L’enseignement de la continuité entre le prescrit et le vécu

Dans la phase d’exploration[1] de notre recherche sur l’enseignement de la continuité pour les élèves de troisièmes années (sections scientifiques), nous avons choisi de faire une première étude à travers la passation d’un questionnaire[2] aux enseignants de troisièmes années sections scientifiques, et une deuxième à travers quelques compte – rendus des inspecteurs de mathématiques exerçant dans différentes circonscriptions choisies comme échantillon parmi les 26 de tout le pays, il s’agit d’une étude plus globale. Elle est faite sur les CRE[3] de Nabeul, Tunis I, Bizerte, Kairouan et Siliana. Elle est orientée à la base des questions proposées dans le questionnaire conçu pour l’étude du recours des enseignants aux activités introductives du concept de continuité proposées par le manuel scolaire et les éventuelles difficultés rencontrées.

Concernant l’introduction de la nouvelle notion de continuité, les enseignants déclarent avoir trouvé des difficultés dans la gestion de l’activité 1 proposée par le manuel scolaire (qui est unique en Tunisie) et dans l’explication du commentaire proposé à la fin de l’activité qui propose une définition intuitive de cette notion dans le registre de la langue naturelle. La définition formelle en β et α de la notion de continuité, elle-même est aussi source de difficultés non seulement pour les élèves (compréhension) mais pour les enseignants qui n’arrivent pas facilement à mettre en place ce nouveau concept. Dans ce même contexte, ils trouvent également des difficultés dans la gestion des tâches proposées dans les questions en rapport avec la reconnaissance graphique de l’image et/ou l’image réciproque d’un intervalle par une fonction.

D’autant plus, cette étude a montré que beaucoup d’enseignants évitent d’entamer les activités qui font appel à l’usage de la définition formelle de la continuité

[1] Les détails de cette étude font partie d’une rubrique intitulée « Etude exploratoire » dans la partie annexe de cette recherche

[2] Une copie du questionnaire est dans la partie annexe de cette recherche.

[3] CRE : Circonscription Régionale de l’Enseignement.

comme celles proposées pour établir la continuité de la valeur absolue et de la racine carrée.

En ce qui concerne les compte - rendus des inspecteurs à propos de l'enseignement de la continuité (recours au manuel scolaire, gestion des activités en classe, difficultés remarquées, …), nous donnons ci-dessous une synthèse des principaux témoignages :

✓ Le formalisme accompagnant le concept de continuité se trouve délaissé par la plupart des enseignants qui font le choix didactique orienté vers la reconnaissance graphique et l'appel à l'usage des théorèmes admis sur la continuité des fonctions de référence. Dans le cadre du recours aux activités proposées par le manuel scolaire comme support d'introduction de la continuité, la majorité des enseignants ne donnent pas de l'importance nécessaire aux objectifs assignés et voient que :
  - La définition de la continuité à l'aide de β et α comme dans les anciens programmes s'avère peu difficile pour les élèves à ce niveau ;
  - Les activités du manuel scolaire signalées dans le questionnaire semblent à la limite du programme officiel, qui délimite la reconnaissance de la continuité à l'aide du graphique et de l'expression de la fonction en appliquant les théorèmes du cours (éventuellement admis) ;
  - La définition mathématique ou formelle (à l'aide de β et α) semble implicitement reportée à l'université.

✓ Les enseignants qui ont l'habitude de suivre le scénario proposé par l'unique manuel scolaire consacrent suffisamment de temps, dans ce chapitre, pour la gestion des activités et pour atteindre les objectifs sous-jacents des auteurs du manuel. Le lien entre la définition mathématique de la continuité et sa caractérisation graphique n'est pas toujours évoqué. Ils soulignent également que la gestion de ces activités en classe dépend de l'enseignant (en terme d'expérience, de compétence pédagogique et didactique, de maitrise de la matière, de la volonté à mettre en place la définition de la continuité avec le β et α …) et, principalement, du niveau des apprenants.

✓ Beaucoup d'enseignants évitent d'entamer ces deux activités considérées comme un support d'introduction de la définition de la continuité, ils voient que les tâches ne sont pas à la portée de leurs élèves et font appels à des techniques de résolution basées sur des connaissances antérieures insuffisamment travaillées. On parle de la caractérisation des voisinages, l'image d'un intervalle par une fonction.

2) Ce que retiennent nos élèves de la notion de continuité à l'issue du cycle du secondaire

Au début de l'année universitaire, nous avons mené une étude exploratoire auprès des nouveaux étudiants à la faculté des sciences de Monastir (FSM) à travers la passation d'un premier test[4] à deux groupes d'étudiants en première année, licence fondamentale en Mathématiques (LFM) lors d'une séance de travaux dirigés et d'un autre test[5] à un autre groupe d'étudiants d'une classe préparatoire[6] (Maths-Physique (MP)) à l'Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs de Monastir (IPEIM).

Notre objectif était d'avoir une idée sur ce que retiennent nos élèves à la fin du cursus du secondaire de la notion de « continuité d'une fonction numérique à variable réelle en un point » et précisément la définition et ses aspects de localité (locale et globale) de ce concept.

Les résultats obtenus à l'issue de l'analyse des tests récupérés sont résumés ci-dessous :

- ✓ Dans une question de restitution, la plupart de ces nouveaux bacheliers ne se rappellent pas de la définition formelle, seulement 25 % des questionnés se réfèrent à la caractérisation graphique de la continuité. Ils n'arrivent pas, également à justifier la discontinuité d'une fonction en un point x_0 isolé de son domaine de définition ;
- ✓ Les étudiants questionnés semblent très (ou trop) attachés avec la technique de calcul des limites en utilisant les expressions des fonctions de références, évidemment continues sur leurs domaines de définition. A une question du type « Vrai ou Faux » sur la proposition « $\lim_{n\to 2} u_n = 5$ » où $u_n = 2n + 1$

[4] En fait, il s'agit d'un test. Nous avons choisi de l'appeler « questionnaire » car, pour les étudiants, les tests sont notés. Une copie est dans la partie annexe de cette recherche.
[5] « Questionnaire aux étudiants (début de l'université) (2) ». Une copie est en annexe.
[6] Seuls les bacheliers ayant obtenu un bon score peuvent accéder à l'un des instituts préparatoires aux études d'ingénieurs (cycle de deux ans).

est le terme général d'une suite, 25 étudiants sur 28 (soit presque 90 %) répondent par « Vrai », ils remplacent n par 2 dans le terme général u_n sans réfléchir sur le sens (topologique) de l'écriture.

Cette étude montre que nos élèves (même les élites) partent à l'université sans techniques de preuve basées sur la définition formalisée de la continuité. En revanche, ils maitrisent les autres techniques qui relèvent de l'algèbre et l'application des théorèmes de cours qui portent généralement sur le caractère global de la continuité comme ceux qui sont relatifs à la continuité sur un intervalle, la détermination de l'image d'un intervalle …etc. De plus, et comme le montre les résultats de l'une des questions du test à propos de la limite de suite « $\lim_{n\to 2} u_n = 5$ », il s'avère que l'aspect local des notions de limite et continuité n'est pas suffisamment travaillé au secondaire. D'ailleurs, dans les définitions formelles que donnent les sept étudiants concernés, un seul signale la condition « f est définie dans un intervalle ouvert contenant x_0 ».

En conclusion, même si l'échantillon considéré n'est pas représentatif, nous pouvons dire que nos élèves partent à l'université avec des connaissances critiques sur la notion de continuité. Certes, ils ont des difficultés à suivre les cours de l'Analyse, avec beaucoup de formalisme et qui sont loin des applications de théorèmes admis (dans le cursus du secondaire). Par exemple pour prouver que si f et g sont deux fonctions continues en x_0 alors $f + g$ - par exemple - est continue en x_0, les étudiants ne peuvent et ne doivent pas se référer à la caractérisation graphique !

II. Passage en revue de quelques travaux de thèse en rapport avec notre recherche

Dans cette partie, nous présentons de façon brève les travaux de quelques chercheurs. Nous ne visons pas du tout l'exhaustivité ; notre objectif est de présenter quelques travaux de recherche que nous estimons proches de notre question de recherche qui porte sur l'enseignement des premiers concepts de l'Analyse, spécialement de la continuité. Peu de travaux portent sur la continuité elle-même mais ils concernent plus directement la notion de limite que nous considérons dialectique de la notion de continuité, en particulier de la définition formalisée.

1) La thèse de Bernard Cornu

Dans sa thèse intitulée: « Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles » - soutenue le 7 juin 1983 - Cornu étudie différents aspects des problèmes posés par l'enseignement de la notion de limite. L'étude historique et épistémologique de la notion de limite lui permet de repérer les principaux obstacles à l'acquisition de la notion de limite, ainsi que les problématiques et les liens avec d'autres notions qui ont permis à la notion de se développer.

Différents obstacles sont repérés :

- Obstacle 1 concernant la « transposition numérique » : l'une des grandes difficultés de l'histoire de la notion de limite concerne l'abstraction du contexte géométrique et du contexte cinématique pour travailler non plus sur les grandeurs mais sur les nombres ;
- Obstacle 2 concernant « l'aspect métaphysique de la notion de limite » : on introduit des raisonnements, des objets, des modes de pensée d'un type nouveau qui ne sont plus des calculs ou des déductions logiques usuelles. L'infini ∞ et la notion de limite apparaissent comme relevant plus de la métaphysique ou de la philosophie que des mathématiques ;
- Obstacle 3 à propos de « la notion d'infiniment petit et d'infiniment grand » ;
- Obstacle 4 sur « la limite atteinte ou pas … ».
- Et d'autres obstacles du type « l'idée que toute convergence est monotone et n'atteint pas la limite » ou « la difficulté à imaginer qu'une somme infinie

puisse être finie » ou encore « le rapport de deux quantités qui tendent vers 0 peut tendre vers une quantité finie » …etc.

Au moyen de tests proposés aux élèves, Cornu analyse leurs *conceptions spontanées* (avant tout enseignement à ce sujet) et leurs *conceptions propres* (résultant à la fois de l'enseignement et des conceptions spontanées) à propos de la notion de limite. Il étudie les différents sens des expressions "tend vers" et "limite" pour les élèves. Il détermine les principaux obstacles à l'apprentissage de la notion de limite chez l'élève d'aujourd'hui.

Il montre que les conceptions spontanées ne sont pas évacuées lorsqu'on donne la définition de la limite, elles persistent sous diverses formes et pendant plusieurs années produisant un mélange avec les objets introduits en mathématiques pour donner lieu aux élèves à des *conceptions propres*.

Le chercheur propose, dans sa thèse, une séquence didactique de la notion de limite pour mettre au point des activités permettant l'enseignement de cette notion dans de meilleures conditions, tout en tenant compte des principaux obstacles épistémologiques repérés, qu'il cherche à franchir. Les situations proposées sont conçues de manière que la notion de limite est considérée comme un outil nécessaire pour parvenir à une solution.

En conclusion, Cornu voit que pour élaborer des situations didactiques pour l'enseignement de la notion de limite, on doit prendre en compte à la fois les conceptions des élèves, les obstacles et le champ conceptuel. Pour ce faire, il s'agit de trouver des situations contenant des véritables problèmes à résoudre pour lesquels la notion de limite est un outil à la fois efficace et adapté.

2) Les travaux d'A. Robert sur la convergence d'une suite numérique : « Ingénierie de la bande»

En 1983, Robert élabore et expérimente à de nombreuses reprises une ingénierie pour introduire la définition formelle de la notion de convergence de suite tout en s'appuyant sur les connaissances déjà présentes chez les étudiants de début de l'université.

Dix suites (données chacune par son terme général) sont proposées aux étudiants qui, dans un premier temps, doivent (1) représenter graphiquement chacune d'elles sur un dessin (à partir d'un tableau de valeurs), puis doivent (2) classer ces dessins et expliquer les critères de la classification adoptée.

Les autres tâches proposées sont :

(3) Chercher, pour chaque cas, l'existence d'un réel l et un entier naturel n à partir duquel $l-\frac{1}{10}<x_n<l+\frac{1}{10}$. (même consigne avec $\frac{1}{100}$ au lieu de $\frac{1}{10}$). Des justifications sont également demandées.

En fin, (4) les étudiants doivent répondre par « vrai ou faux » (avec justification) aux items suivants :

(i) Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

(ii) Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

Le fil conducteur de l'ingénierie est de prendre appui sur une représentation intuitive dynamique de la notion de convergence qui est très présente chez les étudiants (représentation en termes d'action où le mot « converger » est exprimé en termes de « se rapprocher de ») pour classer les dessins (question 2) et d'enrichir cette première intuition avec une formulation numérique (question 3). La définition est ensuite donnée par l'enseignant et est accompagnée de commentaires pour la construire.

La formalisation choisie pour la notion de convergence est une représentation en termes de bandes contenant tous les termes à partir d'un certain rang. Le nouveau formalisme est introduit pas à pas ; ce qu'il unifie et généralise se fait par la reprise de diverses situations (des bandes de largeur 1/10, puis de largeur 1/100 et enfin toutes les bandes de largeur $\varepsilon > 0$ à la dernière question). En ce sens, l'ingénierie de Robert prend effectivement en compte la nature FUG (Formalisatrice, Unificatrice, Généralisatrice, nous y revenons dans le cadre théorique) de la notion de convergence.

Ainsi, l'objectif premier de cette ingénierie est de faire émerger une première représentation de la notion de convergence, en termes de bande. C'est en ce sens qu'il faut comprendre la question (3) et non comme un travail algébrique pour justifier les inégalités en jeu. La nécessité d'une définition est ensuite ressentie, à la deuxième partie de la question (4), comme un outil (Douady 1986) permettant de démontrer une propriété.

Le travail montre également le rôle important que l'enseignant peut jouer à chaque étape de l'ingénierie pour faire émerger la définition de la convergence d'une suite chez les étudiants (par exemple, montrer aux étudiants la nécessité d'une définition formalisée de la notion de convergence en commençant par lui donner du sens et en la faisant apparaître comme un outil de démonstration à la dernière question).

3) L'article de Rudolf BKOUCHE : « Point de vue des limites et de la continuité dans l'enseignement » (juillet 96)

BKOUCHE commence son article par une introduction visant à souligner l'incohérence dans les programmes quant à l'enseignement de l'analyse à l'université et dans l'enseignement secondaire. Les programmes sont conçus sans grands liens avec les mathématiques savantes pourvu que les contenus mathématiques enseignés se situent dans les normes définies par les programmes. En d'autre terme, il y a selon lui un problème de transposition didactique au sens de Chevellard. Bkouche identifie que les mathématiques enseignées au secondaire coïncident avec le savoir de ceux dont le métier implique une activité mathématique, mathématiciens professionnels ou utilisateurs des mathématiques.

Selon lui, au nom de l'innovation, beaucoup de définitions peuvent changer pour une nécessité de renouvellement, qui fait que les enseignants se plient aux nouveaux usages afin d'amener les élèves qui ne connaissent pas encore les usages à utiliser des seules nouvelles normes : « *Au fond l'activité mathématique consiste à connaitre les normes pour pouvoir en user lorsque le professeur ou l'examinateur le demande, la signification importe peu pourvu que les élèves connaissent le bon usage enseigné par le professeur* ». Ainsi, toujours selon

Bkouche, le renouvellement permanant des programmes conduit à supprimer toute référence au couple (ε,η) de la définition de la limite, celle-ci se définissant en termes de fonctions de référence. La noosphère semble donc tenir à ce qu'une fonction étant définie dans un intervalle contenant un point a, l'existence de la limite de f(x) lorsque x tend vers a implique que f(x) tend vers f(a), laissant entier le problème de la limite des fonctions admettant une discontinuité de première espèce (c'est-à-dire la limite est différente de l'image).

Bkouche considère également que « *l'intuition n'a pas sa place dans un enseignement rigoureux de l'analyse, et ce refus de prendre en compte de l'intuition risque de transformer l'enseignement des mathématiques en une vaste construction quelque-peu « in-sensée », la rigueur se réduisant à un jeu fabriqué par quelques esprits retors appelés mathématiciens* ».

Une question problématique est finalement soulevée par l'auteur : « faut-il énoncer une définition a priori et demander aux élèves de se contenter de l'appliquer avec l'inconvénient (ou l'avantage) d'un semblant de réussite occultant une incompréhension des notions étudiées ? Faut-il au contraire expliciter le caractère problématique de la notion considérée au risque de ce que certains considèrent une perte de temps ? »

La notion de limite se situe moins dans une définition formelle que dans les problèmes qui y ont conduit. La difficulté vient alors de cette multiplicité, multiplicité qui a donné lieu à plusieurs tentatives de définitions (comme celle de Cauchy, Weierstrass, …). Devant cette multiplicité, la tentation est grande de chercher la « bonne approche », laquelle devrait conduire à la « bonne définition » celle à laquelle on demandera aux élèves de se conformer afin de réussir les exercices (estimés conformes à l'approche considérée) qu'on leur proposera. De ce fait, il y a un risque de vider l'enseignement de toute consistance pour mettre en avant une conception qu'il appelle '*logicialiste'*.

Dès lors, Bkouche souligne l'importance de la prise en considération du référentiel théorique de ces notions de l'Analyse et de différents points de vue issues des cadres « intuitif » et « théorique ». Il considère la notion de limite d'un double point de vue « cinématique » et « approximation » avec une relation dialectique entre ces deux points de vue.

- ✓ Dans le point de vue « cinématique », la variable « tire » la fonction : Si une grandeur variable x tend vers une valeur a de cette grandeur (au sens qu'elle prend des valeurs de plus en plus proches de la valeur a), alors une grandeur y qui dépend de la grandeur x (qui est une fonction de la grandeur x) tend vers une valeur b si, au fur et à mesure que la grandeur x se rapproche de la valeur a, la grandeur y se rapproche de b.
- ✓ Dans le point de vue « approximation », le degré d'approximation que l'on veut, tire le degré d'approximation de la variable : La définition en (ε,α) n'est autre qu'une systématisation de cette notion d'approximation.

Bkouche résume l'opposition entre les points de vue « cinématique » et « approximation » comme suit : « *Si, dans la notion cinématique c'est la variable qui tire la fonction, dans la notion d'approximation, c'est le degré d'approximation que l'on veut qui fixe l'approximation de la variable* ».

En fin, l'auteur insiste sur l'importance du point de vue cinématique (que nous rapprochons du point de vue intuitif dynamique de Robert) dans la conceptualisation de ces premières notions de l'Analyse réelle :

« S'il est vrai que ce qui a conduit à la prédominance du point de vue approximation c'est sa valeur opératoire et son efficacité dans les démonstrations de l'analyse, il serait dangereux de rejeter le point de vue cinématique dans la mesure où il reste le cadre intuitif dans lequel se pense la notion de limite»

4) La thèse de Luc Trouche

Le titre de la thèse de Trouche est « Apprentissage de la notion des limites de fonctions en environnement informatique : Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation »

Trouche reprend une analyse épistémologique et met en lumière cette fois trois « points de vue sur les limites ».

- ✓ le point de vue « cinématique » : « *c'est la variable qui tire la fonction* »

- ✓ le point de vue « approximation » : *« c'est le degré d'approximation que l'on veut qui tire la variable* » qu'il reprend de Bkouche
- ✓ un point de vue « algébrique » : *« il fonctionne sur des règles, sans étudier la nature des objets sur lesquels elles opèrent* » qu'il reprend de (Dahan Dalmédico, 1982)

Trouche étudie la notion de limite à travers un « côté objet » et un « côté sujet ». Du « côté objet », il parle du point de vue épistémologique (le concept de limite pour la communauté des mathématiques), du point de vue **institutionnel** (analyse des programmes officiels et des manuels scolaires), de la transposition didactique, de l'analyse des quelques épreuves de baccalauréat, et du point de vue **instrumental** (les limites vues à travers les calculatrices, transposition informatique). Du « côté sujet », il étudie l'effet de l'enseignement sur les conceptions des élèves, l'intégration d'instruments (calculatrices graphiques puis symboliques), la genèse instrumentale, et aussi la conceptualisation de la notion de limite.

A l'aide de questionnaires, de séances de travaux pratiques basées sur des activités proposées aux élèves utilisant les calculatrices graphiques et symboliques, Trouche repère les conceptions des élèves relatives aux limites et étudie l'influence des outils de calcul sur leur processus de conceptualisation,

L'étude ainsi menée montre que:

- ✓ L'outil calculatrice renforce chez l'élève une conception monotone des limites liée au point de vue cinématique mais avec une idée intuitive de monotonie dans le processus dynamique ;
- ✓ Le point de vue « approximation » ne ressort ni de l'enseignement reçu, ni de l'utilisation de la calculatrice ;
- ✓ L'influence des outils de calcul est plus ou moins grande suivant les élèves : les processus d'instrumentation dépendent des caractéristiques cognitives des élèves.

Dans son résumé, Trouche voit que le contrôle d'un outil nécessite trois prises en compte :

- ✓ une prise en compte épistémologique, c'est-à-dire qu'on ne peut pas parler d'un concept sans s'intéresser à son sens ;
- ✓ une prise en compte technologique, c'est-à-dire que l'intégration d'un outil technologique (outil de calcul comme la calculatrice) est de la responsabilité du professeur ;
- ✓ une prise en compte psychologique, c'est-à-dire que l'attention portée aux profils des élèves est une condition de la gestion de la classe, encore plus nécessaire dans une activité avec instruments.

5) la thèse de : Isabelle Bloch

Dans sa thèse intitulée « L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université : Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation » soutenue le 19 janvier 2000, Bloch est partie de plusieurs questions problématiques. Parmi ces questions, une première porte sur la possibilité d'un enseignement de l'analyse au lycée (conditions, contenus, caractéristiques des milieux associés …), et une deuxième porte sur l'existence de situations fondamentales (en référence à la TSD de Brousseau) pour l'enseignement de l'Analyse. Pour l'entreprendre, Bloch se place donc dans le cadre de la théorie des situations de Brousseau et aussi dans la théorie de l'anthropologie didactique de Chevallard.

Une première partie de la thèse est consacrée à l'étude de l'enseignement de l'analyse au niveau des dernières classes de l'enseignement secondaire français. Bloch constate que cet enseignement est caractérisé par des variations importantes qui concernent aussi bien l'objet du savoir que les procédures conseillées par les programmes et les manuels. Les méthodes préconisées conditionnent les connaissances utilisables par les élèves pour effectuer les tâches prescrites, et l'équilibre connaissances / savoirs caractérise la place dévolue à la validation.

L'expérimentation est faite à partir de deux situations fondamentales relatives aux concepts de fonction et de limite dans la classe de première S, lui permettant d'établir à ce niveau un rapport effectif au savoir de l'analyse et permettant à l'élève de construire des connaissances appropriées. Les deux situations sont :

- ✓ une situation pour l'enseignement de la notion de fonction : la situation
- ✓ « Graphiques et Chemins »,
- ✓ une situation pour une première approche de la notion de limite de suite : « la situation du flocon de Von Koch ».

L'ingénierie didactique proposée par Bloch tient compte de la nécessité de prendre en considération des « savoirs » et des « connaissances » dans le processus d'apprentissage, et donc dans la construction de situations pour l'enseignement des concepts de l'analyse. Les savoirs mis en jeu sont d'un grand niveau de complexité, et les méthodes de validation ne font pas partie des connaissances antérieures des élèves. Selon elle, les interactions de connaissances « élève / professeur » doivent jouer un rôle non négligeable dans la conduite de situations pour l'enseignement de l'analyse.

L'analyse de questionnaires, de transcriptions de cours et de copies d'élèves, pour l'étude des connaissances sur l'analyse et les connaissances nécessaires pour la transition entre secondaire et supérieur, lui permet d'obtenir les principaux résultats suivants :

« *Pour que la transition lycée / université puisse avoir une chance d'advenir dans une certaine continuité, il serait nécessaire que l'enseignement secondaire intègre dans son cursus des situations permettant de rencontrer les connaissances dont les étudiants ont besoin en aval. Ces situations doivent se situer dans un paradigme d'enseignement par situation fondamentale, et donc demandent que l'organisation classique d'enseignement par ostension soit modifiée* »

Bloch finit sa recherche en proposant des pistes de réflexion sur l'équilibre [connaissances / savoirs] dans l'enseignement des débuts d'une théorie mathématique des notions de l'Analyse, et sur l'enseignement possible, au niveau du secondaire, de connaissances requises dans la suite du cursus. Elle voit au passage que les enseignants ne disposent pas d'outils professionnels pour gérer les situations a-didactiques ou comportant une dimension a-didactique.

6) La thèse de Pierre Job :

Dans sa thèse intitulée « Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien[7] de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales a-didactique » qui est soutenue en juin 2011, Job s'intéresse, par l'intermédiaire du concept de limite, aux difficultés éprouvées par les élèves à effectuer la transition entre l'analyse enseignée dans le secondaire et celle enseignée à l'université, l'analyse dite « formalisée ». Il se base sur la théorie de Lakatos, pour élaborer un modèle qui lui permet de proposer une situation fondamentale du concept de limite et lui permet d'expliquer les difficultés rencontrées par les élèves à entrer dans l'analyse.

Pour l'étude de ces difficultés de transition, Job focalise sur la définition *usuelle* du concept de limite, du fait du rôle central qu'elle semble jouer dans la mise en place de l'architecture déductive, caractéristique de l'analyse « formalisée », et par les déficiences constatées dans son enseignement, tant chez les enseignants (du secondaire et de l'université) que chez les apprenants (élèves et étudiants). Ces déficiences suggèrent quelques pistes de réflexion qui semblent selon lui intéressantes à explorer pour traiter la problématique envisagée, dont les liens entre les concepts de limite, de nombre, d'infini et de fonction, ainsi que les liens entre discours mathématique et discours didactique employé pour rendre accessible les connaissances mathématiques.

[7] Conçu pour fonctionner dans des preuves.

7) Plan synthétique de la thèse

Cadre théorique,
Problématique,
Méthodologie de la recherche

Relief sur la notion de continuité

- Genèse historique,
- Etude épistémologique,
- Etude didactique,
- Etude curriculaire,

Niveau de conceptualisation visé et domaine de travail associé

Construction de l'ingénierie

Conception du logiciel « TIC_Analyse »

- Etude du relief,
- Conception de TIC_Analyse,
- Elaboration d'un scénario (fiche de leçon pour un professeur),
- Méthodes de validations internes de l'ingénierie (tests, traces, vidéos …)

- Différentes approches cinématique et formelle,
- Emplois de différents registres de représentation,
- Tâches proposées aux élèves,
- Palette de fonctions,
- Paramétrage laissé à la charge de l'élève, permettant ainsi de favoriser le processus d'instrumentalisation de l'artefact logiciel.

Analyse a priori :
Analyse a priori des tâches proposées par le logiciel, analyse des tests.

Phase d'expérimentation de l'ingénierie

Etude a postériori :

- Analyse des traces des élèves sur le logiciel,
- Analyse des séquences vidéo,
- Analyse des post -tests

Conclusion, limites et perspectives de la recherche

Chapitre II

Etude exploratoire

Sommaire de ce chapitre :

Introduction

Dans cette phase d'exploration de notre recherche sur l'enseignement de la continuité pour les élèves de troisièmes années (sections scientifiques), nous avons choisi de faire une première étude à travers la passation de deux tests à deux groupes de nouveaux étudiants et un deuxième à travers un questionnaire aux enseignants de troisièmes années secondaire sections scientifiques.

Notre objectif est d'avoir (établir) un constat sur ce que retiennent nos élèves de la notion de continuité à la fin de leur cursus du secondaire et d'avoir une idée sur les pratiques des enseignants des mathématiques quant à l'enseignement de la notion de continuité pour les élèves de troisièmes années.

I. La notion de continuité chez les nouveaux étudiants

Au début de l'année universitaire, nous avons contacté un enseignant à la faculté des sciences de Monastir (FSM) qui s'est chargé de la passation d'un premier questionnaire[1] à deux groupes d'étudiants en première année, licence fondamentale en Mathématiques (LMD) lors d'une séance de travaux dirigés.

Le même enseignant s'est chargé également de la passation d'un autre test[2] à un autre groupe d'étudiants d'une classe préparatoire[3] (Maths-Physique (MP)) à l'Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs de Monastir (IPEIM).

1) Le premier questionnaire

Le questionnaire est proposé à la rentrée de l'année universitaire 2016-2017, à un groupe d'étudiants en première année LFM (Licence Fondamentales en Mathématiques).

Il comporte (06) questions dont l'objectif est d'avoir une idée sur ce que retiennent nos élèves à la fin du cursus du secondaire de la notion de « continuité d'une fonction à

[1] En fait, il s'agit d'un test. Nous avons choisi de l'appeler « questionnaire » car, pour les étudiants, les tests sont notés. Une copie est dans la partie annexe de cette recherche.
[2] « Questionnaire aux étudiants (début de l'université) (2) ». Une copie est en annexe.
[3] Seuls les bacheliers ayant obtenu un bon score peuvent accéder à l'un des instituts préparatoires aux études d'ingénieurs (cycle de deux ans).

variable réelle en un point » et précisément la définition et ses aspects de localité (locale et globale) de ce concept.

Nous n'avons pu récupérer que 28 tests.

(1) la question 1 porte sur « ce qu'est une fonction continue. Donner si c'est possible plusieurs définitions »,

Nous avons relevé les différents types ou variétés de réponses suivants :

- Rep1 : « f est continue en x_0 signifie $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ »
- Rep2 : « f est continue en x_0 signifie $\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x_0) = f(x_0)$ »
- Rep3 : « f est continue en x_0 signifie la courbe ne représente pas de rupture en son point d'abscisse x_0 »
- Rep4 : « f est continue en x_0 signifie $\forall\, \beta > 0, \exists\, \alpha > 0$ tel que $|x - x_0| < \alpha$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \beta$ »

Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

Réponses	Rep1	Rep2	Rep3	Rep4
Nbre d'étudiants	8	20	07	06

- ✓ La majorité des étudiants se réfèrent à la propriété en lien avec la notion de limite (les deux premières variétés de réponses),
- ✓ La plupart des questionnés ne se rappellent pas de la définition formelle vu au secondaire,
- ✓ Seulement 25 % des questionnés se sont référés à la caractérisation graphique de la continuité.

(2) la question 2 porte sur la continuité de la fonction partie entière en les points $x_0 = \frac{1}{2}$ et $x_0 = 1$.

La variété de réponses est illustrée ci-dessous :

- Rep0 : « Pas de réponse »
- Rep1 : « f est continue en 1, continue en $\frac{1}{2}$ »

- Rep2 : « f est continue en 1, n’est pas continue en $\frac{1}{2}$ »

- Rep3 : « f n’est pas continue en 1, continue en $\frac{1}{2}$ »

- Rep4 : « f est n’est pas continue en 1, n’est pas continue en $\frac{1}{2}$ »

Nous avons obtenu le tableau suivant :

Réponses	Rep0	Rep1	Rep2	Rep3	Rep4
Nbre d’étudiants	4	4	6	13	1

Beaucoup d’étudiants (15 sur 28, environ 54 %) n’ont pas répondu correctement à cette question. Cela montre que les étudiants ont du mal à travailler avec des fonctions qui ne sont pas données sous forme algébrique, même si ce sont des fonctions simples du programme du secondaire, comme ici la fonction partie entière.

(3) la question 3 porte sur la continuité de la fonction f définie par :

$f(x) = \ln(x^2 - 1)$ si $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et $f(0) = 2$ en le point $x_0 = 0$. Une justification est demandée.

Les variétés de réponses sont :

- Rep0 : « pas de réponse »
- Rep1 : « réponse correcte avec justification correcte »
- Rep2 : « réponse correcte avec justification fausse »

Le tableau suivant résume la totalité des réponses :

Réponses	Rep0	Rep1	Rep2
Nbre d’étudiants	1	7	20

La majorité des étudiants répond correctement (fonction qui ressemble à ce qu’ils peuvent rencontrer au secondaire) mais les justifications sont majoritairement fausses. 71 % des réponses sont en effet fausses, elles sont du type :

//... $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \cdots ln(-1)$ n’existe pas donc f n’est pas continu en 0…//

//... f(x) n’est pas définie en -1 donc f n’est pas continue //

// ... f(x) n’est pas définie en 0…//

Les étudiants devraient répondre que la fonction n'est pas définie au voisinage de 0 et donc qu'elle ne peut y être continue. Ils ne tiennent pas compte du fait que pour avoir la continuité, la fonction doit être définie au voisinage du point considéré.

(4) la question 4 est un « Vrai ou Faux » et porte sur la continuité, sur IR, de la fonction f

définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x} \ si\ x\ \neq 0\ et\ x \neq 1 \\ f(0) = f(1) = 1 \end{cases}$

Réponses	« Vrai »	« Faux »
Nbre d'étudiants	7	21

- 75 % des questionnés ont répondu correctement. Beaucoup d'entre eux ont donné des justifications correctes (f n'est pas continue en 1, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = sin(1) \neq 1$). Ils se réfèrent toujours à l'argument de continuité associé à la limite à gauche et à droite de la fonction en jeu (les étudiants connaissent la limite usuelle de $\frac{sinx}{x}$ en 0 et peuvent aisément calculer la limite en 1)
- Nous n'avons pas relevé de justifications pour les étudiants qui ont confirmé la continuité de la fonction sur IR.

(5) la question 5 est un « Vrai ou Faux » et porte sur la considération d'une suite donnée par son terme général $U_n = 2n + 1$ comme une fonction numérique dont le domaine de définition est l'ensemble IN des entiers naturels. Notre objectif est de vérifier chez les étudiants que la « continuité » d'une fonction f en un point x_0 de son domaine de définition ne se pose que lorsque la fonction f est définie dans un voisinage de x_0.

Le tableau suivant résume les réponses obtenues :

	« Vrai »	« Faux »
a) la suite (u_n) est une fonction à variable réelle dont le domaine de définition est ℕ?	20	8
b) « $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ »	28	0
c) « $\lim\limits_{n \to 2} u_n = 5$ »	25	3
d) « u_n est continue en 1 »	12	16

- Les questions sur les limites confirment que les étudiants questionnés semblent très attachés avec la technique de calcul des limites en utilisant les expressions des fonctions de référence (évidemment continues sur leurs domaines de définition) : on peut estimer que leur méthode est de « remplacer la variable x dans l'expression de $f(x)$ » et faire le calcul. S'il n'y a pas une forme indéterminée, ils procèdent avec les techniques usuelles qui relèvent de l'algèbre (factorisation, multiplication par l'expression conjuguée pour les cas de racines carrées …). Ici 25 étudiants sur 28 (soit presque 90 %) ont remplacé n par 2 dans le terme général $\mathrm{u_n}$ sans réfléchir sur le sens (topologique) de l'écriture.
- Pour la dernière proposition « $\mathrm{u_n}$ est continue en 1 », le réflexe de « calcul » est peut-être moins absent mais le réflexe du recours à la reconnaissance du type de l'expression (polynômiale, rationnelle, irrationnelle, trigonométrique, logarithmique …ici affine) associée à la continuité globale d'une fonction, qui permet de décider de la continuité de la suite $(u_n)_{n\in IN}$ considérée comme fonction numérique, est présent chez plusieurs étudiants (12 sur 28 i.e. 43 %).

(6) la question 6 concerne « une fonction f donnée par l'allure de sa courbe, on demande de reconnaitre si la fonction f est continue sur l'intervalle donné [-2,3] et la détermination graphique de l'image de l'intervalle $[-2,2]$ par f ».

- Tous les 28 étudiants questionnés ont répondu correctement à la première question, ce qui prouve qu'ils sont familiarisés avec la reconnaissance graphique de la continuité sur un intervalle.
- Seulement 7 des étudiants n'ont pas donné correctement l'image de l'intervalle demandé : les réponses relevées sont : « $[-2,0]$ » , « $[-2,2[$ » et cinq fois « $[-2,1] \cup \{2\}$ ». Ils font ainsi preuve qu'ils maitrisent les techniques de détermination de l'image d'un intervalle en se basant sur les variations de la fonction et l'image d'un intervalle par une fonction continue.

Conclusion

Même si l'échantillon considéré n'est pas représentatif, nous pouvons dire que nos élèves partent à l'université avec des connaissances critiques sur la notion de continuité. Ils semblent associer majoritairement continuité en un point et calcul de limite de la fonction en ce point (question 1 et question 4) ou bien à la caractérisation graphique globale de continuité (question 6), ce qui correspond aux théorèmes du cours et aux pratiques du secondaire. Ils ne questionnement pas si la fonction est définie localement au voisinage du point, comme dans les questions 3 et 5. Ces difficultés peuvent être transparentes dans la mesure où dans la majorité des cas qu'ils peuvent rencontrer, le calcul de limite suffit à décider de la continuité. Dès que les conditions ne sont pas satisfaites (question 2, question 3, question 5), on voit bien que les étudiants sont bien plus en difficulté.

En conclusion, nous reprenons ce que nous avons écrit en introduction pour introduire notre thèse : nos élèves (même les élites) partent à l'université sans techniques de preuve basées sur la définition formalisée de la continuité. En revanche, ils maitrisent les autres techniques qui relèvent de l'algèbre et l'application des théorèmes de cours qui portent généralement sur le caractère global de la continuité comme ceux qui sont relatifs à la continuité sur un intervalle, la détermination de l'image d'un intervalle …etc. De plus, il s'avère que l'aspect local des notions de limite et continuité n'est pas suffisamment travaillé au secondaire. Les étudiants auront donc des difficultés à suivre les cours de l'Analyse, avec beaucoup de formalisme et qui sont loin des applications de théorèmes admis (dans le cursus du secondaire). Par exemple pour prouver que si f et g sont fonctions continues en x_0 alors $f + g$ - par exemple - est continue en x_0, les étudiants ne peuvent et ne doivent pas se référer à la caractérisation graphique !

2) Le deuxième questionnaire

Comme nous avons dit plus haut, ce questionnaire est proposé à des étudiants de niveau meilleur (Ce sont pratiquement les élites du cycle secondaire).

Notre objectif dépasse la restitution des définitions de la continuité retenues du secondaire pour toucher un peu l'aspect outil de ce concept. A ce fait, nous avons proposé en plus les deux questions (exercices) suivants :

Question6 :

> « Soit f une fonction définie sur IR vérifiant : pour tout réel x, $|f(x)| \leq 3|x|$
> Montrer que f est continue en $x_0 = 0$ ».

Question7 :

> Soit f une fonction continue sur IR telle que $f(1) > 0$
>
> Montrer qu'il existe un intervalle I ouvert centré en 1 tel que : pour tout réel x appartenant à I , $f(x) > 0$.

Les autres questions sont presque les mêmes que celles qui figurent dans le questionnaire précédent. Nous avons apporté des petites modifications sur les questions 2, 3 et 5.

Nous n'avons récupéré que 16 tests :

(1) Pour ce qui est de la question 1 : « Ce qu'est une fonction continue. Donner si c'est possible plusieurs définitions »

Nous avons relevé les différents types ou variétés de réponses suivants :

- Rep1 : « f est continue en x_0 signifie $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ »
- Rep2 : « f est continue en x_0 signifie $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x_0) = f(x_0)$ »
- Rep3 : « f est continue en x_0 signifie la courbe ne représente pas de rupture en son point d'abscisse x_0 »
- Rep4 : « f est continue en x_0 signifie $\forall\, \beta > 0, \exists\, \alpha > 0$ tel que $|x - x_0| < \alpha$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \beta$ »

Réponses	Rep1	Rep2	Rep3	Rep4
Nbre d'étudiants	11	7	8	7

- ✓ On retrouve la même tendance qu'avec le questionnaire 1 : la majorité des étudiants se réfèrent à la propriété en lien avec la notion de limite. Deux, seulement, n'ont pas cité de réponses parmi les deux premières variétés.
- ✓ Sept étudiants ont cité la définition formelle dont trois, seulement ont donné une formulation correcte,
- ✓ 50 % des étudiants parmi les questionnés se sont référés à la caractérisation graphique de la continuité, ce qui montre que les « bons » élèves associent mieux la caractérisation algébrique avec la caractérisation de limites.

(2) Pour la question 2 qui porte sur la continuité en 0 de la fonction f définie par :

$$\mathrm{f(x)} = \ln(\mathrm{x}^2 - 1) \text{ si } \mathrm{x} \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\text{ et } \mathrm{f}(0) = 2$$

Toutes les réponses données par les étudiants de ce groupe sont correctes si l'on accepte les quelques justifications mal dites.

(3) la question 3 « Vrai » ou « Faux » qui porte sur la continuité de la fonction f définie par :

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 10^{-4} \\ \mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(10^{-4}) = 1 \end{cases} \text{ au point } x_0 = 0. \text{ (Sans justification demandée).}$$

Toutes les réponses sont correctes. Quelques-unes sont accompagnées de justifications.

(4) la question 4 « Vrai ou Faux » qui porte sur la considération de la suite donnée par son terme général $U_n = 2n + 1$ comme une fonction numérique dont le domaine de définition est l'ensemble IN des entiers naturels.

Le tableau suivant résume les réponses obtenues :

	« Vrai »	« Faux »
a) la suite (u_n) est une fonction à variable réelle dont le domaine de définition est ℕ?	16	0
b) « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ »	16	0
c) « $\lim\limits_{n\to 2} u_n = 5$ »	12	4
d) « u_n est continue en 1 »	0	16

- On retrouve que les étudiants questionnés semblent toujours très attachés avec la technique de calcul des limites en utilisant les expressions des fonctions de références : ils remplacent la variable x dans l'expression de f(x) et font le calcul demandé comme pour une fonction continue. Ici, 12 étudiants sur 16 (soit presque 75 %) ont remplacé n par 2 dans le terme général u_n sans réfléchir sur le sens (topologique) de l'écriture.
- Pour la dernière proposition « u_n est continue en 1 », tous les questionnés ont répondu correctement, ce qui n'était pas le cas avec les étudiants du premier questionnaire : ici ils reconnaissent que la continuité n'est pas une propriété possible pour les suites numériques mais le manque de justification (non demandée dans le test) nous empêche de mieux commenter ce résultat.

(5) la question 5 où « une fonction f est donnée par l'allure de sa courbe, on demande de reconnaitre si la fonction f est continue sur l'intervalle donné ([-2,3]) et la détermination graphique de l'image de $[-2,3]$ intervalle par f ».

- Tous les 16 étudiants questionnés ont répondu correctement à la première question, ce qui prouve encore qu'ils sont familiarisés avec la reconnaissance graphique de la continuité sur un intervalle,
- Seulement 3 des étudiants n'ont pas donné correctement l'image de l'intervalle demandé (les fausses réponses relevées sont : « $[-2,3]$ » et deux fois « $[-2,1] \cup [2,3]$ »). Ils font toujours preuve du fait qu'ils maitrisent les techniques de détermination de l'image d'un intervalle en se basant sur les variations de la fonction et l'image d'un intervalle par fonction continue.

On arrive aux deux questions spécifiques du deuxième questionnaire :

(6) la question 6 est « montrer qu'une fonction f définie sur IR vérifiant : [pour tout réel x, $|f(x)| \leq 3|x|$] est continue en $x_0 = 0$ ».

- Cinq (5) étudiants n'ont pas essayé de répondre à cette question,
- Trois (3) étudiants ont correctement répondu en donnant une preuve basée sur la détermination de f(0) puis en partant de l'inégalité $|f(x)| \leq 3|x|$, ils prouvent

correctement que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, avant de conclure à la continuité après comparaison de la limite trouvée avec l'image $f(0)$,

- Parmi les 8 réponses fausses, pour 4 d'entre eux il manque la preuve de « $f(0) = 0$ », d'autres ont écrit des choses comme :

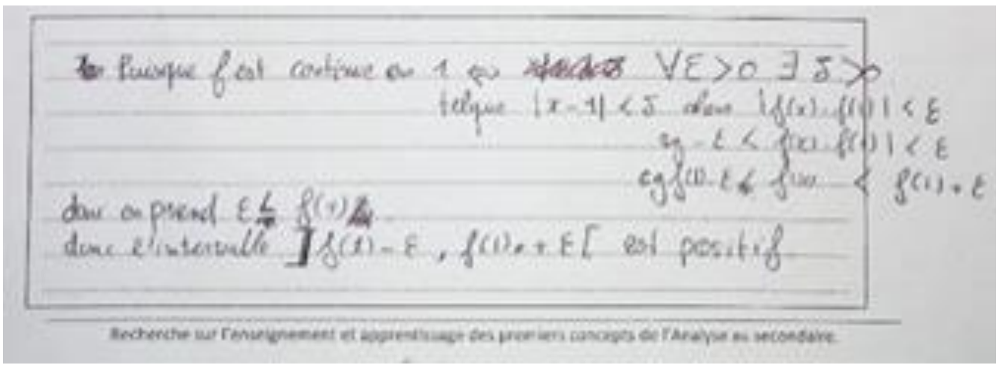
  « $|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|$ donc $|f(x) - f(0)| \leq 0$ ... » puis ils passent à la limite pour conclure la continuité de f en 0. Un autre s'est restreint à la détermination de $f(0)$.

Le recours aux théorèmes de cours est apparemment le seul moyen de preuve dans cette situation et aucun étudiant n'a pensé à l'usage de la définition formelle de la continuité (ce qui n'est pas nécessaire).

(7) la question 7 est « f est une fonction continue sur IR vérifiant $f(1) > 0$. On demande de montrer qu'il existe un intervalle ouvert I centré en 1 tel que : pour tout réel $x \in I$, $f(x) > 0$ »

Pour cette question le recourt à la définition formelle est nécessaire.

- Huit (8) étudiants n'ont rien rédigé à propos de cette question,
- Deux (2) étudiants seulement ont donné une preuve correcte (non parfaite puisqu'ils donnent le rayon de I en fonction de ε) en faisant appel à la définition formelle,



Puisque f est continue en 1 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$
telque $|x-1| < \delta$ alors $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$
eq $-\varepsilon < f(x) - f(1) < \varepsilon$
eq $f(1) - \varepsilon < f(x) < f(1) + \varepsilon$
donc on prend $\varepsilon < f(1)$
donc l'intervalle $]f(1) - \varepsilon , f(1) + \varepsilon[$ est positif

Recherche sur l'enseignement et apprentissage des premiers concepts de l'Analyse au secondaire.

Fig5 : « tentative de preuve d'un étudiant »

- Parmi les autres réponses fausses, on trouve 3 essais dont 1 est graphique et les 2 autres disent, après recours à la définition formelle, que $f(1) - \varepsilon$ est positif car $f(1) > 0$, et le ε est petit ou trop petit donc $f(x)$ est positif puisque $f(1) - \varepsilon < f(x) < f(1) + \varepsilon$ sans donner un intervalle I. Le raisonnement est presque correct mais manque de rigueur.

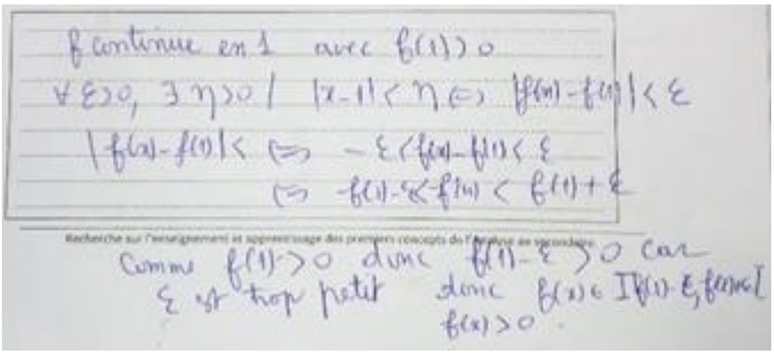

f continue en 1 avec $f(1)>0$
$\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0 / |x-1|<\eta \Leftrightarrow |f(x)-f(1)|<\varepsilon$
$|f(x)-f(1)|< \Leftrightarrow -\varepsilon<f(x)-f(1)<\varepsilon$
$\Leftrightarrow f(1)-\varepsilon<f(x)<f(1)+\varepsilon$
Comme $f(1)>0$ donc $f(1)-\varepsilon>0$ car
ε est trop petit donc $f(x) \in]f(1)-\varepsilon, f(1)+\varepsilon[$
$f(x)>0$.

Fig1 : « tentative d’un étudiant »

Encore une fois, même si l’échantillon n’est pas représentatif, nous pouvons affirmer que nos élèves (même les élites) partent à l’université sans techniques de preuve basées sur la définition formalisée de la continuité. En revanche, ils maitrisent les autres techniques qui relèvent de l’algèbre et l’application des théorèmes de cours qui portent généralement sur le caractère global de la continuité, comme ceux qui sont relatifs à la continuité sur un intervalle, la détermination de l’image d’un intervalle …etc. De plus, et comme le montre les résultats de la question 4 (dans sa troisième proposition) à propos de la suite « $\lim_{n\to 2} u_n = 5$ », il s’avère que l’aspect local des notions de limite et continuité n’est pas suffisamment travaillé au secondaire. D’ailleurs, dans les définitions formelles qu’ont données les 7 étudiants, un seul a signalé la condition « f est définie dans un intervalle ouvert contenant x_0 ».

II. Enseignants des troisièmes années et l'introduction de la continuité - le recours au manuel scolaire

Nous avons choisi de faire une autre étude préliminaire à travers la passation d'un questionnaire[4] aux enseignants concernés par l'enseignement de la continuité – classe de 3ième année - et une deuxième à travers quelques compte – rendus des inspecteurs de mathématiques exerçant dans différentes circonscriptions choisies comme échantillon parmi les 26 de tout le pays. Il s'agit d'une étude plus globale. Elle est faite sur les CRE de Nabeul, Tunis I, Bizerte, Kairouan et Siliana. Elle est orientée à la base des questions proposées dans le questionnaire.

1) Première étude : questionnaires proposés à un échantillon d'enseignants des classes de troisième (Sc.exp ou Maths)

Le nombre total des questionnés est 30. Le questionnaire est distribué à des enseignants travaillant dans les deux circonscriptions de Kairouan et Siliana à l'occasion d'une séance de formation continue.

Pour la question Q1 : « combien d'années as-tu enseigné des classes de troisième année sections sciences expérimentales ou mathématiques ? », les résultats sont récupérés dans le tableau suivant :

Nbre d'années scolaires	Entre 1 et 5	Entre 6 et 10	Entre 11 et 16	Plus que 16
Nbre d'enseignants	6	8	10	6

Pour la question Q2 : « Comment introduis –tu le concept de continuité (pour la première fois) aux élèves ? » on trouve :

→ 26 enseignants (87 %) des questionnés suivent le chapitre du manuel

→ 22 enseignants (73 %) des questionnés font toutes les activités proposées par le manuel,

→ 18 enseignants (60 %) des questionnés apportent des modifications aux tâches proposées dans les activités du manuel.

[4] Une copie du questionnaire est dans la partie annexe de cette recherche

Pour la question Q3 : « Voici dans le document II, la totalité des activités du manuel qui introduisent selon les auteurs la notion de continuité, compléter le tableau », nous avons obtenu les résultats suivants (les activités mentionnées sont en annexe) :

Activités	utile	inutile	Utile mais à modifier
Pour commencer : Activité1	25	0	5
Pour commencer : Activité2	17	0	13
Pour commencer : Activité3	21	0	9
Cours : Activité 1	20	4	6
Cours : Activité 2	12	4	18
Continuité de $\lvert f \rvert$: Activité 1 page 25	10	15	5
Continuité de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ en $x_0 = 1$ Activité 1 page 26	16	13	1
Continuité de $\sqrt{f}$ Activité 2 page 26	6	22	2

Il apparait que beaucoup d'enseignants évitent d'entamer les activités faisant appel à l'usage de la définition formelle de la continuité, c'est-à-dire les activités avec $\lvert f \rvert$ ou $\sqrt{f}$.
Pour la question Q4 : « As-tu trouvé de difficultés dans la gestion de l'activité 1 du paragraphe « cours » ? », 24 enseignants (80 %) des questionnés déclarent avoir trouvé des difficultés dans la gestion de l'activité 1 proposée par le manuel.
Pour la question Q5 : « Si tu as trouvé de difficultés dans la gestion de l'activité 1 du paragraphe « cours », à quelles (s) étapes ? », 24 enseignants ont répondu à cette question. Nous regroupons dans les résultats dans le tableau ci-dessous :

Difficultés rencontrées dans l'étape	1)	2) a)	2) b)	3)	Le commentaire	La formulation de la définition
Nbre d'enseignants	0	5	16	22	24	24

Tous les enseignants qui ont répondu à cette dernière question déclarent avoir rencontré des difficultés dans l'explication du commentaire proposé à la fin de l'activité « *l'activité précédente suggère que f(x) peut être rendu aussi proche que l'on veut de f(1), dès que x est suffisamment proche de 1* » et lors de la formulation de la définition formelle de la notion de continuité.

Les enseignants trouvent également des difficultés (en classe) dans la gestion des tâches proposées dans les deux questions 2) b) et 3) en rapport avec la reconnaissance graphique de l'image et/ou l'image réciproque d'un intervalle par une fonction.

2) Deuxième étude : compte – rendus des inspecteurs exerçants dans les CRE choisies

Dans le premier tableau, nous affichons les nombres de classes et d'enseignants de classes de troisièmes sections sciences expérimentales et mathématiques qui sont concernés par la deuxième étude :

	Nabeul	Tunis I	Bizerte	Kairouan	Siliana
Nbre de classes de 3ème sc. Expérimentales	44	35	31	34	18
Nbre de classes de 3ème maths.	30	25	17	17	13
Nbre d'enseignants des classes de 3ème	64	51	41	44	31

Tableau2 : Nombre de classes de troisième année sections scientifiques

Source : le service administratif du deuxième cycle de l'enseignement de base et des lycées des circonscriptions régionales de l'enseignement.

Pour la question Q1 « Combien d'année as-tu enseigné une classe de troisième année (n'importe quelle section scientifique) ? », on trouve que les enseignants de mathématiques chargés de ces niveaux de troisième sections[5] sciences expérimentales et

[5] Une hiérarchie remarquée à propos des sections : la section « maths », puis la section « sciences expérimentales », puis « sciences techniques », puis « sciences informatiques », « économie et gestion » et « lettres »

mathématiques sont généralement choisis parmi les plus compétents (en terme de maitrise de la matière, expériences, motivation, note pédagogique, …etc.) car, lors de la préparation des niveaux à enseigner pour les enseignants, les inspecteurs tiennent compte des contenus des programmes et des niveaux des élèves qui sont considérés les meilleurs par comparaison aux autres filières.

Le tableau suivant résume la répartition des enseignants des classes de troisièmes sections scientifiques selon le nombre d'années scolaires au cours desquelles sont chargés de l'enseignement de ces classes pour l'échantillon des circonscriptions considérées:

Nbre d'A.S[6] / CRE	Entre 1 et 5	Entre 5 et 10	Entre 10 et 15	Plus que 16	Nbre total
Nabeul	15	20	22	7	**64**
Tunis I	11	16	18	6	**51**
Bizerte	9	10	14	8	**41**
Kairouan	8	15	16	5	**44**
Siliana	10	8	7	6	**31**

Tableau 3 : répartition des enseignants selon le nombre d'années d'enseignement des troisièmes années sections sciences expérimentales et mathématiques.

Sources : les services administratifs des cycles préparatoire et secondaire des circonscriptions de Nabeul, Tunis I, Bizerte, Kairouan et Siliana.

Dans ce qui suit, et concernant les autres questions du questionnaire proposé aux enseignants de troisièmes (sections sciences expérimentales et mathématiques), nous avons contacté les inspecteurs de mathématiques exerçant dans les circonscriptions considérées en leurs donnant des copies des questionnaires accompagnées du contenu de la partie du manuel du chapitre de continuité.

[6] « A.S » abréviation de « année scolaire »

« CRE » abréviation de « Circonscription Régionale de l'Enseignement»

Nous leur avons demandé de remplir des tableaux traduisant les différentes propositions qui figurent dans chacune des questions 2, 3, 4 et 5 du questionnaire. Les chiffres sont donnés par « estimation » basée sur leurs visites de classes, les cahiers des textes des enseignants visités, les débats et discussions au cours des séances de formation … etc.

Pour la question Q2 : « Comment introduis –tu le concept de continuité (pour la première fois) aux élèves ? », nous synthétisons les résultats estimés par les inspecteurs dans le tableau suivant :

	Nabeul	**Tunis I**	**Bizerte**	**Kairouan**	**Siliana**
Suivre les activités du manuel	70 %	75 %	75 %	80 %	80 %
Faire toutes les activités proposées	25 %	35 %	30 %	40 %	30 %
Modifier parfois les activités du manuel	45 %	40 %	45 %	40 %	50 %

Tableau 4 : le recours au manuel scolaire par les enseignants de troisièmes (sections scientifiques) pour l'introduction de la notion de continuité.

Les enseignants suivent donc très majoritairement le manuel mais font parfois des modifications pour s'adapter aux différents profils des élèves.
Pour les autres questions, nous donnons les résultats par circonscription et non pas par question par soucis d'être fidèle à ce qu'a rapporté chacun des inspecteurs.

- **Pour la circonscription de Nabeul :**
  - ✓ La majorité des enseignants de troisièmes sections scientifiques font les activités 1, 2 et 3 de la rubrique « Pour commencer »,
  - ✓ Un nombre assez important d'enseignants qui traitent les activités 1 et 2 page 25 pour l'introduction de la notion de continuité (soit environ 60 %) mais elles ne sont pas gérées de la même façon.
  - ✓ Les activités relatives à la continuité de $|f|, \sqrt{1+x}$ et $\sqrt{f}$ qui font appel à la définition de la continuité avec le β et α ne sont pas toutes faites par la majorité des

enseignants (« j'estime qu'entre 15 et 20 % seulement des enseignants qui les font et d'une manière trop guidée »).

- ✓ Les enseignants trouvent des difficultés dans la gestion de l'activité 1 proposée par le manuel qui a pour but de mettre en place la définition en ε et η en raison de plusieurs facteurs tels qu'en rapport avec le niveau des élèves, leurs connaissances sur le thème de logique, leurs connaissances même sur les intervalles et leurs images par une fonction …etc.
- ✓ Tout ce qui est de la question 5 quant à la gestion des tâches proposées dans l'activité 1, les enseignants trouvent des difficultés notamment lors de la réalisation des tâches 2) b) et 3) et même la formulation du commentaire et de la définition formelle en β et α car ils se trouvent obligés d'intervenir de façon exagérée (expliquer, guider, rappeler, illustrer graphiquement, …etc.).

- **Pour la circonscription de Tunis I :**

✓ Les enseignants donnent de l'importance aux activités d'introduction de la notion de voisinage comme celle proposée par les auteurs du manuel (activité 1 page 22) et d'ailleurs ils n'hésitent pas généralement de multiplier les exemples et font appel à différents registres de représentation.

✓ La gestion de l'activité 3 page 22 est une occasion pour les enseignants de parler et de mettre en place l'image et l'image réciproque d'un intervalle par une fonction. Elles sont introduites sur des exemples simples de fonctions et accompagnées d'illustrations graphiques. Les enseignants sont conscients de l'importance de ces connaissances dans le reste du chapitre.

✓ Les enseignants apportent des modifications sur les énoncés des activités proposées dans le manuel (ajout de tâches, modification des expressions proposées, proposer des indications …etc.)

✓ Les enseignants dans les lycées pilotes ne trouvent pas beaucoup de difficultés dans la gestion des activités 1 et 2 page 23 qui introduisent la définition mathématique de la continuité (pour tout β >0, il existe α >0 …) contrairement aux autres qui se trouvent obligés de trop intervenir pour expliquer, aider, rappeler …pour arriver à formuler les définitions.

- ✓ Beaucoup d'enseignants évitent d'entamer ces deux activités considérées comme un support d'introduction de la définition de la continuité, ils voient que les tâches ne sont pas à la portée de leurs élèves et font appels à des techniques de résolution basées sur des connaissances antérieures insuffisamment travaillées. Je parle de la caractérisation des voisinages, l'image d'un intervalle par une fonction.

- **Pour la CRE de Kairouan :**

- ✓ Tous les enseignants font les activités préliminaires (1, 2 et 3 page 22) d'une manière détaillée en vue d'instruire les notions de voisinage, l'image d'un intervalle par une fonction.
- ✓ Malheureusement, beaucoup d'enseignants se limitent à donner la définition de la continuité d'une fonction en un point ($\forall\, \beta > 0, \exists\, \alpha > 0$ ...) accompagnée d'explications (commentaires, traductions dans différents registres). Ils se recentrent sur le contenu de la page 24 orienté à la caractérisation graphique de la continuité et la discontinuité à travers le tracé continu ou présence de rupture (objet du paragraphe « conséquence » et les résultats sur la continuité des fonctions (usuelles) de référence (des résultats admis).
- ✓ Il y a quand même des enseignants (dont ceux du lycée pilote) qui suivent intégralement le scénario proposé par le manuel en vue de donner une définition mathématique de la continuité.
- ✓ Un nombre réduit d'enseignants traitent les activités 1 et 2 pages 25 et 26 en rapport avec la continuité de la valeur absolue ou la racine carrée d'une fonction en un point de son domaine de définition en faisant appel à la définition en β et α. Les autres se limitent à respecter les directives du programme officiel : « la reconnaissance de la continuité se fait à travers l'expression ou sa représentation graphique ».

- **Pour la CRE de Bizerte :**

- ✓ Les enseignants exploitent les connaissances antérieures de leurs élèves sur les intervalles et la représentation graphique des fonctions du programme de la deuxième année et les lectures graphiques de l'image et l'antécédent d'un réel par une fonction pour faire les activités de la rubrique « Pour commencer » et ce pour parler de la notion de voisinage et sa caractérisation ainsi que son image par une fonction.

- ✓ Le formalisme accompagnant le concept de continuité se trouve délaissé par la plupart des enseignants qui font le choix didactique orienté vers la reconnaissance graphique et l'appel à l'usage des théorèmes admis sur la continuité des fonctions de référence. Dans le cadre du recours aux activités proposées par le manuel scolaire comme support d'introduction de la continuité, la majorité des enseignants ne donnent pas de l'importance nécessaire aux objectifs assignés et voient que :
  - La définition de la continuité à l'aide de ε et η comme dans les anciens programmes s'avère peu difficile dans ce niveau des élèves, ce qui est questionnant,
  - Les activités du manuel scolaire signalées dans ce questionnaire semblent à la limite du programme officiel qui délimite la reconnaissance de la continuité à l'aide du graphique et de l'expression de la fonction en appliquant les théorèmes du cours (éventuellement admis).
  - La définition mathématique ou formelle (à l'aide de ε et η) semble implicitement reportée à l'université.
- ✓ Cela dit, plusieurs enseignants fournissent beaucoup d'efforts pour suivre le scénario proposé par le manuel dans ce chapitre et consacrent suffisamment de temps pour la gestion des activités et atteindre les objectifs sous-jacents des auteurs du manuel en particulier le lien entre la définition mathématique de la continuité et sa caractérisation graphique à l'aide de son tracé continu ou non. Reste à signaler que la gestion de ces activités en classe dépend de l'enseignant (en terme d'expérience, de compétence pédagogique et didactique, de maitrise de la matière, de la volonté à mettre en place la définition de la continuité avec le ε et η …) et du niveau des apprenants.

III. Conclusion de ce chapitre

(a) Que retiennent nos élèves de la notion de continuité

Les élèves partent à l'université avec des difficultés (sens et manipulation) en rapport avec ce concept de continuité. Ils n'ont pas de techniques de preuve basées sur la définition formalisée de la continuité.

En revanche, ils maitrisent les autres techniques qui relèvent de l'algèbre et l'application des théorèmes de cours qui portent généralement sur le caractère global de la continuité, comme ceux qui sont relatifs à la continuité sur un intervalle, la détermination de l'image d'un intervalle …etc. La reconnaissance de la continuité se fait à travers le tracé continu (ou non) de sa courbe ou à travers son expression algébrique, sans articulation apparente.

Les élèves semblent associer majoritairement continuité en un point et calcul de limite de la fonction en ce point ou bien à la caractérisation graphique globale de continuité, ce qui correspond aux théorèmes du cours et aux pratiques du secondaire. Ces difficultés peuvent être transparentes dans la mesure où dans la majorité des cas qu'ils peuvent rencontrer, le calcul de limite suffit à décider de la continuité. Dès que les conditions ne sont pas satisfaites (question 2, question 3, question 5) on voit bien que les étudiants sont bien plus en difficulté.

De plus, ils ne semblent pas questionner si la fonction est définie localement au voisinage du point. Il s'avère que l'aspect local des notions de limite et continuité n'est pas suffisamment travaillé au secondaire. Les étudiants auront donc des difficultés à suivre les cours de l'Analyse, avec beaucoup de formalisme et qui sont loin des applications de théorèmes admis (dans le cursus du secondaire). Par exemple pour prouver que si f et g sont deux fonctions continues en x_0 alors $f + g$ - par exemple - est continue en x_0, les étudiants ne peuvent et ne doivent pas se référer à la caractérisation graphique !

(b) l'enseignement de la continuité

- Dans l'enseignement de la notion de continuité, il semble y avoir des écarts entre :
  - Ce dont les enseignants disposent en termes de savoir et connaissances à propos de cette notion ;

- Le contenu du programme officiel et ses directives ;
- Ce qui est effectivement enseigné en classe ;
- Ce que les élèves retiennent à propos de cette notion.

- La manipulation algébrique ou graphique semble dominante
- L'aspect topologique et formel du concept de continuité, qui n'est pas suffisamment pris en compte par les programmes officiels, est délaissé par les enseignants.
- Le passage à l'aspect global (ce que les enseignants appellent « théorèmes généraux » qui seront parmi les outils de calcul de limites) est sans doute trop rapide.