

Modèle standard

Le Modèle standard (SM) est une théorie fondamentale de la physique des particules, elle permet de décrire et d'expliquer tous les phénomènes de la physique des hautes énergie. Elle unifie les deux interactions fondamentales: électromagnétique et faible. Le SM est une théorie de jauge non-abélienne basé sur le groupe de jauge $SUC(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ [1, 2].

2.1 Particule du SM et leurs interactions

Il existe deux types de particules élémentaires en modèle standard, les bosons de jauge et les fermions:

- Les bosons sont des particules de spin entier. Ils obéissent à la statistique de Bose-Einstein. Ils jouent le rôle des médiateurs des interactions. Voici les bosons de jauge du SM: photon γ , les trois bosons faibles W^+ , W^- et Z , les 8 gluons g . Il existe un autre boson qui n'est pas un boson de jauge, c'est le boson de Higgs. Ce dernier est responsable de la génération des masses des bosons de jauge.
- Les fermions sont des particules de spin demi-entier, ils obéissent à la statistique de Fermi-Dirac. Il existe deux variétés de fermions, les 6 quark (u, d, c, s, t, b) et les leptons et leurs neutrinos associés ($e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$). Ces particules constituent la matière ordinaire notamment les fermions de la première génération (u, d et e).

Les bosons de jauge sont les médiateurs des interactions fondamentales, entre les fermions. Chaque interaction fondamentale implique des fermions et des bosons de jauge bien précis:

- L'interaction forte est portée par les gluons, elle est lie quarks entre eux à l'intérieur des hadrons, et également les protons et neutrons dans le noyau.
- L'interaction électromagnétique est véhiculée par le photon, elle lie les électrons au noyau des atomes et permet aux atomes de former des molécules.
- L'interaction faible est portée par les bosons W^\pm et Z , elle est responsable de la radioactivité β , elle permet à un quark u de se transformer en un quark d par échange d'un boson W . Il existe deux type d'interaction faible: interaction à courant chargé via l'échange des bosons W^\pm et interaction à courant neutre via l'échange d'un bosons Z .

2.2 Théories de jauge

2.2.1 Électrodynamique quantique

L'électrodynamique quantique ou QED est une théorie de jauge basée sur le groupe de symétrie abélien $U(1)$. Cette théorie explique l'interaction entre toutes les particules électriquement chargées par l'échange (émission ou absorption) d'un photon. En QED les fermions sont représentés par des spineurs de Dirac à 4 dimensions (ψ), dont la densité lagrangienne est donnée par [6]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (2.1)$$

avec

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.2)$$

où le premier terme à droite dans l'éq. (2.1) est le terme cinétique du champ de jauge (qui est le photon dans ce cas) et le deuxième terme dans la même équation est le lagrangien de Dirac.

La densité lagrangienne \mathcal{L} est invariante sous la transformation de jauge globale du groupe $U(1)$: $U = \exp(i\epsilon\alpha)$. Mais cette même densité lagrangienne n'est pas invariante sous la transformation locale du groupe $U(1)$: $U(x) = \exp(i\epsilon\alpha(x))$. On peut facilement montrer que le terme de masse reste invariant, mais le terme cinétique du champ de Dirac et le terme cinétique du champ de jauge ne sont pas invariants à cause de la dérivée ∂_μ . Pour résoudre ce problème nous devons remplacer la dérivée ∂_μ par la dérivée covariante D_μ , alors,

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$$

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha(x)$$

Après la quantification, la densité lagrangienne devient:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2. \quad (2.3)$$

où $\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2$ est le terme de fixation de jauge.

Finalement, le vertex décrivant l'interaction entre deux fermions chargés et le photon est le suivant:



2.2.2 Chromodynamique quantique

La chromodynamique quantique ou QCD est une théorie quantique des champs et une théorie de jauge non-abélienne basée sur le groupe $SU(3)$. Elle décrit l'interaction entre les quarks et les gluons à l'intérieur des hadrons. Les quarks et les gluons possèdent une échange de couleur qui leur permet d'interagir fortement [7]. La densité lagrangienne pour un quark libre est:

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)q. \quad (2.4)$$

La densité lagrangienne \mathcal{L} est invariante sous la transformation de jauge globale du groupe $SU(3)$

$$U = \exp(-i\theta_a T^a)$$

où θ_a (pour $a = 1, \dots, 8$) sont les paramètres du groupe, T^a sont les générateurs du groupe ($T^a = \frac{\lambda_a}{2}$, λ_a sont les matrices de Gellmann. Les générateurs vérifient:

$$[T^a, T^b] = if_{abc}T^c$$

où f_{abc} sont les constantes de structure).

La densité lagrangienne \mathcal{L} n'est pas invariante sous la transformation de jauge locale $U(x) = \exp(-i\theta(x)T^a)$. Pour la rendre invariante, il faut qu'on remplace la dérivée ∂_μ par la dérivée covariante D_μ , avec

$$D^\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a$$

où g est une constante de couplage.

Alors, la densité lagrangienne de Dirac devient:

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q \quad (2.5)$$

Notons que pour que \mathcal{L} soit invariant sous la transformation de jauge locale, il faut que les champs A_μ^a se transforment de la manière suivante:

$$A_\mu^{a'} = A_\mu^a + f^{abc} \alpha^b(x) A_\mu^c - \frac{1}{g} (\partial_\mu \alpha^a(x)) \quad (2.6)$$

Nous devons rajouter un terme cinématique pour les champs de jauge pour que la théorie soit complète, alors la densité lagrangienne classique (avant la quantification) de la QCD est :

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i (i \not{D} - m) \psi_i \quad (2.7)$$

$$i = u, d, c, s, t, b \quad (2.8)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.9)$$

Après la quantification, la densité lagrangienne s'écrit:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{FP} + \mathcal{L}_f \quad (2.10)$$

avec

- $\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ (lagrangien de Jauge).
- $\mathcal{L}_D = \bar{\psi}_i (i \not{D} - m) \psi_i$ (lagrangien de Dirac).
- $\mathcal{L}_f = -(\partial_\mu A_\mu^a) \frac{1}{2\alpha}$ (lagrangien de fixation de Jauge).
- $\mathcal{L}_{FP} = (\partial^\mu \chi^*) D_\mu^{ab} \chi^b$ (lagrangien de Fadeev-Papov (ou lagrangien des ghosts)).

2.2.3 Théories de Yang-Mills

Une théorie de Yang-mills est une théorie de Jauge non-abélienne basée sur le groupe $SU(N)$ (est une généralisation de la QED pour $N > 1$). La densité lagrangienne totale (avant quantification) est donnée par:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i (i \not{D} - m) \psi_i \quad (2.11)$$

$$(2.12)$$

avec

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

et

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.14)$$

la dérivée covariante

$$D^\mu = \partial_\mu - ig T^a A_\mu^a \quad (2.15)$$

où $a = N^2 - 1$.

La densité lagrangienne de cette théorie est invariante sous la transformation de jauge locale (et globale):

$$U(x) = \exp(-i\theta_a(x)T^a) \quad (2.16)$$

avec

$$A_\mu^{a'} = A_\mu^a + f^{abc}\alpha^b(x)A_\mu^c - \frac{1}{g}(\partial_\mu\alpha^a(x)) \quad (2.17)$$

Remarque: On ne peut pas rajouter un terme de masse pour les champs de jauge dans les théories de Yang Mills car il brise l'invariance de jauge. Pour introduire les termes de masse pour les bosons de jauge massifs comme le W et Z , on doit briser spontanément la symétrie à l'aide du mécanisme du Higgs.

2.2.4 Modèle de Fermi

Pour expliquer la désintégration β ($n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$), Fermi a développé sa théorie qui est basée sur l'interaction ponctuelle à 4-points (ou interaction courant-courant). La densité lagrangienne du modèle est donnée par [7]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}G_F(\bar{\psi}_p\gamma^\mu\psi_n\bar{\psi}_e\gamma_\mu\psi_\nu + \bar{\psi}_n\gamma^\mu\psi_p\bar{\psi}_\nu\gamma_\mu\psi_e) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}G_f J_{had}^\mu J_{\mu lep} \end{aligned} \quad (2.18)$$

où J_μ est le courant, G_f est la constante de couplage de Fermi.

La théorie de Fermi n'est pas renormalisable car la constante de couplage a une dimension ($[G_f] = -2$). la section efficace de cette théorie augmente d'une manière très rapide et viole la condition d'unitarité à haut énergie ($\sigma = \frac{G_f^2}{\pi}s$). Donc, cette théorie n'est pas le modèle parfait pour décrire interaction faible.

Plusieurs tentatives pour améliorer cette théorie ont été faites au cours des années mais aucune n'a réussi à résoudre tous les problèmes de ce modèle, On cite par exemple l'introduction d'un boson de jauge massif (W) intermédiaire pour décrire l'interaction faible.

2.3 Modèle standard

Le Modèle de Glashow-Weinberg-Salam (GWS) est une théorie de jauge non-abélienne qui unifie l'interaction électromagnétique et faible. Il est basé sur le groupe de symétrie $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$. D'habitude on rajoute l'interaction forte à ce modèle, dans ce cas la théorie est basée sur le groupe $SU_C(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$. On ne peut pas parler d'une vraie unification mais il est possible d'intégrer les trois force dans un même cadre mathématique que l'on appelle le modèle standard.

2.3.1 Modèle de Glashow-Weinberg-Salam

Les leptons de chiralité gauche sont représentés sous forme de doublets du groupe $SU(2)$ et les leptons de chiralité droite sont représentés sous forme de singlets du même groupe [4, 7]:

$$\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_L \quad (2.19)$$

et

$$e_R \quad \mu_R \quad \tau_R \quad (2.20)$$

Rappelons qu'un spineur de Dirac s'exprime en fonction de chiralité gauche et droite comme suit:

$$\psi = \psi_R + \psi_L \quad (2.21)$$

avec

$$\psi_R = P_R \psi \quad \psi_L = P_L \psi \quad (2.22)$$

où les projecteurs de chiralité sont définis par: $P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$ et $P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$.

Le modèle GWS est basé sur les hypothèses suivantes:

- Tous les fermions sont massifs sauf les neutrinos.
- les parties gauches des leptons et les parties droites des anti-leptons sont sensibles à l'interaction faible.

Ainsi, les courants chargés sont donnés par:

$$J_\mu^+ = \frac{1}{2} \bar{L} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_L = \bar{L}_L \gamma_\mu L_L \quad (2.23)$$

$$J_\mu^- = \frac{1}{2} \bar{\nu}_L \gamma_\mu (1 - \gamma_5) L_L = \bar{\nu}_{LL} \gamma_\mu L_L \quad (2.24)$$

Ce modèle est invariant sous les transformations des groupes $SU_L(2)$ et $U_Y(1)$. Voici ces transformations sont pour chaque groupe:

$$\begin{aligned} SU_L(2) : \quad & L' = \exp(-i\alpha(x)I_i)L \\ & R' = R \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} U_Y(1) : \quad & L' = \exp\left(\frac{i}{2}Y\beta(x)\right)L \\ & R' = \exp\left(\frac{i}{2}Y\beta(x)\right)R \end{aligned} \quad (2.26)$$

où I (opérateurs isospin) sont les générateurs du groupe $SU_L(2)$, et Y (hypercharge) sont les générateurs du groupe $U_Y(1)$.

La densité lagrangienne du modèle de GWS est donnée par:

$$\mathcal{L}_{GWS} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_G \quad (2.27)$$

$$\mathcal{L}_f = \bar{L}i\gamma^\mu(\partial_\mu - ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\vec{W}_\mu + \frac{i}{2}g'B_\mu)L + \bar{R}i\gamma^\mu(\partial_\mu + ig'B_\mu)R \quad (2.28)$$

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (2.29)$$

où W_μ sont les champs de jauge associés au groupe $SU(2)$, g est la constante de couplage du groupe $SU_L(2)$, B_μ est le champ de jauge associé au groupe $U_Y(1)$, g' est la constante de couplage du groupe $U_Y(1)$. On a aussi

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g\varepsilon_{ijk}W_\mu^j W_\nu^k \quad (2.30)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (2.31)$$

Rappelons que \mathcal{L}_{GWS} est invariant sous la transformation $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ en absence des masses.

2.3.2 Mécanisme de Higgs

Le mécanisme de Higgs est un mécanisme qui permet de briser spontanément de la symétrie (BSS) $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ en son sous groupe $U_Q(1)$. Ce phénomène (brisure spontanée de la symétrie) permet de générer les masses des bosons de jauge.

Considérons la densité lagrangienne de Higgs [5, 7]:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) \quad (2.32)$$

avec

$$V(\phi^\dagger \phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad \lambda > 0 \quad (2.33)$$

où ϕ est un champ scalaire complexe. On peut montrer facilement que \mathcal{L} est invariant sous le groupe $U(1)$.

On introduit les nouveaux champs Φ_1 et Φ_2 de la manière suivante:

$$\phi = \frac{\Phi_1 + i\Phi_2}{\sqrt{2}} \quad \phi^\dagger = \frac{\Phi_1 - i\Phi_2}{\sqrt{2}} \quad (2.34)$$

où Φ_1 et Φ_2 sont des champs scalaires réels. Alors, le potentiel de Higgs V devient:

$$V(\phi^\dagger \phi) = V(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) \quad (2.35)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_1 \partial^\mu \Phi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_2 \partial^\mu \Phi_2 - V(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) \quad (2.36)$$

La transformation $U(1)$ est équivalente à $O(2)$ (rotation), donc \mathcal{L} est invariant sous la transformation suivant:

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

pour trouver l'état d'énergie la plus basse de l'état fondamentale, il faut calculer ϕ_0 qui est appelé le VeV (valeur moyenne dans le vide), cette dernière correspond à:

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi_1} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial \Phi_2} = 0 \quad (2.38)$$

On distingue deux cas:

- Pour $\mu^2 > 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial \Phi_1} = \frac{\partial v}{\partial \Phi_2} = 0$ dans ce cas la symétrie existe: phase de Wigner, voir Fig.(2.1).

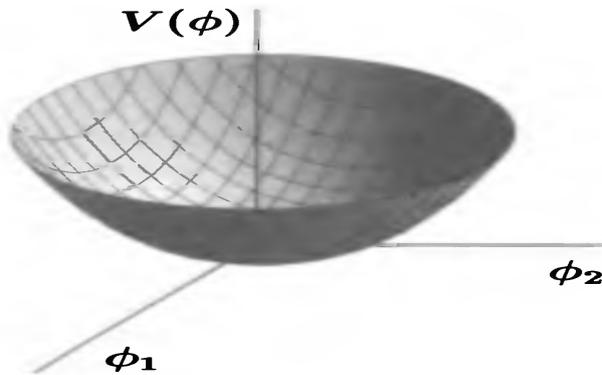


Figure 2.1: la solution symétrique et stable

- pour $\mu^2 < 0$, on a

$$\Phi_1^2 + \Phi_2^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \quad (2.39)$$

$$\|\phi_0\|^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \quad (2.40)$$

ϕ^0 prend plusieurs valeur à l'état fondamental (cercle de rayon ν), donc l'état du vide n'est pas unique (phase de Nambu Goldstone), voir Fig. (2.2).

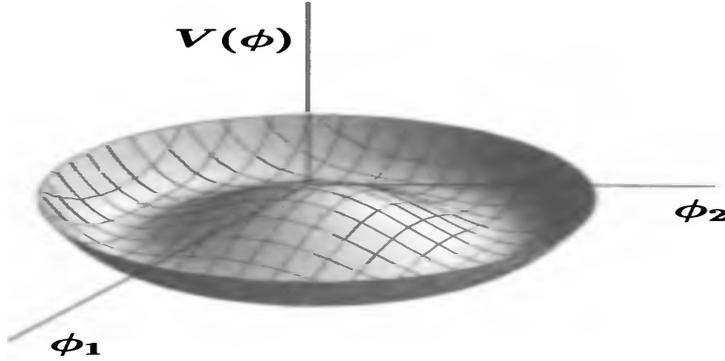


Figure 2.2: Brisure spontanée de la symétrie (BBS)

Après BBS, on obtient un champ scalaire (Φ'_1) massif et un champ scalaire (Φ'_2) de masse nulle (appelé boson de Goldstone).

On fixe l'état fondamental comme suit:

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

où $v = \frac{\mu}{\sqrt{2}}$.

Calculons, maintenant, l'isospin et l'hypercharge de cet éta. On a donc,

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \phi_0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\exp(-i\alpha I_3) \phi_0 = (1 - i\alpha I_3 + \dots) \phi_0 \neq \phi_0 \quad (2.43)$$

$$Y \phi_0 = \phi_0 \exp(i\beta \frac{Y}{2}) \phi_0 = (1 - i\beta \frac{Y}{2} + \dots) \phi_0 \neq \phi_0 \quad (2.44)$$

On voit que I_3 et Y ne sont pas nulle donc l'isospin et l'hypercharge sont des générateurs brisés. Mais l'opérateur charge électrique n'est pas brisé car:

$$\begin{aligned} Q \phi_0 &= (I_3 + \frac{Y}{2}) \phi_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

On écrit, maintenant, le doublet du Higgs comme suit:

$$\phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} = \exp(i \frac{1}{2v} \sigma_i \xi_i) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

$$\phi' = U(\xi)\phi = \frac{1}{2v}\chi \quad (2.47)$$

$$\exp(-i\sigma_i\xi_i)\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H)\chi \quad (2.48)$$

$$\chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

où ξ est le boson de Goldstone, H est le boson de Higgs. On peut écrire la densité lagrangienne de Higgs comme:

$$\mathcal{L}_\phi = (D'_\mu\phi)(D'^{\mu}\phi) - v(\phi'^+\phi') \quad (2.50)$$

où:

$$\begin{aligned} (D_\mu\phi)' &= (\partial_\mu - ig\vec{\sigma}\vec{A}'_\mu\frac{1}{2} - g'B'_\mu\frac{i}{2})U(\xi) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_\mu - ig\vec{\sigma}\vec{A}'_\mu\frac{1}{2} - g'B'_\mu\frac{i}{2})(v + H)\chi \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\vec{A}'_\mu = U(\xi)\vec{A}_\mu U^{-1}(\xi) - \frac{i}{g}(\partial_\mu U(\xi))U^+(\xi) \quad (2.52)$$

$$B'_\mu = B_\mu \quad (2.53)$$

Le premier terme de \mathcal{L}_ϕ représente le terme de masse, il s'écrit sous la forme:

$$\mathcal{L}_{masse} = \frac{v^2}{2}\chi^+(g\vec{\sigma}\vec{A}'_\mu\frac{1}{2} + \frac{1}{2g'}B'_\mu)(g\frac{1}{2}\vec{\sigma}\vec{A}'_\mu + \frac{1}{2}g'B'_\mu)\chi \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{masse} &= \frac{v^2}{8}(g^2\vec{A}'_\mu \cdot \vec{A}'^\mu + g'^2B'_\mu B'^\mu - 2gg'B'_\mu A'^{\mu 3}) \\ &= \frac{v^2}{8}(g^2(A'_\mu)^1 A'^{1\mu} + g^2(A'_\mu)^2 A'^{2\mu} + (g(A'_\mu)^3 - g'(B'_\mu)^3)^2) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Les champs associés aux bosons de jauge chargé sont donnés par la relation suivantes:

$$(W_\mu)^\pm = \frac{(A'_\mu)^1 \pm i(A'_\mu)^2}{\sqrt{2}} \quad (2.56)$$

Les champs associés aux bosons de jauge neutre:

$$\frac{v^2}{8}((A'_\mu)^3 B'_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A'_\mu)^3 & B'_\mu \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

On peut écrit, comme après la diagonalisation:

$$\frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} z_\mu & A_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z'_\mu & A'_\mu \end{pmatrix} = \frac{v^2}{8}(g^2 + g'^2)z_\mu z'_\mu + 0A_\mu A'_\mu \quad (2.58)$$

On introduit la transformation:

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_w & -\sin\theta_w \\ \sin\theta_w & \cos\theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A'_\mu)^3 \\ B'_\mu \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

Alors,

$$Z_\mu = A'^3_\mu \cos\theta_w - B'_\mu \sin\theta_w \quad (2.60)$$

$$A_\mu = A'^3_\mu \sin\theta_w + B'_\mu \cos\theta_w \quad (2.61)$$

où θ_w est l'angle de Weinberg

$$\tan \theta_w = \frac{g'}{g} \quad \cos \theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \sin \theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (2.62)$$

Donc, les masses des bosons de jauge sont données par:

$$\begin{aligned} M_w &= \frac{1}{2} g v \\ &= \frac{v}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} \cos \theta_w \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$M_\gamma = 0 \quad (2.64)$$

$$M_z = \frac{v}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} \quad (2.65)$$

Après BSS, le potentiel de Higgs devient:

$$V(\phi^* \phi)' = -\mu^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} U^+(\xi) U(\xi) + \lambda \left(\begin{pmatrix} 0 & \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right)^2 (U^+(\xi) U(\xi))^2 \quad (2.66)$$

$$= -\mu^2 \frac{v^2}{4} + \frac{1}{2} (2\mu^2) H^2 + \lambda v H^3 + \frac{\lambda}{4} H^4 \quad (2.67)$$

à partir de cette relation on peut déduire la masse des bosons de Higgs:

$$M_H = \sqrt{2\mu^2} \quad (2.68)$$

donc le lagrangien de Higgs devient:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi &= \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H + \frac{1}{2} M_H^2 H^2 - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4 + \frac{g^2}{8} (H^2 + 2Hv) \\ &\times \left(\frac{Z_\mu Z^\mu}{\cos^2 \theta_w} + 2w_\mu^+ w^{-\mu} \right) + M_w^2 w_\mu^+ w^{-\mu} + M_z^2 z_\mu z^\mu \end{aligned} \quad (2.69)$$

2.3.3 Interaction de Yukawa

Pour décrire l'interaction entre les fermions et le Higgs nous devons rajouter un terme appelé le terme de Yukawa. Ce dernier s'écrit:

$$\mathcal{L}_y = -G_e (\bar{L}_i \phi R_i + \bar{R}_i \phi^+ L_i) + h.c \quad (2.70)$$

où G_e est la constante de couplage de Yukawa.

Après la transformation de jauge unitaire, il devient:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_y &= -G_e (\bar{L}'_i \phi R'_i + \bar{R}'_i \phi^+ L'_i) + h.c \\ &= -\frac{G_e}{\sqrt{2}} (\bar{e}'_L (v + H) e'_R + \bar{e}'_R (v + H) e'_L) + h.c \\ &= -\frac{G_e}{\sqrt{2}} (v \bar{e}' e' + H \bar{e}' e') \end{aligned} \quad (2.71)$$

Le premier terme donne la masse de l'électron ($M_e = \frac{G_e}{\sqrt{2}} v$) et le deuxième terme décrit l'interaction entre l'électron et le boson de Higgs.

Donc la densité lagrangienne totale de SM est:

$$\mathcal{L}_{MS} = \mathcal{L}_{QCD} + \mathcal{L}_{jauge} + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_y \quad (2.72)$$

avec \mathcal{L}_{QCD} est le lagrangien de la chromodynamique quantique, \mathcal{L}_{jauge} est le lagrangien des bosons de jauge, \mathcal{L}_ϕ est le lagrangien de Higgs et \mathcal{L}_y est le lagrangien de Yukawa.

2.4 Les problèmes du modèle standard

le modèle standard n'est pas parfait, il est plusieurs problèmes [9, 10]:

- La gravité: le MS unifie les 3 interactions fondamentales (faible, forte, électromagnétique) dans une seule théorie mais il n'explique pas la gravité.
- La matière noire: Elle est composée d'une grande partie de l'univers mais le MS n'inclut pas la matière noire.
- La masse des neutrinos: selon le modèle standard ils sont des particules sans masse par contre dans les expériences de l'oscillation des neutrinos on montre que les neutrinos ont une masse ce qui conduit à des problèmes.
- La symétrie matière-anti-matière: L'univers est principalement constitué de matière et anti-matière en quantité égale, d'après le modèle standard. Mais en réalité la quantité de matière est plus grande que la quantité d'anti-matière.
La violation CP de l'interaction faible.
- Le problème de hiérarchie.
- L'énergie noire: Le MS n'a pas expliqué l'origine de l'énergie noire.

Introduction au MSSM

La supersymétrie (Susy) est une symétrie hypothétique entre les fermions et les bosons. Elle associe à chaque fermion un super partenaire de spin entier et à chaque boson un super partenaire de spin demi-entier (les degrés de liberté bosoniques et fermioniques sont égaux).

La susy élargit le modèle standard en ajoutant des classes de symétries supplémentaires au lagrangien. Ce genre de symétrie prédit l'existence de particules supersymétriques appelées aussi *sparticules*, on cite par exemple les sleptons, squarks, neutralinos et les charginos. Ces particules hypothétiques sont beaucoup plus lourdes que les particules ordinaires.

Dans ce chapitre, on donne une présentation rapide de la supersymétrie et les modèles supersymétriques en se concentrant sur l'extension supersymétrique minimale du modèle standard ou le modèle MSSM.

3.1 Supersymétrie

Les théories supersymétriques ont eu plusieurs succès depuis leurs inventions dans les années 1970. Le plus grand succès de Susy est qu'elle résout le problème de la hiérarchie et les divergences quadratiques dans la masse du Higgs. Les théories supersymétriques font plusieurs prédictions, par exemple, plusieurs modèles prédisent la valeur du sinus de l'angle de Weinberg $\sin^2(\theta_W)$. Elles unifient aussi les trois interactions fondamentales forte, faible et électromagnétique à l'échelle 10^{16} GeV, ... etc. Dans cette section, on présente les ingrédients nécessaires pour construire un modèle supersymétrique comme le groupe de Poincaré, les spineurs à deux composantes, les super-champs, l'algèbre de Grassmann, ... [13]

3.1.1 Groupe de Lorentz

Le groupe de Lorentz est un groupe de symétrie classique dans l'espace-temps qui garde le produit scalaire de deux 4-vecteurs invariants dans tous les référentiels Galiléens, c'est à dire $x^\mu y_\mu = x'^\mu y'_\mu$ (où x^μ et y_μ appartiennent au référentiel R et x'^μ et y'_μ appartiennent au référentiel R'). Un 4-vecteur (4-vecteur position) se transforme sous la transformation de Lorentz dans deux référentiel Galiléen de la manière suivante [8, 10, 11]:

$$\begin{aligned} x^\mu &: \longrightarrow x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x'^\nu \\ x'_\mu &: \longrightarrow x'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu x^\nu \end{aligned} \quad (3.1)$$

où Λ est la matrice de Lorentz et $(\Lambda^{-1})^\nu_\mu = \Lambda^\nu_\mu$.

L'ensemble des transformations de Lorentz forme le groupe $SO(1,3)$. On peut exprimer la matrice Λ sous la forme exponentielle suivante:

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2} w^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}\right) \quad (3.2)$$

où $w^{\rho\sigma}$ sont les paramètres du groupe (réels et anti-symétriques), et $M_{\rho\sigma}$ sont les générateurs du groupe. Les $M_{\rho\sigma}$ sont donnés par:

$$M_{\rho\sigma} = x_\rho p_\sigma - x_\sigma p_\rho \quad (3.3)$$

avec $p_\sigma = i\partial_\sigma$.

Pour $w^{\rho\sigma}$ très petit (transformation infinitésimale), on a:

$$\begin{aligned} x^{\mu'} &= \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \\ &= \exp(-iw_{\nu}^{\mu} M_{\nu}^{\mu}/2) x^{\nu} \\ &= x^{\nu} - \frac{i}{2} w_{\nu}^{\mu} (ix^{\nu} - ix^{\mu} \delta_{\mu}^{\nu}) \\ &= (\delta_{\nu}^{\mu} + w_{\nu}^{\mu}) x^{\nu} \end{aligned} \quad (3.4)$$

On introduit deux nouveaux paramètres qui s'exprime en fonction de w_{ν}^{μ} comme suit:

$$w^i = \left(\frac{1}{2}\right) \varepsilon^{ijk} w_{jk} \quad \xi^i = w^{0i} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

On définit le moment cinétique de la manière suivante:

$$\begin{aligned} J^i &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} M_{jk} \\ &= (\vec{x} \wedge \vec{p})^i \end{aligned} \quad (3.6)$$

et l'opérateur boost de Lorentz:

$$K^i = M^{0i} = x^0 p^i - x^i p^0 \quad (3.7)$$

Alors, l'argument de l'exponentielle (3.2) s'exprime en fonction de J^i et K^i comme suit:

$$\frac{1}{2} w^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (w^{00} + w^{0i} + w^{jk}) (M_{00} + M_{0i} + M_{jk}) \quad (3.8)$$

$$= \vec{w} \cdot \vec{J} + \vec{\varepsilon} \cdot \vec{k} \quad (3.9)$$

où $\vec{\varepsilon}$ est l'accélération (lie à la vitesse $\vec{\beta}$ avec $\beta_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i)$).

on à

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (3.10)$$

pour $\mu = 0$

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \exp\left(-\frac{1}{2} w^{0\nu} M_{0\nu}\right) x^{\nu} \\ &= x^0 - \beta^i x^i \end{aligned} \quad (3.11)$$

pour $\mu = i$

$$\begin{aligned} x^{i'} &= \exp\left(-\frac{1}{2} W^{i\nu} M_{i\nu}\right) x^{\nu} \\ &= x^i - (\vec{W} \wedge \vec{x})^i - \beta^i x^0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.1.2 Groupe de Poincaré

Le groupe de Poincaré est l'extension du groupe de Lorentz, La transformation associée à ce groupe s'écrit sous la forme [8, 10, 11]:

$$\exp(ia^{\rho} P_{\rho}) \exp(iw^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}/2) \quad (3.13)$$

Rappelons que l'opérateur translation dans l'espace de Minkowski est défini par:

$$\begin{aligned} x^{\sigma'} &= T x^{\sigma} \\ &= \exp(ia^{\rho} P_{\rho}) x^{\sigma} \\ &= x^{\sigma} - a \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\implies x' = x - a \quad (3.15)$$

Un champ Φ sous la transformation T se transforme comme suit:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \exp(ia^\rho P_\rho)\Phi(x)\exp(-ia^\rho P_\rho) \\ &= \exp(ia^\rho P_\rho)\exp(-ia^\rho P_\rho)\Phi((1-ia^\rho P_\rho)x) \\ &= \Phi(x+a) \\ &= \Phi(T^{-1}x)\end{aligned}\tag{3.16}$$

On utilise la relation de commutation $[x_\rho, P_\sigma] = -ig_{\rho\sigma}$ pour obtenir tous les commutateurs de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré. On a donc,

$$[P_\mu, P_\nu] = 0\tag{3.17}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = -i(g_{\mu\rho}P_\nu - g_{\nu\rho}P_\mu)\tag{3.18}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma})\tag{3.19}$$

A l'aide de ces relations, on peut dériver les commutateurs entre les opérateurs J^i et K^i . On a alors,

$$[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk}J^k\tag{3.20}$$

$$[K^i, J^i] = i\varepsilon^{ijk}K_k\tag{3.21}$$

$$[K^i, K^j] = -i\varepsilon^{ijk}M_{ij}\tag{3.22}$$

où:

$$[J_+^i, J_-^j] = 0\tag{3.23}$$

$$[J_-^i, J_-^j] = i\varepsilon_{ijk}J_-^k\tag{3.24}$$

$$[J_+^i, J_+^j] = i\varepsilon_{ijk}J_+^k\tag{3.25}$$

$$[J_\pm^i, J_\pm^j] = i\varepsilon_{ijk}J_\pm^k\tag{3.26}$$

on a: $J_\pm^i = \frac{1}{2}(J^i \pm iK^i)$

$$\vec{J}_+^2 = j_+(j_+ + 1)\tag{3.27}$$

$$\vec{J}_-^2 = j_-(j_- + 1)\tag{3.28}$$

$$j_\pm = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\tag{3.29}$$

Il existe plusieurs représentations du groupe de Lorentz, on note chaque représentation par $\Lambda(j_+, j_-)$. Un champ Φ se transforme dans une représentation quelconque comme suit:

$$\Phi'(x) = \Lambda(j_+, j_-)\Phi(\Lambda^{-1}x)\tag{3.30}$$

Voici quelques représentations particulières de Λ

$$\Lambda_{(1/2,0)} = \exp\left(i\vec{w}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2} + \xi\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}\right)\tag{3.31}$$

$$\Lambda_{(0,1/2)} = \Lambda_{(1/2,0)}^{-1+}\tag{3.32}$$

$$\Lambda_{(1/2)^*,0} = \Lambda_{(1/2,0)}^{-1T}\tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{(0,(1/2)^*)} &= \Lambda_{(1/2,0)}^* \\ &= \Lambda_{(1/2,0)}^{+T}\end{aligned}\tag{3.34}$$

3.1.3 Notation spinorielle à 2 composantes

On définit les spineurs de chiralité gauche et droite comme suit[10]:

$$\psi_L = P_L \psi = \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi \quad (3.35)$$

$$\psi_R = P_R \psi = \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi \quad (3.36)$$

Donc, un spineur ψ est vu comme un bispineur (ou spineur à deux composantes) des spineurs de Weyl ψ_L et ψ_R . On écrit alors,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

On introduit, maintenant, une nouvelle notation. On note le spineur gauche par ξ et le droit par $\bar{\eta}$. On écrit donc,

$$\psi_L = \xi \quad (3.38)$$

$$\psi_R = \bar{\eta} \quad (3.39)$$

$$\psi_L^c = \xi^c \quad (3.40)$$

$$\psi_R^c = \bar{\eta}^c \quad (3.41)$$

En terme des composantes, on a:

$$\psi_{L\alpha} = \xi_\alpha \quad \psi_{R\alpha} = \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.42)$$

Les spineurs η et $\bar{\eta}$ se transforment dans les représentation $(\frac{1}{2}, 0)$ et $(0, \frac{1}{2})$, respectivement.

$$\xi_\alpha \longrightarrow M_\alpha^\beta \xi_\beta \quad (3.43)$$

$$\bar{\eta}^{\dot{\alpha}} = (M^{-1+})_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \bar{\eta}^{\dot{\beta}} \quad (3.44)$$

$$M_\alpha^\beta \equiv (\Lambda_{(1/2,0)})_{\alpha\beta} \quad (3.45)$$

$$(M^{-1+})_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \equiv \left(\frac{1}{2}\Lambda^{-1+}\right)_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad (3.46)$$

on à:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\beta} &= -\varepsilon_{\alpha\beta} \\ &= -\varepsilon^{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2 \quad (3.48)$$

pour: $\alpha = 1$

$\beta = 2$ on à:

$$\varepsilon^{12} = -\varepsilon_{12} = 1$$

de meme pour $\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$

$$\varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon_{\gamma\beta} = -\varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon_{\beta\gamma} = \delta_\beta^\alpha \quad (3.49)$$

$$\xi^\alpha = \varepsilon_\alpha^\beta \xi_\beta \quad (3.50)$$

$$\bar{\eta}_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\eta}^{\dot{\beta}} \quad (3.51)$$

pour : $((\frac{1}{2})^*, 0)$ et $(0, (\frac{1}{2})^*)$ on à:

$$\xi^\alpha \longrightarrow \xi^\beta (M^{-1})_\beta^\alpha \quad (3.52)$$

$$\bar{\eta}_{\dot{\alpha}} \longrightarrow \bar{\eta}_{\dot{\beta}} (M^+)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \quad (3.53)$$

On peut montrer que

$$[\xi_1, \xi_2] = 0 \quad (3.54)$$

$$[\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2] = 0 \quad (3.55)$$

$$(3.56)$$

donc $\xi_1, \xi_2, \bar{\eta}_1$ et $\bar{\eta}_2$ sont des scalaires de Lorentz. Les conjugués hermitiens sont:

$$\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} = (\xi_{\alpha})^+ \quad (3.57)$$

$$\eta^{\alpha} = (\bar{\eta}^{\dot{\alpha}})^+(\eta\xi)^+ \quad (3.58)$$

Le terme de masse $\bar{\psi}\psi$ s'écrit en fonction de ξ et η comme suit:

$$\bar{\psi}\psi = \psi_L^+\psi_R + \psi_R^+\psi_L = \bar{\xi}\bar{\eta} + \eta\xi \quad (3.59)$$

Pour 2 spineur de Dirac ψ_1 et ψ_2 on a:

$$\bar{\psi}_{1L}\psi_{2R} = \bar{\xi}_1\bar{\eta}_2 \quad (3.60)$$

$$\bar{\psi}_{1R}\psi_{2L} = \eta_1\xi_2 \quad (3.61)$$

La forme vectoriel bi-linéaire est:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}\bar{\sigma}^{\mu}\xi &= \bar{\eta}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}\xi_{\beta} \\ &= (\bar{\xi}\bar{\sigma}^{\mu}\eta)^+ \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \xi\sigma^{\mu}\bar{\eta} &= \xi^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\eta}^{\dot{\beta}} \\ &= (\eta\sigma^{\mu}\bar{\xi})^+ \end{aligned} \quad (3.63)$$

ξ et $\bar{\eta}$ sont des spineurs arbitraires et,

$$(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\delta}}\varepsilon^{\beta\gamma}\sigma^{\mu}_{\gamma\dot{\delta}} \quad (3.64)$$

$$\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}} = \varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\delta}}\bar{\sigma}^{\dot{\delta}\gamma} \quad (3.65)$$

$$\bar{\eta}\bar{\sigma}^{\mu}\xi = -\xi\sigma^{\mu}\bar{\eta} \quad (3.66)$$

Alors, la forme bi-linéaire se transforme comme un 4-vecteur de Lorentz:

$$\bar{\eta}\bar{\sigma}^{\mu}\xi \longrightarrow \bar{\eta}M^+\bar{\sigma}^{\mu}M\xi \quad (3.67)$$

avec

$$M^+\bar{\sigma}^{\mu}M = \lambda_{\nu}^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} \quad (3.68)$$

On peut écrire le courant de la QED, en fonction de ξ et η , sous la forme:

$$\bar{\psi}_{1L}\gamma^{\mu}\psi_{2L} = \bar{\Psi}_{1L}^+\bar{\sigma}^{\mu}\Psi_{2L} = \bar{\xi}_1\bar{\sigma}^{\mu}\xi_2 \quad (3.69)$$

$$\bar{\psi}^{1R}\gamma^{\mu}\psi_{1R} = \bar{\Psi}_{1R}\sigma^{\mu}\Phi^{2R} = \eta_1\sigma^{\mu}\bar{\eta}^2 = -\bar{\eta}_2\bar{\sigma}^{\mu}\eta_1 \quad (3.70)$$

La densité lagrangienne de la QED en fonction de ces spineurs s'écrit:

$$\mathcal{L} = \bar{\xi}\bar{\sigma}^{\mu}(i\partial_{\mu} + eA_{\mu})\xi + \eta\sigma^{\mu}(i\partial_{\mu} + eA_{\mu})\bar{\eta} - m(\bar{\xi}\bar{\eta} + \eta\xi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.71)$$

On peut écrire le terme $\eta\sigma^{\mu}(i\partial_{\mu} + eA_{\mu})\bar{\eta}$ sous la forme $\bar{\eta}\bar{\sigma}^{\mu}(i\partial_{\mu} - eA_{\mu})\eta$.

On réécrit le terme de courant sous la forme:

$$\bar{\psi}_{1L}\sigma^{\mu\nu}\psi_{2R} = \quad = 2\eta_1 S^{\mu\nu}\xi_2 \quad (3.72)$$

avec

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) \quad (3.73)$$

$$\bar{S}^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu) \quad (3.74)$$

$$S^{0i} = -\bar{S}^{-0i} = -i\frac{\sigma^i}{2} \quad (3.75)$$

$$S^{ij} = \bar{S}^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma^k \quad (3.76)$$

$$(3.77)$$

Transformation de ψ sous les opérations C (conjugaison de charge), P (parité) et T (réflexion dans l'espace):

$$\psi = (\xi\bar{\eta}) \longrightarrow C \longrightarrow \psi^C = (\eta\bar{\xi}) \quad (3.78)$$

$$\psi^c = (\eta\bar{\xi}) \longrightarrow P \longrightarrow \psi^C = -(\bar{\xi}\eta) \quad (3.79)$$

$$\psi = (\xi\bar{\eta}) \longrightarrow P \longrightarrow (\bar{\eta}\xi) \quad (3.80)$$

$$\psi = (\xi_\alpha\bar{\eta}^\beta) \longrightarrow T \longrightarrow i(\xi^\alpha - \bar{\eta}_\beta) \quad (3.81)$$

$$\psi = (\xi\bar{\eta}) \longrightarrow cP \longrightarrow (\bar{\xi}\eta) \quad (3.82)$$

$$\psi = (\xi\bar{\eta}) \longrightarrow cPT \longrightarrow i(-\bar{\xi}_\alpha\eta^\beta) \quad (3.83)$$

On voit que:

$$P\xi^\alpha P^{-1} = -\bar{\eta}_\alpha \quad (3.84)$$

$$P\xi_\alpha P^{-1} = \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \quad (3.85)$$

$$\xi^C = \eta \quad (3.86)$$

$$\eta^c = \xi \quad (3.87)$$

$$(3.88)$$

Donc on peut écrire,

$$P\bar{\psi}_{1L}\psi_{2R}P^{-1} = \bar{\psi}_{1R}\psi_{2L} \quad (3.89)$$

\longleftrightarrow

$$P\bar{\xi}_1\bar{\eta}_2P^{-1} = \eta_1\xi_2 \quad (3.90)$$

$$P\bar{\psi}_{1L}\gamma^\mu\psi_{2L}P^{-1} = \bar{\psi}_{1R}\gamma_\mu\psi_{2R} \quad (3.91)$$

\longleftrightarrow

$$P\bar{\xi}_1\bar{\sigma}^\mu\xi_2P^{-1} = \eta_1\sigma_\mu\bar{\eta}_2C\bar{\psi}_{1L}\psi_{2R}C^{-1} = \bar{\psi}_{1L}^C\bar{\psi}_{2R}^C \quad (3.93)$$

$$= \bar{\psi}_{2L}\psi_{1R} \quad (3.94)$$

\longleftrightarrow

$$C\bar{\xi}_1\bar{\eta}_2C^{-1} = \bar{\eta}_1\bar{\xi}_2 \quad (3.96)$$

$$= \bar{\xi}_2\bar{\eta}_1C\bar{\psi}_{1L}\gamma^\mu\psi_{2L}C^{-1} = \bar{\psi}_{1-L}^c\gamma^\mu\psi_{2L}^c = -\bar{\psi}_{2R}\gamma^\mu\psi_{1R} \quad (3.97)$$

\longleftrightarrow

$$C\bar{\xi}_1\bar{\sigma}^\mu\xi_2C^{-1} = \bar{\eta}_1\bar{\sigma}^\mu\eta_2 \quad (3.99)$$

$$= -\eta_2\sigma^\mu\bar{\eta}_1 \quad (3.100)$$

On a les relations suivantes:

$$\psi_{aL}^{c+}\psi_{bR}^c = \psi_{bR}^+\psi_{aR} \quad (3.101)$$

$$\psi_{aL}^{c+}\bar{\sigma}^\mu\psi_{bL}^c = -\psi_{bL}^+\sigma^\mu\psi_{aR}(\psi_{aL}^+\bar{\sigma}^\mu\psi_{bL}) \quad (3.102)$$

$$(\psi_{cL}\bar{\sigma}_\mu\psi_{dL}) = 2(\psi_{bR}^{c+}\psi_{dL})(\psi_{cL}^+\psi_{aR}^c)(\psi_{aR}^+\sigma^\mu\psi_{bR}) \quad (3.103)$$

$$(\psi_{cL}^+\bar{\sigma}_\mu\psi_{dL}) = -2(\psi_{aR}^+\psi_{dL})(\psi_{cL}^+\psi_{bR}) \quad (3.104)$$

Les 2 dernières relations deviennent:

$$(\bar{\xi}_1\bar{\sigma}^\mu\xi_2)(\bar{\xi}_3\bar{\sigma}_\mu\xi_4) = (\bar{\xi}_1\bar{\sigma}^\mu\xi_4)(\bar{\xi}_3\bar{\sigma}_\mu\xi_2) \quad (3.105)$$

$$= 2(\xi_2\xi_4)(\bar{\xi}_3\bar{\xi}_1)(\eta_1\sigma^\mu\bar{\eta}_2)(\bar{\xi}_3\bar{\sigma}_\mu\xi_4) \quad (3.106)$$

$$= -2(\eta_1\xi_4)(\bar{\xi}_3\bar{\eta}_2) \quad (3.107)$$

Donc on peut écrire les fermions et le potentiel de Majorana comme:

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \psi_{L\alpha} \\ \psi_{R\beta}^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \quad (3.108)$$

$$v_m = \left(\begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} \right)^T \quad (3.109)$$

La densité lagrangienne pour une particule libre est :

$$\mathcal{L} = \bar{\xi}i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi - \frac{m_T}{2}(\bar{\xi}\bar{\xi} + \xi\xi) \quad (3.110)$$

3.1.4 Algèbre supersymétrique

Les tenseurs anti-symétrique $\sigma^{\mu\nu}$ sont des produits des matrices de Pauli, ils sont des générateur de groupe $SL(2, C)$. Un spineur Q_α se transforme sous le groupe $SL(2, c)$ comme suit[10]:

$$\begin{aligned} Q'_\alpha &= \exp\left(-\frac{i}{2}w_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)_\alpha^\beta Q_\beta \\ &= \left(1 - \frac{i}{2}w_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)_\alpha^\beta Q_\beta \\ &= Q_\alpha - \frac{i}{2}w_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta \end{aligned} \quad (3.111)$$

Le spineur Q_α se transforme sous le groupe de Lorentz comme suit:

$$\begin{aligned} Q'_\alpha &= U^+Q_\alpha U \\ &= \exp\left(\frac{i}{2}w_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right)Q_\alpha \exp\left(-\frac{i}{2}w_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right) \\ &= Q_\alpha + \frac{i}{2}w_{\mu\nu}M^{\mu\nu}Q_\alpha - \frac{i}{2}Q_\alpha w_{\mu\nu}M^{\mu\nu} + 0(w^2) \\ &= Q_\alpha - \frac{i}{2}w_{\mu\nu}(Q_\alpha M^{\mu\nu} - M^{\mu\nu}Q_\alpha) \end{aligned} \quad (3.112)$$

D'après les équations (5.3) et (5.4), on déduit:

$$(Q_\alpha M_{\mu\nu} - M_{\mu\nu}Q_\alpha) = (\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta \quad (3.113)$$

$$[Q_\alpha, M_{\mu\nu}] = (\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta \quad (3.114)$$

de même on trouve:

$$[\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, M_{\mu\nu}] = (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} \quad (3.115)$$

On utilise le fait que $M^{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu$, on montre que:

$$[Q_\alpha, P^\mu] = c(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}} \quad (3.116)$$

$$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, P^\mu] = c^*(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}Q_\beta \quad (3.117)$$

Pour déterminer les valeur de c et c^* , on emploie l'identité de Jacobi sur P^μ et Q_β . On a donc,

$$[P^\mu, [P^\nu, Q_\alpha]] + [P^\nu, [Q_\alpha, P^\mu]] + [Q_\alpha, [P^\mu, P^\nu]] = 0 \quad (3.118)$$

$$-c(\sigma^\nu)_{\alpha\dot{\alpha}}[P^\mu\bar{Q}^{\dot{\alpha}}] + c(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}[P^\nu, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = 0 \quad (3.119)$$

$$|c|^2(\sigma^\nu)^{\alpha\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}Q_\beta - |c|^2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\alpha}\beta}Q_\beta = 0 \quad (3.120)$$

$$|c|^2(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu - \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_{\alpha\dot{\alpha}}^{\beta\dot{\beta}}Q_\beta = 0 \quad (3.121)$$

$$\implies |c|^2 = 0 \quad (3.122)$$

$$\implies c = 0 \quad (3.123)$$

$$\implies [Q_\alpha, P^\mu] = [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, P^\mu] = 0 \quad (3.124)$$

$$Q'_\alpha = Q_\alpha - \frac{i}{2}w_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta \quad (3.125)$$

$$Q'_\beta = Q_\beta - \frac{i}{2}w_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})_\beta^\alpha Q_\alpha \quad (3.126)$$

$$\implies \quad (3.127)$$

$$Q'_\alpha Q'_\beta = Q_\alpha Q_\beta - \frac{i}{2}w_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})_\beta^\alpha Q_\alpha^2 - \frac{i}{2}w_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta^2 \quad (3.128)$$

$$Q'_\alpha = Q_\alpha - \frac{i}{2}w_{\mu\nu}(Q_\alpha M^{\mu\nu} - M^{\mu\nu} Q_\alpha) \quad (3.129)$$

$$Q'_\beta = Q_\beta - \frac{i}{2}w_{\mu\nu}(Q_\beta M^{\mu\nu} - M^{\mu\nu} Q_\beta) \quad (3.130)$$

$$\implies \quad (3.131)$$

$$Q'_\alpha Q'_\beta = Q_\alpha Q_\beta - \frac{i}{2}w_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\{Q_\alpha, Q_\beta\} - \frac{i}{2}w_{\mu\nu}\{Q_\beta, Q_\alpha\}M^{\mu\nu} \quad (3.132)$$

$$3.128 = 3.132$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0 \quad (3.133)$$

de même pour

$$\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (3.134)$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = t(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu$$

$$t = 2$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu \quad (3.135)$$

3.1.5 Variables de Grassmann

En supersymétrie, on élargit la notion de l'espace temps en *superspace* en le renforçant par deux variables de Grassmann θ_α ($\alpha = 1, 2$) et leurs complexes conjugués $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = (\theta_\alpha)^+$. Les variables de Grassmann vérifient les relations suivantes:[10]

$$\theta_\alpha\theta_\beta\theta_\gamma = 0 \quad (3.136)$$

$$\theta_\alpha\theta_\alpha = 0 \quad (3.137)$$

$$\theta^2 = \theta^\alpha\theta_\alpha = -2\theta_1\theta_2 \quad (3.138)$$

$$\bar{\theta}^2 = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = 2\bar{\theta}^{\dot{1}}\bar{\theta}^{\dot{2}} \quad (3.139)$$

Les variables de Grassmann sont intégrée comme:

$$\int d\theta_\alpha = 0 \quad (3.140)$$

$$\int d\theta_\alpha \theta_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (3.141)$$

$$\int d\theta_\alpha \bar{\theta}_{\dot{\beta}} = 0 \quad (3.142)$$

$$\begin{aligned} \int d\theta_\alpha \theta^2 &= \int d\theta_\alpha (\theta^\alpha \theta_\beta) \\ &= \int d\theta_\alpha (\varepsilon^{\beta\gamma} \theta_\gamma \theta_\beta) \\ &= \varepsilon^{\beta\gamma} \delta_{\alpha\gamma} \theta_\beta + \varepsilon^{\beta\gamma} \theta_\gamma \delta_{\alpha\beta} \\ &= \varepsilon^{\beta\alpha} \theta_\beta + \varepsilon_{\alpha\gamma} \theta_\gamma \\ &= 2\theta^\alpha \end{aligned} \quad (3.143)$$

$$d^2\theta = -\frac{1}{4} d\theta^\alpha d\theta_\alpha \quad (3.144)$$

$$d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4} d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} d^4 = d^2\bar{\theta} d^2\theta \quad (3.145)$$

$$\int d^2\theta \theta^2 = \int d^2\bar{\theta} \bar{\theta}^2 \quad (3.146)$$

$$\int d^4\theta^2 \bar{\theta}^2 = 1 \quad (3.147)$$

3.2 Exemple d'un modèle supersymétrique simple

Dans cette section, on donne la version supersymétrique de la théorie scalaire. La densité lagrangienne s'écrit:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^+ (\partial^\mu \phi) + i\bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi + F^+ F \quad (3.148)$$

Le premier terme représente lagrangien de Klein-Gordon pour un champ scalaire complexe (sans masse), et le deuxième terme représente lagrangien de Dirac pour le champ de chiralité gauche ξ (sans masse), F n'est pas physique

Chaque champs se transforme de la manière suivante:

$$\phi' = \phi + \delta\phi \quad (3.149)$$

$$\xi' = \xi + \delta\xi \quad (3.150)$$

$$F' = F + \delta F \quad (3.151)$$

Pour que la transformation soit de type supersymétrique, il faut que ϕ se transforme en ξ et vice versa et que l'action reste invariante. Le choix suivant vérifie ces conditions:

$$\delta\phi = \sqrt{2}\varepsilon\xi \quad (3.152)$$

$$\delta\xi = \sqrt{2}\varepsilon F - i\sqrt{2}\sigma^\mu \bar{\varepsilon} \partial_\mu \phi \quad (3.153)$$

$$\delta F = -i\sqrt{2}\bar{\varepsilon} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi \quad (3.154)$$

3.3 Extension supersymétrique du modèle standard

Dans cette section, on considère l'extension supersymétrique minimale du modèle standard (ou MSSM). Cette extension est appelée minimale car elle élargit le spectre des particules par un nombre de particules supersymétrique petit par rapport aux autres extensions supersymétriques.

3.3.1 Particules de MSSM

il y à 3 générations du quarks et leptons qui sont[12] :

$$Q = \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}, U^c, D^c \quad (3.155)$$

$$L = \begin{pmatrix} N \\ E \end{pmatrix}, N^c, E^c \quad (3.156)$$

$$H_u = \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix} \quad (3.157)$$

$$H_d = \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix} \quad (3.158)$$

- Les neutralinos
- Les charginos: il y a deux charginos qui sont fermions et sont chargées électriquement,il sont généralement étiqués $C_{\pm 1}, C_{\pm 2}$,le chargino le plus lourd peut se dégrader à un autre plus léger(désintégration z_0),et les deux peuvent se désintégrer par un W_{\pm} à neutralino
- Squarks sont les superpartenaires scalaires des quarks ,ils peuvent etre produit par des interactions fortes et sont donc faciles à produire hadronique,ils se désintègrent à quarks ,neutralinos ou charginos,il y a deux générations des squarks doivent etre la meme masse donc ne sont pas donnés des noms distincts ,les superpartenaires du quark haut et en bas peuvent etre séparés des squarks plus légers et sont appelés "arret" et "sbottom"
- Gluino: sont des Majorana partenaires fermions du gluon ,ils sont leurs et très forts,ils peuvent produit de manière signification LHC, les gluino se désintègrent soit un quark et anti-squark ou un anti-quark et squark avec un probabilité égale
- Lepton: sont les partenaires scalaires des leptons du modèle standard ,ils sont se trouve habituellement dans les désintégrations d'un charginos et neutralinos si elles sont assez légers pour etre un produit de désintégration

3.4 Le lagrangienne du MSSM

lagrangien du MSSM soft est donné par

$$\mathcal{L}_{soft}^{MSSM} = \mathcal{L}_{SMT}^{MSSM} + \mathcal{L}_{GMT}^{MSSM} + \mathcal{L}_{int}^{MSSM} \quad (3.159)$$

où \mathcal{L}_{SMT}^{MSSM} est le terme du masse scalaire donné par :

$$\mathcal{L}_{SMT}^{MSSM} = - \sum_{i,j=1}^3 ((M_L^2)_{ij} \bar{L}_i^+ \bar{L}_j + (M_l^2)_{ij} \bar{l}_i^{+c} \tilde{l}_j^c + (M_Q^2)_{ij} \tilde{Q}_i^+ \tilde{Q}_j + (M_u^2)_{ij} \tilde{u}_i^{+c} \tilde{Q}_j^c + (M_d^2)_{ij} \tilde{d}_i^{+c} \tilde{d}_j^c + M_1^2 H_1^+ H_1 + M_2^2 H_2^+ H_2) \quad (3.160)$$

où $M_L^2, M_l^2, M_Q^2, M_U^2$ sont des matrices $3 * 3$ réels et hermitiennes

\mathcal{L}_{GMT}^{MSSM} est le terme de masse de jaugeino où:

$$\mathcal{L}_{GMT}^{MSSM} = -\frac{1}{2}(M_3 \sum_{a=1}^3 \lambda_G^a \lambda_G^a + M \sum_{i=1}^3 \lambda^i \lambda^i + M^{prime} \lambda \lambda) \quad (3.161)$$

où M_3, M, M^{prime} sont des matrices $3 * 3$ complexes et hermitiennes

\mathcal{L}_{int}^{MSSM} est le terme d'interaction:

$$\mathcal{L}_{int}^{MSSM} = -M_{12}(H_1 H_2) + \sum_{i,j,k=1}^3 (A_{ij}^E f_{ij}^l (H_1 \tilde{L}_i) \tilde{l}_j^c + A_{ij}^D f_{ij}^d (H_1 \tilde{Q}_i) \tilde{d}_j^c + A_{ij}^u f_{ij}^u (H_2 \tilde{u}_i) \tilde{u}_j^c) + \hbar \quad (3.162)$$

on peut écrire lagrangienne de susy sous la forme:

$$\mathcal{L}_{susy} = \mathcal{L}_{susy}^{chiral} + \mathcal{L}_{susy}^{chiral} \quad (3.163)$$

où:

$$\mathcal{L}_{susy}^{chiral} = \mathcal{L}_{leptons} + \mathcal{L}_{quark} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{sup} \quad (3.164)$$

et:

$$\mathcal{L}_{leptons} = \int d^4\theta \sum_{i=1}^3 (K(\hat{L}_i \exp(2g\hat{v}) + g^{prime}(\frac{-1}{2})\hat{v}^{prime}, \hat{l}_i) + K(\hat{L}_i^c \exp(g^{prime}\hat{v}^{prime}), \hat{L}_i^c)) \quad (3.165)$$

$$\mathcal{L}_{quark} = \int d^4\theta \sum_{i=1}^3 (K(\hat{Q}_i \exp(2g_s\hat{v}_c + 2g\hat{v} + g^{prime}(\frac{1}{6})\hat{v}^{prime}), \hat{Q}_i) + K(\hat{u}_i^c \exp(g^{prime}\hat{v}^{prime}(\frac{-1}{2}) + 2g_s\hat{v}_c), \hat{u}_i^c) + \dots) \quad (3.166)$$

et

$$\mathcal{L}_{Higgs} = \int d^4(K(\hat{H}_1 \exp(g^{prime}\hat{v}^{prime}(\frac{-1}{2}) + 2g\hat{v}), \hat{H}_1)) + K(\hat{H}_2 \exp(g^{prime}\hat{v}^{prime}(\frac{1}{2}) + 2g\hat{v}), \hat{H}_2)) \quad (3.167)$$

$$\mathcal{L}_{sup} = \int d^2\theta W + \int d^2\bar{\theta} \bar{W} \quad (3.168)$$

et

$$\mathcal{L}_{susy}^{chiral} = \frac{1}{4} \left(\int d^4\theta \left(\sum_{a=1}^8 W_s^{a\alpha} W_{s\alpha}^a + \sum_{i=1}^3 W^{i\alpha} W_\alpha^i + w^{\alpha'} W_{\alpha'} \right) \right) + hc \quad (3.169)$$

donc lagrangien total de MSSM est donné par:

$$\mathcal{L}^{MSSM} = \mathcal{L}_{susy} + \mathcal{L}_{soft}^{MSSM} \quad (3.170)$$

3.5 Les règles de Feynman

Les propagateur Les vertex

$$\begin{aligned}
 \text{---} \overset{a}{\leftarrow} \text{---} \overset{k}{\rightarrow} \text{---} \overset{b}{\rightarrow} &= \frac{i\delta^{ab}}{k^2 + i\epsilon} \\
 \text{---} \overset{a}{\leftarrow} \text{---} \overset{k}{\rightarrow} \text{---} \overset{b}{\rightarrow} &= \frac{-i\delta^{ab}}{k^2 + i\epsilon} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - i\epsilon} \right) \\
 \text{---} \overset{p}{\rightarrow} &= \frac{i}{\gamma^\mu p^\mu - m + i\epsilon}
 \end{aligned}$$

Figure 3.1: Les propagateurs

$$\begin{aligned}
 \text{---} \overset{\mu}{\leftarrow} \text{---} \overset{\nu}{\rightarrow} Z^{0\nu} & \quad \frac{ie g_3}{s_W c_W} \left(-Z_D^i Z_D^{j*} + \frac{2}{3} \delta^{ij} s_W^2 \right) Y_{\alpha\beta}^a g^{\mu\nu} \\
 \text{---} \overset{i}{\leftarrow} \text{---} \overset{\alpha}{\rightarrow} D_{i\alpha}^- & \\
 \text{---} \overset{j}{\leftarrow} \text{---} \overset{\beta}{\rightarrow} U_{j\beta}^+ & \\
 \text{---} \overset{\mu}{\leftarrow} \text{---} \overset{\nu}{\rightarrow} W^\nu & \quad \frac{ie g_3 \sqrt{2}}{s_W} Z_D^i Z_U^{j*} K^{JI*} Y_{\alpha\beta}^a g^{\mu\nu} \\
 \text{---} \overset{i}{\leftarrow} \text{---} \overset{\alpha}{\rightarrow} D_{i\alpha}^- & \\
 \text{---} \overset{\mu}{\leftarrow} \text{---} \overset{\nu}{\rightarrow} g^{b\nu} & \quad -i g_s^2 [f_{abc} f_{cde} (g^{\mu\lambda} g^{\rho\rho} - g^{\mu\rho} g^{\rho\lambda}) + f_{ade} f_{bce} (g^{\mu\nu} \\
 & \quad + f_{ace} f_{bde} (g^{\mu\rho} g^{\lambda\nu} - g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho})] \\
 \text{---} \overset{k}{\leftarrow} \text{---} \overset{\gamma}{\rightarrow} U_{k\gamma}^- & \\
 \text{---} \overset{i}{\leftarrow} \text{---} \overset{\beta}{\rightarrow} U_{j\beta}^- & \quad -i \left\{ \left[\frac{g_3^2}{6} (3X_U^i X_U^{kj} - X_U^{ij} X_U^{kl}) + \frac{e^2}{4s_W^2} R_U^{ij} R_U^{kl} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{e^2}{36c_W^2} Y_U^{ij} Y_U^{kl} + V_U^{ijkl} + V_U^{klji} \right] \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \right. \\
 & \quad \left. + \left[\frac{g_3^2}{6} (3X_U^i X_U^{kl} - X_U^i X_U^{kj}) + \frac{e^2}{4s_W^2} R_U^i R_U^{kj} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{e^2}{36c_W^2} Y_U^i Y_U^{kj} + V_U^{ikj} + V_U^{kjil} \right] \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \right\} \\
 \text{---} \overset{i}{\leftarrow} \text{---} \overset{\alpha}{\rightarrow} D_{i\alpha}^- & \\
 \text{---} \overset{k}{\leftarrow} \text{---} \overset{\gamma}{\rightarrow} D_{k\gamma}^- & \\
 \text{---} \overset{i}{\leftarrow} \text{---} \overset{\beta}{\rightarrow} D_{j\beta}^- & \quad -i \left\{ \left[\frac{g_3^2}{6} (3X_D^i X_D^{kj} - X_D^{ij} X_D^{kl}) + \frac{e^2}{4s_W^2} R_D^{ij} R_D^{kl} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{e^2}{36c_W^2} Y_D^{ij} Y_D^{kl} + V_D^{ijkl} + V_D^{klji} \right] \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \right. \\
 & \quad \left. + \left[\frac{g_3^2}{6} (3X_D^i X_D^{kl} - X_D^i X_D^{kj}) + \frac{e^2}{4s_W^2} R_D^i R_D^{kl} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{e^2}{36c_W^2} Y_D^i Y_D^{kl} + V_D^{ikl} + V_D^{klji} \right] \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \right\} \\
 \text{---} \overset{i}{\leftarrow} \text{---} \overset{\alpha}{\rightarrow} D_{i\alpha}^- &
 \end{aligned}$$

Figure 3.2: Les vertexs

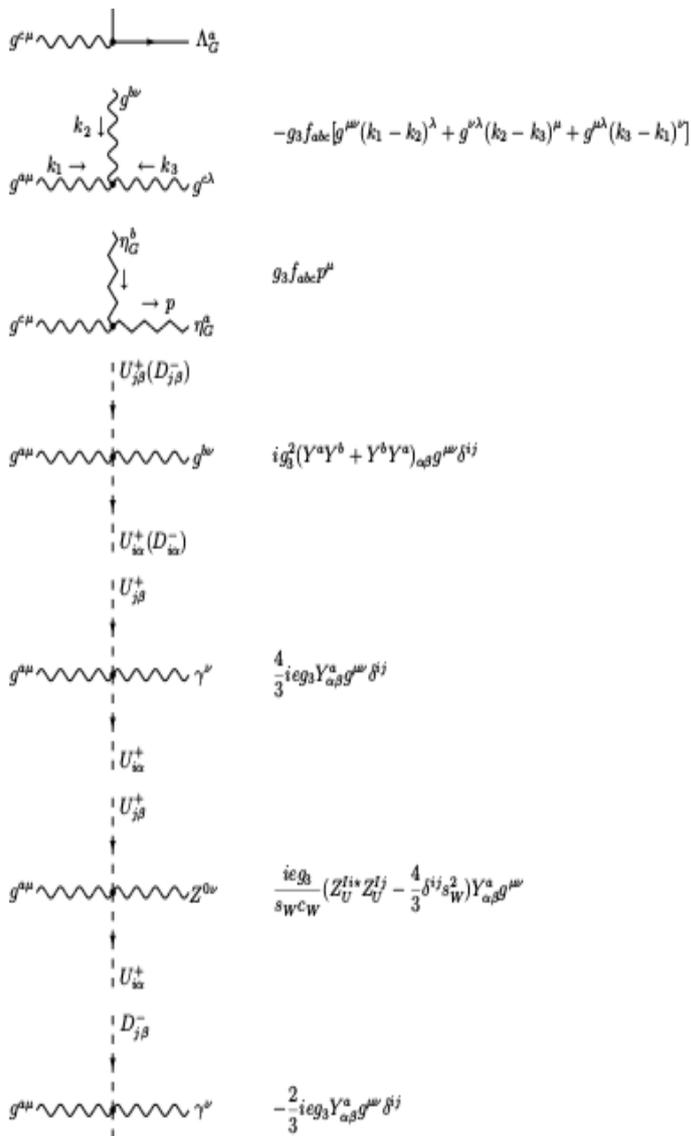


Figure 3.3: Les Les vertexs