# JCM dependant du temps

## 5.1 cas simple

Comme on l'à déjà dit auparavant, voyons comment traiter un concret du modèle Jaynes-Cummings dépends du temps via l'intégrale de chemin. Nous allons considérer le cas simple suivants

$$C_{\grave{m},\grave{n}}(t) = e^{-i\Omega_{m,n}t}\delta_{m,\grave{m}}\delta_{n,\grave{n}} \tag{5.1}$$

ce qui donne

$$F(a,a^+,t) = e^{-i\Omega_{m,n}t}a^{+m}a^n = e^{-i\Omega t}a^{+m}a^n \tag{5.2}$$

Se référent à la section (4.3), les éléments de matrice de transition $R(\alpha,T)$sont donnés dans ce cas par

$$\begin{aligned} R_{11}(\alpha,T) &= \exp\left(-i\frac{\omega_0}{2}T\right) + (-ig)^{2N}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\int_0^{s_1} ds_3......\int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\ &\times e^{-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)}F(s_1)e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_1-s_2)}F^*(s_2)e^{-i\frac{\omega_0}{2}(s_2-s_3)} \\ &F(s_3)e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_3-s_4)}....\times e^{-i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N-1}-s_{2N})}F^*(s_{2N})e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N}-0)\sigma_3}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

et

$$\begin{aligned} R_{12}(\alpha,T) &= (-ig)\int_0^T ds_1 e^{-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)}F(\alpha_1)e^{i\frac{\omega_0}{2}s_1} \\ &+(-ig)^{2N+1}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\int_0^{s_1} ds_3......\int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} \\ &e^{-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)}F(s_1)e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_1-s_2)}F^*(s_2)e^{-i\frac{\omega_0}{2}(s_2-s_3)} \\ &F(\alpha_3,s_3)e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_3-s_4)}\times ..e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N}-s_{N+1})}F(s_{2N+1})e^{-i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N}-0)}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Les autres éléments sont exprimés par les relations suivantes

$$\begin{cases} R_{21}(\alpha,T) = -R^*_{12}(\alpha,T) \\ R^*_{11}(\alpha,T) = R_{22}(\alpha,T) \end{cases} \tag{5.5}$$

### 5.1.1 Intégration sur les variables complexes

En appliquant exactement les résultats de la section (3.5) la forme matricielle du propagateur est alors

$$\begin{aligned} K(\alpha_f,\alpha_i,s_f-s_i) &= \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2+|\alpha i|^2\right] \\ &\times\exp[\alpha^*_f e^{-i\omega(s_f-s_i)}\alpha_i - \frac{i}{2}\omega(s_f-s_i)] \\ &\times\begin{pmatrix} R_{11}(\alpha_f,\alpha_i,s_f-s_i) & R_{12}(\alpha_f,\alpha_i,s_f-s_i) \\ R_{21}(\alpha_f,\alpha_i,s_f-s_i) & R_{22}(\alpha_f,\alpha_i,s_f-s_i) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Notons d'abords

$$K^{\pm}(\alpha_f,\alpha_i,s_f-s_i) = \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2+|\alpha i|^2)\right]\exp\left[\alpha^*_f e^{-i\omega(s_f-s_i)}\alpha_i - \frac{i}{2}(\omega\pm\omega_0)(s_f-s_i)\right] \tag{5.7}$$

Les éléments du propagateur s'écrit sous la forme suivants

-pour $K_{11}(\alpha_f,\alpha_i,T)$

$$\begin{aligned} K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= K^+(\alpha_f,\alpha_i,T) + \sum_{N=1}^{\infty}(-ig)^{2N}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\int_0^{s_1} ds_3 ......\int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\ &\times\int \frac{d\alpha_1 d\alpha^*_1}{2\pi i}......\frac{d\alpha_{2N} d\alpha^*_{2N}}{2\pi i}K^+(\alpha_f,\alpha_1,T-s_1) \\ &\times e^{-i\Omega s_1}\alpha_1^{*m}\alpha_1^n K^-(\alpha_1,\alpha_2,s_1-s_2)e^{i\Omega s_2}\alpha_2^m\alpha_2^{*n} \\ &\times..e^{i\Omega s_{2N}}\alpha_{2N}^m\alpha_{2N}^{*n}K^+(\alpha_{2N},\alpha_i,s_{2N}-0) \end{aligned} \tag{5.8}$$

Ecrivant l'exponentielle de $K^{\pm}(\alpha_f,\alpha_i,T)$ sous un forme d'une série

$$\exp[\alpha^*_f e^{-i\omega(s_f-s_i)}\alpha_i = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha^*_f\alpha_i)^{n\,*}}{n!}e^{-i\omega n(s_f-s_i)} \tag{5.9}$$

il vient

$$
\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= K^{+}(\alpha_f,\alpha_i,T)+\sum_{N=1}^{\infty}(-ig)^{2N}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\int_0^{s_1} ds_3......\int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\
&\sum_{\substack{k_1,k_2,k_2,\\ ..k_{2N},k_i=0}}\int\frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i}e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2+|\alpha_1|^2)} * \frac{(\alpha_f^*)^{k_1}}{k_1!}(\alpha_1)^{k_1+n}(\alpha_1^*)^{k_2+m} \\
&\times e^{-i\omega k_1(T-s_1)-i\Omega s_1}\exp[-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(T-s_1)]\int\frac{d\alpha_2 d\alpha_2^*}{2\pi i}e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2)} \\
&\frac{(\alpha_2)^{k_2+m}(\alpha_2^*)^{k_3+n}}{k_2!}e^{-i\omega k_2(s_1-s_2)+i\Omega s_2}\exp[-\frac{i}{2}(\omega-\omega_0)(s_1-s_2)] \\
&*\int\frac{d\alpha_3 d\alpha_3^*}{2\pi i}e^{[-\frac{1}{2}(|\alpha_2|^2+|\alpha_3|^2)}\frac{((\alpha_3)^{k_3+n}(\alpha_3^*)^{k_4+m}}{k_2!}e^{-i\omega k_3(s_2-s_3)-i\Omega s_3} \\
&\exp[-\frac{i}{2}(\omega-\omega_0)(s_2-s_3)]\times ....\int\frac{d\alpha_{2N-1}d\alpha_{2N-1}^*}{2\pi i}e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_{2N-2}|^2+|\alpha_{2N-1}|^2)} \\
&\frac{(\alpha_{2N-1})^{k_{2N-1}+n}(\alpha_{2N-1}^*)^{k_{2N-1}+m}}{k_{2N-1}!}e^{-i\omega k_{2N-1}(s_{2N-2}-s_{2N-1})-i\Omega s_{2N-1}} \\
&\exp[-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(s_{2N-2}-s_{2N-1})]\int\frac{d\alpha_{2N}d\alpha_{2N}^*}{2\pi i}e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_{2N-1}|^2+|\alpha_{2N}|^2)} \\
&\frac{(\alpha_{2N})^{k_{2N}+m}(\alpha_{2N}^*)^{k_i+n}}{k_{2N}!}e^{-i\omega k_{2N}(s_{2N-1}-s_{2N})+i\Omega s_{2N}}\exp[-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(s_{2N-1}-s_{2N})] \\
&e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_{2N}|^2+|\alpha_i|^2)}\frac{(\alpha_i)^{k_i}}{k_i!}e^{-i\omega k_i(s_{2N})+i\Omega s_{2N}}\exp[-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(s_{2N}-0)]
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

Utilisant la propriété suivante

$$\frac{1}{2\pi i\sqrt{m!}\sqrt{n!}}\int\int d\alpha d\alpha^* e^{-|\alpha|^2}(\alpha^*)^n(\alpha)^m=\delta_{nm} \tag{5.11}$$

il vient

$$
\left\{
\begin{array}{l}
k_1+n-m=k_2 \\
k_2=k_3+n-m \\
\quad\quad . \\
\quad\quad . \\
k_{2N}=k_i+n-m
\end{array}
\right. \tag{5.12}
$$

$$k_1 = k_2=k_3=........=k_{2N}=k_i=k$$

on trouve

$$
\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= K^{+}(\alpha_f,\alpha_i,T)+\sum_{N=1}^{\infty}(-ig)^{2N}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\int_0^{s_1} ds_3\ldots\ldots\int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\
& e^{[-\frac{1}{2}(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha_i|^2)}\sum_{k=0}(\alpha_f^*)^{k_1}\frac{[(k+n)!]}{[k!(k+n-m)!} \\
& e^{-i\omega k(T-s_1)-i\Omega s_1}\exp[-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(T-s_1)] \\
& e^{-i\omega(k+n-m)(s_1-s_2)+i\Omega s_2}\exp[-\frac{i}{2}(\omega-\omega_0)(s_1-s_2)] \\
& e^{-i\omega k(s_2-s_3)-i\Omega s_3}\exp[-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(s_2-s_3)] \\
& e^{-i\omega k+(s_{2N-2}-s_{2N-1})-i\Omega s_{2N-1}}\exp[-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(s_{2N-2}-s_{2N-1})] \\
& e^{-i\omega(k+n-m)(s_{2N-1}-s_{2N})+i\Omega s_{2N}}\exp[-\frac{i}{2}(\omega-\omega_0)(s_{2N-1}-s_{2N})] \\
& \frac{(\alpha_i)^k}{k!}e^{-i\omega k(s_{2N})+i\Omega s_{2N}}\exp[-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(s_{2N})]
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= K^{+}(\alpha_f,\alpha_i,T)+\sum_{N=1}^{\infty}(-ig)^{2N}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\int_0^{s_1} ds_3\ldots\ldots\int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\
& e^{-\frac{1}{2}(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha i|^2)}\sum_{k=}^{\infty}\frac{(\alpha_f\ \alpha_i)^k}{k!}\frac{[(k+n)!]}{[k!(k+n-m)]!} \\
& \exp\left\{-i\omega k(T-s_1)-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(T-s_1)-i\Omega s_1\right\} \\
& \exp[\left\{-i\omega(k+n-m)(s_1-s_2)-\frac{i}{2}(\omega-\omega_0)(s_1-s_2)+i\Omega s_2\right\} \\
& \exp-\left\{i\omega k(s_2-s_3)-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(s_2-s_3)-i\Omega s_3\right\} \\
& \exp\left\{-i\omega k+(s_{2N-2}-s_{2N-1})-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(s_{2N-2}-s_{2N-1})-i\Omega s_{2N-1}\right\} \\
& \exp\left\{-i\omega(k+n-m)(s_{2N-1}-s_{2N})-\frac{i}{2}(\omega-\omega_0)(s_{2N-1}-s_{2N})+i\Omega s_{2N}\right\} \\
& \exp\left\{-i\omega k\,(s_{2N})-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(s_{2N})\right\}
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

on peut aussi réécrire

$$\begin{aligned}K_{11}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= \exp -\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T\sum_{k=0}\frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i)^k}{k!}e^{[-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2+|\alpha i|^2}\\ &(1+\sum_{N=1}^{\infty}(-ig)^{2N}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\int_0^{s_1}ds_3......\int_0^{s_{2N-1}}ds_{2N}\\ &\frac{[(k+n)!]}{[k!(k+n-m)!}\exp\{\sum_{j=1}^{2N}(-1)^{j+1}[(n-m)\omega+\Omega-\omega_0]\end{aligned} \tag{5.15}$$

posons

$$\omega_{nm}^2(k) = g^2\frac{[(k+n)!]}{[k!(k+n-m)!} \tag{5.16}$$

et

$$(n-m)\omega+\Omega-\omega_0=\Delta \tag{5.17}$$

L'élément de transition $K_{11}(\alpha_f,\alpha_i,T)$ devient

$$\begin{aligned}K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= \exp -\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T\sum_{k=0}\frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i)^k}{k!}e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2+|\alpha i|^2)}\\ &\Big\{1+[-\omega_{nm}^2(k)]^N\int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1}\int_0^{s_1}ds_2 e^{i\Delta s_2}\int_0^{s_2}ds_3 e^{-i\Delta s_3}...\\ &\int_0^{s_{2N-2}}ds_{2N-1}e^{-i\Delta s_{2N-1}}\int_0^{s_{2N-1}}ds_{2N}e^{i\Delta s_{2N}}\Big\}\end{aligned} \tag{5.18}$$

Les autres éléments de transition se calculent de la même manière .

-Pour$K_{\uparrow\downarrow}(\alpha_f,\alpha_i,T)$ on a

$$\begin{aligned}K_{\uparrow\downarrow}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= (-ig)\int_0^T ds_1\int\frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i}K^+(\alpha_f,\alpha_i,T-s_1)\\ &e^{-i\Omega s_1}\alpha_1^{+m}\alpha_1^n K^-(\alpha_f,\alpha_1,s_1-0)\\ &+\sum_{N=1}^{\infty}(-ig)^{2N+1}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\int_0^{s_1}ds_3......\int_0^{s_{2N}}ds_{2N+1}\\ &\int\frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i}....\frac{d\alpha_{2N+1}d\alpha_{2N+1}^*}{2\pi i}K^+(\alpha_f,\alpha_1,T-s_1)\\ &e^{-i\Omega s_1}\alpha_1^{*m}\alpha_1^n K^-(\alpha_1,\alpha_2,s_1-s_2)\\ &e^{i\Omega s_2}\alpha_2^m\alpha_2^{*n}K^+(\alpha_2,\alpha_3,s_2-s_3)e^{-i\Omega s_3}\alpha_3^{*m}\alpha_3^n\times ..\\ &...e^{i\Omega s_{2N+1}}\alpha_{2N}^m\alpha_{2N}^{*n}K^+(\alpha_{2N},\alpha_{2N+1},s_{2N}-s_{2N+1})\\ &e^{-i\Omega s_{2N+1}}\alpha_{2N+1}^m\alpha_{2N+1}^{*n}K^+(\alpha_{2N+1},\alpha_i,s_{2N+1}-0)\end{aligned} \tag{5.19}$$

Ou bien le résultat suivant

$$
\begin{aligned}
K_{\uparrow\downarrow}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= (-ig)\int_0^T ds_1 e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2+|\alpha_i|^2)}e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T-i\Delta s_1} \\
&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+n)!}{k+n-m!}(\alpha_i^*)^{n-m}\frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i)^k}{k!} \\
&*\left\{1+\sum_{N=1}^{\infty}[-\omega_{nm}^2(k)]^N\int_0^{s_1}ds_2 e^{i\Delta s_2}\int_0^{s_2}ds_3 e^{-i\Delta s_3}\right. \\
&\left.\quad .....\int_0^{s_{2N-2}}ds_{2N-1}e^{-i\Delta s_{2N-1}}\int_0^{s_{2N-1}}ds_{2N}e^{i\Delta s_{2N}}\int_0^{s_{2N}}ds_{2N+1}e^{-i\Delta s_{2N+1}}\right\}
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

-Pour $K_{\downarrow\uparrow}(\alpha_f,\alpha_i,T)$ on a

$$
\begin{aligned}
K_{\downarrow\uparrow}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= (-ig)\int_0^T ds_1\int\frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i}K^-(\alpha_f,\alpha_i,T-s_1) \\
&e^{i\Omega s_1}\alpha_1^m\alpha_1^{*n}K^+(\alpha_f,\alpha_i,s_1-0) \\
&+\sum_{N=1}^{\infty}(ig)^{2N+1}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\int_0^{s_1}ds_3......\int_0^{s_{2N}}ds_{2N+1} \\
&\int\frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i}...\frac{d\alpha_{2N+1}d\alpha_{2N+1}^*}{2\pi i}K^-(\alpha_f,\alpha_i,T-s_1) \\
&e^{i\Omega s_1}\alpha_1^m\alpha_1^{*n}K^+(\alpha_f,\alpha_i,s_1-s_2)e^{-i\Omega s_2}\alpha_2^{*m}\alpha_2^n \\
&K^-(\alpha_f,\alpha_i,s_2-s_3)e^{i\Omega s_1}\alpha_3^m\alpha_3^{*n}K^+(\alpha_2,\alpha_3,s_2-s_3)\times .... \\
&e^{i\Omega s_{2N+1}}\alpha_{2N}^m\alpha_{2N}^{*n}K^+(\alpha_{2N},\alpha_{2N+1},s_{2N}-s_{2N+1}) \\
&e^{i\Omega s_{2N+1}}\alpha_{2N+1}^m\alpha_{2N+1}^{*n}K^-(\alpha_{2N+1},\alpha_i,s_{2N+1}-0)
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
K_{\downarrow\uparrow}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= (ig)\int_0^T ds_1\sum_{k=0}\frac{(k+n)!}{k+n-m!}e^{-\frac{i}{2}(\omega-\omega_0)T+i\Delta s_1-i\omega(n-m)T} \\
&e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2+|\alpha_i|^2)}(\alpha_f^*)^{n-m}\frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i)^k}{k!} \\
&\times\left\{1+\sum_{N=1}^{\infty}[-\omega_{nm}^2(k)]^N\int_0^{s_1}ds_2 e^{-i\Delta s_2}\int_0^{s_2}ds_3 e^{i\Delta s_3}\right. \\
&\left.\times...\int_0^{s_{2N-2}}ds_{2N-1}e^{i\Delta s_{2N-1}}\int_0^{s_{2N-1}}ds_{2N}e^{-i\Delta s_{2N}}\int_0^{s_{2N}}ds_{2N+1}e^{i\Delta s_{2N+1}}\right\}
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

-Pour $K_{\downarrow\downarrow}(\alpha_f,\alpha_i,T)$

$$\begin{aligned}
K_{\downarrow\downarrow}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= K^-(\alpha_f,\alpha_i,T)+(ig)^{2N}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\int_0^{s_1}ds_3...\\
&\times\int_0^{s_{2N-1}}ds_{2N}\int\frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i}...\frac{d\alpha_{2N}d\alpha_{2N}^*}{2\pi i}K^-(\alpha_f,\alpha_1,T-s_1)\\
&\times e^{i\Omega s_1}\alpha_1^m\alpha_1^{*n}K^+(\alpha_1,\alpha_2,s_1-s_2)e^{-i\Omega s_2}\alpha_2^{*m}\alpha_2^n K^-(\alpha_1,\alpha_2,s_2-s_3)\\
&\times e^{i\Omega s_3}\alpha_3^m\alpha_3^{*n}K^+(\alpha_3,\alpha_4,s_3-s_4)\times ..\\
&...\times e^{i\Omega s_{2N}}\alpha_{2N}^m\alpha_{2N}^{*n}\;K^-(\alpha_{2N},\alpha_i,s_{2N}-0)
\end{aligned}\tag{5.23}$$

Après les calcules on a

$$\begin{aligned}
K_{\downarrow\downarrow}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= e^{-\frac{i}{2}(\omega-\omega_0)T}\sum_{k=0}\frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i)^k}{k!}e^{-\frac{1}{2}(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha i|^2)}\\
&\left\{1+\sum_{N=1}^{\infty}[-\omega_{mn}^2(k)]^N\int_0^T ds_1 e^{i\Delta s_1}\int_0^{s_1}ds_2 e^{-i\Delta s_2}\int_0^{s_2}ds_3 e^{i\Delta s_3}\right.\\
&\left.\;.....\int_0^{s_{2N-2}}ds_{2N-1}e^{i\Delta s_{2N-1}}\int_0^{s_{2N-1}}ds_{2N}e^{-i\Delta s_{2N}}\right\}
\end{aligned}\tag{5.24}$$

avec

$$\omega_{mn}^2(k)=g^2\frac{[(k+m)!]}{[k!(k+m-n)!}\tag{5.25}$$

### 5.1.2 Intégration sur le temps

Pour pouvoir intégrer sur le temps, utilisons la transformation de Laplace définie par la relation suivante

$$\pounds_p(f(s))=\int_0^{\infty}dse^{-ps}f(s)\tag{5.26}$$

Donnons l'astuce de notre calcule .Notre résultats sera réécrit d'abord sous la forme d'un produit de convolution

définissons d'abords $F_0(T)$par

$$F_0(T)=\int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1}\int_0^{s_1}ds_2 e^{i\Delta s_2}\int_0^{s_2}ds_3 e^{-i\Delta s_3}...\times\int_0^{s_{2N-1}}ds_{2N}e^{i\Delta s_{2N}}\int_0^{s_{2N}}ds_{2N}e^{i\Delta s_{2N+1}}\tag{5.27}$$

Qui peut se mettre comme un produit de convolution

$$F_0(T)=\int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1}F_1(s_1)\tag{5.28}$$

et où

$$F_1(s_1) = \int_0^{s_1} ds_2 e^{i\Delta s_2} F_2(s_2) \tag{5.29}$$

$$F_2(s_2) = \int_0^{s_2} ds_3 e^{-i\Delta s_3} F_3(s_3) \tag{5.30}$$

et on obtient par itération

$$F_{2N-1}({}_{2N-1}) = \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} e^{i\Delta s_{2N}} \tag{5.31}$$

avec

$$\begin{aligned} K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T} \sum_{k=0} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i)^k}{k!} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha i|^2)} \\ & \left(1 + \sum_{N=1}^{\infty} [-\omega_{nm}^2(k)]^N F_0(T)\right) \end{aligned} \tag{5.32}$$

Définissons la transformation de Laplace de $F_0(T)$ par

$$\begin{aligned} \pounds_p(F_0(T)) &= \int_0^{\infty} dT e^{-pT} F_0(T) \\ &= \int_0^{\infty} dT e^{-pT} \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1} F_1(s_1) \end{aligned} \tag{5.33}$$

notons

$$\pounds_p(F_0(T)) = \tilde{F}(0, p) \tag{5.34}$$

alors

$$\tilde{F}(0, p) = \int_0^{\infty} dT e^{-pT} \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1} F_1(s_1) \tag{5.35}$$

produit l'equation(5.35) par $e^{i\Delta T}$ $e^{-i\Delta T}$

$$\tilde{F}(0, p) = \int_0^{\infty} dT e^{-(p+i\Delta)T} \int_0^T ds_1 e^{i\Delta(T-s_1)} F_1(s_1) \tag{5.36}$$

qui s'arrange comme

$$\pounds_p(F_0(T)) = \pounds_{p+i\Delta}(F_0(T)) \tag{5.37}$$

et

$$\begin{aligned} \pounds_{p+i\Delta}(f*g(T)) &= \int_0^\infty e^{-(p+i\Delta)T}dT\int_0^T f(T-s_1)*g(s_1)ds_1 \\ &= G(p)F(p) \end{aligned} \tag{5.38}$$

alors

$$\tilde{F}(0,p)=\int_0^\infty e^{-(p+i\Delta)T}F_0(T)dT\int_0^\infty e^{-(p+i\Delta)T}\int_0^\infty e^{i\Delta T}dT \tag{5.39}$$

puisque

$$\int_0^\infty e^{-(p+i\Delta)T}e^{i\Delta T}dT=\int_0^\infty e^{-pT}dT=\frac{1}{p} \tag{5.40}$$

donc

$$\tilde{F}(0,p)=\frac{1}{p}\tilde{F}_1(0,p+i\Delta)$$

Même étapes pour les autres termes

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(0,p+i\Delta) &= \int_0^\infty e^{-pT}F_2(0,T)dT\int_0^\infty e^{-(p+i\Delta)T}dT \\ &= \frac{1}{p+i\Delta}\tilde{F}_2(0,p) \end{aligned} \tag{5.41}$$

et

$$\tilde{F}_2(0,p)=\frac{1}{p}\tilde{F}_3(0,p+i\Delta) \tag{5.42}$$

jusqu'à l'ordre $2N-1$

$$\tilde{F}_{2N-2}(0,p)=\frac{1}{p+i\Delta}\tilde{F}_{2N}(0,p) \tag{5.43}$$

$$\tilde{F}_{2N-1}(0,p)=\frac{1}{p}\tilde{F}_{2N}(0,p+i\Delta) \tag{5.44}$$

en conclusion ,on a $\pounds_p(F_0(T))$

$$\begin{aligned} \pounds_p(F_0(T)) &= \tilde{F}(0,p) \\ \tilde{F}(0,p) &= \frac{1}{p}\left[\frac{1}{p(p+i\Delta)}\right]^N \end{aligned} \tag{5.45}$$

nous rappelons que

$$K_{11}(\alpha_f,\alpha_i,T) = e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T}\sum_{k=0}\frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i)^k}{k!}e^{-\frac{1}{2}(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha i|^2)} \quad (5.46)$$
$$\{1+\sum_{N=1}^{\infty}[-\omega_{nm}^2(k)]^N F_0(T)\}$$

Prenant la transformation inverse de Laplace

$$F_0(T) = \int_0^\infty e^{-pT}\tilde{F}(0,p)dp = \text{la somme de résidude } e^{-pT}\tilde{F}(0,p)\text{à sous les pôles} \quad (5.47)$$

alors

$$\sum_{N=1}^{\infty}[-\omega_{nm}^2(k)]^N \int_0^\infty e^{-pT}\tilde{F}(0,p)dp$$
$$\sum_{N=1}^{\infty}[-\omega_{nm}^2(k)]^N \int_0^\infty e^{-pT}\frac{1}{p}\left[\frac{1}{p(p+i\Delta)}\right]^N dp$$
$$= \int_0^\infty e^{-pT}\frac{1}{p}\sum_{N=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)}\right]^N - 1\right\}dp \quad (5.48)$$

on suppose

$$A = \sum_{N=0}^{\infty}\left[\frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)}\right]^N \quad (5.49)$$

$$\left[\frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)}\right]^N = \frac{1-\left(\frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)}\right)^{N+1}}{1-\frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)}} \quad (5.50)$$

si la condition $\left|\frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)}\right| \leq 1$ est verifiée donc

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1-\left(\frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)}\right)^{N}}{1-\frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)}} = \frac{1}{1-\frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)}} \quad (5.51)$$
$$\lim A_{N\to\infty} = \frac{p(p+i\Delta}{p(p+i\Delta)+\omega_{nm}^2(k)}$$

$$\sum_{N=1}^{\infty}[-\omega_{nm}^2(k)]^N \int_0^\infty e^{-pT}\tilde{F}(0,p)dp = \int_0^\infty e^{-pT}\left(\frac{(p+i\Delta}{p(p+i\Delta)+\omega_{nm}^2(k)} - \frac{1}{p}\right)dp$$
$$= \int_0^\infty e^{-pT}\left(\frac{(p+i\Delta}{p(p+i\Delta)+\omega_{nm}^2(k)} - \frac{1}{p}\right)dp \quad (5.52)$$

calcule de $\int_0^\infty e^{-pT}\left(\frac{(p+i\Delta)}{(p+i\Delta)+\omega_{nm}^2(k)}\right)dp$ :

on a

$$\int_0^\infty e^{-pT}\left(\frac{p+\frac{i\Delta}{2}}{p(p+i\Delta)+\omega_{nm}^2(k)}+\frac{\frac{i\Delta}{2}}{(p+i\Delta)+\omega_{nm}^2(k)}\right)dp \tag{5.53}$$

$$= \int_0^\infty e^{-pT}\left(\frac{p+\frac{i\Delta}{2}}{(p+\frac{i\Delta}{2})^2+(\left(\sqrt{(\frac{\Delta^2}{4})+\omega_{nm}^2(k)}\right)^2}+\frac{\frac{i\Delta}{2}}{(p+\frac{i\Delta}{2})^2+(\left(\sqrt{\frac{\Delta^2}{4}+\omega_{nm}^2(k)}\right)^2}\right)dp$$

posons que

$$\sqrt{(\Delta+4\omega_{nm}^2(k)}=\Omega_1 \tag{5.54}$$

il vient

$$\int_0^\infty e^{-pT}\left(\frac{(p+i\Delta)}{(p+i\Delta)+\omega_{nm}^2(k)}\right)dp=\int_0^\infty e^{-pT}\left(\frac{p+\frac{i\Delta}{2}}{(p+\frac{i\Delta}{2})^2+\frac{\Omega_1^2}{4}}+\frac{\frac{i\Delta}{2}}{(p+\frac{i\Delta}{2})^2+\frac{\Omega_1^2}{4}}\right)dp \tag{5.55}$$

en utilisant les formule suivant

$$e^{-bx}\sin(ax) = \int_0^\infty e^{-px}\frac{a}{(p+b)^2+a^2}dp \tag{5.56}$$

$$e^{-bx}\cos(ax) = \int_0^\infty e^{-px}\frac{p+b}{(p+b)^2+a^2}dp \tag{5.57}$$

alors

$$\int_0^\infty e^{-pT}\left(\frac{p+\frac{i\Delta}{2}}{(p+\frac{i\Delta}{2})^2+\frac{\Omega_1^2}{4}}\right)dp$$

$$= e^{-\frac{i\Delta T}{2}}\cos(\frac{\Omega_1}{2}T) \tag{5.58}$$

et

$$\int_0^\infty e^{-pT}\left(\frac{\frac{i\Delta}{2}}{(p+\frac{i\Delta}{2})^2+\frac{\Omega_1^2}{4}}\right)dp = \frac{i\Delta}{\Omega_1}\int_0^\infty e^{-pT}\left(\frac{\frac{\Omega_1}{2}}{(p+\frac{i\Delta}{2})^2+\frac{\Omega_1^2}{4}}\right)dp$$

$$\int_0^\infty e^{-pT}\left(\frac{\frac{i\Delta}{2}}{(p+\frac{i\Delta}{2})^2+\frac{\Omega_1^2}{4}}\right)dp = e^{-\frac{i\Delta T}{2}}\frac{i\Delta}{\Omega_1}\sin(\frac{\Omega_1}{2}T) \tag{5.59}$$

La transformation inverse donne

$$\begin{aligned} K_{11}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= e^{\frac{i}{2}([(m-n)-1]\omega-\Omega)T}\sum_{k=0}\frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i)^k}{k!}e^{-\frac{1}{2}(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha i|^2)} \\ &\times\left(\cos(\Omega_1 T)+\frac{i\Delta}{\Omega_1}\sin(\Omega_1 T)\right) \end{aligned} \tag{5.60}$$

avec

$$\Omega_1=\sqrt{\Delta^2+4\omega_{nm}^2(k)} \tag{5.61}$$

Les autre éléments de transition s'obtiennement de la même manière.

-Pour le propagateur $K_{12}\left(\alpha_f,\alpha_i,T\right)$on va jusq'à l'ordre $2N$. On a de même

$$\pounds_p(F(0,T)) = \left[\frac{1}{p(p+i\Delta)}\right]^{N+1} \tag{5.62}$$

$$\pounds_p(F_1(0,T)) = \frac{1}{p(p+i\Delta)} \tag{5.63}$$

avec

$$\begin{aligned} K_{12}(\alpha,T) &= (-ig)e^{-\frac{1}{2}(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha_i|^2)}e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+n)!}{k+n-m!}(\alpha_i^*)^{n-m}\frac{(\alpha_f^* e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T}\alpha_i)^k}{k!} \\ &\times\left\{F_1(0,T)+[-\omega_{nm}^2(k)]^N F_0(T)\right\} \end{aligned} \tag{5.64}$$

Prenant la transformation inverse de Laplace qui nous donne

$$F_1(0,T)+[-\omega_{nm}^2(k)]^N F_0(T)=\int_0^\infty e^{-pT}\tilde{F}_1(0,p)+\frac{1}{p(p+i\Delta)}\int_0^\infty e^{-pT}\tilde{F}(0,p)dp \tag{5.65}$$

alors

$$F_1(0,T)+[-\omega_{nm}^2(k)]^N F_0(T)=\frac{1}{p(p+i\Delta)}\int_0^\infty e^{-pT}\sum_{N=0}^{\infty}\left(\left[\frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)}\right]^N\right)dp \tag{5.66}$$

et

$$
\begin{aligned}
F_1(0,T)+[-\omega_{nm}^2(k)]^N F_0(T) &= \int_0^\infty e^{-pT}\frac{1}{p(p+i\Delta)+\omega_{nm}^2(k)}dp \\
&= \int_0^\infty e^{-pT}\frac{1}{(p+\frac{i\Delta}{2})^2+(\left(\sqrt{(\frac{\Delta^2}{4})+\omega_{nm}^2(k)}\right)^2}dp \\
&= \int_0^\infty e^{-pT}\frac{1}{(p+\frac{i\Delta}{2})^2+\frac{\Omega_1^2}{4}}dp \\
&= \frac{2}{\Omega_1}\int_0^\infty e^{-pT}\frac{\frac{\Omega_1}{2}}{(p+\frac{i\Delta}{2})^2+\frac{\Omega_1^2}{4}}dp \\
&= e^{-\frac{i\Delta T}{2}}\left(\frac{\sin(\frac{\Omega_1}{2}T)}{\frac{\Omega_1}{2}}\right)
\end{aligned}
\tag{5.67}
$$

il vient

$$
\begin{aligned}
K_{12}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= (-ig)e^{-\frac{1}{2}(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha_i|^2)}e^{\frac{i}{2}([(m-n)-1]\omega-\Omega)T}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+n)!}{k+n-m!} \\
&\quad (\alpha_i^*)^{n-m}\frac{(\alpha_f^* e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T}\alpha_i)^k}{k!}\left(\frac{\sin(\frac{\Omega_1}{2}T)}{\frac{\Omega_1}{2}}\right)
\end{aligned}
\tag{5.68}
$$

-Pour le propagateur $K_{21}(\alpha_f,\alpha_i,T)$on a

$$
\pounds_p(F(0,T)) = \left[\frac{1}{p(p+i\Delta)}\right]^{N+1} \tag{5.69}
$$

Prenant la transformation inverse de Laplace qui nous donne

$$
F_1(0,T)+[-\omega_{nm}^2(k)]^N F_0(T) = \int_0^\infty e^{-pT}\tilde{F}_1(0,p)+\int_0^\infty e^{-pT}\tilde{F}(0,p)dp \tag{5.70}
$$

alors

$$
F_1(0,T)+[-\omega_{nm}^2(k)]^N F_0(T) = \frac{1}{p(p-i\Delta)}\int_0^\infty e^{-pT}\sum_{N=0}^{\infty}\left(\left[\frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)}\right]^N\right)dp \tag{5.71}
$$

on aura

$$
\begin{aligned}
K_{21}(\alpha,T) &= (ig)\int_0^T ds_1\sum_{k=0}\frac{(k+n)!}{k+n-m!}e^{-\frac{1}{2}(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha_i|^2)} \\
&\quad e^{\frac{-i}{2}[(1-m-n)\omega-\Omega]}(\alpha_f^*)^{n-m}\frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i)^k}{k!}\left(\frac{\sin(\frac{\Omega_1}{2}T)}{\frac{\Omega_1}{2}}\right)
\end{aligned}
\tag{5.72}
$$

-pour le propagateur $K_{22}(\alpha_f,\alpha_i,T)$

Aprés un calcule analogue de $K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T)$ on trouve

$$\pounds_p(F_0(T)) = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{p(p-i\Delta)}\right]^N \tag{5.73}$$

En inversant la transformée de Laplace on aura

$$\begin{aligned} K_{22}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= e^{\frac{i}{2}[(n-m)\omega-1-\Omega]T}\sum_{k=0}\frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i)^k}{k!}e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2+|\alpha i|^2)} \\ &\times\left(\cos(\frac{\Omega_2}{2}T)-\frac{i\Delta}{\Omega_2}\sin(\frac{\Omega_2 T}{2})\right) \end{aligned} \tag{5.74}$$

avec

$$\sqrt{(\Delta + 4\omega_{mn}^2(k)} = \Omega_2 \tag{5.75}$$

### 5.1.3 inversion de population atomique

Définissons la probabilités de transition par

$$P_{rs}(t_f) = \frac{1}{2\pi i}\int d^2\alpha\, |K_{rs}(\alpha_f; t_f; \alpha_i; t_i)|^2 \tag{5.76}$$

avec

$$K_{rs}(\alpha_f; t_f; \alpha_i; t_i) = \langle r\, |K_{rs}(\alpha_f; t_f; \alpha_i; t_i)|\, s\rangle \tag{5.77}$$

pour $K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T)$ on a

$$P_{11}(T) = \frac{1}{2\pi i}\int d^2\alpha\, |K_{11}(\alpha_f; \alpha_i; T)|^2 \tag{5.78}$$

donc

$$\begin{aligned} P_{11}(T) &= \frac{1}{2\pi i}\int d^2\alpha e^{-(|\alpha_f|^2+|\alpha i|^2)}\sum_{k_1,k_2=0}\frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i)^{k_1}}{k_1!}\frac{(\alpha_f e^{-i\omega T}\alpha_i^*)^{k_2}}{k_2!} \\ &\left(\cos(\frac{\Omega_1}{2}T)+\frac{i\Delta}{\Omega_1}\sin(\frac{\Omega_1}{2}T)\right)\left(\cos(\frac{\Omega_1}{2}T)-\frac{i\Delta}{\Omega_1}\sin(\frac{\Omega_1}{2}T)\right) \end{aligned} \tag{5.79}$$

De sorte que

$$\Omega_1 = \sqrt{\Delta^2 + 4\omega_{n,m}(k_1)} \text{ pour le terme } \left(\cos(\frac{\Omega_1}{2}T)+\frac{i\Delta}{\Omega_1}\sin(\frac{\Omega_1}{2}T)\right) \tag{5.80}$$

$$\Omega_1 = \sqrt{\Delta^2 + 4\omega_{n,m}(k_2)} \text{ pour le terme } \left(\cos(\frac{\Omega_1}{2}T) - \frac{i\Delta}{\Omega_1}\sin(\frac{\Omega_1}{2}T)\right) \tag{5.81}$$

Utilisons la propriété (5.11) on trouve

$$\begin{aligned}
P_{11}(T) &= e^{-(|\alpha i|^2)}\sum_{k=0}\frac{\alpha_i)^{2k}}{k!}\left(\cos(\frac{\Omega_1}{2}T)^2 + \frac{\Delta^2}{\Omega_1^2}\sin(\frac{\Omega_1}{2}T)^2\right) \\
&= e^{-(|\alpha i|^2)}\sum_{k=0}\frac{\alpha_i)^{2k}}{k!}\left(\frac{1-\cos(\Omega_1 T)}{2} + \cos(\Omega_1 T) + \frac{\Delta^2}{\Omega_1^2}\sin(\frac{\Omega_1}{2}T)^2\right) \\
P_{11}(T) &= e^{-(|\alpha i|^2)}\sum_{k=0}\frac{\alpha_i)^{2k}}{k!}\left(\cos(\Omega_1 T) + \left(1+\frac{\Delta^2}{\Omega_1^2}\right)\sin(\frac{\Omega_1}{2}T)^2\right)
\end{aligned} \tag{5.82}$$

-pour $K_{12}(\alpha_f;\alpha_i;T)$ on a

$$P_{11}(T) = \frac{1}{2\pi i}\int d^2\alpha\,|K_{11}(\alpha_f;\alpha_i;T)|^2 \tag{5.83}$$

$$\begin{aligned}
P_{12}(T) &= \frac{g^2}{2\pi i}\int d^2\alpha e^{-(|\alpha_f|^2+|\alpha_i|^2)}(\alpha_i^*)^{n-m}\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{(k_1+n)!}{(k_1+n-m)!}\frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i)^{k_1}}{k_1!} \\
&\quad \left(\frac{\sin(\frac{\Omega_1}{2}T)}{\frac{\Omega_1}{2}}\right)\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{(k_2+n)!}{(k_2+n-m)!}(\alpha_i^*)^{n-m}\frac{(\alpha_f e^{i\omega T}\alpha_i^*)^{k_2}}{k_2!}\left(\frac{\sin(\frac{\Omega_1}{2}T)}{\frac{\Omega_1}{2}}\right) \\
&= e^{-(|\alpha_i|^2)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_i\alpha_i^*)^k}{(k+n-m)!}(\alpha_i\alpha_i^*)^{n-m}\left[\omega_{n,m}^2(k)\right]\frac{\sin(\frac{\Omega_1}{2}T)^2}{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2}
\end{aligned} \tag{5.84}$$

En tenant compte que

$$\left[\omega_{n,m}^2(k)\right]\frac{4}{\Omega_1^2} = \frac{4\omega_{n,m}^2(k)}{\Omega_1^2} = \frac{\Omega_1^2-\Delta_1^2}{\Omega_1^2} = \left(1-\frac{\Delta_1^2}{\Omega_1^2}\right) \tag{5.85}$$

on trouve

$$P_{12}(T) = e^{-(|\alpha_i|^2)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\alpha_i|^{2(k+n-m)}}{(k+n-m)!}\left(1-\frac{\Delta_1^2}{\Omega_1^2}\right)\sin(\frac{\Omega_1}{2}T)^2 \tag{5.86}$$

-pour $K_{21}(\alpha_f;\alpha_i;T)$ on a

$$P_{21}(T) = \frac{1}{2\pi i}\int d^2\alpha\,|K_{11}(\alpha_f;\alpha_i;T)|^2 \tag{5.87}$$

alors

$$\begin{aligned}
P_{21}(T) &= \frac{g^2}{2\pi i}\int d^2\alpha e^{-(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha_i|^2)}(\alpha_f^*)^{n-m}\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{(k_1+n)!}{(k_1+n-m)!}\frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i)^{k_1}}{k_1!} \\
&\left(\frac{\sin(\frac{\Omega_1}{2}T)}{\frac{\Omega_1}{2}}\right)\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{(k_2+n)!}{(k_2+n-m)!}(\alpha_f^*)^{n-m}\frac{(\alpha_f e^{i\omega T}\alpha_i^*)^{k_2}}{k_2!}\left(\frac{\sin(\frac{\Omega_1}{2}T)}{\frac{\Omega_1}{2}}\right) \\
&= e^{-(|\alpha_i|^2)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_i\alpha_i^*)^k}{k!}\left[\omega_{n,m}^2(k)\right]\frac{\sin(\frac{\Omega_1}{2}T)^2}{(\frac{\Omega_1}{2})^2}
\end{aligned} \tag{5.88}$$

alors

$$P_{21}(T) = e^{-(|\alpha_i|^2)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\alpha_i|^{2k}}{k!}\left(1-\frac{\Delta_1^2}{\Omega_1^2}\right)\sin(\frac{\Omega_1}{2}T)^2 \tag{5.89}$$

-pour$K_{22}(\alpha_f;\alpha_i;T)$ on a

$$P_{22}(T) = \frac{1}{2\pi i}\int d^2\alpha\,|K_{22}(\alpha_f;\alpha_i;T)|^2 \tag{5.90}$$

$$\begin{aligned}
P_{22}(T) &= \frac{1}{2\pi i}\int d^2\alpha e^{-(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha i|^2)}\sum_{k_1,k_2=0}\frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i)^{k_1}}{k_1!}\frac{(\alpha_f e^{-i\omega T}\alpha_i^*)^{k_2}}{k_2!} \\
&\left(\cos(\frac{\Omega_2}{2}T)+\frac{i\Delta}{\Omega_2}\sin(\frac{\Omega_2}{2}T)\right)\left(\cos(\frac{\Omega_2}{2}T)-\frac{i\Delta}{\Omega_2}\sin(\frac{\Omega_2}{2}T)\right)
\end{aligned} \tag{5.91}$$

Avec la même méthode on trouve la résultats suivante

$$P_{22}(T) = e^{-(|\alpha i|^2)}\sum_{k=0}\frac{\alpha_i)^{2k}}{k!}\left(\cos(\Omega_1 T)+\left(1+\frac{\Delta^2}{\Omega_1^2}\right)\sin(\frac{\Omega_1}{2}T)^2\right) \tag{5.92}$$

En supposant qu'au moment initial, l'atome est dans son état fondamental, l'inversion de la population atomique est définie comme

$$W_1(T) = P_{11}(T) - P_{12}(T) \tag{5.93}$$

Alors

$$W_1(T) = e^{-(|\alpha i|^2)}\sum_{k=0}\frac{(\alpha_i)^{2k}}{k!}\left(\cos(\Omega_1 T)+\frac{2\Delta^2}{\Omega_1^2}\sin(\frac{\Omega_1}{2}T)^2\right) \tag{5.94}$$

Mais si l'atome est dans l'états excité,on a

$$W_2(T) = P_{21}(T) - P_{22}(T) \tag{5.95}$$

Donc

$$W_2(T) = -e^{-(|\alpha i|^2)}\sum_{k=0}\frac{(\alpha_i)^{2k}}{k!}\left(\cos(\Omega_2 T)+\frac{2\Delta^2}{\Omega_2^2}\sin(\frac{\Omega_2}{2}T)^2\right) \tag{5.96}$$

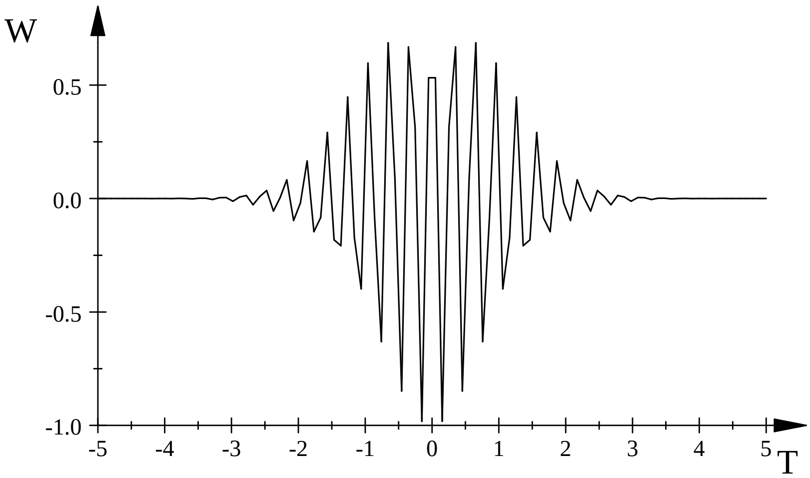


FIG. 5.1 – Population inverse $W_1(T) = y$ dans le cas résonnant . Ici $\alpha_i = 10$

**Cas particulier**

Dans le cas résonnant $n = 1$,$m = 0, \Delta = 0$ on a

$$W_1(T) = e^{-(|\alpha i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i)^{2k}}{k!} \left(\cos(\Omega_1 T)\right) \tag{5.97}$$

$$\Omega_1(k) = \sqrt{(4g^2\,(k+1)}$$

$W_1(T)$ est donné par la figure (5.1)

dans le cas non résonnant $n = 1$,$m = 0, \Delta \neq 0$ on a

$$W_1(T) = e^{-(|\alpha i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i)^{2k}}{k!} \left(\cos(\Omega_1 T)\right) \tag{5.98}$$

$$\Omega_1(k) = \sqrt{4g^2 k\,(k-1)}$$

dans ce cas $W_1(T)$ est donné par la figure (5.2)

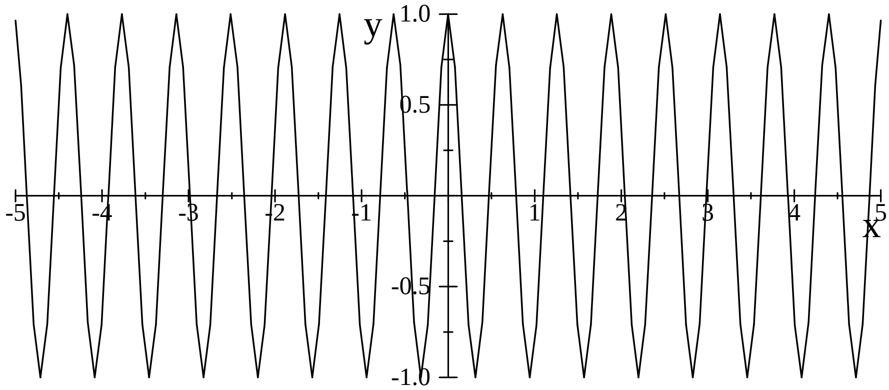


FIG. 5.2 – Population inverse $W_1(T) = y$ dans le cas non- résonnant . Ici $\alpha_i = 10$

## 5.2 Cas composé

Dans ce paragraphe, nous voulons traiter le cas où

$$C_{\grave{m},\grave{n}}(t) = e^{-i\Omega_{m,n}t}\delta_{m,\grave{m}}\delta_{n,\grave{n}} + e^{-i\Omega_{q,p}t}\delta_{q,\grave{m}}\delta_{p,\grave{n}} \tag{5.99}$$

Ce qui veut dire

$$\begin{aligned} F(a,a^+,t) &= e^{-i\Omega_{m,n}t}a^{+m}a^n + e^{-i\Omega_{q,p}t}a^{+q}a^p \\ &= e^{-i\Omega_1 t}a^{+m}a^n + e^{-i\Omega_2 t}a^{+q}a^p \end{aligned} \tag{5.100}$$

### 5.2.1 Intégration sur les variables complexes

Les éléments du propagateur sont donnés dans ce cas par

$$\begin{aligned} K_{11}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= K^+(\alpha_f,\alpha_i,T) + \sum_{N=1}^{\infty}(-ig)^{2N}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\int_0^{s_2}ds_3..\int_0^{s_{2N-1}}ds_{2N} \\ &\times\int\frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i}.......\frac{d\alpha_{2N}d\alpha_{2N}^*}{2\pi i}K^+(\alpha_f,\alpha_1,T-s_1) \\ &F(\alpha_1,s_1)K^-(\alpha_1,\alpha_2,s_1-s_2)F^*(\alpha_2,s_2) \\ &\times.....F^*(\alpha_{2N},s_{2N})K^+(\alpha_{2N},\alpha_i,s_{2N}-0) \end{aligned} \tag{5.101}$$

avec

$$\begin{aligned}
K_{11}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= K^{+}(\alpha_f,\alpha_i,T)+\sum_{N=1}^{\infty}(-ig)^{2N}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\int_0^{s_1}ds_3......\int_0^{s_{2N-1}}ds_{2N}\\
&\times\int\frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i}\frac{d\alpha_2 d\alpha_2^*}{2\pi i}..........\frac{d\alpha_{2N}d\alpha_{2N}^*}{2\pi i}\\
&\times\sum_{\substack{k_1,k_2..\\k_{i=0}}}\frac{\left(\alpha_f^*\alpha_1\right)^{k_1}}{k_1!}e^{-\frac{1}{2}(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha_1|^2)}e^{-i\omega k_1(T-s_1)}e^{[-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(T-s_1)]} \qquad (5.102)\\
&(e^{-i\Omega_1 s_1}\alpha_1^{*m}\alpha_1^{n}+e^{-i\Omega_2 s_1}\alpha_2^{*p}\alpha_2^{q})\frac{(\alpha_1^*\alpha_2)^{k_2}}{k_2!}e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2)}\\
&e^{-i\omega k_2(s_1-s_2)}e^{-\frac{i}{2}(\omega-\omega_0)(s_1-s_2)]}(e^{i\Omega_1 s_2}\alpha_2^{m}\alpha_2^{*n}+e^{i\Omega_2 s_2}\alpha_2^{p}\alpha_2^{*q})....\\
&\times.....(e^{i\Omega_1 s_{2N}}\alpha_{2N}^{m}\alpha_{2N}^{*n}+e^{i\Omega_2 s_{2N}}\alpha_{2N}^{p}\alpha_{2N}^{*q})\frac{(\alpha_{2N}^*\alpha_i)^{k_i}}{k_i!}\\
&e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_{2N}|^2+|\alpha_i|^2)}e^{-i\omega k_i(s_{2N}-0)}e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)(s_{2N+1}-0)} \qquad (5.103)
\end{aligned}$$

Suivant la propriété(5.11) on trouve

$$\begin{aligned}
K_{11}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T}e^{[-\frac{1}{2}(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha_i|^2)}\frac{\left(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i\right)^{k}}{k!}\\
&1+\sum_{N=1}^{\infty}(-ig)^{2N}\left(\int_0^T ds_1\frac{(k+n)!}{k!}e^{-i\Delta_1 s_1}+\int_0^T ds_1\frac{(k+p)!}{k!}e^{-i\Delta_2 s_1}\right)\\
&\left(\int_0^{s_1}ds_2\frac{(k+n)!}{(k+n-m)!}e^{i\Delta_1 s_2}+\int_0^{s_1}ds_2\frac{(k+p)!}{(k+p-q)!}e^{i\Delta_2 s_2}\right) \qquad (5.104)\\
&...\left(\int_0^{s_{2N-2}}ds_{2N-1}\frac{(k+n)!}{k!}e^{-i\Delta s_{2N-1}}+\int_0^{s_{2N-2}}ds_{2N-1}\frac{(k+p)!}{k!}e^{-i\Delta s_{2N-1}}\right)\\
&\left(\int_0^{s_{2N-1}}ds_{2N}\frac{(k+n)!}{(k-n+m)!}e^{i\Delta_1 s_{2N}}+\int_0^{s_{2N-1}}ds_{2N}\frac{(k+p)!}{(k+p-q)!}e^{i\Delta_2 s_{2N}}\right)\Bigg\}
\end{aligned}$$

et avec

$$\begin{aligned}
p-q &= n-m\\
\omega(n-m)-\omega_0+\Omega_1 &= \Delta_1 \qquad (5.105)\\
\omega(p-q)-\omega_0+\Omega_2 &= \Delta_2
\end{aligned}$$

Les autres éléments se calculent de la même manière

-pour $K_{12}(\alpha_f,\alpha_i,T)$

$$
\begin{aligned}
K_{12}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= \{(-ig)\int_0^T ds_1 \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i} K^+(\alpha_f,\alpha_i,T-s_1) \\
&\quad F_1(\alpha_1,s_1)K^-(\alpha_f,\alpha_1,s_1-0) \\
&\quad + \sum_{N=1}^{\infty}(-ig)^{2N+1}\int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_1} ds_3 ...... \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} \\
&\quad \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i} .... \frac{d\alpha_{2N+1} d\alpha_{2N+1}^*}{2\pi i} K^+(\alpha_f,\alpha_1,T-s_1) \\
&\quad F_1(\alpha_1,s_1)K^-(\alpha_1,\alpha_2,s_1-s_2) \\
&\quad F_2^*(\alpha_2,s_2)K^+(\alpha_2,\alpha_3,s_2-s_3)F_3(\alpha_3,s_3)..... \\
&\quad \times .... \times F_{2N}^*(\alpha_{2N},s_{2N})K^+(\alpha_{2N},\alpha_{2N+1},s_{2N}-s_{2N+1}) \\
&\quad F_{2N+1}(\alpha_{2N+1},s_{2N+1})K^-(\alpha_{2N+1},\alpha_i,s_{2N+1}-0)
\end{aligned} \tag{5.106}
$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
K_{12}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= \{(-ig)\int_0^T ds_1 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha_i|^2)}(\alpha_i)^{n-m}\frac{\left(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i\right)^k}{k!} \\
&\left(\frac{(k+n)!}{k+n-m!}e^{-i\Delta_1 s_1}+\frac{(k+p)!}{(k+p-q)!}e^{-i\Delta_2 s_1}\right) \\
&\left\{1+\sum_{N=1}^{\infty}(-ig)^{2N}\int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_1} ds_3 .... \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1}\right. \\
&\left(\frac{(k+n)!}{k+n-m!}e^{i\Delta_1 s_2}+\frac{(k+p)!}{(k+p-q)!}e^{i\Delta_2 s_2}\right)\left(\frac{(k+n)!}{k!}e^{-i\Delta_1 s_3}+\frac{(k+p)!}{k!}e^{-i\Delta_2 s_3}\right).. \\
&..\left(\frac{(k+n)!}{k+n-m!}e^{i\Delta_1 s_{2N}}+\frac{(k+p)!}{(k+p-q)!}e^{i\Delta_2 s_{2N}}\right)\left(\frac{(k+n)!}{k!}e^{-i\Delta_1 s_{2N+1}}+\frac{(k+p)!}{k!}e^{-i\Delta_2 s_{2N+1}}\right)
\end{aligned} \tag{5.10?}
$$

-pour $K_{21}(\alpha_f,\alpha_i,T)$on a

$$
\begin{aligned}
K_{21}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= \{(-ig)\int_0^T ds_1 \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i} K^-(\alpha_f,\alpha_i,T-s_1) \\
& F_1(\alpha_1,s_1)K^+(\alpha_f,\alpha_1,s_1-0) \\
& + \sum_{N=1}^{\infty}(-ig)^{2N+1}\int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_1} ds_3 ...... \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} \\
& \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i} .... \frac{d\alpha_{2N+1} d\alpha_{2N+1}^*}{2\pi i} K^-(\alpha_f,\alpha_1,T-s_1) \\
& F_1^*(\alpha_1,s_1)K^+(\alpha_1,\alpha_2,s_1-s_2) \\
& F_2(\alpha_2,s_2)K^-(\alpha_2,\alpha_3,s_2-s_3)F_3^*(\alpha_3,s_3)... \\
& \times ... \times F_{2N}(\alpha_{2N},s_{2N})K^-(\alpha_f,\alpha_i,s_{2N}-s_{2N+1}) \\
& F_{2N+1}^*(\alpha_{2N+1},s_{2N+1})K^+(\alpha_{2N+1},\alpha_i,s_{2N+1}-0)
\end{aligned} \tag{5.108}
$$

Ou bien la forme suivante

$$
\begin{aligned}
K_{21}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= (-ig)\int_0^T ds_1 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha_i|^2)} e^{-\frac{i}{2}(\omega-\omega_0)T} (\alpha_f)^{n-m} \frac{\left(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i\right)^k}{k!} \\
& \left(\frac{(k+n)!}{k+n-m!} e^{-i\Delta_1 s_1-\omega(n-m)T} + \frac{(k+p)!}{(k+p-q)!} e^{-i\Delta_2 s_1-\omega(p-q)T}\right) \\
& \left\{1+\sum_{N=1}^{\infty}(-ig)^{2N}\int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_1} ds_3 .... \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1}\right. \\
& \left(\frac{(k+n)!}{k!} e^{i\Delta_1 s_2} + \frac{(k+p)!}{k!} e^{i\Delta_2 s_2}\right)\left(\frac{(k+n)!}{(k+n-m)!} e^{-i\Delta_1 s_3} + \frac{(k+p)!}{(k+p-q)!} e^{-i\Delta_2 s_3}\right) ... \\
& \left.\left(\frac{(k+n)!}{k!} e^{i\Delta_1 s_{2N}} + \frac{(k+p)!}{k!} e^{i\Delta_2 s_{2N}}\right)\left[\frac{(k+n)!}{(k+n-m)!} e^{-i\Delta_1 s_{2N+1}} + \frac{(k+p)!}{(k+p-q)!} e^{-i\Delta_2 s_{2N+1}}\right]\right\}
\end{aligned} \tag{5.109}
$$

-Pour $K_{22}(\alpha_f,\alpha_i,T)$ on a

$$
\begin{aligned}
K_{22}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= K^-(\alpha_f,\alpha_i,T) + (ig)^{2N}\int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_1} ds_3 ...... \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\
& \times \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i} .......... \frac{d\alpha_{2N} d\alpha_{2N}^*}{2\pi i} \\
& \times K^-(\alpha_f,\alpha_1,T-s_1) F^*(\alpha_1,s_1) K^+(\alpha_f,\alpha_1,s_1-s_2) \\
& F(\alpha_2,s_2) K^-(\alpha_f,\alpha_1,s_2-s_3) F^*(\alpha_3,s_3) K^+(\alpha_f,\alpha_1,s_3-s_4) ... \\
& .. \times K^-(\alpha_f,\alpha_1,s_{2N-1}-s_{2N}) \; F(\alpha_{2N},s_{2N}) K^+(\alpha_f,\alpha_1,s_{2N}-0)
\end{aligned} \tag{5.110}
$$

Ou bien le résultat suivant

$$\begin{aligned}
K_{22}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T} e^{[-\frac{1}{2}(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha_i|^2)} \frac{\left(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i\right)^k}{k!} \\
&\left\{1+\sum_{N=1}^{\infty}(-ig)^{2N}\left(\int_0^T ds_1 \frac{(k+n)!}{k!} e^{i\Delta_1 s_1} + \int_0^T ds_1 \frac{(k+n)!}{k!} e^{i\Delta_2 s_1}\right)\right. \\
&\left(\int_0^{s_1} ds_2 \frac{(k+n)!}{(k+m-n)!} e^{-i\Delta_1 s_2} + \int_0^{s_1} ds_2 \frac{(k+p)!}{(k+q-p)!} e^{-i\Delta_2 s_2}\right) \\
&....\left(\int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} \frac{(k+n)!}{k!} e^{i\Delta s_{2N-1}} + \int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} \frac{(k+p)!}{k!} e^{i\Delta s_{2N-1}}\right) \\
&\left.\times\left(\int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \frac{(k+n)!}{(k+m-n)!} e^{-i\Delta_1 s_{2N}} + \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \frac{(k+p)!}{(k+q-p)!} e^{-i\Delta_2 s_{2N}}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{5.111}$$

### 5.2.2 Intégration sur le temps

Si $\Delta_1 \neq \Delta_2$ l'intégration sur le temps par la technique de Laplace devient pratiquement infaisable puisque sa recurrence n'est plus évidente. Pour avancer dans les calculs, nous supposons que

$$\Delta_1 = \Delta_2 \tag{5.112}$$

sans oublier que les intégrations complexes ont imposé une selection sur les puissances comme suit

$$n - m = p - q \tag{5.113}$$

Alors les éléments du propagateur s'écrivent sous les formes suivantes

-Pour $K_{11}(\alpha_f,\alpha_i,T)$on a

$$\begin{aligned}
K_{11}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T} e^{[-\frac{1}{2}(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha_i|^2)} \frac{\left(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i\right)^k}{k!} \\
&\left\{1+\sum_{N=1}^{\infty}(-ig)^{2N}\left(\int_0^T ds_1 \frac{(k+n)!}{k!} e^{-i\Delta_1 s_1} + \int_0^T ds_1 \frac{(k+p)!}{k!} e^{-i\Delta_2 s_1}\right)\right. \\
&\left(\int_0^{s_1} ds_2 \frac{(k+n)!}{(k+n-m)!} e^{i\Delta_1 s_2} + \int_0^{s_1} ds_2 \frac{(k+p)!}{(k+p-q)!} e^{i\Delta_2 s_2}\right) \\
&\left(\int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} \frac{(k+n)!}{k!} e^{-i\Delta s_{2N-1}} + \int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} \frac{(k+p)!}{k!} e^{-i\Delta s_{2N-1}}\right) \\
&\left.\left(\int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \frac{(k+n)!}{(k-n+m)!} e^{i\Delta_1 s_{2N}} + \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \frac{(k+p)!}{(k+p-q)!} e^{i\Delta_2 s_{2N}}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{5.114}$$

alors $K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T)$ devient

$$\begin{aligned}
K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T} e^{-\frac{1}{2}\left(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha_i|^2\right)} \frac{\left(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i\right)^k}{k!} \\
&\left\{1 + \sum_{N=1}^{\infty}(-ig)^{2N}\left(\frac{(k+n)!\,(k+p)!}{k!}\right)^N \left(\frac{(k+n)!+(k+p)!}{(k+n-m)!}\right)^N\right. \qquad (5.115)\\
&\left.\int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1}\int_0^{s_1} ds_2 e^{i\Delta s_2}\int_0^{s_1} ds_3 e^{-i\Delta s_3}...\int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N+1} e^{i\Delta s_{2N}}\right\}
\end{aligned}$$

posons

$$\left[g^2\left(\frac{(k+n)!}{k!}+\frac{(k+p)!}{k!}\right)\left(\frac{(k+n)!}{k+n-m!}+\frac{(k+p)!}{(k+p-q)!}\right)\right] = \omega_{np}^2 \qquad (5.116)$$

En tenant compte de

$$p - q = n - m \qquad (5.117)$$

alors

$$\left[g^2\frac{\left((k+n)!+(k+p)!\right)^2}{[k!k+n-m!]}\right] = \omega_{np}^2 \qquad (5.118)$$

Le propagateur $K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T)$ prend la forme

$$\begin{aligned}
K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T} e^{-\frac{1}{2}\left(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha_i|^2\right)} \frac{\left(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i\right)^k}{k!} \\
&\left\{1 + \left(-\omega_{np}^2\right)^N \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1}\int_0^{s_1} ds_2 e^{i\Delta s_2}..\right. \qquad (5.119)\\
&\left.\times\int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} e^{-i\Delta s_{2N-1}}\int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} e^{i\Delta s_{2N}}\right\}
\end{aligned}$$

De même on trouve les autres éléments

$$\begin{aligned}K_{12}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= \{(-ig)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\left|\alpha_f\right|^2+\left|\alpha_i\right|^2\right)} e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T}\,(\alpha_i)^{n-m} \\ &\frac{\left(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i\right)^k}{k!}\left(\frac{(k+n)!+(k+p)!}{k+n-m!}\right) \\ &\left\{\int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1} + \sum_{N=1}^{\infty}\left(-\omega_{np}^2\right)^N \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1}\int_0^{s_1} ds_2 e^{i\Delta s_2}\int_0^{s_1} ds_3 e^{-i\Delta s_3}\right. \\ &\left.\times......\int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1}e^{-i\Delta s_{2N-1}}\int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N+1}e^{i\Delta s_{2N}}\int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1}e^{-i\Delta s_{2N+1}}\right\}\end{aligned} \tag{5.120}$$

$$\begin{aligned}K_{21}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= (-ig)e^{-\frac{1}{2}\left(\left|\alpha_f\right|^2+\left|\alpha_i\right|^2\right)}\int_0^T ds_1 e^{i\Delta s_1} e^{-\frac{i}{2}(\omega-\omega_0)T-i\omega(n-m)T} \\ &\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(k+n)!+(k+p)!}{(k+n-m)!}\right)(\alpha_f)^{n-m}\,\frac{\left(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i\right)^k}{k!} \\ &\left\{1+\left(-\omega_{np}^2\right)^N\int_0^T ds_1 e^{i\Delta s_1}\int_0^{s_1} ds_2 e^{-i\Delta s_2}\int_0^{s_1} ds_3 e^{i\Delta s_3}\right. \\ &\left.\times......\int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1}e^{i\Delta s_{2N}}\int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N+1}e^{-i\Delta s_{2N}}\int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1}e^{i\Delta s_{2N+1}}\right\}\end{aligned} \tag{5.121}$$

$$\begin{aligned}K_{22}(\alpha_f,\alpha_i,T) &= e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T} e^{-\frac{1}{2}\left(\left|\alpha_f\right|^2+\left|\alpha_i\right|^2\right)}\frac{\left(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i\right)^k}{k!} \\ &\left\{1+\sum_{N=1}^{\infty}\left(-\omega_{mq}^2\right)^N\int_0^T ds_1 e^{i\Delta s_1}\int_0^{s_1} ds_2 e^{-i\Delta s_2}..\right. \\ &\left.\int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1}e^{i\Delta s_{2N-1}}\int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N}e^{-i\Delta s_{2N}}\right\}\end{aligned} \tag{5.122}$$

Avec

$$\left[g^2\frac{\left((k+m)!+(k+q)!\right)^2}{k!\,(k+m-n)!}\right]=\omega_{mq}^2 \tag{5.123}$$

Nous remarquons que l'intégration sur le temps dans cette partie est équivalent à celle de (5.1.2) du cas simple ; c'est à dire le calcul par la méthode de Laplace déjà appliquée, il suffit de retrouver les résultats.

Comme d'habitude nous écrirons notre résultas sous la forme d'un produit de convolution qui s'arrange comme

$$\begin{aligned}\pounds_p(F_0(T)) &= \pounds_{p+i\Delta}(F_0(T)) \\ \pounds_p(F_0(T)) &= \pounds_{p+i\Delta}\left(\int_0^T ds_1 e^{i\Delta s_1} F_1(s_1)\right)\end{aligned} \tag{5.124}$$

En utilisants alors la théorème de convolution on aura

$$\pounds_p(F_0(T)) = \frac{1}{p}\pounds_{p+i\Delta} F_1(s_1) \tag{5.125}$$

avec

$$\begin{aligned}F_0(T) &= \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1}\int_0^{s_1} ds_2 e^{i\Delta s_2}\int_0^{s_2} ds_3 e^{-i\Delta s_3}.... \\ &\times \int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} e^{-i\Delta s_{2N-1}}\int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} e^{i\Delta s_{2N}}\int_0^{s_{2N}} ds_{2N} e^{-i\Delta s_{2N+1}}\end{aligned} \tag{5.126}$$

En tenant compte du fait que la transformation de Laplace de $F_0(T)$ est

$$\begin{aligned}\pounds_p(F_0(T)) &= \frac{1}{p}\left[\frac{1}{p\,(p+i\Delta)}\right]^N \text{ à l'ordre } 2N-1 \\ \pounds_p(F_0(T)) &= \left[\frac{1}{(p+i\Delta)}\right]^{N+1} \text{ à l'ordre } 2N\end{aligned} \tag{5.127}$$

Puis prenons l'inverse de la transformée de Laplace pour obtenir les résulats suivants

-Pour $K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T)$ on trouve

$$\begin{aligned}K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= e^{\frac{i}{2}([(m-n)-1]\omega-\Omega)T}\sum_{k=0}\frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i)^k}{k!}e^{-\frac{1}{2}(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha i|^2)} \\ &\left(\cos(\frac{\Omega_3}{2}T)+\frac{i\Delta}{\Omega_3}\sin(\frac{\Omega_3}{2}T)\right)\end{aligned} \tag{5.128}$$

avec

$$\Omega_2 = \sqrt{(\Delta + 4\omega_{pn}^2(k)} \tag{5.129}$$

-Pour $K_{12}(\alpha_f, \alpha_i, T)$ on trouve

$$\begin{aligned}K_{12}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= \{(-ig)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha_i|^2)}e^{\frac{i}{2}([(m-n)-1]\omega-\Omega)T}\,(\alpha_i)^{n-m}\,\frac{\left(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i\right)^k}{k!} \\ &e^{\frac{-i}{2}[(1-m-n)\omega-\Omega]}\left(\frac{(k+n)!+(k+p)!}{(k+n-m)!}\right)\left(\frac{\sin(\frac{\Omega_3}{2}T)}{\frac{\Omega_3}{2}}\right)\end{aligned} \tag{5.130}$$

-Pour $K_{21}(\alpha_f, \alpha_i, T)$ on trouve

$$\begin{aligned} K_{21}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= \{(-ig)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha_i|^2)} e^{-\frac{i}{2}(\omega-\omega_0)T}\,(\alpha_f)^{n-m}\,\frac{\left(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i\right)^k}{k!} \\ & \left(\frac{(k+n)!+(k+p)!}{(k+n-m)!}\right)\left(\frac{\sin(\frac{\Omega_3}{2}T)}{\frac{\Omega_3}{2}}\right) \end{aligned} \tag{5.131}$$

-Pour $K_{22}(\alpha_f, \alpha_i, T)$ on trouve

$$\begin{aligned} K_{22}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= e^{\frac{i}{2}([(m-n)-1]\omega+\Omega)T}\sum_{k=0}\frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i)^k}{k!} e^{-\frac{1}{2}(\left|\alpha_f\right|^2+|\alpha i|^2)} \\ & \left(\cos(\frac{\Omega_4}{2}T)+\frac{i\Delta}{\Omega_4}\sin(\frac{\Omega_4}{2}T)\right) \end{aligned} \tag{5.132}$$

Avec

$$\Omega_4 = \sqrt{(\Delta + 4\omega_{qm}^2(k)} \tag{5.133}$$

### 5.2.3 Inversion de population atomique

Par un calcul identique de section (5.2.3) et en utilisant la propriété (5.11) on trouve les probabilités de chaque élément de transition .

-Pour $K_{11}(\alpha_f; \alpha_i; T)$on a

$$P_{11}(T) = \frac{1}{2\pi i}\int d^2\alpha \left|K_{11}(\alpha_f; \alpha_i; T)\right|^2 \tag{5.134}$$

Alors

$$P_{11}(T) = e^{-(|\alpha i|^2)}\sum_{k=0}\frac{\alpha_i)^{2k}}{k!}\left(\cos(\Omega_3 T) + \left(1+\frac{\Delta^2}{\Omega_3^2}\right)\sin(\frac{\Omega_3}{2}T)^2\right)$$

-Pour $K_{12}(\alpha_f; \alpha_i; T)$ on a

$$P_{12}(T) = \frac{1}{2\pi i}\int d^2\alpha \left|K_{12}(\alpha_f; \alpha_i; T)\right|^2 \tag{5.135}$$

$$\begin{aligned}
P_{12}(T) &= \frac{1}{2\pi i}\int d^2\alpha e^{-(|\alpha_f|^2+|\alpha_i|^2)}(\alpha_i^*)^{n-m}\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{(k_1+n)!+(k_1+p)!}{(k_1+n-m)!}\right)\frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T}\alpha_i)^{k_1}}{k_1!} \\
&\left(\frac{\sin(\frac{\Omega_3}{2}T)}{\frac{\Omega_3}{2}}\right)\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{(k_2+n)!+(k_2+p)!}{(k+n-m)!}\right)(\alpha_i)^{n-m}\frac{(\alpha_f e^{i\omega T}\alpha_i^*)^{k_2}}{k_2!}\left(\frac{\sin(\frac{\Omega_3}{2}T)}{\frac{\Omega_3}{2}}\right) \\
&= e^{-(\alpha_i^2)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_i\alpha_i^*)^k}{(k+n-m)!}(\alpha_i\alpha_i^*)^{2(n-m)}\left[\omega_{n,p}^2(k)\right]\frac{\sin(\frac{\Omega_3}{2}T)^2}{\left(\frac{\Omega_3}{2}\right)^2} \qquad (5.136)
\end{aligned}$$

On trouve

$$P_{12}(T) = e^{-(|\alpha_i|^2)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\alpha_i|^{2(k+n-m)}}{(k+n-m)!}\sin(\frac{\Omega_3}{2}T)^2\left(1-\frac{\Delta^2}{\Omega_3^2}\right) \qquad (5.137)$$

Pour $K_{21}(\alpha_f;\alpha_i;T)$ on a

$$P_{21}(T) = \frac{1}{2\pi i}\int d^2\alpha\,|K_{21}(\alpha_f;\alpha_i;T)|^2 \qquad (5.138)$$

Il vient

$$P_{21}(T) = e^{-(|\alpha_i|^2)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\alpha_i|^{2k}}{k!}\left(1-\frac{\Delta^2}{\Omega_3^2}\right)\sin(\frac{\Omega_3}{2}T)^2 \qquad (5.139)$$

-Pour$K_{22}(\alpha_f;\alpha_i;T)$ on a

$$P_{22}(T) = \frac{1}{2\pi i}\int d^2\alpha\,|K_{22}(\alpha_f;\alpha_i;T)|^2 \qquad (5.140)$$

Par un calcule direct on obtient

$$P_{22}(T) = e^{-(|\alpha i|^2)}\sum_{k=0}\frac{\alpha_i)^{2k}}{k!}\left(\cos(\Omega_4 T)+\left(1+\frac{\Delta^2}{\Omega_4^2}\right)\sin(\frac{\Omega_4}{2}T)^2\right) \qquad (5.141)$$

L'inversion de population atomique est définie comme

$$W_1(T) = P_{11}(T) - P_{12}(T) \qquad (5.142)$$

Et donc

$$W_1(T) = e^{-(|\alpha i|^2)}\sum_{k=0}\frac{(\alpha_i)^{2k}}{k!}\left(\cos(\Omega_3 T)+\frac{2\Delta^2}{\Omega_3^2}\sin(\frac{\Omega_3}{2}T)^2\right) \qquad (5.143)$$

Si l'atome est dans l'états excité

$$W_2(T) = P_{21}(T) - P_{22}(T) \qquad (5.144)$$

alors

$$W_2(T) = -e^{-(|\alpha i|^2)} \sum_{k=0} \frac{(\alpha_i)^{2k}}{k!} \left( \cos(\Omega_4 T) + \frac{2\Delta^2}{\Omega_4^2} \sin(\frac{\Omega_4}{2} T)^2 \right) \tag{5.145}$$

**Cas particulier**

Dans le cas résonnant $n = 1, p = 1, m = 0, q = 0, \Delta = 0$ on a

$$W_1(T) = e^{-(|\alpha i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i)^{2k}}{k!} (\cos(\Omega_3 T)) \tag{5.146}$$

$$\Omega_3(k) = \sqrt{\left( \frac{2g^2}{k+1} \right)}$$

$W_1(T)$ est donné par la figure (5.3)

Dans le cas non résonnant $n = 2, p = 2, m = 0, q = 0, \Delta \neq 0$ on a

$$W_1(T) = e^{-(|\alpha i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i)^{2k}}{k!} (\cos(\Omega_3 T)) \tag{5.147}$$

$$\Omega_3(k) = \sqrt{\Delta + \frac{2g^2}{(k+1)(k+2)}}$$

$W_1(T)$ est donné par la figure (5.4)

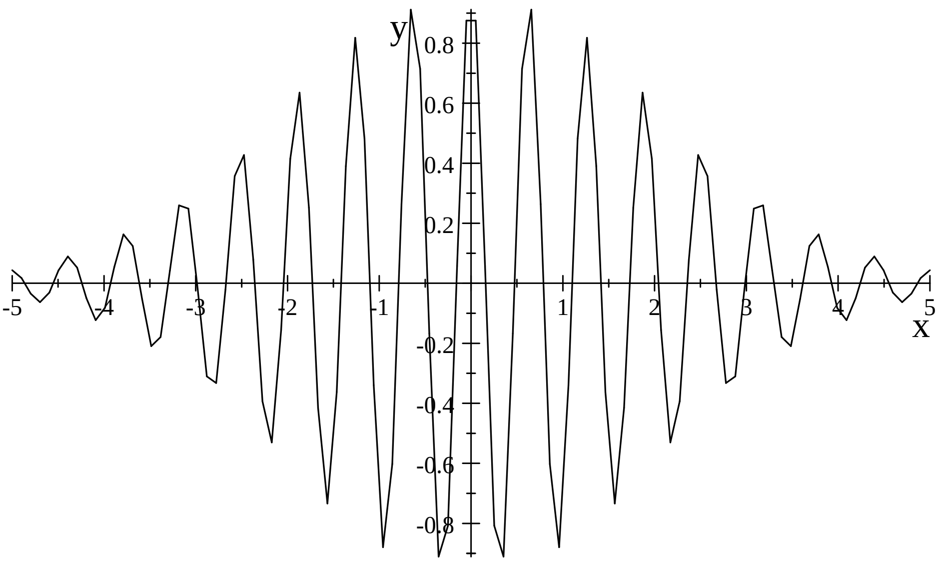


FIG. 5.3 – Population inverse $W_1(T) = y$ dans le cas résonnant. Ici $\alpha_i = 10$

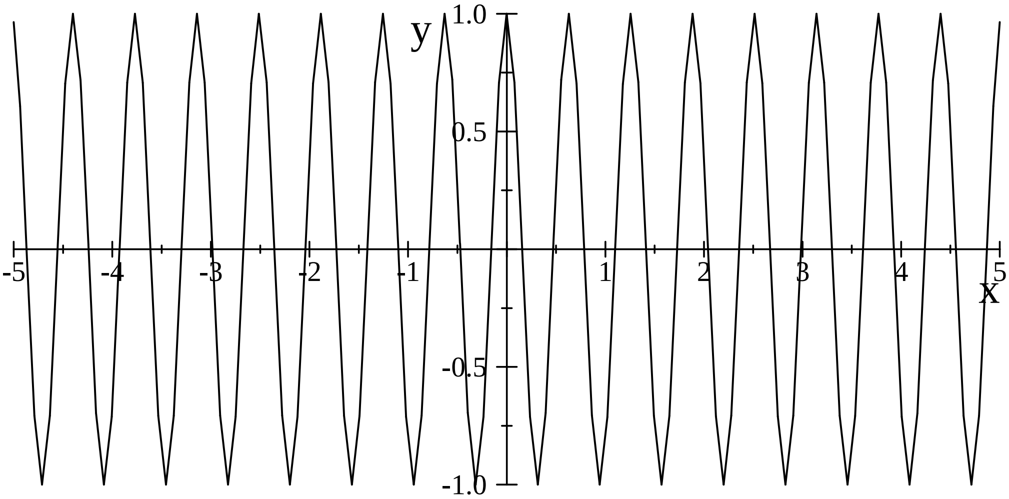


FIG. 5.4 – Population inverse $W_1(T) = y$ dans le cas non- résonnant. Ici $\alpha_i = 10$