Modèle de Jaynes-Cummings

4.1 introduction

Le modèle standard de Jaynes-Cummings (JCM) largement utilisé en optique quantique qui est le modèle le plus élémentaire décrivant l'interaction d'atomes à deux niveaux avec des champs électromagnétiques quantifiés dans l'approximation dipolaire. Ce modèle est exactement résoluble dans l'approximation d'onde tournante (RWA) qui consiste à supprimer les termes «non conservateurs d'énergie» de l'hamiltonien et a suscité de nombreuses recherches théoriques et expérimentales au cours des dernières décennies. Le JCM permet de calculer toutes les propriétés de la mécanique quantique du système. Les caractéristiques quantiques les plus intéressantes et les plus frappantes du modèle sont les soi-disant effondrements et reprises des oscillations de Rabi lorsque le champ est initialement préparé dans l'état quantique le plus classique, l'état cohérent ou dans un état de vide pressé. Il a été reconnu que ces effets purement quantiques sont une preuve de la granularité du champ de rayonnement.

L'étude de JCM par le formalisme l'intégrale de chemin en représentation des état cohérent a été faites par plusieurs auteurs.Nous citérons Zaheer et Zubairy [8]

qui on résolu le modéle de J-C dans l'approxiamtion d'onde tournante .Malheureusement, le propagateur est exprimés par une série de perturbations qui n'a pas été évalué pour tous les ordres.Par la même methode Buzek [9] comme Boudjedaa et al [10] ont déterminé le propagateur associé à la généralisation multi photon du modèle J-C . Dans ce cas les séries de perturbation ont été sommée dans des cas particuliers stationnaires (interaction indépendants de temps)

Dans ce qui suit ,nous allons essayer de sommer ces série ,correspondantes au cas non stationnaires ,ayant une forme particulière .

4.2 Hamiltonien de JCM

Dans cette section nous considérons l'hamiltonien du modèle de Jaynes-Cummings genéralisé donné par l'expression suivante

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} \\ \hat{H} &= \omega(a^+a+\frac{1}{2}) + \frac{\omega_0}{2}\sigma_3 + g\left[F(a,a^+,t)\sigma_+ + F^+(a,a^+,t)\sigma-\right] \end{aligned} \tag{4.1}$$

Nous remerquons que l'hamiltonien de JCM à trois composentes qui sont

•énergie du champ.

• énergie des transitions atomiques à 2-niveaux.

• énergie de l'interaction du champ des photons avec l'atome

$\hat{H}_0$ est l' hamiltonien du champs libre (photons)

$$\hat{H}_0 = \omega(a^+a+\frac{1}{2}) \tag{4.2}$$

$H_0^{(at)}$ est l'hamiltonien libre des 2-niveaux

$$H_0^{(at)} = \frac{\omega_0}{2}\sigma_3$$

et $\hat{H}_{int}$est l' hamiltonien d'interaction

$$\hat{H}_{int} = g[F(a,a^+,t)\sigma_+ + F^+(a,a^+,t)\sigma- \tag{4.3}$$

où a et a^+ sont les opérateurs de création et d'annihilation du champ de photons, ω est la fréquence du champ, ω_0 est la fréquence de transition entre l'état excité et l'état fondamental de l'atome, $F(a,a^+,t)$ est une fonction de a et a^+ qui est donnée par l'expression suivante

$$F(a,a^+,t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n}(t)a^{+m}a^n \tag{4.4}$$

l'ensemble des matrices $\{\sigma_+,\sigma_-,\sigma_3\}$ sont les matrices de Pauli standards qui decrivent le système à deux niveaux et $C_{m,n}(t)$ est une fonction quelconque du temps et des opérateurs a et a^+ .

4.3 JCM dans sa version intégrale de chemin

Comme nous avons vu, l'hamiltonien du modèle de Jaynes-Cummunings est de la forme

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) &= \omega(a^+a + \frac{1}{2}) + \frac{\omega_0}{2}\sigma_3 + g[F(a,a^+,t)\sigma_+ + F^+(a,a^+,t)\sigma-] \\ &= \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \end{aligned} \tag{4.5}$$

avec

$$\hat{H}_0(\text{photons}) = \omega(a^+a + \frac{1}{2}) \tag{4.6}$$

$$\hat{H}_1(t)(\text{2level-photons}) = \left(\frac{\omega_0}{2}\sigma_3 + g\left[F(a,a^+,t)\sigma_+ + F^+(a,a^+,t)\sigma-\right]\right) \tag{4.7}$$

Pour pouvoir construire l'intégrale du chemin corrspondante à ce modèle, introduisons d'abord le modèle fermionique de spin dû à Schwinger. Nous remplaçons les matrices de Pauli σ_j par une paire d'operateur fermioniques (u, d) suivant la recette

$$\sigma_j = \begin{pmatrix} u^+ & d^+ \end{pmatrix} \sigma_j \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

et par un simple calcul nous trouvons

$$\begin{cases} \sigma_3 = u^+u - d^+d \\ \sigma_- = d^+u \\ \sigma_+ = u^+d \end{cases} \tag{4.9}$$

Les opérateurs fermioniques et bosoniques verifient les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} u^+\left|0\right\rangle &= \left|\uparrow\right\rangle, d^+\left|0\right\rangle = \left|\downarrow\right\rangle \\ u\left|0\right\rangle &= d\left|0\right\rangle = 0 \\ a\left|\alpha\right\rangle &= \alpha\left|\alpha\right\rangle \end{aligned} \tag{4.10}$$

Ainsi, d'après les relations (4.10)l'Hamiltonien prend la forme suivante

$$\hat{H}(t) = \omega(a^+a + \frac{1}{2}) + \frac{\omega_0}{2}(u^+u - d^+d) + g[F(a,a^+,t)u^+d + F^+(a,a^+,t)d^+u] \tag{4.11}$$

La construction de l'intégrale de chemin du propagateur suit en introduisant l'état cohérent fermion -boson $|\alpha, \psi, \phi\rangle$ où α est une variable complexe et (ψ, ϕ) sont des variables de Grassmann. On définit alors le propagateur entre l'état $|\alpha_i, \psi_i, \phi_i\rangle$ à l'instant $t_i = 0$ à l'état $\left|\alpha_f, \psi_f, \phi_f\right\rangle$ à l'instant $t_f = T$ par les éléments matriciels de l'opérateur d'évolution temporelle

$$K(f, i, T) = \langle \alpha_f, \psi_f, \phi_f \mid U(T, 0) \mid \alpha_i, \psi_i, \phi_i \rangle \tag{4.12}$$

avec $U(T,0) = T_D \exp[-i\int_0^T \hat{H}(t)dt]$,

T_D est l'operateur chronologique de dyson.

Discrétisons l'intervale du temps $[0.T]$ en N interval avec $T = N\epsilon$ et prenons la limite $N \longrightarrow \infty, \epsilon \ll 1$

Utilisons d'abord la formule de Trotter

$$U(T,0) = \lim_{N\to\infty}[e^{\left(-i\epsilon\hat{H}_0\right)}e^{\left(-i\epsilon\hat{H}_1(t)\right)}]^N = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}U(t_n,t_{n-1}) \tag{4.13}$$

D'aprés la définition (2.6) le propagateur s'écrira sous la forme

$$\begin{aligned} K(f,i,T) &= \lim_{N\to\infty}\langle\alpha_f,\psi_f,\phi_f \mid \prod_{n=1}^{N}U(t_n,t_{n-1}) \mid \alpha_i,\psi_i,\phi_i\rangle \\ &= \lim_{N\to\infty}\langle\alpha_f,\psi_f,\phi_f \mid [e^{-i\epsilon H_0}e^{-i\epsilon\hat{H}_1(t)}]^N \mid \alpha_i,\psi_i,\phi_i\rangle \end{aligned} \tag{4.14}$$

et à ce niveau, nous insérons les $(N-1)$ relation de fermeture relative à la base$\{\alpha,\psi,\phi\}$, il vient

$$\begin{aligned} K(f,i,T) &= \lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N-1}\frac{d\alpha_j^*d\alpha_j}{2\pi i}\langle\alpha_j \mid e^{-i\epsilon(H_0)} \mid \alpha_{j-1}\rangle \\ &\quad \lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N-1}d\psi_j^*d\psi_jd\phi_j^*d\phi_je^{-\psi_j^*\psi_j-\phi_j^*\phi_j} \\ &\quad \langle\psi_j,\phi_j \mid e^{-i\epsilon(H_{int})} \mid \psi_{j-1},\phi_{j-1}\rangle \end{aligned} \tag{4.15}$$

Ensuite, calculons les éléments de matrice pour les bosons

$$\begin{aligned} \langle\alpha_j \quad &\mid \quad e^{-(i\epsilon H_0)} \mid \alpha_{j-1}\rangle = \langle\alpha_j \mid e^{-i\epsilon\omega(aa^+ + \frac{1}{2})} \mid \alpha_{j-1}\rangle \\ &= \langle\alpha_j \mid \left(1 - i\epsilon\omega\left[aa^+ + \frac{1}{2}\right]\right) \mid \alpha_{j-1}\rangle \\ &= \langle\alpha_j \mid \alpha_{j-1}\rangle\left(1 - \frac{i\epsilon\omega\langle\alpha_j \mid (aa^+ + \frac{1}{2}) \mid \alpha_{j-1}\rangle}{\langle\alpha_j \mid \alpha_{j-1}\rangle}\right) \end{aligned} \tag{4.16}$$

ce qui signifie

$$\langle\alpha_j \mid e^{\left(-\frac{i\epsilon}{\hbar}H_0\right)} \mid \alpha_{j-1}\rangle = \langle\alpha_j \mid \alpha_{j-1}\rangle e^{-i\epsilon\omega(\alpha_j^*\alpha_{j-1}+\frac{1}{2})} \tag{4.17}$$

en utilisant la formule d'orthogonalité on obtient

$$\begin{aligned}\langle\alpha_j \quad | \quad e^{-(i\epsilon H_0)} \mid \alpha_{j-1}\rangle = \exp - \left[\frac{1}{2}(\alpha_j^*(\alpha_j - \alpha_{j-1}) + \alpha_{j-1}(\alpha_j^* - \alpha_{j-1}^*)\right] \\ \times \exp\left[-i\epsilon\omega(\alpha_j^*\alpha_{j-1} + \frac{1}{2})\right]\end{aligned} \tag{4.18}$$

Maintenant, intéressons nous aux éléments de matrice des fermions via l'utilisation des propriétés(4.10), nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle\psi_j, \phi_j \quad | \quad e^{-(i\epsilon H_1)} \mid \psi_{j-1}, \phi_{j-1}\rangle = \exp\Big\{-\frac{1}{2}(1 - i\epsilon\frac{\omega_0}{2})\psi_j^*\psi_{j-1} + (1 + i\epsilon\frac{\omega_0}{2})\phi_j^*\phi_{j-1} \\ -i\epsilon gF(\alpha_j^*, \alpha_j, t)\psi_j^*\phi_{j-1} - i\epsilon gF(\alpha_j^*, \alpha_j, t)\phi_j^*\psi_{j-1}\Big\}\end{aligned} \tag{4.19}$$

Insérons les équations $(4.18, 4.19)$ dans(4.15) , nous avons alors

$$\begin{aligned}K(f, i, T) &= \lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N-1}\frac{d\alpha_j^* d\alpha_j}{2\pi i}\exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha_j^*(\alpha_j - \alpha_{j-1}) + \alpha_{j-1}(\alpha_j^* - \alpha_{j-1}^*)\right] \\ &\quad \times e^{-i\epsilon\omega(\alpha_j^*\alpha_{j-1} + \frac{1}{2})]}\lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N-1} d\psi_j^* d\psi_j d\phi_j^* d\phi_j e^{\left(-\psi_j^*\psi_j - \phi_j^*\phi_j\right)} \qquad (4.20) \\ &\quad \times \exp\Big\{-\frac{1}{2}(1 - i\epsilon\frac{\omega_0}{2})\psi_j^*\psi_{j-1} + (1 + i\epsilon\frac{\omega_0}{2})\phi_j^*\phi_{j-1} \\ &\quad -i\epsilon gF(\alpha_j^*, \alpha_j, t)\psi_j^*\phi_{j-1} - i\epsilon gF(\alpha_j^*, \alpha_j, t)\phi_j^*\psi_{j-1}\Big\} \qquad (4.21)\end{aligned}$$

pour simplifier l'écriture de cette equation, nous posons que

$$K(f, i, T) = \lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N-1} D\alpha^* D\alpha \exp\left\{i\int_0^T dt\left[\frac{i}{2}(\alpha^*\dot{\alpha} - \alpha\dot{\alpha}^*) - \omega\alpha^*\alpha - \frac{\omega}{2})\right]\right\} K^\alpha(f, i, T) \tag{4.22}$$

avec $K^\alpha(f, i, T)$ le propagateur partiel qui s'ecrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned}K^\alpha(f, i, T) &= \lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N-1} d\psi_j^* d\psi_j d\phi_j^* d\phi_j \; e^{\left(-\psi_j^*\psi_j - \phi_j^*\phi_j\right)} \qquad (4.23) \\ &\quad \exp\Big\{-\frac{1}{2}(1 - i\epsilon\frac{\omega_0}{2})\psi_j^*\psi_{j-1} + (1 + i\epsilon\frac{\omega_0}{2})\phi_j^*\phi_{j-1} \qquad (4.24) \\ &\quad -i\epsilon gF(\alpha_j^*, \alpha_j, t)\psi_j^*\phi_{j-1} - i\epsilon gF(\alpha_j^*, \alpha_j, t)\phi_j^*\psi_{j-1}\Big\} \qquad (4.25)\end{aligned}$$

Pour effectuer les intégrales gaussiennes sur ψ_j et ϕ_j nous introduisons le vecteur à deux composantes défini par

$$q_j = \begin{pmatrix}\psi_j \\ \phi_j\end{pmatrix} \text{ et } q_j^+ = \begin{pmatrix}\psi_j^* & \phi_j^*\end{pmatrix}$$

de manière que le propagateur partiel $K^{\alpha}(f,i,T)$ sera écrit comme

$$K^{\alpha}(f,i,T) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j^+ dq_j \exp\{-\sum_{j=1}^{N-1} q_j^+ q_j + \sum_{j=1}^{N} q_j^+ R(\alpha_j,t_j) q_{j-1}\} \tag{4.26}$$

Nous pouvons mettre l'exposant sous la forme

$$\begin{aligned} & -\sum_{j=1}^{N-1} q_j^+ (1\delta_{ij} - R(\alpha_j,t_j)\delta_{i,j+1})\ q_j + q_N^+\ R(\alpha_{N+1}, N+1) q_{N+1} + q_1^+ R(1) q_i && (4.27)\\ = \quad & -P^+ M P + P^+ V + W^+ P && (4.28) \end{aligned}$$

où $R(\alpha_j,t_j)$ est une matrice donnée par

$$R(\alpha_j,t_j) = \begin{pmatrix} 1 - i\epsilon\frac{\omega_0}{2} & -i\epsilon g F(\alpha_j^*, \alpha_j, t) \\ -i\epsilon g F^*(\alpha_j^*, \alpha_j, t) & 1 + i\epsilon\frac{\omega_0}{2} \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

et

$$P = \{q_l\}, \qquad M_{lm} = 1\delta_{lm} - R(\alpha,t)\delta_{l,m+1} \quad l,m \in [1,N] \tag{4.30}$$

Les vecteurs V et W^+ sont définis par

$$V = \begin{pmatrix} R(\alpha_1,1)q_1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & q_{N+1}R(\alpha_{N+1}, N+1) \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

Suivant les définitions des matrices précédentes, le propagateur partiel $K^{\alpha}(f,i,T)$ prendra la forme d'une intégrale gaussienne multidimensionelle

$$K^{\alpha}(f,i,T) = \int dP^+ dP exp(-P^+ M P + P^+ V + W^+ P) \tag{4.32}$$

et pour faciliter l'intégration de cette gaussienne, nous faisons le changement suivant

$$P \to P + M^{-1}V, \qquad P^+ \to P^+ + W^+ M^{-1} \tag{4.33}$$

d'où alors

$$K^{\alpha}(f,i,T) = \det M \exp(W^+ M^{-1} V) \tag{4.34}$$

en tenant compte du fait que

$$\begin{aligned} \det M &= 1 && (4.35)\\ R(\alpha,T) &= M^{-1} = \lim_{N\to\infty}\prod_{\underleftarrow{j=1}}^{N-1} R(\alpha_j,t_j) && (4.36)\end{aligned}$$

La flèche sous le symbole du produit indique l'opération de classement temporel et $R(\alpha_j,t_j)$ sont les éléments de matrice de $R(\alpha,T)$

Dans la limite $N\to\infty$ nous avons

$$W^+M^{-1}V = \lim_{N\to\infty}[q_f^+R(N+1)R(N).....R(1)q_0] = q_f^+R(\alpha,T)q_0 \tag{4.37}$$

et finalement on a pour le propagateur $K^\alpha(f,i,T)$ devient

$$K^\alpha(f,i,T) = \exp(q_f^+R(\alpha,T)q_0) \tag{4.38}$$

Pour évaluer les éléments de la matrice $R(\alpha,T)$, nous écrirons cette matrice$R(\alpha_j,t_j)$ comme la somme d'une matrice diagonale et une autre anti-diagonale (pour le premier ordre en ϵ)

$$\begin{aligned} R(\alpha_j,t_j) &= \begin{pmatrix} 1-i\epsilon\frac{\omega_0}{2}\sigma_3 & -i\epsilon gF(\alpha_j^*,\alpha_j,t)\\ -i\epsilon gF^*(\alpha_j^*,\alpha_j,t) & 1+i\epsilon\frac{\omega_0}{2}\sigma_3\end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} 1-i\epsilon\frac{\omega_0}{2}\sigma_3 & \\ & 1+i\epsilon\frac{\omega_0}{2}\sigma_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & -i\epsilon gF(\alpha_j^*,\alpha_j,t)\\ -i\epsilon gF^*(\alpha_j^*,\alpha_j,t) & \end{pmatrix} \\ &= e^{-i\epsilon\frac{\omega_0}{2}\sigma_3} + i\epsilon K(\alpha_j,t_j)\end{aligned} \tag{4.39}$$

avec

$$K(\alpha_j,t_j) = \begin{pmatrix} & -i\epsilon gF(\alpha_j^*,\alpha_j,t)\\ -i\epsilon gF^*(\alpha_j^*,\alpha_j,t) & \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

suivant(4.36) nous avons

$$R(\alpha,T) = \prod_{\underleftarrow{j=1}}^{N}[e^{-i\epsilon\frac{\omega_0}{2}\sigma_3} + i\epsilon K(\alpha_j,t_j)] \tag{4.41}$$

et on peut facilement obtenir la représentation en série suivante des éléments $R(\alpha_j,t_j)$ comme suit

$$
\begin{aligned}
\prod_{\underset{\longleftarrow}{j=1}}^{N} \exp(-i\epsilon\frac{\omega_0}{2}\sigma_3 + K(\alpha_j, t_j)) \;=\; & \sum_{l=1}^{N} i\epsilon \exp(-i\frac{\omega_0}{2}\sigma_3) + \\
& \sum_{l=1}^{N}(i\epsilon)\exp(-i\sum_{l+1}^{N}\epsilon\frac{\omega_0}{2}\sigma_3)K(\alpha_l, l)\exp(-i\sum_{1}^{l-1}\epsilon\frac{\omega_0}{2}\sigma_3) \\
& + \sum_{l_1=1}^{N}\sum_{l_2=1}^{l_1-1}(i\epsilon)^2\exp(-i\sum_{l_1+1}^{N}\epsilon\frac{\omega_0}{2}\sigma_3)K(\alpha_{l_1}, l_1) \\
& \exp(-i\sum_{l_2+1}^{l_1-1}\epsilon\frac{\omega_0}{2}\sigma_3)K(\alpha_{l_2}, l_2)\exp(-i\sum_{1}^{l_2-1}\epsilon\frac{\omega_0}{2}\sigma_3) \\
& +..+\sum_{l_1=1}^{N}\sum_{l_2=1}^{l_1-1}\sum_{l_3=1}^{l_2-1}..\sum_{l_{N-1}=1}^{l_{N-1}-1}\sum_{l_N=1}^{l_{N-1}-1}(i\epsilon)^N\exp(-i\sum_{l_1+1}^{N}\epsilon\frac{\omega_0}{2}\sigma_3)K(\alpha_{l_1}, l_1) \\
& \times\exp(-i\sum_{l_2+1}^{l_1-1}\epsilon\frac{\omega_0}{2}\sigma_3)K(\alpha_{l_2}, l_2)\times\exp(-i\sum_{l3+1}^{l_2-1}\epsilon\frac{\omega_0}{2}\sigma_3)K(\alpha_{l_3}, l_3) \\
& \times\exp(-i\sum_{l_{N+1}+1}^{l_{N-2}-1}\epsilon\frac{\omega_0}{2}\sigma_3)K(\alpha_{l_{N-1}}, l_{N-1}) \\
& \times\exp(-i\sum_{l_N+1}^{l_{N-1}-1}\epsilon\frac{\omega_0}{2}\sigma_3)K(\alpha_{l_N}, l_N)\exp(-i\sum_{1}^{l_N-1}(\epsilon\frac{\omega_0}{2}\sigma_3) \qquad (4.42)
\end{aligned}
$$

et à la limite $N \to \infty$, le produit devient

$$
\begin{aligned}
\prod_{j_{\leftarrow}=1}^{N}(e^{-i\epsilon\frac{\omega_0}{2}\sigma_3} + K(\alpha_j, t_j)) \;=\; & \exp\left(-i\int_0^T ds\frac{\omega_0}{2}\sigma_3\right) \\
& +i\int_0^T ds_1\exp\left(-i\int_{s_1}^T ds\frac{\omega_0}{2}\sigma_3\right)K(\alpha_1, s_1)\exp\left(-i\int_0^{s_1} ds\frac{\omega_0}{2}\sigma_3\right) \\
& +i^2\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\exp\left(-i\int_{s_1}^T ds\frac{\omega_0}{2}\sigma_3 K(s_1)\right) \\
& \exp\left(-i\int_{s_2}^{s1} ds\frac{\omega_0}{2}\sigma_3\right)K(\alpha_2, s_2)\exp\left(-i\int_{s_3}^{s_2} ds\frac{\omega_0}{2}\sigma_3\right) \\
& +......+(i)^N\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2(i)^N\exp\left(-i\int_{s_1}^T ds\frac{\omega_0}{2}\sigma_3\right)K(\alpha_1, s_1) \\
& \times\exp\left(-i\int_{s_2}^{s1} ds\frac{\omega_0}{2}\sigma_3\right)K(\alpha_2, s_2)\exp\left(-i\int_{s_3}^{s_2} ds\frac{\omega_0}{2}\sigma_3\right) \\
& \times K(\alpha_3, s_3).....K(\alpha_{N-1}, s_{N-1})\exp\left(-i\int_{s_N}^{s_{N-1}} ds\frac{\omega_0}{2}\sigma_3\right)K(\alpha_N, s_N) \\
& \exp\left(-i\int_0^{s_N} ds\frac{\omega_0}{2}\sigma_3\right) \qquad (4.43)
\end{aligned}
$$

ou alors

$$\begin{aligned}
\prod_{j_{\leftarrow}=1}^{N} \exp(-i\epsilon\frac{\omega_0}{2}\sigma_3 + K(\alpha_j, t_j)) &= \exp[-i\frac{\omega_0}{2}(T-0)\sigma_3] \\
&+i\int_0^T ds_1 \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)\sigma_3\right] K(\alpha_1, s_1) \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(s_1-0)\sigma_3\right] \\
&+i^2\int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)\sigma_3\right] K(\alpha_1, s_1) \\
&\exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(s_1-s_2)\sigma_3\right] K(\alpha_2, s_2) \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(s_2-s_3)\sigma_3\right] + ... \\
&(i)^N \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_1} ds_3 ...... \int_0^{s_{N-1}} ds_N \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)\sigma_3\right] \\
&K(\alpha_1, s_1) \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(s_1-s_2)\sigma_3\right] K(\alpha_2, s_2) \\
&\exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(s_2-s_3)\sigma_3\right] K(\alpha_3, s_3).... \\
&\exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(s_{N-1}-s_N)\sigma_3\right] K(\alpha_N, s_N) \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(s_N-0)\sigma_3\right] \quad (4.44)
\end{aligned}$$

Un calcul simple montre que les termes pairs et impairs dans l'expression ci-dessus sont, respectivement, les éléments diagonaux et anti-diagonaux. En utilisant les expressions des matrices $\sigma_k; k = 1, 2, 3$ et celle de la fonction $K(\alpha_j, t_j)$, on a alors pour les éléments de matrice $R_{ij}(\alpha, T)$ les écritures suivantes

$$\begin{aligned}
R_{11}(\alpha, T) &= \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}T\right] + (-ig)^{2N} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_1} ds_3 ...... \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\
&\exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)\right] F(\alpha_1, s_1) \exp\left[i\frac{\omega_0}{2}(s_1-s_2)\right] \\
&F^*(\alpha_2, s_2).... \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N-1}-s_{2N})\right] F(\alpha_{2N-1}, s_{2N})... \\
&\times \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N}-0)\sigma_3\right] \qquad (4.45)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
R_{12}(\alpha, T) &= (-ig)\int_0^T ds_1 \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)\right] F(\alpha_1, s_1) \exp\left[i\frac{\omega_0}{2}(s_1-0)\right] \\
&+(-ig)^{2N+1} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_1} ds_3 ...... \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} \\
&\exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)\right] F(\alpha_1, s_1) \exp\left[i\frac{\omega_0}{2}(s_1-s_2)\right] \\
&F^*(\alpha_2, s_2) \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(s_2-s_3)\right] F(\alpha_3, s_3) \times .... \\
&\times.. \exp\left[-i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N}-s_{N+1})\right] F(\alpha_{2N+1}, s_{2N+1}) \exp\left[i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N}-0)\right] ... \qquad (4.46)
\end{aligned}$$

D'aprés les formules suivantes, nous pouvons obtenir les autres éléments de matrice $R_{ij}(\alpha, T)$

$$\begin{cases} R_{21}(\alpha,T) = -R_{12}^*(\alpha,T) \\ R_{11}^*(\alpha,T) = R_{22}(\alpha,T) \end{cases}$$

Finalement, la forme finale du propagateur $K(f,i,T)$ est

$$\begin{aligned} K(f,i,T) &= \lim_{N\to\infty} \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} \prod_{j=1}^{N-1} D\alpha^* D\alpha \exp\left\{ i\int_0^T dt \left[\frac{i}{2}(\alpha^*\dot{\alpha} - \alpha\dot{\alpha}^*) - \omega\alpha^*\alpha - \frac{\omega}{2}) \right] \right\} \\ &\times \exp\left[\psi_f^*(R_{11}(\alpha,T)\psi_i + R_{12}(\alpha,T)\phi_i)\right] \exp\left[\phi_f^*(R_{21}(\alpha,T)\psi_i + R_{22}(\alpha,T)\phi_i)\right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

4.4 Amplitudes de transition

Dans la suite nous allons calculer les amplutides de transition entre les états propres de spin.

4.4.1 Transition up-up

L'amplutide de transition up-up est définie comme les éléments de matrice $K_{\uparrow\uparrow}$

$$K_{\uparrow\uparrow} = \langle\uparrow| K(f,i,T) |\uparrow\rangle \quad (4.48)$$

Introduisant les relations de fermeture suivantes

$$\begin{cases} \int d\psi_f^* d\psi_f e^{-\psi_f^*\psi_f} \left|\psi_f\right\rangle \left\langle\psi_f\right| = 1, \int d\psi_i^* d\psi_i e^{-\psi_i^*\psi_i} \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right| = 1 \\ \int d\phi_f^* d\phi_f e^{-\phi_f^*\phi_f} \left|\phi_f\right\rangle \left\langle\phi_f\right| = 1, \int d\phi_i^* d\phi_i e^{-\phi_i^*\phi_i} \left|\phi_i\right\rangle \left\langle\phi_i\right| = 1 \end{cases} \quad (4.49)$$

nous aurons

$$\begin{aligned} K_{\uparrow\uparrow} &= \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \quad (4.50) \\ &\times \exp\left\{ -\left|\psi_f\right|^2 - |\psi_i|^2 - \left|\phi_f\right|^2 - |\phi_i|^2 \right\} \left\langle\uparrow \left|\psi_f,\phi_f\right.\right\rangle K(f,i,T) \left\langle\psi_i,\phi_i\right|\left.\uparrow\right\rangle \end{aligned}$$

et à ce stade, il vaut mieux introduire le vecteur $v^+ = \begin{pmatrix} \psi_i^* & \psi_f^* & \phi_f^* & \phi_i^* \end{pmatrix}$ et les notations suivantes pour effectuer le calcul rapidement .

$$\begin{cases} \langle\uparrow \left|\psi_f,\phi_f\right\rangle = \psi_f \quad ,\langle\psi_i,\phi_i| \uparrow\rangle = \psi_i^* \qquad ,\langle\downarrow \left|\psi_f,\phi_f\right\rangle = \phi_f, \qquad \langle\psi_i,\phi_i| \downarrow\rangle = \phi_i^* \\ \psi_f \ \psi_i^* = e^{-\psi_i^*\psi_f} - 1 \qquad ,\phi_f \ \phi_i^* = e^{-\phi_i^*\phi_f} - 1 \end{cases} \quad (4.51)$$

Substitution (4.51)dans(4.50) , il vient

$$
\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow} \quad = \quad & \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\
& \times \exp\left\{-\left|\psi_f\right|^2 - \left|\psi_i\right|^2 - \left|\phi_f\right|^2 - \left|\phi_i\right|^2\right\} \exp\left[\psi_f^*(R_{11}\psi_i + R_{12}\phi_i)\right] \\
& \times \exp\left[\phi_f^*(R_{21}\psi_i + R_{22}\phi_i)\right] \times [e^{(-\psi_i^*\psi_f)} - 1] \\
& \times \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp\left\{i\int_0^T dt\left[\frac{i}{2}(\alpha^*\dot{\alpha} - \alpha\dot{\alpha}^*) - \omega\alpha^*\alpha - \frac{\omega}{2}\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

et

$$
\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow} \quad = \quad & \{\int dv dv^+ \exp\left\{-\left|\psi_f\right|^2 - \left|\psi_i\right|^2 - \left|\phi_f\right|^2 - \left|\phi_i\right|^2\right\} \\
& \exp\left[\psi_f^* R_{11}\psi_i + \psi_f^* R_{12}\phi_i + \phi_f^* R_{21}\psi_i + \phi_f^* R_{22}\phi_i - \psi_i^*\psi_f\right] \\
& - \int dv dv^+ \exp\left\{-\left|\psi_f\right|^2 - \left|\psi_i\right|^2 - \left|\phi_f\right|^2 - \left|\phi_i\right|^2\right\} \\
& \times \exp\left[\psi_f^*(R_{11}\psi_i + R_{12}\phi_i)\right] \exp\left[\phi_f^* R_{21}\psi_i + \phi_f^* R_{22}\phi_i)\right] \\
& \times \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp\left[i\int_0^T dt\left(\frac{i}{2}(\alpha^*\dot{\alpha} - \alpha\dot{\alpha}^*) - \omega\alpha^*\alpha - \frac{\omega}{2}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

nous trouvons la résultas suivante

$$
\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow} \quad = \quad & \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp\left[i\int_0^T dt\left(\frac{i}{2}(\alpha^*\dot{\alpha} - \alpha\dot{\alpha}^*) - \omega\alpha^*\alpha - \frac{\omega}{2}\right)\right] \\
& \times \int dv dv^+ \left[\exp(-v^+\grave{M}v) - \exp(-v^+Mv)\right]
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

où les matrices $\grave{M}$ et M sont définie par les formes suivantes

$$
\grave{M} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ R_{11} & -1 & R_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ R_{21} & 0 & R_{22} & -1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ R_{11} & -1 & R_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ R_{21} & 0 & R_{22} & -1 \end{pmatrix}
\tag{4.55}
$$

Remarquons que les marices $\grave{M}$ et M sont de la forme

$$
\grave{M} = \begin{pmatrix} \grave{A} & C \\ D & B \end{pmatrix}, \grave{M} = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}
\tag{4.56}
$$

et les blocs $\grave{A}$, A, B, C, D sont respectivement

$$
\grave{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ R_{11} & -1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ R_{11} & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R_{12} & 0 \end{pmatrix}
$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R_{21} & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ R_{22} & -1 \end{pmatrix} \tag{4.57}$$

Pour calculer le déterminant des matrices $\grave{M}$ et M nous utilisons l' identité

$$\det \grave{M} = \det(\grave{A} - CB^{-1}D) \det B \tag{4.58}$$

et par un calcul simple nous pouvons montrer que

$$\begin{aligned} \det B &= 1, CB^{-1}D = 0 \\ \det \grave{M} &= \det \grave{A} = 1 + R_{11}(\alpha, T), \quad \det A = \det M = 1 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Finalement, la résultat final de l'amplitude de transition up-up $K_{\uparrow\uparrow}$ est

$$K_{\uparrow\uparrow} = \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp\left\{ i \int_0^T dt \left[\frac{i}{2}(\alpha^* \dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\} R_{11}(\alpha, T) \tag{4.60}$$

et de la même manière on calcule les autres éléments de transition.

4.4.2 Transition up-down

L'amplutide de transition up-down est définie comme élément de matrice $K_{\uparrow\downarrow}$

$$K_{\uparrow\downarrow} = \langle\uparrow| K(f, i, T) |\downarrow\rangle \tag{4.61}$$

Introduisant les relations de fermeture suivantes

$$\begin{cases} \int d\psi_f^* d\psi_f e^{-\psi_f^* \psi_f} \left|\psi_f\right\rangle \left\langle\psi_f\right| = 1, \int d\psi_i^* d\psi_i e^{-\psi_i^* \psi_i} \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right| = 1 \\ \int d\phi_f^* d\phi_f e^{-\phi_f^* \phi_f} \left|\phi_f\right\rangle \left\langle\phi_f\right| = 1, \int d\phi_i^* d\phi_i e^{-\phi_i^* \phi_i} \left|\phi_i\right\rangle \left\langle\phi_i\right| = 1 \end{cases} \tag{4.62}$$

nous aurons

$$\begin{aligned} K_{\uparrow\downarrow} &= \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\ & \exp\left\{ -\left|\psi_f\right|^2 - \left|\psi_i\right|^2 - \left|\phi_f\right|^2 - \left|\phi_i\right|^2 \right\} \langle\uparrow \left|\psi_f, \phi_f\right\rangle K(f, i, T) \left\langle\psi_i, \phi_i\right| \downarrow\rangle \end{aligned} \tag{4.63}$$

En utilisant les relations (**??**) , nous avons

$$\begin{aligned} K_{\uparrow\downarrow} &= \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\ & \exp\left\{ -\left|\psi_f\right|^2 - \left|\psi_i\right|^2 - \left|\phi_f\right|^2 - \left|\phi_i\right|^2 \right\} \times \left(\psi_f \phi_i^*\right) \times K(f, i, T) \end{aligned} \tag{4.64}$$

$$
\begin{aligned}
K_{\uparrow\downarrow} &= \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\
&\exp\left\{-\left|\psi_f\right|^2 - |\psi_i|^2 - \left|\phi_f\right|^2 - |\phi_i|^2\right\} \times \exp\left[\psi_f^*(R_{11}\psi_i + R_{12}\phi_i)\right] \\
&\times \exp\left[\phi_f^*(R_{21}\psi_i + R_{22}\phi_i)\right] \times [e^{(-\phi_i^*\psi_f)} - 1] \\
&\times \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp\left\{i\int_0^T dt\left[\frac{i}{2}(\alpha^*\dot{\alpha} - \alpha\dot{\alpha}^*) - \omega\alpha^*\alpha - \frac{\omega}{2}\right]\right\}
\end{aligned} \tag{4.65}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{\uparrow\downarrow} &= \{\int dv dv^+ \exp\left\{-\left|\psi_f\right|^2 - |\psi_i|^2 - \left|\phi_f\right|^2 - |\phi_i|^2\right\} \\
&* \exp\left[\psi_f^* R_{11}\psi_i + \psi_f^* R_{12}\phi_i + \phi_f^* R_{21}\psi_i + \phi_f^* R_{22}\phi_i - \phi_i^*\psi_f\right] \\
&- \int dv dv^+ \exp\left\{-\left|\psi_f\right|^2 - |\psi_i|^2 - \left|\phi_f\right|^2 - |\phi_i|^2\right\} \\
&\times \exp\left\{\psi_f^*(R_{11}\psi_i + R_{12}\phi_i)\right] \exp[\phi_f^* R_{21}\psi_i + \phi_f^* R_{22}\phi_i)\} \\
&\div \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp\left\{i\int_0^T dt\left[\frac{i}{2}(\alpha^*\dot{\alpha} - \alpha\dot{\alpha}^*) - \omega\alpha^*\alpha - \frac{\omega}{2}\right]\right\}
\end{aligned} \tag{4.66}
$$

et alors

$$
\begin{aligned}
K_{\uparrow\downarrow} &= \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp\left\{i\int_0^T dt\left[\frac{i}{2}(\alpha^*\dot{\alpha} - \alpha\dot{\alpha}^*) - \omega\alpha^*\alpha - \frac{\omega}{2}\right]\right\} \\
&\times \int dv dv^+ \left[\exp(-v^+ \grave{M} v) - \exp(-v^+ M v)\right]
\end{aligned} \tag{4.67}
$$

avec

$$
\grave{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ R_{11} & -1 & R_{12} & 0 \\ o & -1 & -1 & 0 \\ R_{21} & 0 & R_{22} & -1 \end{pmatrix} et\ M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ R_{11} & -1 & R_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ R_{21} & 0 & R_{22} & -1 \end{pmatrix} \tag{4.68}
$$

qui sont de la forme

$$
\grave{M} = \begin{pmatrix} A & C \\ \acute{D} & B \end{pmatrix}, \grave{M} = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} \tag{4.69}
$$

On utilise l'identité suivante

$$
\det \grave{M} = \det(\grave{A} - CB^{-1}D) + \det B \tag{4.70}
$$

$$\begin{aligned} \det B &= 1, CB^{-1}D = 0 \\ \det \grave{M} &= \det \grave{A} + \det B = 1 + R_{12}(\alpha, T), \quad \det A = \det M = 1 \end{aligned} \tag{4.71}$$

Alors finalement l'amplitude de transition up-updown $K_{\uparrow\downarrow}$ s'écrira

$$K_{\uparrow\downarrow} = \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp\left\{ i \int_0^T dt \left[\frac{i}{2}(\alpha^* \dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\} R_{12}(\alpha, T) \tag{4.72}$$

4.4.3 Transition down -up

L'amplutide de transition down -up est définie comme élément de matrice $K_{\downarrow\uparrow}$

$$K_{\downarrow\uparrow} = \langle\downarrow| K(f, i, T) |\uparrow\rangle \tag{4.73}$$

On sait que

$$\begin{aligned} K_{\downarrow\uparrow} &= \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \times \\ & \exp\{-\left|\psi_f\right|^2 - |\psi_i|^2 - \left|\phi_f\right|^2 - |\phi_i|^2\} \times \langle\downarrow \left|\psi_f, \phi_f\right\rangle K(f, i, T) \left\langle\psi_i, \phi_i\right| \uparrow\rangle \end{aligned} \tag{4.74}$$

et on trouve

$$\begin{aligned} K_{\downarrow\uparrow} &= \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\ & \times \exp\left\{-\left|\psi_f\right|^2 - |\psi_i|^2 - \left|\phi_f\right|^2 - |\phi_i|^2\right\} \times \left(\phi_f \psi_i^*\right) \times K(f, i, T) \end{aligned} \tag{4.75}$$

il vient

$$\begin{aligned} K_{\downarrow\uparrow} &= \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\ & \exp\left\{-\left|\psi_f\right|^2 - |\psi_i|^2 - \left|\phi_f\right|^2 - |\phi_i|^2\right\} \times \exp\left[\psi_f^*(R_{11}\psi_i + R_{12}\phi_i)\right] \\ & \times \exp\left[\phi_f^*(R_{21}\psi_i + R_{22}\phi_i)\right] \times \left[e^{(-\psi_i^*\phi_f)} - 1\right]] \\ & \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp\left\{ i \int_0^T dt \left[\frac{i}{2}(\alpha^* \dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\} \end{aligned} \tag{4.76}$$

et

$$\begin{aligned}K_{\downarrow\uparrow} &= \{\int dvdv^{+}\exp\left\{-\left|\psi_f\right|^2-\left|\psi_i\right|^2-\left|\phi_f\right|^2-\left|\phi_i\right|^2\right\}\\&\exp\left[\psi_f^*R_{11}\psi_i+\psi_f^*R_{12}\phi_i+\phi_f^*R_{21}\psi_i+\phi_f^*R_{22}\phi_i-\psi_i^*\phi_f\right]\\&-\int dvdv^{+}\exp\left\{-\left|\psi_f\right|^2-\left|\psi_i\right|^2-\left|\phi_f\right|^2-\left|\phi_i\right|^2\right\}\\&\exp\left[\psi_f^*(R_{11}\psi_i+R_{12}\phi_i)\right]\exp\left[\phi_f^*R_{21}\psi_i+\phi_f^*R_{22}\phi_i)\right]\\&\times\int_{\alpha_i}^{\alpha_f}D\alpha^*D\alpha\exp\left\{i\int_0^T dt\left[\frac{i}{2}(\alpha^*\dot{\alpha}-\alpha\dot{\alpha}^*)-\omega\alpha^*\alpha-\frac{\omega}{2}\right]\right\}\end{aligned} \tag{4.77}$$

il vient

$$\begin{aligned}K_{\downarrow\uparrow} &= \int_{\alpha_i}^{\alpha_f}D\alpha^*D\alpha\exp\left\{i\int_0^T dt\left[\frac{i}{2}(\alpha^*\dot{\alpha}-\alpha\dot{\alpha}^*)-\omega\alpha^*\alpha-\frac{\omega}{2}\right]\right\}]\\&\times\int dvdv^{+}\left[\exp(-v^{+}\grave{M}v)-\exp(-v^{+}Mv)\right]\end{aligned} \tag{4.78}$$

avec

$$\grave{M}=\begin{pmatrix}-1&0&0&-1\\R_{11}&-1&R_{12}&0\\o&0&-1&0\\R_{21}&0&R_{22}&-1\end{pmatrix}\text{ et }M=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\R_{11}&-1&R_{12}&0\\0&0&-1&0\\R_{21}&0&R_{22}&-1\end{pmatrix}$$

La forme finale de l'amplitude de transition down-up $K_{\downarrow\uparrow}$ est

$$K_{\downarrow\uparrow}=\int_{\alpha_i}^{\alpha_f}D\alpha^*D\alpha\exp\left\{i\int_0^T dt\left[\frac{i}{2}(\alpha^*\dot{\alpha}-\alpha\dot{\alpha}^*)-\omega\alpha^*\alpha-\frac{\omega}{2}\right]\right\}R_{21}(\alpha,T) \tag{4.79}$$

4.4.4 Transition down -down

L'amplutide de transition down -up est définie comme $K_{\downarrow\downarrow}$

$$K_{\downarrow\downarrow}=\langle\downarrow|\,K(f,i,T)\,|\downarrow\rangle$$

Nous avons

$$\begin{aligned}K_{\downarrow\downarrow} &= \int d\psi_f^*d\psi_f d\psi_i^*d\psi_i d\phi_f^*d\phi_f d\phi_i^*d\phi_i\\&\times\exp\{-\left|\psi_f\right|^2-\left|\psi_i\right|^2-\left|\phi_f\right|^2-\left|\phi_i\right|^2\}\times\langle\downarrow\left|\psi_f,\phi_f\right\rangle K(f,i,T)\left\langle\psi_i,\phi_i\right|\downarrow\rangle\end{aligned} \tag{4.80}$$

et on trouve

$$\begin{aligned}
K_{\downarrow\downarrow} &= \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\
& \exp\{-\left|\psi_f\right|^2 - |\psi_i|^2 - \left|\phi_f\right|^2 - |\phi_i|^2\} \\
& \times \exp\left[\psi_f^*(R_{11}\psi_i + R_{12}\phi_i)\right] \exp\left[\phi_f^*(R_{21}\psi_i + R_{22}\phi_i)\right] \times [e^{(-\phi_i^*\phi_f)} - 1] \\
& \times \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp\left\{ i \int_0^T dt \left[\frac{i}{2}(\alpha^*\dot{\alpha} - \alpha\dot{\alpha}^*) - \omega\alpha^*\alpha - \frac{\omega}{2}\right]\right\}
\end{aligned} \tag{4.81}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
K_{\downarrow\downarrow} &= \{\int dv dv^+ \exp\left\{-\left|\psi_f\right|^2 - |\psi_i|^2 - \left|\phi_f\right|^2 - |\phi_i|^2\right\} \\
& \exp\left[\psi_f^* R_{11}\psi_i + \psi_f^* R_{12}\phi_i + \phi_f^* R_{21}\psi_i + \phi_f^* R_{22}\phi_i - \phi_i^*\phi_f\right] \\
& - \int dv dv^+ \exp\left\{-\left|\psi_f\right|^2 - |\psi_i|^2 - \left|\phi_f\right|^2 - |\phi_i|^2\right\} \\
& \times \exp\left[\psi_f^*(R_{11}\psi_i + R_{12}\phi_i)\right] \exp\left[\phi_f^* R_{21}\psi_i + \phi_f^* R_{22}\phi_i)\right] \\
& \times \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp\left\{ i \int_0^T dt \left[\frac{i}{2}(\alpha^*\dot{\alpha} - \alpha\dot{\alpha}^*) - \omega\alpha^*\alpha - \frac{\omega}{2}\right]\right\}
\end{aligned} \tag{4.82}$$

ou bien alors

$$\begin{aligned}
K_{\downarrow\downarrow} &= \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp\left\{ i \int_0^T dt \left[\frac{i}{2}(\alpha^*\dot{\alpha} - \alpha\dot{\alpha}^*) - \omega\alpha^*\alpha - \frac{\omega}{2})\right]\right\} \\
& \times \int dv dv^+ \left[\exp(-v^+ \grave{M} v) - \exp(-v^+ M v)\right]
\end{aligned} \tag{4.83}$$

avec

$$\grave{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ R_{11} & -1 & R_{12} & 0 \\ o & 0 & -1 & -1 \\ R_{21} & 0 & R_{22} & -1 \end{pmatrix} et M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ R_{11} & -1 & R_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ R_{21} & 0 & R_{22} & -1 \end{pmatrix} \tag{4.84}$$

Utilisons l'identité suivante

$$\det \grave{M} = \det(\grave{B} - CB^{-1}D) \det A \tag{4.85}$$

De sotre que

$$\left\{ \begin{array}{c} \det B = 1, CB^{-1}D = 0 \\ \det \grave{M} = 1 + R_{22}(\alpha, T), \quad \det A = \det M = 1 \end{array} \right. \tag{4.86}$$

Finalement alors l'amplitude de transition down-up $K_{\downarrow\downarrow}$ est

$$K_{\downarrow\downarrow}=\int_{\alpha_i}^{\alpha_f}D\alpha^*D\alpha\exp\left\{i\int_0^T dt\left[\frac{i}{2}(\alpha^*\dot{\alpha}-\alpha\dot{\alpha}^*)-\omega\alpha^*\alpha-\frac{\omega}{2})\right]\right\}R_{22}(\alpha,T) \qquad (4.87)$$

D'après les propriétés des états cohérents(fermionique et bosonique) nous pouvons écrire le propagateur sous la forme matricielle suivante

$$K(f,i,T)=\begin{pmatrix} K_{11}(\alpha_f,\alpha_i,T) & K_{12}(\alpha_f,\alpha_i,T) \\ K_{21}(\alpha_f,\alpha_i,T) & K_{22}(\alpha_f,\alpha_i,T) \end{pmatrix} \qquad (4.88)$$

Chapitre 5

JCM dependant du temps

5.1 cas simple

Comme on l'à déjà dit auparavant, voyons comment traiter un concret du modèle Jaynes-Cummings dépends du temps via l'intégrale de chemin. Nous allons considérer le cas simple suivants

$$C_{\grave{m},\grave{n}}(t) = e^{-i\Omega_{m,n}t}\delta_{m,\grave{m}}\delta_{n,\grave{n}} \tag{5.1}$$

ce qui donne

$$F(a,a^{+},t) = e^{-i\Omega_{m,n}t}a^{+m}a^{n} = e^{-i\Omega t}a^{+m}a^{n} \tag{5.2}$$

Se référent à la section (4.3), les éléments de matrice de transition $R(\alpha,T)$sont donnés dans ce cas par

$$\begin{aligned} R_{11}(\alpha,T) &= \exp\left(-i\frac{\omega_0}{2}T\right) + (-ig)^{2N}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\int_0^{s_1} ds_3 ......\int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\ &\times e^{-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)}F(s_1)e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_1-s_2)}F^{*}(s_2)e^{-i\frac{\omega_0}{2}(s_2-s_3)} \\ &F(s_3)e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_3-s_4)}....\times e^{-i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N-1}-s_{2N})}F^{*}(s_{2N})e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N}-0)\sigma_3}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

et

$$\begin{aligned} R_{12}(\alpha,T) &= (-ig)\int_0^T ds_1 e^{-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)}F(\alpha_1)e^{i\frac{\omega_0}{2}s_1} \\ &+(-ig)^{2N+1}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\int_0^{s_1} ds_3......\int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} \\ &e^{-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)}F(s_1)e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_1-s_2)}F^{*}(s_2)e^{-i\frac{\omega_0}{2}(s_2-s_3)} \\ &F(\alpha_3,s_3)e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_3-s_4)}\times ..e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N}-s_{N+1})}F(s_{2N+1})e^{-i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N}-0)}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Les autres éléments sont exprimés par les relations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{c} R_{21}(\alpha, T) = -R_{12}^*(\alpha, T) \\ R_{11}^*(\alpha, T) = R_{22}(\alpha, T) \end{array} \right. \tag{5.5}$$

5.1.1 Intégration sur les variables complexes

En appliquant exactement les résultats de la section (3.5) la forme matricielle du propagateur est alors

$$\begin{aligned} K(\alpha_f, \alpha_i, s_f - s_i) &= \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha i|^2\right] \\ &\times \exp[\alpha_f^* e^{-i\omega(s_f - s_i)}\alpha_i - \frac{i}{2}\omega(s_f - s_i)] \\ &\times \begin{pmatrix} R_{11}(\alpha_f, \alpha_i, s_f - s_i) & R_{12}(\alpha_f, \alpha_i, s_f - s_i) \\ R_{21}(\alpha_f, \alpha_i, s_f - s_i) & R_{22}(\alpha_f, \alpha_i, s_f - s_i) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Notons d'abords

$$K^{\pm}(\alpha_f, \alpha_i, s_f - s_i) = \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha i|^2)\right] \exp\left[\alpha_f^* e^{-i\omega(s_f - s_i)}\alpha_i - \frac{i}{2}(\omega \pm \omega_0)(s_f - s_i)\right] \tag{5.7}$$

Les éléments du propagateur s'écrit sous la forme suivants
-pour $K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T)$

$$\begin{aligned} K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= K^+(\alpha_f, \alpha_i, T) + \sum_{N=1}^{\infty}(-ig)^{2N}\int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_1} ds_3 ...... \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\ &\times \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i} ...... \frac{d\alpha_{2N} d\alpha_{2N}^*}{2\pi i} K^+(\alpha_f, \alpha_1, T - s_1) \\ &\times e^{-i\Omega s_1}\alpha_1^{*m}\alpha_1^n K^-(\alpha_1, \alpha_2, s_1 - s_2) e^{i\Omega s_2}\alpha_2^m \alpha_2^{*n} \\ &\times .. e^{i\Omega s_{2N}}\alpha_{2N}^m \alpha_{2N}^{*n} K^+(\alpha_{2N}, \alpha_i, s_{2N} - 0) \end{aligned} \tag{5.8}$$

Ecrivant l'exponentielle de $K^{\pm}(\alpha_f, \alpha_i, T)$ sous un forme d'une série

$$\exp[\alpha_f^* e^{-i\omega(s_f - s_i)}\alpha_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* \alpha_i)^{n\,*}}{n!} e^{-i\omega n(s_f - s_i)} \tag{5.9}$$

il vient

$$\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= K^{+}(\alpha_f,\alpha_i,T)+\sum_{N=1}^{\infty}(-ig)^{2N}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\int_0^{s_1} ds_3 ......\int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\
&\sum_{\substack{k_1,k_2,k_2,\\ ..k_{2N},k_i=0}}\int \frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i}e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2+|\alpha_1|^2)} * \frac{(\alpha_f^*)^{k_1}}{k_1!}(\alpha_1)^{k_1+n}(\alpha_1^*)^{k_2+m} \\
&\times e^{-i\omega k_1(T-s_1)-i\Omega s_1}\exp[-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(T-s_1)]\int\frac{d\alpha_2 d\alpha_2^*}{2\pi i}e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2)} \\
&\frac{(\alpha_2)^{k_2+m}(\alpha_2^*)^{k_3+n}}{k_2!}e^{-i\omega k_2(s_1-s_2)+i\Omega s_2}\exp[-\frac{i}{2}(\omega-\omega_0)(s_1-s_2)] \\
&*\int\frac{d\alpha_3 d\alpha_3^*}{2\pi i}e^{[-\frac{1}{2}(|\alpha_2|^2+|\alpha_3|^2)}\frac{((\alpha_3)^{k_3+n}(\alpha_3^*)^{k_4+m}}{k_2!}e^{-i\omega k_3(s_2-s_3)-i\Omega s_3} \\
&\exp[-\frac{i}{2}(\omega-\omega_0)(s_2-s_3)]\times ....\int\frac{d\alpha_{2N-1}d\alpha_{2N-1}^*}{2\pi i}e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_{2N-2}|^2+|\alpha_{2N-1}|^2)} \\
&\frac{(\alpha_{2N-1})^{k_{2N-1}+n}(\alpha_{2N-1}^*)^{k_{2N-1}+m}}{k_{2N-1}!}e^{-i\omega k_{2N-1}(s_{2N-2}-s_{2N-1})-i\Omega s_{2N-1}} \\
&\exp[-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(s_{2N-2}-s_{2N-1})]\int\frac{d\alpha_{2N}d\alpha_{2N}^*}{2\pi i}e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_{2N-1}|^2+|\alpha_{2N}|^2)} \\
&\frac{(\alpha_{2N})^{k_{2N}+m}(\alpha_{2N}^*)^{k_i+n}}{k_{2N}!}e^{-i\omega k_{2N}(s_{2N-1}-s_{2N})+i\Omega s_{2N}}\exp[-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(s_{2N-1}-s_{2N})] \\
&e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_{2N}|^2+|\alpha_i|^2)}\frac{(\alpha_i)^{k_i}}{k_i!}e^{-i\omega k_i(s_{2N})+i\Omega s_{2N}}\exp[-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(s_{2N}-0)]
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Utilisant la propriété suivante

$$\frac{1}{2\pi i\sqrt{m!}\sqrt{n!}}\int\int d\alpha d\alpha^* e^{-|\alpha|^2}(\alpha^*)^n(\alpha)^m=\delta_{nm} \tag{5.11}$$

il vient

$$\begin{cases} k_1+n-m=k_2 \\ k_2=k_3+n-m \\ \quad . \\ \quad . \\ k_{2N}=k_i+n-m \end{cases} \tag{5.12}$$

$$k_1 = k_2=k_3=........=k_{2N}=k_i=k$$

on trouve

$$
\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f,\alpha_i,T) \quad = \quad & K^{+}(\alpha_f,\alpha_i,T)+\sum_{N=1}^{\infty}(-ig)^{2N}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\int_0^{s_1} ds_3 ......\int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\
& e^{[-\frac{1}{2}(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha_i|^2)}\sum_{k=0}(\alpha_f^*)^{k_1}\frac{[(k+n)!]}{[k!(k+n-m)!} \\
& e^{-i\omega k(T-s_1)-i\Omega s_1}\exp[-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(T-s_1)] \qquad (5.13) \\
& e^{-i\omega(k+n-m)(s_1-s_2)+i\Omega s_2}\exp[-\frac{i}{2}(\omega-\omega_0)(s_1-s_2)] \\
& e^{-i\omega k(s_2-s_3)-i\Omega s_3}\exp[-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(s_2-s_3)] \\
& e^{-i\omega k+(s_{2N-2}-s_{2N-1})-i\Omega s_{2N-1}}\exp[-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(s_{2N-2}-s_{2N-1})] \\
& e^{-i\omega(k+n-m)(s_{2N-1}-s_{2N})+i\Omega s_{2N}}\exp[-\frac{i}{2}(\omega-\omega_0)(s_{2N-1}-s_{2N})] \\
& \frac{(\alpha_i)^k}{k!}e^{-i\omega k(s_{2N})+i\Omega s_{2N}}\exp[-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(s_{2N})]
\end{aligned}
$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f,\alpha_i,T) \quad = \quad & K^{+}(\alpha_f,\alpha_i,T)+\sum_{N=1}^{\infty}(-ig)^{2N}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\int_0^{s_1} ds_3 ......\int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\
& e^{-\frac{1}{2}(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha i|^2)}\sum_{k=}^{\infty}\frac{(\alpha_f\ \alpha_i)^k}{k!}\frac{[(k+n)!]}{[k!(k+n-m)]!} \\
& \exp\left\{-i\omega k(T-s_1)-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(T-s_1)-i\Omega s_1\right\} \qquad (5.14) \\
& \exp[\left\{-i\omega(k+n-m)(s_1-s_2)-\frac{i}{2}(\omega-\omega_0)(s_1-s_2)+i\Omega s_2\right\} \\
& \exp-\left\{i\omega k(s_2-s_3)-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(s_2-s_3)-i\Omega s_3\right\} \\
& \exp\left\{-i\omega k+(s_{2N-2}-s_{2N-1})-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(s_{2N-2}-s_{2N-1})-i\Omega s_{2N-1}\right\} \\
& \exp\left\{-i\omega(k+n-m)(s_{2N-1}-s_{2N})-\frac{i}{2}(\omega-\omega_0)(s_{2N-1}-s_{2N})+i\Omega s_{2N}\right\} \\
& \exp\left\{-i\omega k\left(s_{2N}\right)-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(s_{2N})\right\}
\end{aligned}
$$