Le formalisme de la géométrie non commutative

4.1 Introduction

L'introduction des coordonnées non commutatives peut conduire à des modifications importantes à la mécanique quantique. Dans ce chapitre nous nous intéressons à la formulation et à l'interprétation de la théorie quantique non commutative. Nous commençons d'abord par la présentation de la quantification de Weyl et le produit de Moyal pour réduire le formalisme des opérateurs non commutatifs au formalisme ordinaire. Ensuite nous exposons les deux formulations de la théorie quantique non commutative. Il s'agit du décalage de Bopp et les cartes de de Seiberg-Witten. Notre intention est avant tout d'examiner la distinction entre ces formulations mathématiques et de discuter brièvement ensuite de l'incidence que cela peut avoir sur les interprétations conceptuelles.

4.2 L'opérateur de Weyl

Nous définissons un espace non commutatif comme décrit dans l'introduction en remplaçant les coordonnées locales x^μ de $\mathbb{R}^D$ par des opérateurs hermitiens $\hat{x}^\mu$ obéissant aux relations de commutation

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}. \tag{4.1}$$

Les $\hat{x}^{\mu}$ génèrent alors une algèbre non commutative d'opérateurs. La quantification sous l'hypothèse d'une géométrie non commutative peut être étendue des coordonnées elles-mêmes à l'algèbre des fonctions $f(x)$ en utilisant la quantification de Weyl. La quantification de Weyl fournit une correspondance entre l'algèbre des champs sur $\mathbb{R}^D$ et cet algèbre d'opérateurs. Considérons l'algèbre commutative des fonctions définies sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^D$ de dimension D, avec un produit défini par la multiplication habituelle des fonctions. Ce que l'on recherche est une application W qui assigne à chaque élément $f(x)$ dans l'algèbre des fonctions $\mathcal{A}$ un opérateur hermitien $\hat{\mathcal{W}}[f]$ dans l'algèbre des opérateurs $\hat{\mathcal{A}}$. On fait cela en choisissant une base appropriée pour les éléments de chaque algèbre et ensuite les identifie les uns avec les autres. Le choix le plus courant consiste à utiliser une décomposition de Fourier de la fonction $f(x)$

$$\tilde{f}(k) = \int d^D x\, e^{-ik_\nu x^\nu} f(x)\,, \tag{4.2}$$

puis faire la transformation inverse avec les opérateurs non commutatifs $\hat{x}^{\nu}$

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu}\,. \tag{4.3}$$

Un cas particulièrs de la quantification de Weyl est la fonction exponentièlle,

$$\hat{\mathcal{W}}[\, e^{\,ik_\mu x^\mu}] = \, e^{\,ik_\mu \hat{x}^\mu}.$$

La condition de Schwartz implique également que toute fonction $f(x)$ peut être décrite par sa transformée de Fourier

$$\tilde{f}(k) = \int d^D x \;\; e^{\,-ik_\mu x^\mu} f(x)\;, \tag{4.4}$$

avec $\tilde{f}(-k) = \tilde{f}(k)^*$ quand $f(x)$ a une valeur réelle. Si $f\ (x)$ est une fonction réelle, l'opérateur de Weyl est hermitien. En fait, en faisant le changement $k \to -k$, dans la conjuguée hermitiènne de (4.3)

$$\hat{\mathcal{W}}^{+}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \widetilde{f}^{*}\ (k)\ \ e^{-ik_\mu \hat{x}^\mu}, \tag{4.5}$$

nous obtenons

$$\hat{\mathcal{W}}^{+}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \widetilde{f}\ (-k)\, e^{-ik_\mu \hat{x}^\mu}. \tag{4.6}$$

En posant $k' = -k$, nous obtenons enfin

$$\hat{\mathcal{W}}^{+}[f] = \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \widetilde{f}\ (k')\ \ e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} = \hat{\mathcal{W}}\ \ [f]\,. \tag{4.7}$$

On peut écrire (4.3) en termes d'une application $\hat{\Delta}(x)$ entre opérateurs et champs en utilisant (4.2) pour obtenir

$$\hat{\mathcal{W}}\ [f] = \int d^D x\ f(x) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik_\mu x^\mu} e^{ik_\nu \hat{x}^\nu}$$

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int d^D x\ f(x)\, \hat{\Delta}(x) \tag{4.8}$$

où

$$\hat{\Delta}(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik_\mu x^\mu} e^{ik_\nu \hat{x}^\nu}. \tag{4.9}$$

L'opérateur (4.9) est hermitien, $\hat{\Delta}(x)^+ = \hat{\Delta}(x)$, et il décrit une base mixte pour les opérateurs et les champs sur l'espace-temps. De cette façon, nous pouvons interpréter le champ $f(x)$ comme la représentation de l'espace de coordonnées de l'opérateur de Weyl $\hat{\mathcal{W}}[f]$. Notez que dans le cas commutatif $\theta^{\mu\nu} = 0$, l'application (4.9) se réduit trivialement à une fonction delta $\delta^D(\hat{x} - x)$ et $\hat{\mathcal{W}}[f]|_{\theta=0} = f(\hat{x})$. Mais généralement, d'après la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, pour $\theta^{\mu\nu} \neq 0$, cette opérateur n'est pas trivial.

4.3 Le produit "⋆" de Moyal

Le produit star est un moyen particulièrement utile pour gérer les géométries non commutatives, car on peut continuer à travailler avec des fonctions ordinaires, il suffit de garder à l'esprit qu'elles obéissent à une règle de produit modifiée dans l'algèbre. Avec cela, on peut construire des théories quantiques non commutatives des champs en remplaçant les produits normaux des champs dans le Lagrangien par les produits star.

Nous pouvons étendre cet isomorphisme entre les espaces vectoriels à un isomorphisme entre les algèbe en construisant un nouveau produit, noté $\star$, qui respecte l'application W,

$$W(f \star g)(x) = W(f) \cdot W(g)\,, \tag{4.10}$$

pour $f, g \in \mathcal{A}$ et $\hat{f}, \hat{g} \in \hat{\mathcal{A}}$. A partir des équations (4.3) et (4.10) nous obtenons

$$W(f \star g) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, e^{\mathrm{i}k_\mu \hat{x}^\mu}\, e^{\mathrm{i}p_\nu \hat{x}^\nu}\, \tilde{f}(k)\tilde{g}(p)\,. \tag{4.11}$$

En utilisant, la formule de Campbell - Baker - Hausdorff

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]-\frac{1}{12}[B,[A,B]]-\frac{1}{24}[B,[A,[A,B]]]+\ldots} \tag{4.12}$$

nous pouvons écrire

$$e^{\mathrm{i}k_\nu \hat{x}^\nu} e^{\mathrm{i}p_\nu \hat{x}^\nu} = e^{\mathrm{i}(k_\nu + p_\nu)\hat{x}^\nu - \frac{\mathrm{i}}{2}k_\nu \theta^{\nu\kappa} p_\kappa}\,, \tag{4.13}$$

et, ainsi,

$$W(f\star g) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, e^{\mathrm{i}(k_\mu + p_\mu)\hat{x}^\mu - \frac{\mathrm{i}}{2}k_\nu \theta^{\nu\kappa} p_\kappa}\, \tilde{f}(k)\tilde{g}(p)\,. \tag{4.14}$$

Considérons maintenant la fonction

$$F\left(x\right) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, \tilde{f}(k)\tilde{g}(p) e^{-\frac{\mathrm{i}}{2}k_\kappa \theta^{\kappa\nu} p_\nu} e^{-\mathrm{i}(k_\kappa + p_\kappa)x^\kappa}\,. \tag{4.15}$$

L'opérateur de Weyl correspondant est

$$W(F) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D}\; e^{\mathrm{i}q_\mu \hat{x}^\mu}\;\; \tilde{F}(q) \tag{4.16}$$

où

$$\tilde{F}(q) = \int d^D x\, e^{-\mathrm{i}k_\nu x^\nu} F(x)\,, \tag{4.17}$$

Nous avons alors

$$W(F) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, \tilde{f}(k)\tilde{g}(p) e^{-\frac{\mathrm{i}}{2}k_\kappa \theta^{\kappa\nu} p_\nu} \int \frac{\mathrm{d}^D q}{(2\pi)^D} \int d^D x\, e^{-\mathrm{i}k_\nu x^\nu} e^{-\mathrm{i}(k_\kappa + p_\kappa)x^\kappa}\;\; e^{\mathrm{i}q_\mu \hat{x}^\mu} \tag{4.18}$$

Il s'en suit que

$$W(F) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, e^{\mathrm{i}(k_\mu + p_\mu)\hat{x}^\mu - \frac{\mathrm{i}}{2}k_\nu \theta^{\nu\kappa} p_\kappa}\, \tilde{f}(k)\tilde{g}(p) \tag{4.19}$$

L'équation (4.19) comparée à l'équation (4.14)

$$f\left(x\right)\star g\left(x\right) = F\left(x\right) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, \tilde{f}(k)\tilde{g}(p) e^{-\frac{\mathrm{i}}{2}k_\kappa \theta^{\kappa\nu} p_\nu} e^{-\mathrm{i}(k_\kappa + p_\kappa)x^\kappa} \tag{4.20}$$

Si nous réécrivons le facteur dépendant de θ en un opérateur différentiel agissant sur la base de l'onde plane, nous pouvons aussi l'exprimer sous la forme

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\mathrm{i}}{2}k_\kappa \theta^{\kappa\nu} p_\nu} e^{-\mathrm{i}(k_\kappa + p_\kappa)x^\kappa} &= \sum_n \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{\kappa\nu}\frac{\partial}{\partial x^\kappa}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right)^n e^{-\mathrm{i}k_\kappa x^\kappa} e^{-\mathrm{i}p_\kappa y^\kappa}\Big|_{x\to y} \\ &= \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{\kappa\nu}\frac{\partial}{\partial x^\kappa}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right) e^{-\mathrm{i}k_\kappa x^\kappa} e^{-\mathrm{i}p_\kappa y^\kappa}\Big|_{x\to y} \end{aligned} \tag{4.21}$$

et par conséquent,

$$f\left(x\right)\star g\left(x\right) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{\kappa\nu}\frac{\partial}{\partial x^\kappa}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, \tilde{f}(k)\tilde{g}(p) e^{-\mathrm{i}(k_\kappa x^\kappa + p_\kappa y^\kappa)}\Big|_{x\to y} \tag{4.22}$$

Nous obtenons alors le produit

$$f(x) \star g(x) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{\kappa\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial}{\partial y^{\nu}}\right) f(x)\, g(y)\Big|_{x\to y} \tag{4.23}$$

qui est connu sous le nom de produit Moyal [41]. Le produit star (4.23) est associatif mais non commutatif. Pour $\theta = 0$, il se réduit au produit ordinaire des fonctions.

Il est à noter que le commutateur Moyal avec les coordonnées locales x^i peut être utilisé pour générer des dérivées comme

$$x^i \star f(x) - f(x) \star x^i = i\,\theta^{ij}\,\partial_j f(x)\ .$$

En général, le commutateur de Moyal de deux fonctions peut être représenté sous une forme compacte en utilisant un opérateur bi-différentièl comme dans (4.23),

$$f(x) \star g(x) - g(x) \star f(x) = 2i\, f(x)\ \sin\left(\frac{1}{2}\,\overleftarrow{\partial_i}\,\theta^{ij}\,\overrightarrow{\partial_j}\right)\ g(x)\ ,$$

tandis que l'anti-commutateur avec $\star$ peut être écrit comme

$$f(x) \star g(x) + g(x) \star f(x) = 2\, f(x)\ \cos\left(\frac{1}{2}\,\overleftarrow{\partial_i}\,\theta^{ij}\,\overrightarrow{\partial_j}\right)\ g(x)\ .$$

Une extension utile de la formule (4.23) est

$$f_1(x_1) \star \cdots \star f_n(x_n) = \prod_{a<b} \exp\left(\frac{i}{2}\,\theta^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x_a^i}\,\frac{\partial}{\partial x_b^j}\right)\ f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)\ .$$

Dans le cas présent, la technique décrite dans cette section s'est avérée être une méthode inestimable pour l'étude de la théorie des champs non commutatifs. Nous notons, cependant, que la construction générale présentée ci-dessus ne fait aucune référence à une représentation particulière de l'algèbre d'opérateurs de Weyl.

La méthode de quantification ci-dessus peut être généralisée à des situations plus compliquées où les commutateurs $[\hat{x}^i, \hat{x}^j]$ ne sont pas simplement des nombres complexes. La situation générique est celle où les espaces de moment coordonnés et conjugués sont non commutatifs d'une manière corrélée. Alors les commutateurs $[\hat{x}^i, \hat{x}^j]$, $[\hat{x}^i, \hat{p}_j]$ et $[\hat{p}_i, \hat{p}_j]$ sont des fonctions de $\hat{x}^i$ et $\hat{p}_i$, c'était le type d'espace non commutatif qui était considéré à l'origine dans la construction de Snyder.

4.4 Le décalage de Bopp

Comme on le sait, en mécanique quantique ordinaire nous pouvons utiliser pour les opérateurs $\hat{x}$ et $\hat{p}$ la représentation de coordonnées donnée par la correspondance habituelle

$$\begin{aligned}\hat{x} &\rightarrow x \\ \hat{p} &\rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} = -i\hbar\partial_x\end{aligned}$$

ou bien la représentation des impulsions, où les opérateurs $\hat{x}$ et $\hat{p}$ sont donnés par

$$\begin{aligned}\hat{x} &\rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial p} = i\hbar\partial_p \\ \hat{p} &\rightarrow p\end{aligned}$$

Le physicien Fritz Bopp fut le premier à considérer, pour étudier certaines implications statistiques de la quantification, des opérateurs pseudo-différentiels obtenus à partir d'une représentation mixte basée sur les règles de quantification [42]

$$\hat{x} \rightarrow x + \frac{i\hbar}{2}\partial_p \tag{4.24}$$

$$\hat{p} \rightarrow p - \frac{i\hbar}{2}\partial_x. \tag{4.25}$$

Cette procédure, dite décalage de Bopp, est en lien direct avec un produit $\star$ défini sur l'espace des phase comme une déformation associative du produit ordinaire. Le produit $\star$ a été défini par Groenewold [33] comme suit

$$H(x,p) \star W(x,p) \equiv H(x,p)e^{\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_x\overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p\overrightarrow{\partial}_x)}W(x,p). \tag{4.26}$$

Le produit $\star$ induit le décalage de Bopp [43] dans le sens où il peut être évalué par une translation (un décalage) de l'arguments de la première fonction.

$$H(x,p) * W(x,p) = H(x + \frac{i\hbar}{2}\partial_{\vec{p}}\ ,\ p - \frac{i\hbar}{2}\partial_{\vec{x}})W(x,p). \tag{4.27}$$

Cette approche peut être très utile en géométrie non commutative sachant que les opérateurs $\hat{x}_\mu$ et $\hat{p}_\mu$ qui vérifient la relation de commutation

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu} \quad , \quad [\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = 0 \quad , \quad [\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu] = i\delta_{\mu\nu} \tag{4.28}$$

peuvent être représentés par

$$\hat{x}_\mu = x_\mu - \frac{\theta_{\mu\nu}}{2} p_\nu \tag{4.29}$$

et

$$\hat{p}_\mu = p_\mu. \tag{4.30}$$

Dans ce cas, nous nous attendons à ce que le produit Moyal $\star$ soit écrit comme un produit ordinaire avec un décalage de l'argument de la première fonction

$$f(x) \star g(x) = f\left(x^\mu - \frac{1}{2}\tilde{p}^\mu\right) \star g(x) \tag{4.31}$$

avec

$$\tilde{p}^\mu = \theta^{\mu\nu} p_\nu. \tag{4.32}$$

Pour démontrer cette propriété, partons de la définition du produit de Moyal et faisons le développement de l'exponentielle

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{\kappa\nu} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \frac{\partial}{\partial y^\nu}\right)^n f(x) g(y)\Big|_{x \to y}, \\ &= \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n (\theta^{\kappa_1\nu_1}\theta^{\kappa_2\nu_2}....\theta^{\kappa_n\nu_n}) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\kappa_1}} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa_2}} ... \frac{\partial}{\partial x^{\kappa_n}} f(x)\right) \\ &\quad \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu_2}} ... \frac{\partial}{\partial x^{\nu_n}} g(x)\right). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Maintenant nous introduisons l'opérateur

$$\hat{p}_{\kappa_i} = -i \frac{\partial}{\partial x^{\kappa_i}}. \tag{4.34}$$

et la propriété

$$\frac{\partial}{\partial x^{\kappa_i}} g(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\, i k_{\kappa_i} e^{\mathrm{i} k_\nu x^\nu} \tilde{g}(k) \tag{4.35}$$

pour écrire

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} e^{\mathrm{i} k_\nu x^\nu} \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \left(\frac{-i}{2}\right)^n (\theta^{\kappa_1\nu_1}\theta^{\kappa_2\nu_2}....\theta^{\kappa_n\nu_n}) (\hat{p}_{\kappa_1}\hat{p}_{\kappa_2}...\hat{p}_{\kappa_n} f(x)) \\ &\quad k_{\nu 1} k_{\nu_2} ... k_{\nu_n} \tilde{g}(k). \end{aligned} \tag{4.36}$$

La dernière équation peut se mettre sous la forme

$$f(x) \star g(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} e^{\mathrm{i} k_\kappa x^\kappa} \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \left(\frac{-i}{2}\right)^n (\theta^{\kappa\nu} k_\nu \hat{p}_\kappa)^n f(x) \tilde{g}(k), \tag{4.37}$$

où, maintenant, la somme sur n peut être effectuer

$$\sum_{n=0} \frac{1}{n!} \left(\frac{-i}{2}\right)^n (k_\kappa \theta^{\kappa\nu} \hat{p}_\nu)^n = \exp\left(\frac{-i}{2}\theta^{\kappa\nu} k_\nu \hat{p}_\kappa\right) \quad (4.38)$$

Il vient alors

$$f(x) \star g(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} e^{\mathrm{i}k_\kappa x^\kappa} \exp\left(\frac{-i}{2}\theta^{\kappa\nu} k_\nu \hat{p}_\kappa\right) f(x)\tilde{g}(k). \quad (4.39)$$

Sachant que

$$\exp\left(\frac{-i}{2}\theta^{\kappa\nu} k_\nu \hat{p}_\kappa\right) f(x) = f(x^\kappa - \frac{i}{2}\theta^{\kappa\nu} k_\nu) \quad (4.40)$$

et que

$$\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} f(x^\kappa - \frac{i}{2}\theta^{\kappa\nu} k_\nu) e^{\mathrm{i}k_\kappa x^\kappa} \tilde{g}(k) = f(x - \frac{1}{2}\tilde{p}) \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} e^{\mathrm{i}k_\kappa x^\kappa} \tilde{g}(k) \quad (4.41)$$

nous obtenons enfin

$$f(x) \star g(x) = f(x - \frac{i}{2}\tilde{p}) g(x). \quad (4.42)$$

Cette procédure est beaucoup plus utile en mécanique quantique. Elle fourni une manière simple, , quoique approximative, suivant laquelle nous pouvons avoir un aperçu sur les effets de la non commutativité sur les phénomènes quantiques. Cependant, ceci n'est pas sans difficulté car, comme le potentiel décalé implique en principe des puissances arbitraires de l'impulsion, nous aurons un grand nombre arbitraire de dérivées dans l'équation de Schrödinger. C'est ainsi que les physiciens développent le potentiel décalé à quelques ordres en θ. C'est encore une autre approximation.

4.5 Transformations de Seiberg-Witten

Les cartes de Seiberg-Witten ont été découvertes pour la première fois par Nathan Seiberg et Edward Witten dans le contexte de la théorie des cordes et la géométrie non commutative. Ils ont considéré que la théorie de jauge ordinaire devrait être équivalente à une théorie de champ de Yang-Mills non commutative. Ils ont introduit une correspondance entre une théorie de jauge non commutative et une théorie de jauge ordinaire. De plus, ils ont montré que la carte de Seiberg-Witten pouvait être interprétée comme un développement du champ de jauge non commutative en θ.

Dans ce paragraphe, nous rappelons brièvement la méthode de Seiberg-Witten, les détails étant donnés dans [44]. Prenons un espace plat Minkowski, sur lequel les coordonnées sont considérées comme des opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert, satisfaisant l'algèbre (4.28)

Partons de la transformation de jauge ordinaire

$$\begin{aligned} \delta_\lambda A_\mu &= \partial_\mu \lambda + ie\,[\lambda, A^\mu] && (4.43)\\ \delta_\lambda F_{\mu\nu} &= ie\,[\lambda, F_{\mu\nu}] && (4.44) \end{aligned}$$

où A_μ est le champ de jauge, λ est le champ de la transformation locale et

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie\,[A_\mu, A_\nu] \quad (4.45)$$

Pour construire une théorie de jauge non-commutative nous remplaçons les champs ordinaires (A_ν, λ, $F_{\mu\nu}$...) par des champs non commutatifs noté avec chapeau ($\hat{A}_\nu$, $\hat{\lambda}$, $\hat{F}_{\mu\nu}$...) et les commutateurs habituels par les commutateurs de Moyal. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i\left[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu\right]_\star && (4.46)\\ \hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{A}_\mu &= \partial_\mu \hat{\lambda} + i\left[\hat{\lambda}, \hat{A}_\mu\right]_\star && (4.47)\\ \hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{F}_{\mu\nu} &= i\left[\hat{\lambda}, \hat{F}_{\mu\nu}\right]_\star && (4.48) \end{aligned}$$

Au premier ordre en θ, le commutateur de Moyal ce développe comme suit

$$\begin{aligned} [f,g]_\star &= f \star g - g \star f \\ &= fg + \frac{i}{2}\theta^{\rho\delta}\partial_\rho f\ \partial_\delta g - gf - \frac{i}{2}\theta^{\rho\delta}\partial_\delta g\ \partial_\rho f + O\left(\theta^2\right) \\ &= fg - gf + \frac{i}{2}\theta^{\rho\delta}\partial_\rho f\ \partial_\delta g + \frac{i}{2}\theta^{\rho\delta}\partial_\rho g\ \partial_\delta f + O\left(\theta^2\right) \\ &= fg - gf + \frac{i}{2}\theta^{\rho\delta}\left[\partial_\rho f\ \partial_\delta g + \partial_\rho g\ \partial_\delta f\right] + O\left(\theta^2\right) \\ &= [f,g] + \frac{i}{2}\theta^{\rho\delta}\left[\partial_\rho f\ \partial_\delta g + \partial_\delta g\ \partial_\rho f\right] + O\left(\theta^2\right) \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi

$$[f,g]_\star = [f,g] + \frac{i}{2}\theta^{\rho\delta}\left\{\partial_\rho f, \partial_\delta g\right\} + O\left(\theta^2\right). \quad (4.49)$$

Dans le cas abélien ($[f,g]=0$), nous trouvons

$$[f,g]_\star = \frac{i}{2}\theta^{\rho\delta}\left\{\partial_\rho f, \partial_\delta g\right\} + O\left(\theta^2\right) \quad (4.50)$$

L'idée de base des cartes de Seiberg Witten est que la correspondance entre les champs non commutatifs et leurs équivalents ordinaires s'obtient à partir de la relation d'équivalence de jauge

$$\hat{A}_\mu (A, \theta) + \hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{A}_\mu = \hat{A}_\mu (A + \delta_\lambda A, \theta), \tag{4.51}$$

en faisant les développements en puissances de θ

$$\hat{\lambda} = \lambda + \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + ... \tag{4.52}$$

et

$$\hat{A}_\mu = A_\mu + A_\mu^{(1)} + A_\mu^{(2)} + ... \tag{4.53}$$

Le problème est que nous devons résoudre une équation (l'équation (4.51)) avec deux inconus $\hat{\lambda}$ et $\hat{A}_\mu$. Pour contourner ce problème une autre condition (équation) doit être ajouter. Cette condition n'est rien d'autre que la généralisation de la condition de consistence de jauge au cas non commutatif

$$i\delta_\alpha \hat{\lambda}_\beta - i\delta_\beta \hat{\lambda}_\alpha - \left[\hat{\lambda}_\alpha, \hat{\lambda}_\beta\right]_\star = i\hat{\lambda}_{-i[\alpha,\beta]} \tag{4.54}$$

La dernière équation nous donne $\hat{\lambda}$ comme une fonction de λ. Pour trouver $\hat{A}_\mu$ nous écrivons (4.51) sous la forme

$$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{A}_\mu = \hat{A}_\mu (A + \delta_\lambda A; \theta) - \hat{A}_\mu (A, \theta) = \delta_\lambda \hat{A}_\mu$$

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= -\frac{1}{4}\theta^{\mu\nu} \{A_\mu, \partial_\nu \lambda\} \\ A_\mu^{(1)} &= -\frac{1}{4}\theta^{\kappa\nu} \{A_\kappa, \partial_\nu A_\mu + F_{\nu\mu}\} \end{aligned}$$

Si nous développons $\hat{F}_{\mu\nu}$

$$\hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}^{(1)} + F_{\mu\nu}^{(2)} + ..., \tag{4.55}$$

nous obtenons à l'ordre 1 en θ

$$F_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{4}\theta^{\kappa\rho} \left(\{A_\kappa, \partial_\rho F_{\mu\nu} + D_\rho F_{\mu\nu}\} - 2\{F_{\mu\kappa}, F_{\nu\rho}\}\right). \tag{4.56}$$

Il est à noter que les champs de matière se transforme dans le cas ordinaire suivant la loi

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \phi &= i\lambda\phi \\ \delta_\lambda \psi &= i\lambda\psi \\ \delta_\lambda \bar{\psi} &= -i\lambda\bar{\psi} \end{aligned}$$

qui se généralise au cas non commutatif comme suit dans

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{\phi} &= i\hat{\lambda}\star\hat{\phi} \\
\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{\psi} &= i\hat{\lambda}\star\hat{\psi} \\
\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\widehat{\overline{\psi}} &= -i\hat{\lambda}\star\widehat{\overline{\psi}}.
\end{aligned}$$

avec les relations d'équivalence de jauge $\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{\phi} = \delta_{\lambda}\hat{\phi}$, $\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{\psi} = \delta_{\lambda}\hat{\psi}$ et $\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\widehat{\overline{\psi}} = \delta_{\lambda}\widehat{\overline{\psi}}$.

Actuellement, les cartes de Seiberg Witten représentent la technique la plus appropriée pour étudier les phénomènes physiques dans le cadre de la géométrie non commutative. En prenant en compte les corrections des champs de jauge aux quels sont soumises les particules qui constituent la matière, ces cartes donnent la manière exacte dont la non-commutativité de l'espace-temps modifie la physique.

4.6 Conclusion

La géométrie non commutative représente une extension naturelle de la mécanique quantique habituelle, dans laquelle on considère également des commutateurs non-nuls entre les coordonnées. Dans ce cadre, plusieurs méthodes de quantification ont été proposées. Dans ce chapitre nous avons essayé d'exposer les méthodes les plus utilisées par les physiciens. Il s'agit de la méthode du décalage de Bopp, la méthode du produit de Moyal et la carte de Seiberg Witten. Les trois méthodes consistent à relier l'algèbre non commutative à l'algèbre standard par une classe de transformations linéaires. Nous avons vu que la méthode de décalage de Bopp est équivalente à la méthode du produit de Moyal et que la carte de Seiberg Witten est une version très avancée qui préserve l'invariance de jauge.

Le problème avec ces formulations est que les observables non commutatives écrites en termes d'observables commutatives ne présentent pas une structure mathématique simple, ce qui tend à obscurcir la signification physique.

Chapitre 5

Création des particules dans un espace non commutatif : Le décalage de Bopp

5.1 Introduction

Le but principal de ce chapitre est d'étudier la création des particules à partir du vide par un champ électrique dans un espace non commutatif en considérant la méthode canonique basées sur les transformations de Bogoliubov reliant les états "in" et "out". Cette méthode consiste d'abord à déterminer les états "in" et "out" solutions à l'équation de Klein Gordon (ou de Dirac pour les particules de spin $\frac{1}{2}$) et d'effectuer ensuite la transformation de Bogoliubov pour extraire de ses coefficients la probabilité de création des particules et le nombre des particules crées. Pour écrire la version non commutative de l'équation (d'onde), nous utilisons le décalage de Bopp.

Comme il a été mentionné dans le premier chapitre le problème de la création de particules de Dirac est déjà étudié dans la référence [16]. Nous allons donc reproduire ses résultat afin de les confirmer.

Avant de considérer le problème de la création des particules nous considérons d'abord l'équation de Klein Gordon en présence d'un champ magnétique résultante de l'application du décalage de Bopp. Ce problème peut se réduire en mécanique quantique ordinaire à l'équation de Schrödinger pour un oscillateur harmonique. Ensuite, nous nous intéressons à la création des particules scalaires en présence d'un champ électromagnétique. En dernière étape, nous considérons l'équation de Dirac non commutative pour étudier la création des particules de spin $\frac{1}{2}$.

5.2 Décalage de Bopp pour l'équation de Klein Gordon

Comme il a été mensionné, dans le chapitre précédent, la représentation des opérateurs $\hat{x}_\mu$, avec $\mu = 0, 1, 2, 3$, qui vérifient la relation de commutation

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}, \tag{5.1}$$

où θ_{ij} est une matrice anti-symétrique, peut être réalisé à partir des opérateurs ordinaires via le décalage de Bopp. En fait si nous écrivons les opérateurs $\hat{x}_\mu$ sous la forme

$$\hat{x}_\mu = x_\mu + f_\mu{}^\nu \hat{p}_\nu \tag{5.2}$$

où x_μ et $\hat{p}_\nu$ représentent, respectivement, la coordonnée et l'impulsion ordinaires. Il vient alors

$$\begin{aligned}
[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] &= \left[x_\mu + f_\mu{}^\rho \hat{p}_\rho, x_\nu + f_\nu{}^\sigma \hat{p}_\sigma\right] \\
&= f_\mu{}^\rho [\hat{p}_\rho, x_\nu] + f_\nu{}^\sigma [x_\mu, \hat{p}_\sigma] \\
&= -if_\mu{}^\rho \delta_{\rho\nu} + if_\nu{}^\sigma \delta_{\mu\sigma} \\
&= -if_{\mu\nu} + if_{\nu\mu}
\end{aligned}$$

Ce dernier résultat comparé à l'équation (5.1), nous donne l'équation

$$-f_{\mu\nu} + f_{\nu\mu} = \theta_{\mu\nu} \tag{5.3}$$

dont la solution est

$$f_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\theta_{\mu\nu} \tag{5.4}$$

Nous avons alors

$$\hat{x}_\mu = x_\mu - \frac{1}{2}\theta_\mu{}^\nu \hat{p}_\nu \tag{5.5}$$

Considérons maintenant l'équation de Klein Gordon non commutative en présence d'un champ magnétique

$$\left[(\hat{p}_\mu - eA_\mu(\hat{x}))^2 - m^2\right]\psi = 0. \tag{5.6}$$

Nous choisissons pour le champ magnétique la jauge

$$A^\mu = (0, -By, 0, 0)$$

avec $y \equiv x^2$. Nous supposons aussi que les paramètres θ non nuls sont $\theta_{12} = -\theta_{21} = \theta$. Dans ce cas l'équation de Klein Gordon devient

$$\left[\hat{p}_0^2 - (\hat{p}_1 - eB\hat{x}_2)^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2 - m^2\right]\psi = 0 \tag{5.7}$$

ou, encore

$$\left[\hat{p}_0^2 - \left(\hat{p}_1 - eBy + \frac{1}{2}eB\theta\hat{p}_1\right)^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2 - m^2\right]\psi = 0 \tag{5.8}$$

Pour résoudre cette équation, nous écrivons la solution sous la forme

$$\psi = \exp\left[-i\left(Et - p_x x - p_z z\right)\right]\varphi\left(y\right). \tag{5.9}$$

Il vient alors

$$\left\{E^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left[\left(1 + \frac{eB\theta}{2}\right)p_x - eBy\right]^2 - p_z^2 - m^2\right\}\varphi\left(y\right) = 0. \tag{5.10}$$

En faisant le changement de variable $y \to Y$ avec

$$Y = y - \frac{p_x}{eB}\left(1 + \frac{eB\theta}{2}\right)$$

nous obtenons l'équation

$$\left[E^2 + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} - e^2B^2Y^2 - p_z^2 - m^2\right]\tilde{\varphi}\left(Y\right) = 0$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial Y^2} + e^2B^2Y^2 - \mathcal{E}\right]\tilde{\varphi}\left(Y\right) = 0$$

avec $\varphi\left(y\right) \equiv \tilde{\varphi}\left(Y\right)$. Cette équation se ressemble à l'équation de Schrödinger pour un oscillateur harmonique de masse $m = \frac{1}{2}$ et de pulsation $\omega = 2eB$. l'énergie est donnée alors par

$$\mathcal{E} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega = \left(2n+1\right)eB \tag{5.11}$$

ce qui implique

$$E^2 = \left(2n+1\right)eB + p_z^2 + m^2. \tag{5.12}$$

Notons ici, que le spectre obtenue est le même que celui du cas commutatif.

5.3 Création des particule scalaires

Considérons maintenant un champ électromagnétique décrit par la jauge

$$A_\mu = (0,\ 0,\ Bx_1, -Et) \tag{5.13}$$

Dans ce cas l'équation de Klein Gordon devient

$$\left[\Pi^2 - m^2\right]\Psi = 0$$

avec

$$\begin{aligned}
\Pi_0 &= \hat{p}_0 \\
\Pi_1 &= \hat{p}_1 \\
\Pi_2 &= \hat{p}_2 - eB\left(x_1 - \frac{1}{2}\theta_{1j}p_j\right) \\
\Pi_3 &= \hat{p}_3 + eEt.
\end{aligned}$$

Pour résoudre l'équation de Kein Gordon, nous posons

$$\Psi = N\exp\left(ip_2x_2 + ip_3x_3\right)F\left(x_1, t\right)$$

La fonction $F\left(x_1, t\right)$ vérifient alors l'équation

$$\left[-\partial_t^2 + \partial_{x_1}^2 - \left(p_2 + eBx_1 - \frac{1}{2}eB\theta_{1j}p_j\right)^2 - \left(p_3 - eEt\right)^2 - m^2\right]F\left(x_1, t\right) = 0.$$

Pour simplifier la dernière équation nous faisons certains changements. D'abord nous posons

$$P_2 = -p_2 + \frac{1}{2}eB\theta_{1j}p_j$$

Ensuite nous faisons le changement $t \longrightarrow \tau$ avec

$$\sqrt{eE}\tau = -p_3 + eEt.$$

Il vient alors

$$dt = \frac{1}{\sqrt{eE}}d\tau \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \sqrt{eE}\frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Pour la dérivée second, nous avons

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\sqrt{eE}\frac{\partial}{\partial \tau}\right] = \sqrt{eE}^2\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} = eE\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$$

Maintenant nous faisons le changement

$$\sqrt{eB}\rho = P_2 - eBx_1.$$

Nous avons alors

$$dx_1 = -\frac{1}{\sqrt{eB}}d\rho \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_1} = -\sqrt{eB}\frac{\partial}{\partial \rho}$$

et par conséquent,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial \rho}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\sqrt{eB}\frac{\partial}{\partial \rho}\right] = eB\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}.$$

Enfin nous obtenons l'équation

$$\left[-eE\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - eE\tau^2 + eB\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - eB\rho^2 - m^2\right] F(\rho,\tau) = 0$$

qui admet la séparation de variables suivante

$$F(\rho,\tau) = \chi(\rho)\,\Phi(\tau).$$

Il vient que

$$\frac{1}{\Phi(\tau)}\left[eE\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + eE\tau^2 + m^2\right]\Phi(\tau) = \frac{1}{\chi(\rho)}\left[eB\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - eB\rho^2\right]\chi(\rho),$$

ce qui nous donne les deux équations

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \tau^2 + \frac{m^2}{eE}\right]\Phi(\tau) = \frac{K}{eE}\Phi(\tau) \tag{5.14}$$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho^2\right]\chi(\rho) = -\frac{K}{eB}\chi(\rho) \tag{5.15}$$

où K est la constante de séparation des variables.

La deuxième équation est similaire à d'un oscillateur harmonique non relativiste ayant la masse $M = \frac{1}{2}$ est la frequence $\omega = 2$. Dans ce cas la constante K se détermine facilement

$$-\frac{K}{eB} = \left(n + \frac{1}{2}\right)2 \Rightarrow K = -(2n+1)\,eB$$

L'équation (5.14) devient alors

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \tau^2 + \lambda\right]\Phi(\tau) = 0$$

avec

$$\lambda = \frac{m^2 + eB(2n+1)}{eE}$$

Suivant [39], l'équation admet deux ensembles de solutions exactes qui peuvent être écrites en termes de fonction de Weber

$$\begin{aligned}\Phi_1^+ &= D_\nu\left(-\left(1-i\right)\tau\right)\\ \Phi_1^- &= D_{\nu^*}\left(-\left(1+i\right)\tau\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Phi_2^+ &= D_{\nu^*}\left(\left(1+i\right)\tau\right)\\ \Phi_2^- &= D_\nu\left(\left(1-i\right)\tau\right)\end{aligned}$$

avec

$$\nu=\frac{1}{2}\left(1+i\lambda\right)$$

Pour obtenir la probabilité nous utilisons la transformation

$$D_\gamma\left(\xi\right)=\exp\left\{i\pi\gamma\right\}D_\gamma\left(-\xi\right)+\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(-\gamma\right)}\exp\left\{\frac{i\pi\left(\gamma+1\right)}{2}\right\}D_{-\gamma-1}\left(-i\xi\right)$$

qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}\Phi_1^+ &= \beta\Phi_2^-+\zeta\Phi_2^+\\ \Phi_2^+ &= \beta^*\Phi_1^-+\zeta^*\Phi_1^+\end{aligned}$$

où β et ζ sont les coefficients de Bogoliubov donnés par

$$\beta=\exp\left\{i\pi\nu\right\}$$

et

$$\zeta=\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(-\nu\right)}\exp\left\{\frac{i\pi\left(\nu+1\right)}{2}\right\}$$

avec la condition

$$\left|\zeta\right|^2-\left|\beta\right|^2=1.$$

La densité des particules crées est alors

$$n=\left|\beta\right|^2=\left|\exp\frac{i\pi}{2}\left(1+i\lambda_\pm\right)\right|^2=\exp\left[-\pi\frac{m^2+eB\left(2n+1\right)}{eE}\right]$$

La probabilité de production d'une paire est donnée par

$$P_{cr}=\left|\frac{\beta}{\zeta}\right|^2=\frac{\left|\beta\right|^2}{1+\left|\beta\right|^2}=\frac{\exp\left[-\pi\frac{m^2+eB(2n+1)}{eE}\right]}{1+\exp\left[-\pi\frac{m^2+eB(2n+1)}{eE}\right]}$$

5.4 Equation de Dirac et création des particules

5.4.1 Décalage de Bopp pour l'équation de Dirac

L'équation de Dirac non-commutative peut s'écrire

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\psi - e\gamma^{\mu}A_{\mu} * \psi = 0 \tag{5.16}$$

Compte tenu de l'équivalence entre le produit star et le décalage de Bopp, nous pouvons écrire cette équation sous la forme

$$\left[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m - e\gamma^{\mu}A_{\mu}\left(x - \frac{1}{2}\hat{p}\right)\right]\psi = 0 \tag{5.17}$$

Dans le cas où le champ électromagnétique est donné par l'équation (5.13) peut s'écrire comme

$$(\gamma^{\mu}\Pi_{\mu} - m)\,\psi = 0 \tag{5.18}$$

où les opérateurs sont comme définis dans la section précédente

$$\Pi_{\mu} = i\partial_{\mu} - eA_{\mu} \qquad \mu \neq 2 \tag{5.19}$$

$$\Pi_{2} = i\partial_{2} - eBx_{1} - \frac{ie}{2}B\theta_{1j}\partial_{j} \tag{5.20}$$

5.4.2 La forme quadratique de l'équation de Dirac

Pour une solution de l'équation de Dirac ψ,

$$(\gamma^{\mu}\Pi_{\mu} - m)\,\psi = 0, \tag{5.21}$$

nous posons

$$\psi = (\gamma^{\mu}\Pi_{\mu} + m)\,\Psi \tag{5.22}$$

où Ψ est un spineur à déterminer. En substituons (5.22) dans (5.21), nous pouvons obtenir la forme quadratique de l'équation de Dirac. En fait, nous avons

$$\begin{aligned}(\gamma^{\mu}\Pi_{\mu} - m)(\gamma^{\nu}\Pi_{\nu} + m)\,\Psi &= 0\\ \left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\Pi_{\mu}\Pi_{\nu} - m^{2}\right)\Psi &= 0\end{aligned} \tag{5.23}$$

Comme

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} + \frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu] = g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu],$$

l'équation quadratique devient

$$\left[\Pi^\mu\Pi_\mu + \frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,\Pi_\mu\Pi_\nu - m^2\right]\Psi = 0 \tag{5.24}$$

Maintenant, nous écrivons

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,\Pi_\mu\Pi_\nu &= \frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,[\Pi_\mu,\Pi_\nu] \\ &= \frac{ie}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,[\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu]\end{aligned} \tag{5.25}$$

ce qui nous donne

$$\frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,\Pi_\mu\Pi_\nu = -\frac{ie}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,F_{\mu\nu}. \tag{5.26}$$

L'équation quadratique de Dirac prend alors la form

$$\left[\Pi^2 - m^2 - \frac{ie}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,F_{\mu\nu}\right]\Psi = 0 \tag{5.27}$$

qui peut s'écrire aussi comme

$$\left[\Pi^2 + S - m^2\right]\Psi = 0 \tag{5.28}$$

avec

$$S = -\frac{ie}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}. \tag{5.29}$$

Cherchons d'abord les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice S

$$S\Gamma_i = s_i\Gamma_i \quad , \quad i = 1,2,3,4 \tag{5.30}$$

Pour la jauge choisie, le tenseur $F_{\mu\nu}$ est donné par

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

Dans ce cas nous avons

$$
\begin{aligned}
S &= -\frac{ie}{2}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}F_{\mu\nu} && (5.32)\\
&= -\frac{ie}{2}\left[\gamma^{0}\gamma^{i}F_{0i}+\gamma^{i}\gamma^{0}F_{i0}+\gamma^{i}\gamma^{j}F_{ij}\right]\\
&= -\frac{ie}{2}\left[2\gamma^{0}\gamma^{i}F_{0i}+\gamma^{i}\gamma^{j}F_{ij}\right] && (5.33)\\
&= -\frac{ie}{2}\left[2\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{E}+2i\overrightarrow{\Sigma}\cdot\overrightarrow{B}\right] && (5.34)\\
&= e\left(\overrightarrow{\Sigma}\cdot\overrightarrow{B}-i\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{E}\right) && (5.35)
\end{aligned}
$$

Calculons maintenons S^2

$$
\begin{aligned}
S^2 &= \left(\overrightarrow{\Sigma}\cdot\overrightarrow{B}-i\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{E}\right)\left(\overrightarrow{\Sigma}\cdot\overrightarrow{B}-i\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{E}\right) && (5.36)\\
&= \left(\overrightarrow{\Sigma}\cdot\overrightarrow{B}\right)^2-\left(\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{E}\right)^2-i\left(\overrightarrow{\Sigma}\cdot\overrightarrow{B}\right)\left(\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{E}\right)-i\left(\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{E}\right)\left(\overrightarrow{\Sigma}\cdot\overrightarrow{B}\right)\\
&= B^2-E^2-i\left[\alpha_i\Sigma_j+\Sigma_j\alpha_i\right]E_iB_j\\
&= \begin{pmatrix} E^2-B^2 & 2ie^2\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{B}\\ 2ie^2\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{B} & E^2-B^2\end{pmatrix} && (5.37)\\
&= B^2-E^2-2i\gamma^5\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{B} && (5.38)
\end{aligned}
$$

Les valeurs propres de S^2 sont données alor par l'équation

$$
\det\left(S^2-\lambda\right)=\left(e^2E^2-e^2B^2+\lambda\right)^2+4e^4\left(\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{B}\right)^2=0 \quad (5.39)
$$

qui donne la solution

$$
\begin{aligned}
\lambda &= e^2\left(-E^2+B^2\pm 2i\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{B}\right) && (5.40)\\
&= e^2\left(-E^2+B^2\pm 2iEB\right) && (5.41)\\
\lambda &= e^2\left(-iE\pm B\right)^2 && (5.42)
\end{aligned}
$$

Les valeurs propres de S sont alors

$$
s_{\pm}=\pm eB-ieE. \quad (5.43)
$$

Le spineur Ψ peut être écrit sous la forme

$$
\Psi_{\pm}=Z_{\pm}(x)\,\Gamma_{\pm} \quad (5.44)
$$

où $\Gamma_{\pm}$ sont les vecteurs propres de S. Les fonctions $Z_{\pm}$ vérifient alors l'équation

$$\left[\Pi^2 + s_{\pm} - m^2\right] Z_{\pm} = 0. \tag{5.45}$$

Comme dans le cas de Klein Gordon, nous écrivons pour résoudre la dernière équation

$$Z_{\pm} = N \exp\left(ip_2x_2 + ip_3x_3\right) F_{\pm}\left(x_1, t\right). \tag{5.46}$$

En suivant les mêmes étapes que dans la section précédente, nous obtenons l'équation

$$\left[-eE\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - eE\tau^2 + eB\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - eB\rho^2 - m^2 \pm eB - ieE\right] F_{\pm}\left(\rho, \tau\right) = 0$$

et après la séparation des variables nous obtenons

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \tau^2 + i + \frac{m^2}{eE}\right] \Phi_{\pm}\left(\tau\right) &= \frac{K_{\pm}}{eE}\Phi_{\pm}\left(\tau\right) && (5.47) \\ \left[-\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \rho^2 \mp 1\right] \chi_{\pm}\left(\rho\right) &= -\frac{K_{\pm}}{eB}\chi_{\pm}\left(\rho\right). && (5.48) \end{aligned}$$

avec $K_{\pm} = -\left(2n + 1 \pm 1\right) eB$.

Maintenant, en posant

$$\lambda_{\pm} = i + \frac{m^2 - eBK_{\pm}}{eE}, \tag{5.49}$$

nous arrivons à l'équation

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \tau^2 + \lambda_{\pm}\right] \Phi_{\pm}\left(\tau\right) = 0. \tag{5.50}$$

qui admet deux ensembles de solutions exactes qui peuvent être écrites en termes de fonction de Weber

$$\Phi_1^+ = D_{\nu}\left(-\left(1 - i\right)\tau\right) \tag{5.51}$$

$$\Phi_2^+ = D_{\nu^*}\left(\left(1 + i\right)\tau\right) \tag{5.52}$$

$$\Phi_1^- = D_{\nu^*}\left(-\left(1 + i\right)\tau\right) \tag{5.53}$$

$$\Phi_2^- = D_{\nu}\left(\left(1 - i\right)\tau\right) \tag{5.54}$$

où

$$\nu = \frac{1}{2}\left(1 + i\lambda_{\pm}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{m^2 - eBK_{\pm}}{eE} \tag{5.55}$$

Pour obtenir la probabilité nous utilisant la transformation

$$D_{\gamma}(\xi) = \exp\{i\pi\gamma\} D_{\gamma}(-\xi) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\gamma)} \exp\left\{\frac{i\pi(\gamma+1)}{2}\right\} D_{-\gamma-1}(-i\xi) \tag{5.56}$$

qui nous permet d'écrire

$$\Phi_1^+ = \beta\Phi_2^- + \zeta\Phi_2^+ \tag{5.57}$$

$$\Phi_2^+ = \beta^*\Phi_1^- + \zeta^*\Phi_1^+ \tag{5.58}$$

où β et ζ sont les coefficients de Bogoliubov donnés par

$$\beta = \exp\{i\pi\nu\} \tag{5.59}$$

et

$$\zeta = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} \exp\left\{\frac{i\pi(\nu+1)}{2}\right\} \tag{5.60}$$

avec la condition

$$|\zeta|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{5.61}$$

La densité des particules crées est alors

$$n = \exp\left(-\pi\frac{m^2 + eB(2n+1\pm1)}{eE}\right) \tag{5.62}$$

La probabilité de production d'une paire est donnée par

$$P = \frac{\exp\left(-\pi\frac{m^2+eB(2n+1\pm1)}{eE}\right)}{1+\exp\left(-\pi\frac{m^2+eB(2n+1\pm1)}{eE}\right)}$$

5.5 Conclusion

Le but principal de ce chapitre était de refaire les calculs de la référence [16] concernant la création des particules de Dirac par un champ électromagnétique dans un espace non commutatif en considérant le décalage de Bopp.

Cependant, nous avons considéré d'abord l'équation de Klein Gordon non commutative résultante du décalage de Bopp pour un champ magnétique où nous avons montré que la non commutativité de l'espace temps ne modifie pas les niveaux de Landau connus pour le champ magnétique constant. Ensuite nous avons considéré la création des particules de Klein Gordon et de Dirac.

Le résultat essentiel de chapitre est que la non commutativité de l'espace temps comme introduit dans [16], n'a aucune influence sur la création des particules.

Chapitre 6

Création des particules dans un espace non commutatif : Cartes de Seiberg Witten

6.1 Introduction

Le principal résultat du chapitre précédent est que la non-commutativité de l'espace-temps introduite par le décalage de Bopp n'a aucun effet sur la création de particules à partir du vide par un champ électromagnétique. L'objectif de ce chapitre est d'étudier la création des particules de spin $\frac{1}{2}$ dans un espace non commutative en utilisant les cartes de Seiberg-Witten qui montrent via l'équivalence de jauge, les corrections que l'on doit apporter aux champs. Nous commençons d'abord par l'écriture de la densité lagrangienne modifiée, et ensuite nous dérivons de cette densité l'équation de Dirac non commutative. Pour un champ électrique constant et homogène, nous étudions la création des particules par deux méthodes :

1) La méthode canonique basée sur la solution de l'équation de Dirac

2) La méthode de l'action effective.

6.2 La densité lagrangienne du champ spinoriel

Considérons maintenant une particule de spin $\frac{1}{2}$, de masse m et de charge $(-e)$ qui se propage en présence d'un champ électromagnétique dans un espace-temps non comutatif. Cette particule