_{a,x}^{-p} f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} = \frac{1}{\Gamma(p+k+1)} \int_a^x (x-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (2.44)$$

**La dérivée donne :**

$$D_{a,x}^p f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{p}{k} f(x - kh) = \lim_{h \rightarrow 0} f_h^p(x) \quad (2.45)$$

pour  $p > 0$ .

$$D_{a,x}^p f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^x (x-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (2.46)$$

La formule (2.46) est obtenue sous l'hypothèse que les dérivées  $f^{(k)}(x)$ , ( $k = 1, 2, \dots, m+1$ ) sont continues dans l'intervalle fermé  $[a, x]$  et que  $m$  est un nombre entier vérifiant la condition  $m > p - 1$ . La plus petite valeur possible de  $m$  est déterminée par l'inégalité :  $m < p < m + 1$ .

Passons maintenant au cas d'un exposant  $\alpha$  non entier : la limite quand  $h \rightarrow 0^+$  de  $h^{-\alpha} \Delta_h^\alpha f(x)$  détermine un opérateur permettant de calculer l'inverse à gauche de  $I_{-\infty,x}^\alpha$ . Avant de préciser ce point, remarquons qu'il signifie que cette limite représente une définition de la dérivée d'ordre  $\alpha$ , non pas moins mais plus générale que la formule de Rieman-Liouville, car elle s'applique à toutes les fonctions  $f$  pouvant elles mêmes s'écrire  $f(x) = I_{-\infty,x}^\alpha \varphi$ . Ceci est établi par le théorème suivant [97] :

**Théorème 4 :** Soit  $f$  définie dans  $L^p(\mathbb{R})$  où  $1 < p < \infty$  avec  $f(x) = I_{-\infty,x}^\alpha \varphi$ ,  $\varphi$  définie dans  $L^p(\mathbb{R})$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ . Alors  $\varphi(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Delta_h^\alpha f(x)}{h^\alpha}$ , la limite

devant être entendue au sens de  $L^p(\mathbb{R})$ . Ce résultat s'applique à des fonctions  $f$  définies dans des intervalles finis en les prolongeant par 0. Ainsi on obtient

$$\Delta_h^\alpha f(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x - jh) \quad \text{pour } x > a$$

En se restreignant au cas  $a = 0$  on obtient l'approximation de "Grünwald-Letnikov" de la dérivée d'ordre  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0, x]$

$$D_{0,x}^\alpha f(x) = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{x}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x - jh) + \epsilon(h) \quad (2.47)$$

L'erreur  $\epsilon(h)$  est d'ordre  $0(h)$  lorsque le prolongement de  $f$  par 0 pour les arguments négatifs est dérivable jusqu'à l'ordre  $[\alpha] + 3$  (ce qui implique évidemment  $f(0) = 0^+$ ). Cependant le théorème ci-dessus établit l'approximation dès que  $f$  s'écrit  $I_{-\infty,x}^\alpha \varphi$ . La fonction  $f$  n'a pas besoin pour cela de s'annuler en  $0^+$ .

Nous avons vu que les dérivées fractionnaires  $D_{a,x}^\alpha$  et  $D_{x,a}^\alpha$  s'obtiennent en composant des intégrations d'ordre fractionnaire et des dérivations d'ordre entier, ces opérateurs ne commutent pas. En faisant agir dans un ordre différent les opérateurs présents dans la formule (2.25), on obtient un nouvel opérateur différent de  $D_{a,x}^\alpha$ , ces divers opérateurs sont utiles dans plusieurs domaines de physique. Nous serons conduits à l'évoquer plus tard.

#### 2.4.4 La dérivée de Caputo

La définition de Caputo peut être écrite comme :

$$\partial_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t (t - u)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(u) du = I_{0,t}^{m-\alpha} \left( \left( \frac{d}{dt} \right)^m f \right)(t) \quad (2.48)$$

avec  $m - 1 < \alpha < m$ .

On obtient ainsi un opérateur différent de la dérivée de Riemann-Liouville (2.25)-(2.26). En effet, les opérateurs  $I_{a,x}^\alpha$  et  $\frac{d}{dx}$  ne commutent pas ! Cependant on passe facilement de  $\partial_t^\alpha$  à  $D_{0,x}^\alpha$  en ajoutant une combinaison de termes liés uniquement aux conditions initiales.

Cet opérateur est différent de  $D_{0,t}^\alpha$ , comme nous allons le voir. Il a été introduit [21] pour des problèmes de mécanique dans lesquels il était indispensable. Il apparaît en particulier dans des problèmes liés à la viscoplasticité.

La différence entre la dérivée de Caputo et celle de Riemann-Liouville est liée aux valeurs en  $0^+$  de la fonction  $f$  et de ses dérivées d'ordre entier. Si on



dénote la dérivée de Caputo par  $\partial_t^\alpha$  et par  $D_t^\alpha$  la dérivée de Rieman-Liouville, entre l'une et l'autre [44][45], on peut établir la relation suivante :

$$\partial_t^\alpha = D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0+) \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}$$

La soustraction du polynôme de Taylor de degré  $m-1$  à  $t=0+$  implique une régularisation de la dérivée à l'origine. Cette dérivée a la propriété d'être zéro quand la fonction est constante. Sa transformée de Laplace s'exprime par

$$\mathcal{L}[\partial_t^\alpha f(t)] = s^\alpha \hat{f}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-1-k} f^{(k)}(0+) \quad (2.49)$$

### 2.4.5 La dérivée de Riesz-Feller

La dérivée de Riesz-Feller est définie à l'aide de sa transformée de Fourier

$$TF[\theta \nabla_x^\beta \phi(x)] = -|k|^\beta e^{i(\text{sign}k)\frac{\theta\pi}{2}} \tilde{\phi}(k) \quad (2.50)$$

Cette dérivée est importante parce que son symbole est le logarithme de la fonction caractéristique d'une loi  $\alpha$ -stable (pour  $\beta \in (0, 2]$ ), en accord avec la paramétrisation de Feller. Cet opérateur  $\theta \nabla_x^\beta$  est défini par

$$\theta \nabla_x^\beta \phi(x) = -\frac{1}{2 \cos(\frac{\beta\pi}{2})} [D_{-\infty, x}^\beta \phi(x) - D_{x, +\infty}^\beta \phi(x)] \quad (2.51)$$

## 2.5 Fonction de Mittag-Leffler

La fonction exponentielle  $e^z$ , joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par Mittag-Leffler [79][80].

### 2.5.1 Définition

Les fonctions de Mittag-Leffler sont définies comme suit [31][32][33]

$$\mathbf{E}_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (2.52)$$

Avec  $\alpha = 1$  on reconnaît l'exponentielle qui est un cas très particulier des fonctions de Mittag-Leffler à 1 paramètre notées  $\mathbf{E}_\alpha$ . Ces dernières font elles mêmes partie de l'ensemble plus général des fonctions de Mittag-Leffler  $\mathbf{E}_{\alpha, \beta}$  à

deux paramètres car on a  $\mathbf{E}_\alpha = \mathbf{E}_{\alpha,1}$ . La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres a été introduite par Argawal [2]. Elle est définie par le développement en série [31][32][33] qui suit

$$\mathbf{E}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \quad (2.53)$$

pour ( $\beta = 1$ ) on retrouve bien la relation (2.52) avec

$$\mathbf{E}_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \mathbf{E}_\alpha(z), \quad (2.54)$$

Pour les équations différentielles d'ordre non entier, la fonction de Mittag-Leffler joue un rôle analogue à celui de la fonction exponentielle dans le cas des dérivées d'ordre entier. Ceci se voit facilement à l'aide de la transformation de Laplace.

### 2.5.2 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres peut s'écrire

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{\beta-1} \mathbf{E}_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha) dt = \frac{s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha \pm a)} \quad (2.55)$$

Dans cette relation générale, on déduit la transformée de Laplace de  $\mathbf{E}_\alpha(-at^\alpha)$  qui s'écrit :

$$\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + a} = \frac{1}{as^{1-\alpha} + s} \quad (2.56)$$

### 2.5.3 Equations différentielles vérifiées par les fonctions de Mittag-Leffler

Comme le symbole de Laplace de l'opérateur  $D_{0,t}^\alpha$  est  $s^\alpha$  et que  $\mathbf{E}_\alpha(0) = 1$ , on voit immédiatement que  $\mathbf{E}_\alpha(-at^\alpha)$  est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$aD_{0,t}^{1-\alpha} \mathbf{E}_\alpha(-at^\alpha) + \partial_t \mathbf{E}_\alpha(-at^\alpha) = 0 \quad (2.57)$$

qui donne la relation bien connue

$$a\mathbf{E}_1(-at) + \partial_t \mathbf{E}_1(-at) = 0 \quad (2.58)$$

dans le cas de l'exponentielle.

A cause de la relation (2.57) les fonctions du type de Mittag-Leffler  $\mathbf{E}_\alpha(-\Lambda t^\alpha)$  jouent un rôle important pour les équations aux dérivées partielles mettant en jeu des dérivées temporelles d'ordre fractionnaire. Elles interviennent en particulier lorsqu'on développe les solutions de certaines e.d.p généralisant l'équation de la diffusion, en utilisant les fonctions propres du second membre [29]. Elles interviennent donc en particulier dans la méthode de séparation de variables. D'autre part les fonctions propres du second membre d'une e.d.p d'évolution jouent un rôle essentiel dans la solution de problèmes non linéaires, puisqu'on s'en sert souvent pour développer les solutions de ces derniers [37][39][29]. Pour cette raison, les fonctions  $\mathbf{E}_\alpha(-\Lambda t^\alpha)$  jouent pour les e.d.p fractionnaires en temps le rôle que les exponentielles jouent pour les e.d.p non linéaires incluant des dérivées temporelles d'ordre entier.

#### 2.5.4 Représentation graphique

Pour  $0 < \alpha \leq 1$  la fonction  $\mathbf{E}_\alpha(-\Lambda t^\alpha)$  ressemble à l'exponentielle "étirée"  $e^{-\Lambda t^\alpha}$  au voisinage de 0, et à la puissance  $\frac{1}{\Lambda t^\alpha \Gamma(1-\alpha)}$  au voisinage de  $+\infty$ . C'est de plus une fonction strictement positive décroissante, comme le représente la figure 2.13

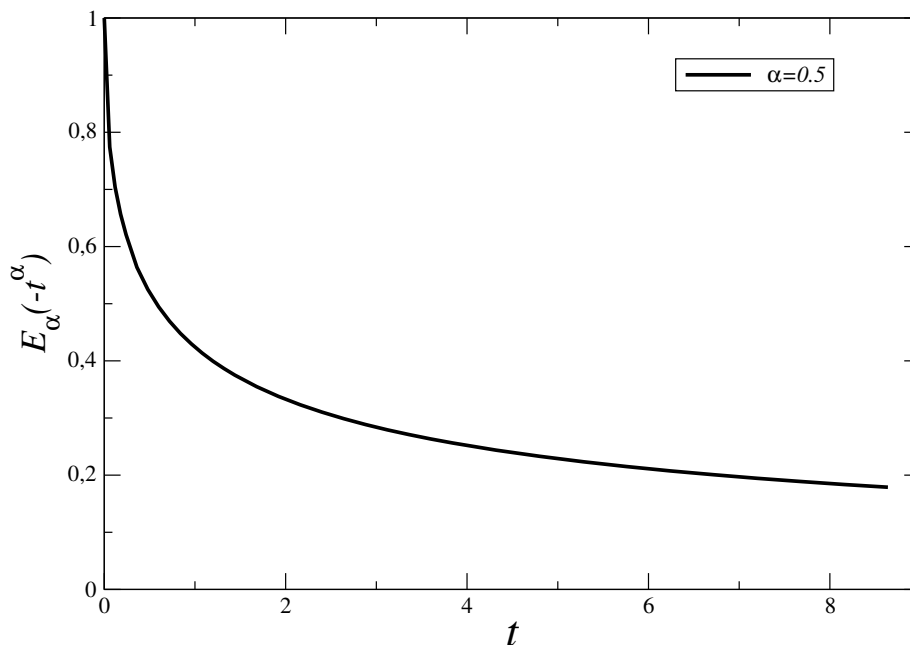


FIGURE 2.13 – Courbe de la fonction de Mittag-Leffler  $\mathbf{E}_\alpha(-\Lambda t^\alpha)$  pour  $\Lambda = 1$  et  $\alpha = 0.5$

Pour calculer numériquement les fonctions  $\mathbf{E}_\alpha(-\Lambda t^\alpha)$  on peut utiliser la série (2.52) lorsque l'argument est petit. Sinon, il vaut mieux utiliser des formules intégrales issues de l'inversion de la transformée de Laplace en modifiant le contour d'intégration [94]. On peut aussi remarquer que la relation (2.56) implique que  $\mathbf{E}_\alpha(-\Lambda t^\alpha)$  n'est autre que  $(Id + \Lambda I^\alpha)^{-1}(1)$ . Plus loin, au chapitre III nous décrivons une méthode pour discrétiser l'opérateur  $(Id + \Lambda I^\alpha)^{-1}$ . On peut donc aussi calculer numériquement ainsi la fonction  $\mathbf{E}_\alpha(-\Lambda t^\alpha)$ .

## 2.6 Conclusion

Ce chapitre a rappelé la notion de variable aléatoire normale ou  $\alpha$ -stable. Ces lois sont impliquées dans l'étude de nombreux phénomènes physiques et dans l'interprétation de nombreuses données. Ceci est dû au fait que les lois  $\alpha$ -stables jouent un rôle aussi important que la loi normale. Comme elle, elles régissent la répartition de toutes les variables aléatoires obtenues en ajoutant un grand nombre de variables identiquement distribuées, sous certaines conditions. Les définitions des dérivées et intégrales fractionnaires ont aussi été rappelées. La loi normale est intimement liée à l'équation d'advection dispersion. Les lois  $\alpha$ -stables sont associées à la vaste classe d'équations aux dérivées partielles incluant des dérivées temporelles d'ordre fractionnaire. C'est la conséquence du Théorème de la Limite Centrale Généralisé. La définition des fonctions de Mittag-Leffler qui jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire a été rappelée.

---