

# Intrication en variables continues

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>B</b>	<b>Formalisme mathématique</b> . . . . .	<b>26</b>
B.1	Système à $N$ modes . . . . .	26
B.2	Système Gaussien à $N$ modes : matrice de covariance . . . . .	26
B.3	Transformations symplectiques . . . . .	29
B.4	Valeurs propres symplectiques . . . . .	32
B.5	Résumé . . . . .	34
<b>C</b>	<b>Quantification de l'information contenue dans un état Gaussien</b> .	<b>35</b>
C.1	Pureté . . . . .	35
C.2	Entropie linéaire . . . . .	36
C.3	Entropie de von Neumann . . . . .	36
<b>D</b>	<b>Intrication des états Gaussiens bipartitionnés</b> . . . . .	<b>37</b>
D.1	Position du problème . . . . .	37
D.2	Intrication des états purs . . . . .	38
D.3	Intrication des mélanges statistiques d'états . . . . .	38
D.4	Séparabilité des états Gaussiens . . . . .	39
D.5	Quantification de l'intrication pour les états Gaussiens bipartitionnés .	43
<b>E</b>	<b>Cas particulier des états Gaussiens à 2 modes</b> . . . . .	<b>46</b>
E.1	Écriture symplectique d'un état Gaussien à 2 modes . . . . .	46
E.2	Intrication Gaussienne à 2 modes . . . . .	47
E.3	Information et intrication extrême . . . . .	50
<b>F</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>52</b>

---

## A Introduction

La revue présentée dans ce chapitre a pour but de reprendre en termes familiers à la communauté expérimentale les résultats marquants dégagés par les théoriciens ces dernières années. Elle est essentiellement basée sur les articles [Laurat *et al.*, 2005b] et [Adesso et Illuminati, 2007]. Jusqu'à présent, nous avons considéré des états quelconques du champ électromagnétique. Cependant, caractériser l'intrication pour des états quelconques est un problème non encore résolu ; par contre, un certain nombre de questions sont élucidées en ce qui concerne les états Gaussiens, qui sont aussi les états les plus utilisés expérimentalement (ce sont ceux qui seront manipulés au cours de

cette thèse). Nous allons donc essentiellement nous restreindre au problème des états Gaussiens.

## B Formalisme mathématique

### B.1 Système à $N$ modes

Un système en variables continues de  $N$  modes bosoniques est décrit par l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = \bigotimes_{k=1}^N \mathcal{H}_k$ , produit tensoriel des espaces de Fock de dimension infinie  $\mathcal{H}_k$ , chacun associé à un des  $N$  modes. Dans notre cas, les modes sont ceux du champ électromagnétique. Pour chaque mode  $k$ , on peut définir – comme on l'a fait au paragraphe 1.B – les opérateurs d'annihilation  $\hat{a}_k$  et de création  $\hat{a}_k^\dagger$  d'un photon, ainsi que les opérateurs de quadrature  $\hat{P}_k$  et  $\hat{Q}_k$ . On regroupe ces opérateurs dans le vecteur colonne :

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{Q}_1 \\ \vdots \\ \hat{P}_N \\ \hat{Q}_N \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

L'espace dans lequel évolue ce vecteur  $\hat{R}$  est appelé l'espace des phases.

Cette notation permet une écriture synthétique des relations de commutation entre les opérateurs de phase et de quadrature :

$$\forall (\ell, m) \in \llbracket 1..2N \rrbracket \quad [\hat{R}_\ell, \hat{R}_m] = 2i \Omega_{\ell m} \quad (2.2)$$

où  $\Omega$  est la forme symplectique :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \bigoplus_{k=1}^N \omega, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Ces définitions sont valables pour tout système à  $N$  modes. Nous allons à présent nous intéresser aux systèmes Gaussiens à  $N$  modes.

### B.2 Système Gaussien à $N$ modes : matrice de covariance

L'ensemble des états Gaussiens est l'ensemble des états dont certaines des fonctions caractéristiques dans l'espace des phases (et en particulier la fonction de Wigner<sup>1</sup> par

1. Nous ne développerons pas ici ce qu'est la fonction de Wigner, le lecteur pourra se référer à [Scully et Zubairy, 1997]. Citons cependant le théorème de Hudson-Piquet : seuls les états purs Gaussiens ont une fonction de Wigner positive partout [Schleich, 2001].

exemple) sont Gaussiennes. Parmi ces états, on trouve les états cohérents, les états comprimés, et les états “thermiques” [London, 1983]. Ils sont donc de première importance pour l’optique quantique en variables continues.

Une des propriétés fondamentales d’un état Gaussien (de matrice densité  $\rho$ ) est qu’il est complètement caractérisé par les premiers et les seconds moments des opérateurs de quadrature. Par conséquent, pour connaître  $\rho$ , il suffit de connaître le vecteur de ses premiers moments :  $\langle \hat{R} \rangle = (\langle \hat{P}_1 \rangle, \langle \hat{Q}_1 \rangle, \dots, \langle \hat{P}_N \rangle, \langle \hat{Q}_N \rangle)$  et sa matrice de covariance  $\sigma$  définie par :

$$\begin{aligned} \forall (\ell, m) \in \llbracket 1..2N \rrbracket \quad \sigma_{lm} &= \frac{1}{2} \langle \hat{R}_\ell \hat{R}_m + \hat{R}_m \hat{R}_\ell \rangle - \langle \hat{R}_\ell \rangle \langle \hat{R}_m \rangle \\ &= \langle \hat{R}_\ell \hat{R}_m \rangle_S - \langle \hat{R}_\ell \rangle \langle \hat{R}_m \rangle \end{aligned} \quad (2.4)$$

On peut toujours modifier les valeurs moyennes grâce à des opérations locales<sup>2</sup> unitaires (des déplacements dans l’espace des phases). Une telle opération laisse invariante les propriétés relatives à l’entropie, l’intrication, ... On peut donc prendre les valeurs moyennes nulles sans perdre la généralité de notre étude. Lorsqu’on prend les valeurs moyennes nulles, la matrice de covariance se réduit à la matrice des corrélations symétrisées entre les quadratures du champ. On peut d’ailleurs l’écrire sous la forme d’une matrice composée de blocs  $2 \times 2$  :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & \varepsilon_{1,2} & \dots & \dots & \varepsilon_{1,N} \\ {}^t\varepsilon_{1,2} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \varepsilon_{N-1,N} \\ {}^t\varepsilon_{1,N} & \dots & \dots & {}^t\varepsilon_{N-1,N} & \sigma_N \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

où les blocs diagonaux  $\sigma_k$  sont les matrices de covariance individuelles de chaque mode, et les blocs non diagonaux  $\varepsilon_{i,j}$  sont les matrices de corrélations symétrisées entre les modes  $i$  et  $j$  ( $(i, j) \in \llbracket 1..N \rrbracket$ ) :

$$\sigma_k = \begin{pmatrix} \langle (\hat{P}_k)^2 \rangle & \langle \hat{P}_k \hat{Q}_k \rangle_S \\ \langle \hat{P}_k \hat{Q}_k \rangle_S & \langle (\hat{Q}_k)^2 \rangle \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{i,j} = \begin{pmatrix} \langle \hat{P}_i \hat{P}_j \rangle_S & \langle \hat{P}_i \hat{Q}_j \rangle_S \\ \langle \hat{Q}_i \hat{P}_j \rangle_S & \langle \hat{Q}_i \hat{Q}_j \rangle_S \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Nous allons voir tout au long de ce chapitre qu’on peut réécrire toutes les propriétés de l’état  $\rho$  en fonction de sa matrice de covariance  $\sigma$ .

---

2. Il est important de ne pas confondre le terme *local*, tel qu’il sera employé tout au long de cette thèse pour des opérations agissant seulement sur l’un des modes du système, avec la notion de *localité* définie par Einstein, Podolsky et Rosen [Einstein *et al.*, 1935].

### a) Fonction de Wigner

La fonction de Wigner d'un état Gaussien s'écrit :

$$W(R) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} R \sigma^{-1} {}^t R\right)}{\pi \sqrt{\text{Det}(\sigma)}} \quad (2.7)$$

où  $R$  désigne le vecteur réel de l'espace des phases :  $R = (p_1, q_1, \dots, p_N, q_N)$ . Ainsi, bien que l'espace de Hilbert associé soit de dimension infinie, la description complète (aux opérations locales unitaires près) d'un état Gaussien arbitraire est donnée par une matrice  $2N \times 2N$ .

### b) Condition pour un état physique

Si tous les états Gaussiens peuvent être représentés par une matrice de covariance, la réciproque n'est pas vraie : toute matrice de covariance ne représente pas un état physique.

En effet, la matrice densité associée  $\rho$  doit être semi-définie positive. Cette contrainte, associée aux relations de commutation (2.2), équivaut à la condition [Simon *et al.*, 1987, Simon *et al.*, 1994] :

$$\sigma + i\Omega \geq 0 \quad (2.8)$$

où une matrice est semi-définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles. Cette inégalité<sup>3</sup> est l'expression, en termes de matrice de covariance, de l'inégalité de Heisenberg (1.6) [Serafini, 2006]. Il est intéressant de noter que l'équation (2.8) implique que  $\sigma \geq 0$ .

### c) Lien avec l'énergie

Les éléments diagonaux de la matrice de covariance peuvent être exprimés comme des énergies à condition de les multiplier par  $\hbar\omega_k$  (où  $\omega_k$  est la pulsation du mode  $k$  considéré). Ce sont en effet, au facteur  $\hbar\omega_k$  près, les valeurs moyennes des termes du Hamiltonien<sup>4</sup> :  $\langle \hat{P}_k^2 \rangle$  et  $\langle \hat{Q}_k^2 \rangle$ . Ainsi, on peut montrer que  $\text{Tr}(\sigma)$  est reliée à l'énergie moyenne de l'état<sup>5</sup>.

3. Dans le cas des états Gaussiens, cette inégalité est une condition nécessaire et suffisante pour que l'état soit physique. Pour les états non Gaussiens, si cette condition n'est plus suffisante, elle demeure nécessaire.

4. Pour un champ n'interagissant pas avec l'environnement, le Hamiltonien s'écrit :  $\sum_{k=1}^N \hbar\omega_k \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right)$ ,

avec  $\hat{a}_k = \frac{1}{2}(\hat{P}_k + i\hat{Q}_k)$

5. Il s'agit de l'énergie moyenne de l'état dont les valeurs moyennes  $\langle \hat{R}_k \rangle$  sont nulles, qui est bien entendu différente de celle de l'état de départ !

### B.3 Transformations symplectiques

#### a) Définition

Dans l'espace de Hilbert, les opérations unitaires jouent un rôle particulier vis-à-vis des états Gaussiens car elles préservent leur caractère Gaussien. Les plus simples et les plus courantes sont celles qui correspondent aux termes au plus quadratiques (par rapport aux opérateurs du champ) du Hamiltonien. Chacune de ces opérations unitaires agissant sur l'espace de Hilbert correspond à une transformation symplectique, agissant sur l'espace des phases.

Une transformation  $S$  est dite "symplectique" si elle est linéaire et qu'elle préserve la forme symplectique  $\Omega$  (cf. équation (2.3)) :

$${}^t S \Omega S = \Omega \quad (2.9)$$

Cette définition impose  $\text{Det}(S) = 1$  pour toute transformation symplectique  $S$ . L'équation (2.9) revient à dire que la transformation doit préserver les relations de commutation entre les opérateurs  $\hat{P}$  et  $\hat{Q}$  (cf. Fig. 2.1).

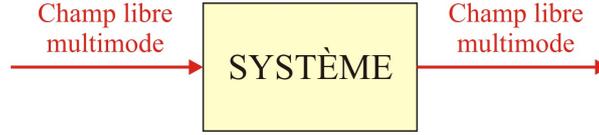


Fig. 2.1: Conservation des relations de commutations par les opérations symplectiques décrivant le système considéré : un champ libre à  $N$  modes entre dans le système ; le champ à  $N$  qui en sort est également un champ libre.

On peut également déduire immédiatement de cette définition (en multipliant à gauche par  $({}^t S)^{-1}$  et à droite par  $S^{-1}$ ) que si une transformation  $S$  est symplectique, son inverse  $S^{-1}$  est elle aussi symplectique.

Les transformations symplectiques agissant sur l'espace des phases de dimension  $2N$  forment le groupe symplectique réel  $Sp(2N, \mathbb{R})$ . Leur action sur le vecteur  $\hat{R}$  est linéaire, de sorte qu'elles agissent sur les matrices de covariance sous la forme :

$$\sigma \mapsto \sigma' = S \sigma {}^t S \quad (2.10)$$

Avant d'exposer les propriétés générales des transformations symplectiques, nous allons détailler l'expression des plus importantes d'entre elles : compression de bruit à 1 et à 2 modes, lame séparatrice, déphasage.

#### b) Compression de bruit à 1 mode

Dans l'espace de Hilbert de dimension  $N$ , on va s'intéresser à l'opérateur unitaire correspondant à la compression de bruit pour l'état du champ dans le mode  $k$ , avec un

facteur de compression  $r$  :

$$\hat{U}_k^{sq}(r) = \exp \left[ \frac{r}{2} \left( (\hat{a}_k^\dagger)^2 - (\hat{a}_k)^2 \right) \right] \quad (2.11)$$

Sa représentation symplectique est la transformation correspondante dans l'espace des phases, agissant sur le mode  $k$ . Il s'agit de la transformation "compression de bruit à 1 mode" :

$$S_k^{sq}(r) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

### c) Déphasage

Dans l'espace de Hilbert, le déphasage de l'état du champ dans le mode  $k$  par un angle  $\theta$  se traduit par :  $\hat{a}_k \rightarrow \hat{a}'_k = e^{i\theta} \hat{a}_k$ . Soit, pour les quadratures, une matrice unitaire de transformation :

$$U_k^{deph}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

La représentation symplectique correspondante est [Serafini et Adesso, 2007] :

$$S_k^{deph}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

On peut montrer que toutes les transformations symplectiques à 1 mode s'écrivent comme des combinaisons linéaires de 2 rotations (orthogonales) à 1 mode dans l'espace des phases et d'une compression de bruit à 1 mode. Cette décomposition est la décomposition d'Euler [Serafini et Adesso, 2007]. La transformation la plus générale à 1 mode s'écrit donc :

$$S_{loc,1}(\theta, \theta', r) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta' & \sin \theta' \\ -\sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

### d) Intrication entre 2 modes

Cette opération est très importante, car l'état intriqué à 2 modes<sup>6</sup> est l'état généré par un oscillateur paramétrique optique de type II. L'état EPR est un état intriqué à 2 modes avec un facteur d'intrication<sup>7</sup>  $r \rightarrow \infty$ .

6. On parle également d'"état comprimé à 2 modes", du fait de l'analogie entre l'opérateur  $\hat{U}_{i,j}^{intric}(r)$  et l'opérateur  $\hat{U}_k^{sq}(r)$ .

7. L'état EPR, qui suppose une (double) compression de bruit infinie, est un état non normalisable et donc non physique. Cependant, il est très bien approximé par des états comprimés à 2 modes avec une grande compression de bruit.

Dans l'espace de Hilbert, l'état intriqué à 2 modes  $i$  et  $j$  est l'état

$$|\psi^{intric}(r)\rangle_{i,j} = \left[ \hat{U}_{i,j}^{intric}(r) \right] (|0\rangle_i \otimes |0\rangle_j) \quad (2.16)$$

généralisé par l'action sur le vide de l'opérateur à 2 modes :

$$\hat{U}_{i,j}^{intric}(r) = \exp \left[ \frac{r}{2} \left( \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_i \hat{a}_j \right) \right] \quad (2.17)$$

L'état intriqué à 2 modes  $|\psi^{sq2}(r)\rangle_{i,j}$  présente ainsi des corrélations d'intensité et des anti-corrélations de phase (*cf.* §1.E.2a)). Lorsqu'il s'agit d'un état Gaussien, sa matrice de covariance s'écrit :

$$\sigma_{i,j}^{intric}(r) = \begin{pmatrix} \text{ch}(2r) & 0 & \text{sh}(2r) & 0 \\ 0 & \text{ch}(2r) & 0 & -\text{sh}(2r) \\ \text{sh}(2r) & 0 & \text{ch}(2r) & 0 \\ 0 & -\text{sh}(2r) & 0 & \text{ch}(2r) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Cet état est généré par l'action sur la matrice de covariance du vide (1) de la transformation symplectique "intrication à 2 modes" :

$$S_{i,j}^{intric}(r) = \begin{pmatrix} \text{ch}(r) & 0 & \text{sh}(r) & 0 \\ 0 & \text{ch}(r) & 0 & -\text{sh}(r) \\ \text{sh}(r) & 0 & \text{ch}(r) & 0 \\ 0 & -\text{sh}(r) & 0 & \text{ch}(r) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

### e) lame séparatrice

Cette opération permet de mélanger deux modes  $i$  et  $j$  avec des poids déterminés par la transmission  $T$  de la lame. On peut écrire son action sur les opérateurs du champ :

$$\hat{U}_{i,j}^{bs}(T) : \begin{cases} \hat{a}_i & \rightarrow \hat{a}_i \sqrt{T} + \hat{a}_j \sqrt{1-T} \\ \hat{a}_j & \rightarrow \hat{a}_i \sqrt{1-T} - \hat{a}_j \sqrt{T} \end{cases} \quad (2.20)$$

Il est intéressant de poser  $\theta = \arccos(\sqrt{T})$  :

$$\hat{U}_{i,j}^{bs}(\theta) : \begin{cases} \hat{a}_i & \rightarrow \hat{a}_i \cos(\theta) + \hat{a}_j \sin(\theta) \\ \hat{a}_j & \rightarrow \hat{a}_i \sin(\theta) - \hat{a}_j \cos(\theta) \end{cases} \quad (2.21)$$

On peut alors écrire la matrice de transformation symplectique associée, et on constate que l'opération "lame séparatrice" équivaut à une rotation à 2 modes dans l'espace des phases d'angle  $\theta$  :

$$S_{i,j}^{bs}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 0 & -\cos(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & 0 & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

## f) Propriétés générales des transformations symplectiques

Toutes les transformations symplectiques dans l'espace des phases sont générées par l'exponentiation de matrices pouvant s'écrire  $J\Omega$ , où  $\Omega$  est la forme symplectique (cf. équation (2.3)), et  $J$  est anti-symétrique [Arvind *et al.*, 1995a]. Ces générateurs  $J\Omega$  sont soit symétriques, soit anti-symétriques.

Les opérations du type “lame séparatrice” (cf. équation (2.22)) ou “déphasage” (cf. équation (2.14)) sont générées par des opérateurs anti-symétriques, de sorte qu'elles sont orthogonales<sup>8</sup>. Comme elles agissent par congruence sur la matrice de covariance  $\sigma$ , elles préservent  $\text{Tr}(\sigma)$ . Or  $\text{Tr}(\sigma)$  donne la contribution des seconds moments à la moyenne du Hamiltonien  $\bigoplus_{k=1}^N \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$  (cf. §B.2c), de sorte que de telles transformations conservent l'énergie. Elles sont dites “passives”.

À l'inverse, les opérations telles que la compression de bruit à 1 ou 2 mode(s) (cf. équations (2.12)(2.19)) ont des générateurs symétriques. Elles ne sont donc pas orthogonales et ne préservent pas la trace. Ces transformations optiques qui ne conservent pas l'énergie sont dites “actives” [Wolf *et al.*, 2003].

Les transformations symplectiques locales (*i.e.* agissant sur individuellement sur les modes) appartiennent au groupe  $(Sp(2, \mathbb{R}))^{\oplus N}$ . Par conséquent, les déterminants de chacune des sous-matrices  $2 \times 2$  (correspondant à un mode  $k$ ) d'une matrice de covariance à  $N$  modes sont invariants par les transformations symplectiques locales. Cette propriété mathématique est le reflet d'une propriété physique : ni la quantité d'information<sup>9</sup>, ni les corrélations entre les modes du système ne peuvent être modifiées par des opérations locales (nous aborderons de nouveau cette propriété, mais cette fois d'un point de vue expérimental, au §5.C.2c)).

Enfin, une dernière propriété très importante est que toute transformation symplectique peut être décomposée en produit de transformations à 2 modes. On peut donc se limiter à l'étude de ces dernières [Huang et Agarwal, 1994].

## B.4 Valeurs propres symplectiques

### a) Diagonalisation symplectique

Parmi toutes les transformations symplectiques pouvant agir sur la matrice de covariance  $\sigma$  d'un système donné, il en est une qui revêt une importance particulière : celle qui diagonalise la matrice de covariance<sup>10</sup>. Le théorème de Williamson [Williamson, 1936]

8. Ces transformations sont celles qui appartiennent au sous-groupe compact maximal de  $Sp(2N, \mathbb{R})$ .

9. L'information est ici définie comme en théorie de l'information, c'est-à-dire par l'entropie, que nous aborderons plus loin.

10. Cette diagonalisation symplectique doit être bien distinguée de la diagonalisation usuelle avec des matrices orthogonale.

affirme que cette diagonalisation est toujours possible pour la matrice de covariance d'un état Gaussien à  $N$  modes : elle peut toujours être écrite sous la forme dite "forme normale de Williamson" ou "forme diagonale" :

$$\sigma = {}^t S \nu S \quad (2.23)$$

où  $S \in Sp(2N, \mathbb{R})$  et  $\nu$  est la matrice de covariance :

$$\nu = \bigoplus_{k=1}^N \begin{pmatrix} \nu_k & 0 \\ 0 & \nu_k \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Cette matrice de covariance correspond à un état à  $N$  modes totalement décorrélés, avec une matrice densité diagonale  $\rho^\otimes$  :

$$\rho^\otimes = \bigotimes_{k=1}^N \frac{2}{\nu_k + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \nu_k - 1 \\ \nu_k + 1 \end{pmatrix} |n\rangle_k \langle n| \quad (2.25)$$

où  $|n\rangle_k$  est l'état nombre d'ordre  $n$  dans l'espace de Fock  $\mathcal{H}_k$ .

Les  $N$  réels  $\nu_k$  constituent le spectre symplectique de la matrice de covariance  $\sigma$ . Elles sont invariantes sous l'action de transformations symplectiques *globales* (et non plus seulement locales) sur la matrice  $\sigma$ . On peut montrer que ce sont les valeurs propres orthogonales ("ordinaires") de la matrice<sup>11</sup>  $|\iota\Omega\sigma|$  [Serafini, 2004]. Les valeurs propres symplectiques sont donc déterminées par  $N$  invariants (par exemple les coefficients du polynôme caractéristique de  $|\iota\Omega\sigma|$ ) [Serafini, 2006].

Le plus simple des invariants symplectiques est le déterminant de la matrice de covariance (il est invariant car  $\forall S \in Sp(2N, \mathbb{R}) \text{ Det}(S) = 1$ ). En utilisant la forme diagonale de Williamson, on a immédiatement la valeur de cet invariant :

$$\text{Det}(\sigma) = \prod_{k=1}^N \nu_k^2 \quad (2.26)$$

Cet invariant est directement relié à la pureté de l'état (*cf.* équation (2.35)).

Un autre invariant symplectique important est donné par la quantité appelée "séralien" et notée  $\Delta$  [Adesso *et al.*, 2005], définie comme la somme des déterminants de toutes les sous-matrices  $2 \times 2$  de la matrice de covariance  $\sigma$ . Pour démontrer que le séralien est un invariant [Serafini, 2006], on utilise le fait qu'il est invariant dans le cas où  $N = 2$  [Serafini *et al.*, 2004], et la décomposition de toute transformation symplectique en produit de transformations à 2 modes (*cf.* §B.3f). Le séralien peut être exprimé en fonction des valeurs propres symplectiques :

$$\Delta(\sigma) = \sum_{k=1}^N \nu_k^2 \quad (2.27)$$

11. Par définition, si on a une matrice  $M = P D P^{-1}$  avec  $D$  diagonale, la valeur absolue de  $M$  est la matrice  $|M| = P |D| P^{-1}$  où  $|D|$  est la matrice diagonale des modules des valeurs propres de  $M$ .

### b) Inégalité de Heisenberg et pureté

L'intérêt des valeurs propres symplectiques est qu'elles donnent accès à certaines informations sur l'état Gaussien  $\sigma$ . Ainsi, l'inégalité de Heisenberg (2.8) peut être réécrite en termes de valeurs propres symplectiques. En effet, en utilisant le fait que l'inverse d'une transformation symplectique est également symplectique et conserve donc la matrice  $\Omega$  (cf. §B.3a)), et la définition (2.23), on peut montrer que la relation (2.8) est équivalente à :

$$\nu + i\Omega \geq 0 \quad (2.28)$$

que l'on peut immédiatement réécrire en fonction des valeurs propres symplectiques<sup>12</sup> :

$$\forall k \in \llbracket 1..N \rrbracket \quad \nu_k \geq 1 \quad (2.29)$$

Si on note  $\nu_-$  la plus petite des valeurs propres symplectique, et  $\nu_+$  la plus grande, l'inégalité de Heisenberg se réduit à  $\nu_- \geq 1$ . On constate que l'inégalité n'est saturée que pour les états Gaussiens purs, pour lesquels :

$$\forall k \in \llbracket 1..N \rrbracket \quad \nu_k = 1 \quad (2.30)$$

ce qui signifie, en d'autres termes, que la forme normale de Williamson de tout état pur Gaussien est l'état fondamental de l'espace de Hilbert à  $N$  modes  $\mathcal{H}$ .

On peut également s'intéresser à la catégorie de mélanges statistiques d'états vérifiant :

$$\exists k_0 \in \llbracket 1..N \rrbracket \quad \begin{cases} 1 \leq k \leq k_0 & \nu_k = 1 \\ k_0 < k \leq N & \nu_k > 1 \end{cases} \quad (2.31)$$

Ces états neaturent que partiellement l'inégalité de Heisenberg, le degré de saturation diminuant avec  $k_0$ . Ils peuvent cependant être qualifiés de "mélanges statistiques d'états de moindre incertitude", en ce sens que les opérateurs de quadratures des modes  $k \leq k_0$ aturent l'inégalité de Heisenberg, tandis que seuls les  $N - k_0$  autres modes contiennent du bruit additionnel, responsable du taux mélange global de l'état.

On peut ainsi définir le "rang symplectique"  $\aleph$  de la matrice de covariance  $\sigma$  comme le nombre de ses valeurs propres symplectiques différentes de 1 (soit  $\aleph = N - k_0$ ).  $\aleph$  est donc le nombre de modes de l'état dont la forme normale de Williamson n'est pas le vide [Adesso, 2006]. Un état Gaussien est pur si et seulement si  $\aleph = 0$ . On peut faire l'analogie entre cette définition et celle du rang<sup>13</sup> des matrices densité de dimension finie. En effet, seuls les états purs ont un rang 1, les mélanges statistiques d'états ayant un rang plus élevé.

## B.5 Résumé

Le tableau 2.1 résume la comparaison qui a été faite tout au long de cette section entre l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et l'espace des phases  $\Gamma$ , dans le cas d'états Gaussiens.

12. Il est utile de garder à l'esprit que cette relation n'est équivalente à la relation (2.8) que si  $\sigma \geq 0$ .

13. Le rang d'une matrice est défini comme le nombre de ses valeurs propres non nulles.

Tab. 2.1: Comparaison entre l'espace des états et l'espace des phases pour des états Gaussiens. Les deux premières lignes s'appliquent aussi aux états non Gaussiens. Ce tableau inclut la définition de la pureté en fonctions des valeurs propres symplectiques, que nous verrons dans la section suivante.

	Espace de Hilbert $\mathcal{H}$	Espace des phases $\Gamma$
Dimension	$\infty$	$2N$
Structure	$\otimes$	$\oplus$
Description de l'état	Matrice densité $\rho$	Matrice de covariance $\sigma$
État physique	$\rho \geq 0$	$\sigma + i\Omega \geq 0$
Opérations sur les états	$U$ telle que $U^\dagger U = \mathbb{1}$ $\rho \mapsto U \rho U^\dagger$	$S$ telle que ${}^t S \Omega S = \Omega$ $\sigma \mapsto S \sigma {}^t S$
Spectre	$U \rho U^\dagger = \text{diag}\{\lambda_k\}$ $0 \leq \lambda_k \leq 1$	$S \sigma {}^t S = \text{diag}\{\nu_k\}$ $1 \leq \nu_k < \infty$
États purs	$\exists i$ tel que $\lambda_i = 1, \lambda_{k \neq i} = 0$	$\forall k \in [1..N] \nu_k = 1$
Pureté	$\text{Tr}(\rho^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2$	$\frac{1}{\sqrt{\text{Det}(\sigma)}} = \prod_{k=1}^N \nu_k^{-1}$

## C Quantification de l'information contenue dans un état Gaussien

Le degré d'information contenu dans un état quantique correspond à la connaissance que nous avons *a priori* du résultat de n'importe quelle mesure effectuée sur l'état [Peres, 1993]. Nous allons dans la suite détailler quelques unes des mesures possibles pour des états quelconques  $\rho$ , et leur expression "Gaussienne" [Adesso *et al.*, 2004b].

### C.1 Pureté

Étant donnée la définition que nous venons de donner de la quantité d'information contenue dans un système, la mesure la plus simple de cette quantité est la pureté. En effet, la caractéristique d'un état pur est qu'on peut reconstituer la façon dont il a été préparé, ce qui permet effectivement de prédire le résultat des mesures effectuées sur le système. La pureté d'un état  $\rho$ , dont nous allons dans ce paragraphe rappeler quelques propriétés, est définie par :

$$\mu(\rho) = \text{Tr}(\rho^2) \quad (2.32)$$

Dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimension finie  $D$ , on a :

$$\frac{1}{D} \leq \mu \leq 1 \quad (2.33)$$

de sorte qu'en variables continues (où  $D \rightarrow \infty$ ), la pureté minimale (qui correspond à un état le plus mélangé possible) tend vers 0.

Considérons un système bipartitionné (décrit par l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ ) dans l'état  $\rho$ . On note  $\rho_i = \text{Tr}_i(\rho)$ . La trace d'un produit étant égale au produit des traces, la pureté est une quantité multiplicative sur les états produits :

$$\mu(\rho_1 \otimes \rho_2) = \mu(\rho_1) \cdot \mu(\rho_2) \quad (2.34)$$

La pureté est invariante sous les opérations unitaires<sup>14</sup>. Dans le cas des états Gaussiens, ceci signifie que la pureté est uniquement fonction des valeurs propres symplectiques  $\nu_k$ . Son expression est d'ailleurs très simple :

$$\mu(\rho) = \frac{1}{\prod_{k=1}^N \nu_k} = \frac{1}{\sqrt{\text{Det}(\sigma)}} \quad (2.35)$$

## C.2 Entropie linéaire

En théorie de l'information, l'habitude est de quantifier le désordre – à l'aide de l'entropie – plutôt que l'ordre – qui est caractérisé par la pureté. En conséquence, on définit l'"impureté", ou "entropie linéaire" :

$$S_L(\rho) = \frac{D}{D-1}(1 - \mu) \quad (2.36)$$

ce qui se simplifie, dans le cas des variables continues – et donc aussi des états Gaussiens – pour lesquelles  $D \rightarrow \infty$  :

$$S_L(\rho) = 1 - \mu \quad (2.37)$$

L'entropie linéaire est comprise entre 0 et 1 (1 pour les états totalement mélangés en variables continues). Cette grandeur permet de quantifier de façon simple l'information quantique contenue dans le système.

## C.3 Entropie de von Neumann

Pour quantifier l'information quantique contenue dans le système, on utilise cependant plus couramment l'équivalent quantique de l'entropie de Shannon [Shannon, 1948] : l'entropie de von Neumann, dont nous allons aborder quelques propriétés. Cette quantité peut également être vue comme une limite des entropies généralisées ; elle est définie par :

$$S_V(\rho) = -\text{Tr} [\rho \log_2(\rho)] \quad (2.38)$$

14. Il est possible de définir d'autres puretés dites "généralisées" [Bhatia, 1996, Bastiaans, 1984, Tsallis, 1988], qui elles aussi sont invariantes.

où le logarithme est défini comme la somme de la série entière correspondante.

L'entropie de von Neumann est sous-additive [Wehrl, 1978] :

$$S_V(\rho) \leq S_V(\rho_1) + S_V(\rho_2) \quad (2.39)$$

Cette inégalité n'est saturée (*i.e.* l'entropie de von Neumann n'est additive) que pour les états produits  $\rho^{\otimes} = \rho_1 \otimes \rho_2$ .

L'entropie de von Neumann diverge pour les états totalement mélangés en variables continues.

Pour les états Gaussiens, on peut à nouveau exprimer cette entropie en fonction des valeurs propres symplectiques [Agarwal, 1971, Holevo *et al.*, 1999, Serafini *et al.*, 2004] :

$$S_V(\rho) = \sum_{k=1}^N f(\nu_k) \quad (2.40)$$

où

$$f(x) \equiv \frac{x+1}{2} \log_2 \left( \frac{x+1}{2} \right) - \frac{x-1}{2} \log_2 \left( \frac{x-1}{2} \right) \quad (2.41)$$

Dans le cas d'un état Gaussien à 1 mode, le spectre symplectique, qui n'est constitué que de  $\{\nu_1\}$ , est entièrement déterminé par l'invariant symplectique  $\text{Det}(\sigma) = \nu_1^2$ . De sorte que toutes les entropies ne sont – dans le cas  $N = 1$  – que des fonctions croissantes de  $\text{Det}(\sigma)$ , et elles induisent toutes le même classement sur les états Gaussiens à 1 mode.

Ceci n'est pas vrai dans le cas multimode, même pour  $N = 2$ . [Adesso *et al.*, 2004b]

## D Intrication des états Gaussiens bipartitionnés

### D.1 Position du problème

En présence d'un système quantique bi- ou multipartitionné, la simple question “*Y a-t-il des corrélations quantiques au sein de ce système ?*” se révèle d'une extraordinaire complexité [Heiss, 2003, Audenaert et Plenio, 2006, Serafini *et al.*, 2005].

Une façon simple de comprendre cette question est de dire qu'un système contient des corrélations quantiques si les observables associées aux différents sous-systèmes sont corrélées de telle sorte qu'on ne puisse reproduire ces corrélations par des moyens purement classiques. Ceci signifie que ces corrélations sont liées à de l'“inséparabilité”, ou à une “non-factorisabilité”.

On va voir que le problème se pose surtout pour les mélanges statistiques d'états. En effet, un mélange statistique d'états peut être préparé de plusieurs façons différentes

(en général une infinité). Or si on ne peut pas reconstituer la préparation d'un état, il est évidemment compliqué de savoir si les corrélations qu'il contient ont été produites par des moyens classiques ou quantiques. De ce fait, il n'existe pas de critère général (applicable) permettant de discriminer corrélations classiques et corrélations quantiques pour un mélange statistique d'états.

## D.2 Intrication des états purs

Il est communément admis que l'intrication d'un état pur bipartitionné  $|\psi\rangle$  est quantifiée par le taux de mélange de chacun de ses sous-systèmes. En effet, si un sous-système présente un taux de mélange non nul, c'est qu'il fait partie d'un système plus large, dont il n'est pas indépendant.

Le taux de mélange est caractérisé par l'«entropie d'intrication»  $E_V(|\psi\rangle)$ , qui est définie comme l'entropie de von Neumann (*cf.* équation (2.38)) des matrices densité réduites<sup>15</sup> [Bennett *et al.*, 1996a] :

$$E_V(|\psi\rangle) = S_V(\rho_1) = S_V(\rho_2) \quad (2.42)$$

Parmi les propriétés de l'entropie d'intrication, on peut noter que par définition elle est invariante par les opérations locales unitaires :

$$E_V\left(\left[\hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2\right]|\psi\rangle\right) = E_V(|\psi\rangle) \quad (2.43)$$

On peut aussi montrer que  $E_V(|\psi\rangle)$  ne peut augmenter sous l'action d'opérations locales et de communications classiques (LOCC) [Popescu et Rohrlich, 1997] : c'est une caractéristique essentielle de toute mesure d'intrication, qui reflète le fait qu'on ne peut créer<sup>16</sup> de l'intrication avec les seules LOCC [Vedral *et al.*, 1997, Vidal, 2000].

## D.3 Intrication des mélanges statistiques d'états

On peut décomposer un mélange statistique d'états en une combinaison linéaire convexe d'états purs :

$$\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \quad \text{avec} \quad \sum_k p_k = 1 \quad (2.44)$$

Cette décomposition indique comment préparer l'état  $\rho$  : il faut préparer l'état  $|\psi_1\rangle$  avec une probabilité  $p_1$ , l'état  $|\psi_2\rangle$  avec une probabilité  $p_2$ , *etc.* Malheureusement, comme déjà mentionné au §D.1, cette décomposition n'est pas unique. On ne peut donc pas savoir immédiatement si les corrélations sont dues à des LOCC ou non. Cependant, il

<sup>15</sup>. La matrice densité réduite au sous-système 1 d'un état  $\rho$  est la trace partielle de  $\rho$  sur le sous-système 2 :  $\rho_1 = \text{Tr}_2(\rho)$  [Basdevant et Dalibard, 2001].

<sup>16</sup>. L'intrication ne peut augmenter *en moyenne* ; il est possible, avec une certaine probabilité, d'augmenter la quantité d'intrication uniquement avec des LOCC : c'est la distillation d'intrication [Bennett *et al.*, 1996b, Gisin, 1996, Bennett *et al.*, 1996c].

est clair que s'il existe un moyen de préparer l'état  $\rho$  avec uniquement des LOCC, l'état peut être défini comme séparable. À l'inverse, si parmi toutes les préparations possibles, aucune n'utilise que des LOCC, alors l'état est intriqué [Werner, 1989].

Le problème de ce critère est évidemment le fait qu'il est inapplicable ! C'est pourquoi d'autres critères ont été développés pour détecter l'intrication dans les mélanges statistiques d'états quantiques [Lewenstein *et al.*, 2000a, Bruß, 2002, Leuchs et Beth, 2003]. Nous allons développer quelques uns d'entre eux, particulièrement intéressants pour les états Gaussiens.

## D.4 Séparabilité des états Gaussiens

### a) Critère PPT

L'un des critères d'inséparabilité les plus puissants à l'heure actuelle est le critère de Peres-Horodecki. Le principe de ce critère est d'utiliser l'opération de "transposition partielle" de la matrice densité d'un système bipartitionné. La transposée partielle de  $\rho$  consiste à ne transposer  $\rho$  que vis-à-vis des degrés de liberté d'un seul des deux sous-systèmes. Peres a montré que, si l'état  $\rho$  est séparable, alors sa transposée partielle (par exemple vis-à-vis du sous-système 1)  ${}^{t_1}\rho$  est une matrice densité physique ; en particulier elle est semi-définie positive ( ${}^{t_1}\rho \geq 0$ ) – et de même pour  ${}^{t_2}\rho$ . Ainsi, la positivité de la matrice transposée partielle ("Positivity of the Partial Transpose", ou "PPT" en anglais, qui sera appelée par la suite "propriété PPT") est une condition nécessaire de séparabilité [Peres, 1996].

La réciproque est en général fautive, mais elle a été démontrée dans certains cas pour des systèmes de faible dimension, en particulier des systèmes bipartitionnés avec des espaces de Hilbert de dimension  $2 \times 2$  et  $2 \times 3$ <sup>17</sup>. Pour ces systèmes, la propriété PPT est équivalente à la séparabilité [Horodecki *et al.*, 1996]. Pour des produits tensoriels de dimensions plus importantes, l'existence d'états qui à la fois vérifient la propriété PPT et sont intriqués a été démontrée [Horodecki, 1997]. De tels états sont dits "intriqués-liés" ("bound entangled" en anglais) car leur intrication ne peut être distillée pour obtenir des états maximales intriqués [Horodecki *et al.*, 1998]. Notons finalement que l'existence d'états intriqués-liés avec une transposée partielle négative a été conjecturée [Dür *et al.*, 2000, DiVincenzo *et al.*, 2000], mais jamais démontrée jusqu'à présent [Krüger et Werner, web].

Simon a généralisé récemment le critère de Peres aux variables continues [Simon, 2000]. Il a montré que l'opération de transposition partielle peut être interprétée géométriquement comme un renversement du temps (vis-à-vis de l'opérateur  $\hat{Q}$ ). Considérons ainsi la matrice de covariance d'un système bipartitionné  $\sigma_{AB}$  où le sous-système  $\mathcal{S}_A$  contient  $N_A$  modes et le sous-système  $\mathcal{S}_B$  contient  $N_B$  modes. La transposée partielle de  $\sigma_{AB}$  est

<sup>17</sup>. Dans le cas de systèmes bipartitionnés, on parlera d'espaces de dimension  $l \times m$ , où  $l$  est la dimension associée au premier sous-système, et  $m$  celle associée au second.

la matrice :

$$\tilde{\sigma}_{AB} = \Theta_{AB} \sigma_{AB} \Theta_{AB} \quad (2.45)$$

où

$$\Theta_{AB} = \left( \begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}^{2N_A} & (0) \\ \vdots & \\ (0) & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \hline & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (0) \\ & \vdots & \\ (0) & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{2N_B} \end{array} \right) \quad (2.46)$$

Simon a également montré que la réciproque du critère de Peres est vraie pour les états Gaussiens à  $1 \times N$  modes<sup>18</sup> [Simon, 2000, Duan *et al.*, 2000, Werner et Wolf, 2001]. Ainsi, un état Gaussien  $\sigma_{AB}$  avec  $N_A = 1$  et  $N_B$  arbitraire est un état séparable si et seulement si la matrice transposée partielle  $\tilde{\sigma}_{AB}$  est une matrice physique, qui satisfait l'inégalité (2.8) :

$$\tilde{\sigma}_{AB} + \iota \Omega \geq 0 \quad (2.47)$$

Pour des états Gaussiens bipartitionnés avec  $N_A > 1$ , le critère PPT est seulement une condition nécessaire de séparabilité (et donc sa contraposée est une condition suffisante d'inséparabilité). D'ailleurs, la réciproque du critère de Peres est déjà violée dans le cas  $N_A = N_B = 2$ , pour lequel l'existence d'états intriqués-liés a été prouvée [Werner et Wolf, 2001].

On peut exprimer le critère PPT en termes de valeurs propres symplectiques de la transposée partielle de la matrice de covariance. En effet, la transposée partielle  $\tilde{\sigma}$  de la matrice de covariance  $\sigma$  d'un état Gaussien quelconque à  $N$  modes est encore une matrice symétrique et positive. Par conséquent, elle admet une décomposition de Williamson (*cf.* équation (2.23)) [Williamson, 1936]. Cette décomposition s'écrit :

$$\tilde{\sigma} = {}^t S \tilde{\nu} S \quad (2.48)$$

18. Ceci a également été montré récemment pour les états Gaussiens  $M \times N$  bisymétriques (c'est-à-dire des états invariants par permutation des modes au sein de chacun des sous-systèmes), mais nous ne détaillerons pas cet aspect ici. Le lecteur pourra se référer à [Serafini *et al.*, 2005].

où  $S \in Sp(2N, \mathbb{R})$  et  $\tilde{\nu}$  est la matrice de covariance :

$$\tilde{\nu} = \bigoplus_{k=1}^N \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_k & 0 \\ 0 & \tilde{\nu}_k \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Les  $N$  quantités  $\tilde{\nu}_k$  sont les valeurs propres symplectiques de la matrice transposée partielle  $\tilde{\sigma}$ . On a déjà vu (*cf.* §B.4 et C) que le spectre symplectique  $\{\nu_k\}$  de  $\sigma$  contient les propriétés structurelles de l'état Gaussien, ainsi que celles liées à la quantité d'information contenue dans l'état. On voit ici que le spectre symplectique  $\{\tilde{\nu}_k\}$  de la transposée partielle  $\tilde{\sigma}$  caractérise de façon qualitative (et parfois même quantitative, comme on le verra au §D.5b)) l'intrication contenue dans le système. En effet, on peut réécrire le critère de Peres sous la forme :

$$\forall k \in \llbracket 1..N \rrbracket \quad \tilde{\nu}_k \geq 1 \quad (2.50)$$

voire, si on ordonne les  $\tilde{\nu}_k$  dans l'ordre croissant et qu'on note  $\tilde{\nu}_-$  la plus petite :

$$\tilde{\nu}_- \geq 1 \quad (2.51)$$

Ainsi, un état Gaussien pour lequel  $\tilde{\nu}_- < 1$  est intriqué.

Quant au problème de pouvoir distiller l'intrication d'un état Gaussien, il a été résolu de façon très générale [Werner et Wolf, 2001] : on peut distiller avec des LOCC (non Gaussiennes! [Eisert *et al.*, 2002a, Fiurášek, 2002, Giedke et Cirac, 2002]) l'intrication de tout état Gaussien ne vérifiant pas le critère PPT.

Le tableau 2.2 résume les différentes conditions qui ont été revues ici pour qu'un état soit physique ou séparable.

Tab. 2.2: Comparaison entre les conditions d'existence et les conditions de séparabilité d'un état Gaussien. La condition de séparabilité est celle du critère PPT : il est vrai pour tous les états séparables, et il est équivalent à la séparabilité pour les états  $1 \times N$  et les états bisymétriques  $M \times N$ .

	État physique	État séparable
Matrice densité	$\rho \geq 0$	${}^t_A \rho \geq 0$
Matrice de covariance	$\sigma + \imath \Omega \geq 0$	$\tilde{\sigma} + \imath \Omega \geq 0$
Spectre symplectique	$\forall k \quad \nu_k \geq 1$	$\forall k \quad \tilde{\nu}_k \geq 1$

## b) Autres critères de séparabilité

Nous allons évoquer dans cette partie d'autres critères, qui sont utilisés, en particulier quand on ne peut mesurer la totalité de la matrice de covariance.

## CRITÈRE DE SOMME DIRECTE

Pour un système Gaussien bipartitionné  $N_A \times N_B$  quelconque, l'état  $\sigma$  est séparable si et seulement si il existe un couple de matrices de covariance  $\sigma_A$  relative au sous-système  $\mathcal{S}_A$  et  $\sigma_B$  relative au sous-système  $\mathcal{S}_B$  tel que [Werner et Wolf, 2001] :

$$\sigma \geq \sigma_A \oplus \sigma_B \quad (2.52)$$

Ce critère, attrayant du fait de l'équivalence, est malheureusement peu utile en pratique : il impose de tester tous les couples  $\{\sigma_A, \sigma_B\}$  possibles !

## CRITÈRE OPÉRATIONNEL

[Giedke *et al.*, 2001] introduisent une application non-linéaire qui, itérée sur la matrice  $\sigma$ , permet de déterminer la séparabilité de tous les états Gaussiens bipartitionnés. Ce critère est totalement indépendant du critère PPT, il est aussi plus puissant, mais moins pratique.

## TÉMOINS D'INTRICATION

Soit  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  le sous-ensemble convexe et compact des états séparables. On considère les opérateurs Hermitiens  $\hat{V}$  tels que pour tout état  $\rho \in \mathcal{D}$  on a  $\text{Tr}(\hat{V} \rho) \geq 0$ . Un état  $\rho' \in \mathcal{H}$  est intriqué si et seulement si parmi tous ces opérateurs  $\hat{V}$ , il existe un opérateur  $\hat{V}_0$  tel que  $\text{Tr}(\hat{V}_0 \rho) < 0$  [Horodecki *et al.*, 1996, Terhal, 2000]. L'opérateur  $\hat{V}_0$  est le *témoin*, qui permet de détecter l'intrication de l'état  $\rho$ .

D'après le théorème de Hahn-Banach, l'ensemble  $\mathcal{D}$  étant convexe et compact, pour tout état  $\rho' \notin \mathcal{D}$ , il existe un hyperplan qui sépare  $\rho'$  et  $\mathcal{D}$  (*cf.* Fig. 2.2). Un témoin d'intrication  $\hat{V}_0$  est dit "optimal" lorsque l'hyperplan qu'il induit (correspondant à la frontière  $\text{Tr}(\hat{V}_0 \rho) = 0$ ) est tangent à l'ensemble  $\mathcal{D}$  [Lewenstein *et al.*, 2000b]. Il est possible de détecter plus finement la séparabilité à l'aide de témoins d'intrication non linéaires, "courbés" vers  $\mathcal{D}$ <sup>19</sup> [Gühne et Lutkenhaus, 2006].

[Hyllus et Eisert, 2006] est une étude exhaustive des témoins d'intrication linéaires et non-linéaires pour les variables continues. Elle peut être utilisée aussi bien pour les états bipartitionnés que multipartitionnés.

## CRITÈRES D'ORIGINE EXPÉRIMENTALE

En sus des critères d'origine théorique mentionnés plus haut, il existe un certain nombre de critères qui ont été développés pour les besoins d'expériences spécifiques. On a déjà abordé de tels critères au §E.2c). Ils sont basés sur la violation d'inégalités sur les variances de combinaisons des opérateurs canoniques, et sont valables à 2 modes [Duan *et al.*, 2000] ou à  $N$  modes [van Loock et Furusawa, 2003].

19. Une bonne illustration de l'intérêt des témoins d'intrication non-linéaires est donnée par la comparaison du critère simplifié de Duan-Simon et du critère de Mancini dans le cas d'un état à 2 modes, au §1E.2c).

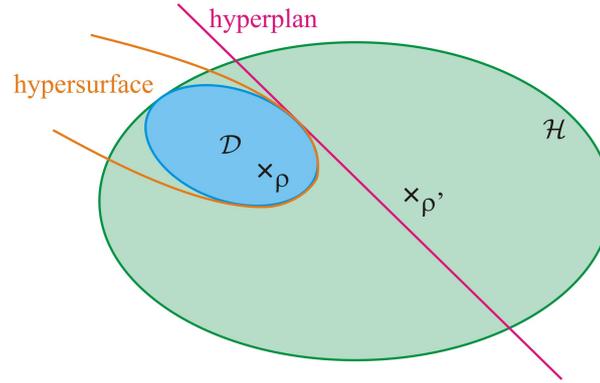


Fig. 2.2: Illustration du théorème de Hahn-Banach pour les témoins d'intrication, avec un témoin linéaire optimal (hyperplan) et un témoin non-linéaire optimal (hypersurface).

## D.5 Quantification de l'intrication pour les états Gaussiens bipartitionnés

Un critère d'intrication permet de discriminer les états intriqués des états séparables, mais ne donne en aucun cas une quantification de l'intrication ; ni un éventuel classement des états selon la quantité d'intrication qu'ils renferment.

Dans le but d'aboutir à un tel classement, de nombreux auteurs se sont attachés à rechercher une “mesure d'intrication”, c'est-à-dire une application :

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \rho &\mapsto \mathfrak{E}(\rho) \end{aligned} \tag{2.53}$$

à laquelle on impose qu'elle vérifie certaines propriétés [Christandl et Winter, 2004, Bennett *et al.*, 1996c] :

- $\mathfrak{E}$  est une fonction continue sur  $\mathcal{H}$
- $\mathfrak{E}$  est une fonction convexe sur  $\mathcal{H}$
- $\mathfrak{E}(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho$  est séparable.
- $\mathfrak{E}(\rho)$  est conservée sous l'action d'opérations unitaires locales.
- $\mathfrak{E}(\rho)$  n'augmente pas sous l'action de LOCC :  $\mathfrak{E}[\text{LOCC}(\rho)] \leq \mathfrak{E}(\rho)$
- $\mathfrak{E}$  est additive pour des systèmes indépendants :  $\mathfrak{E}(\rho_1 \otimes \rho_2) = \mathfrak{E}(\rho_1) + \mathfrak{E}(\rho_2)$

Cette question ne peut être considérée comme complètement résolue à l'heure actuelle. Il existe un grand nombre de mesures d'intrication, qui diffèrent par les contextes pour lesquels elles ont été élaborées, et par les caractérisations de l'intrication dont elles découlent. D'ailleurs, elles ne débouchent pas toutes sur le même classement des états intriqués. On pourra trouver quelques exemples dans les références [Bruß, 2002, Horodecki *et al.*, 2001, Horodecki *et al.*, 2007, Plenio et Virmani, 2007, Christandl, 2006]. Aucune des mesures proposées à l'heure actuelle ne satisfait tous ces axiomes.

### a) Intrication de formation

L'intrication de formation  $E_F(\rho)$  ("entanglement of formation" en anglais), introduite par [Bennett *et al.*, 1996c], est la généralisation de l'entropie d'intrication (2.42) [Osborne, 2007]. En effet, elle est définie d'après une somme pondérée de la quantité d'intrication des états purs intervenant dans le mélange statistique d'états :

$$E_F(\rho) = \min_{\{p_k, |\psi_k\rangle\}} \left( \sum_k p_k E_V(|\psi_k\rangle) \right) \quad (2.54)$$

où la minimisation se fait sur toutes les décompositions possibles du mélange statistique d'états  $\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ . Il s'agit d'un problème d'optimisation excessivement complexe, qui n'a été résolu que dans des cas très particuliers : mélanges statistiques d'états de deux qubits [Wootters, 1998], et certains états très symétriques [Terhal et Vollbrecht, 2000, Vollbrecht et Werner, 2001]. En variables continues, il n'existe une expression explicite de l'intrication de formation que pour les états Gaussiens symétriques à 2 modes [Giedke *et al.*, 2003].

Par construction, l'intrication de formation revient à quantifier le nombre minimal d'états purs nécessaires pour recréer la même intrication.

La question de l'additivité de l'intrication de formation reste un problème ouvert [Krüger et Werner, web].

### b) Négativités

Les négativités sont des fonctions monotones de l'intrication, qui quantifient la violation du critère PPT (*cf.* §D.4a), c'est-à-dire "combien" il manque à la transposée partielle de  $\rho$  pour être positive. Nous allons aborder ici la négativité et la négativité logarithmique.

#### NÉGATIVITÉ

La négativité est définie par [Życzkowski *et al.*, 1998, Eisert, 2001] :

$$\mathcal{N}(\rho) = \frac{\|\hat{\rho}\|_1 - 1}{2} \quad (2.55)$$

où la norme 1 est définie par :  $\|\hat{\rho}\|_1 = \text{Tr} \left( \sqrt{\hat{\rho}^\dagger \hat{\rho}} \right)$ .

La négativité a l'avantage d'être une mesure d'intrication qu'on peut calculer :

$$\mathcal{N}(\rho) = \max \left( 0, - \sum_k \lambda_k^- \right) \quad (2.56)$$

où les  $\lambda_k^-$  sont les valeurs propres négatives de la transposée partielle  ${}^{t_i}\rho$ .

## NÉGATIVITÉ LOGARITHMIQUE

La négativité peut être définie pour les variables continues [Vidal et Werner, 2002], cependant on utilise plus volontiers la négativité logarithmique [Vidal et Werner, 2002, Eisert, 2001] :

$$E_{\mathcal{N}}(\rho) = \log_2 (\|\rho\|_1) = \log_2 (1 + 2\mathcal{N}(\rho)) \quad (2.57)$$

La négativité logarithmique est additive. Bien qu'elle ne soit pas convexe, c'est une fonction totalement monotone de l'intrication sous les LOCC [Plenio, 2005].

Ni la négativité, ni la négativité logarithmique ne sont continues par rapport à la norme 1 dans un espace de Hilbert de dimension infinie ; cependant on peut s'affranchir de ce problème en ne considérant que des états physiques, c'est-à-dire d'énergie moyenne finie [Eisert *et al.*, 2002b]. Une telle contrainte étant parfaitement raisonnable, il est tout-à-fait légitime d'omettre ce problème dans un premier temps.

## c) États Gaussiens

## RÉÉCRITURE DES NÉGATIVITÉS

Le principal avantage des négativités est qu'elles sont faciles à calculer pour les états Gaussiens. Ainsi, pour un état de matrice de covariance  $\sigma$  [Vidal et Werner, 2002, Serafini, 2004, Adesso *et al.*, 2004b, Adesso *et al.*, 2004c] :

$$\mathcal{N}(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \prod_{k|\tilde{\nu}_k < 1} \tilde{\nu}_k^{-1} - 1 \right) \\ 0 \text{ si } \forall k \tilde{\nu}_k \geq 1 \end{cases} \quad (2.58)$$

Et de la même façon, on peut exprimer la négativité logarithmique en fonction des valeurs propres symplectiques de la transposée partielle  $\tilde{\sigma}$  :

$$E_{\mathcal{N}}(\sigma) = \begin{cases} - \sum_{k|\tilde{\nu}_k < 1} \log_2(\tilde{\nu}_k) \\ 0 \text{ si } \forall k \tilde{\nu}_k \geq 1 \end{cases} \quad (2.59)$$

## LEMME

Ce lemme permet de simplifier encore la quantification de l'intrication pour certains états Gaussiens.

*Soit un état Gaussien bipartitionné  $\sigma_{AB}$ , comprenant  $N_A + N_B$  modes. Il y a au maximum  $n = \min\{N_A, N_B\}$  valeurs propres symplectiques de la transposée partielle  $\tilde{\sigma}_{AB}$  qui peuvent violer l'inégalité PPT (2.50).*

On peut alors, pour les états Gaussiens<sup>20</sup>  $1 \times N$  quantifier l'intrication simplement à

20. Et aussi pour les états bisymétriques  $M \times N$ , dont le spectre symplectique présente des dégénérescences.

l'aide de  $\tilde{\nu}_-$ , la plus petite des valeurs propres symplectiques de la transposée partielle  $\tilde{\sigma}$ . En effet, si  $\tilde{\nu}_- < 1$ , l'état est intriqué, et plus  $\tilde{\nu}_-$  est petit, plus l'état  $\sigma$  est intriqué. Dans le cas particulier des états Gaussiens à 2 modes, ce résultat avait été obtenu dans [Adesso *et al.*, 2004a, Adesso *et al.*, 2005].

## E Cas particulier des états Gaussiens à 2 modes

Dans cette section, nous allons reprendre les résultats précédents dans le cas particulier de 2 modes Gaussiens. Cette démarche est motivée d'une part par le fait qu'il s'agit du plus simple des systèmes bipartitionnés – qui va permettre d'exprimer explicitement les différents critères et mesures –, et d'autre part par le fait que ce sont de tels états qui ont été étudiés expérimentalement durant cette thèse.

### E.1 Écriture symplectique d'un état Gaussien à 2 modes

La matrice de covariance  $\sigma$  d'un état à 2 modes est une matrice symétrique réelle  $4 \times 4$ , qui comporte *a priori* 10 coefficients indépendants. Cependant, pour étudier la quantité d'information contenue dans l'état, ou son intrication, on peut se limiter à la forme standard de cette matrice [Simon, 2000, Duan *et al.*, 2000]. En effet, il est possible de passer de la forme générale à la forme standard par des opérations symplectiques *locales*, qui ne modifient pas l'intrication de l'état (*cf.* §B.3f)). Ainsi, la forme standard de la matrice de covariance d'un état Gaussien à 2 modes s'écrit :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ {}^t\gamma & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & c_+ & 0 \\ 0 & a & 0 & c_- \\ c_+ & 0 & b & 0 \\ 0 & c_- & 0 & b \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Il y a  $N$  invariants symplectiques (*cf.* §B.4a)); ici  $N = 2$ . On peut donc exprimer toutes les propriétés de  $\sigma$  en fonction de son déterminant  $\text{Det}(\sigma)$  et de son sérialien  $\Delta(\sigma) = \text{Det}(\alpha) + \text{Det}(\beta) + 2\text{Det}(\gamma)$ .

Ainsi, l'inégalité de Heisenberg peut s'écrire :

$$\Delta(\sigma) \leq 1 + \text{Det}(\sigma) \quad (2.61)$$

ou en termes de valeurs propres symplectiques, qu'on notera  $\nu_+$  et  $\nu_-$  avec  $\nu_- \leq \nu_+$  :

$$\nu_- \geq 1 \quad (2.62)$$

On peut d'ailleurs exprimer les valeurs propres symplectiques en fonction des deux invariants cités plus haut [Vidal et Werner, 2002, Serafini *et al.*, 2004, Adesso *et al.*, 2004a, Adesso *et al.*, 2004b] :

$$2\nu_{\pm}^2 = \Delta(\sigma) \pm \sqrt{\Delta^2(\sigma) - 4\text{Det}(\sigma)} \quad (2.63)$$

Pour la quantification de l'intrication, plutôt que d'utiliser directement les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c_+$  et  $c_-$  de la matrice (2.60), il est intéressant d'écrire deux invariants symplectiques locaux – qui sont les puretés des états réduits à 1 seul mode :

$$\mu_1 = [\text{Det}(\alpha)]^{-1/2} = \frac{1}{a} \quad (2.64)$$

$$\mu_2 = [\text{Det}(\beta)]^{-1/2} = \frac{1}{b} \quad (2.65)$$

et deux invariants symplectiques globaux – la pureté et le séralien :

$$\mu = [\text{Det}(\sigma)]^{-1/2} = [(ab - c_+^2)(ab - c_-^2)]^{-1/2} \quad (2.66)$$

$$\Delta = a^2 + b^2 + 2c_+c_- \quad (2.67)$$

L'intérêt de ce changement de variables est d'utiliser des variables ayant un sens physique plus clair (tout au moins en ce qui concerne les puretés). En outre, un grand nombre de méthodes permettant de mesurer les invariants globaux  $\mu$  et  $\Delta$ , et locaux  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , ont été proposées récemment [Fiurášek et Cerf, 2004, Wenger *et al.*, 2004, Ekert *et al.*, 2002, Filip, 2002, Oi et Åberg, 2006, Rigolin et de Oliveira, 2007]. Ces méthodes ont l'avantage de ne pas nécessiter une reconstruction complète de la matrice de covariance [D'Ariano *et al.*, 2007].

## E.2 Intrication Gaussienne à 2 modes

### a) Critère PPT et négativités

En termes d'invariants symplectiques, la transposition partielle de la matrice de covariance d'un état Gaussien à 2 modes revient à changer le signe de  $\text{Det}(\gamma)$  :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ {}^t\gamma & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{\rho \rightarrow {}^t_i \rho} \tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \alpha & \tilde{\gamma} \\ {}^t\tilde{\gamma} & \beta \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

avec  $\text{Det}(\tilde{\gamma}) = -\text{Det}(\gamma)$ . Pour une matrice de covariance sous la forme standard, ceci revient à changer  $c_-$  en  $-c_-$ .

La transposition partielle change le séralien  $\Delta$  en :

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} &= \text{Det}(\alpha) + \text{Det}(\beta) + 2\text{Det}(\tilde{\gamma}) \\ &= \text{Det}(\alpha) + \text{Det}(\beta) - 2\text{Det}(\gamma) \\ &= \Delta - 4\text{Det}(\gamma) \\ &= -\Delta + \frac{2}{\mu_1^2} + \frac{2}{\mu_2^2} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Et l'équation (2.63) donne directement les valeurs propres de  $\tilde{\sigma}$  :

$$2\tilde{\nu}_{\pm}^2 = \tilde{\Delta} \pm \sqrt{\tilde{\Delta}^2 - \frac{4}{\mu^2}} \quad (2.70)$$

Le critère PPT – qui est une équivalence puisqu'on est dans le cas “ $1 \times N$ ” (avec  $N = 1$ ) – s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma \text{ est séparable} &\Leftrightarrow \tilde{\nu}_- \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \tilde{\Delta} \leq 1 + \frac{1}{\mu^2} \end{aligned}} \quad (2.71)$$

Notons que plus l'état est pur, plus  $\mu$  se rapproche de 1 par valeurs inférieures, et donc plus  $1 + \frac{1}{\mu^2}$  est petit. L'inégalité  $\tilde{\Delta} \leq 1 + \frac{1}{\mu^2}$  est donc d'autant plus facile à violer que l'état est pur, ce qui traduit le fait qu'il est plus facile pour un état pur que pour un mélange statistique d'états d'être intriqué.

On peut également calculer pour la négativité logarithmique pour un état Gaussien à 2 modes, qui est une fonction décroissante de  $\tilde{\nu}_-$  :

$$\boxed{E_N = \max \{0, -\log_2(\tilde{\nu}_-)\}} \quad (2.72)$$

Quant à l'autre valeur propre symplectique de la transposée partielle, elle vérifie toujours :  $\tilde{\nu}_+ > 1$ .

Enfin, remarquons que, d'après les équations (2.60),(2.61),(2.69),(2.71), on obtient une condition nécessaire pour qu'un état Gaussien à 2 modes soit intriqué [Simon, 2000] :

$$\sigma \text{ est intriqué} \Rightarrow \text{Det}(\gamma) < 0 \quad (2.73)$$

### b) Maximisation de l'intrication à l'aide d'opérations passives

Soit un état Gaussien  $\sigma$  à  $N \geq 2$  modes, et une opération passive  $K$  appliquée à  $\sigma$  :  $\sigma \rightarrow \sigma' = {}^t K \sigma K$ . Il a été montré dans [Wolf *et al.*, 2003] que la quantité maximale d'intrication (quantifiée par la négativité logarithmique) qu'on pouvait obtenir pour un sous-système arbitraire de deux modes de  $\sigma'$  est donnée par :

$$E_N^{max} = \max \left[ 0, -\frac{1}{2} \log_2(\lambda_1 \lambda_2) \right] \quad (2.74)$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les deux plus petites valeurs propres orthogonales (usuelles) de  $\sigma$ .

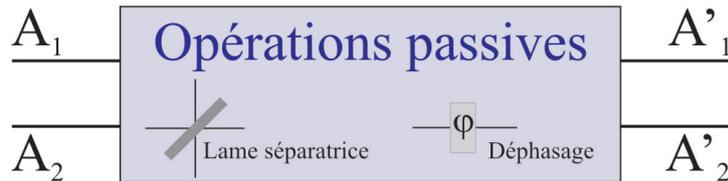


Fig. 2.3: Obtention, à l'aide d'opérations passives globales, des faisceaux les plus intriqués possible.

Nous allons à présent nous restreindre à 2 modes Gaussiens. [Wolf *et al.*, 2003] montrent également qu'un état Gaussien à 2 modes dont la matrice de covariance est naturellement dans la forme standard ne peut pas voir son intrication augmenter ; contrairement aux autres états. Pour ces derniers, la transformation à appliquer est celle qui donnera un état dont la matrice de covariance est directement dans la forme standard.

Les transformations passives ont été présentées au §B.3 : il s'agit de l'opération "déphasage" et de l'opération "lame séparatrice" (*cf.* Fig. 2.3). On peut réaliser n'importe quelle transformation passive sur les deux modes en combinant ces deux opérations [Yurke *et al.*, 1986, Han *et al.*, 1990, Arvind *et al.*, 1995b]. La figure 2.4 donne le schéma le plus général : les modes subissent un déphasage, sont mélangés sur une lame 50/50, subissent à nouveau un déphasage avant d'être recombinaés puis déphasés.

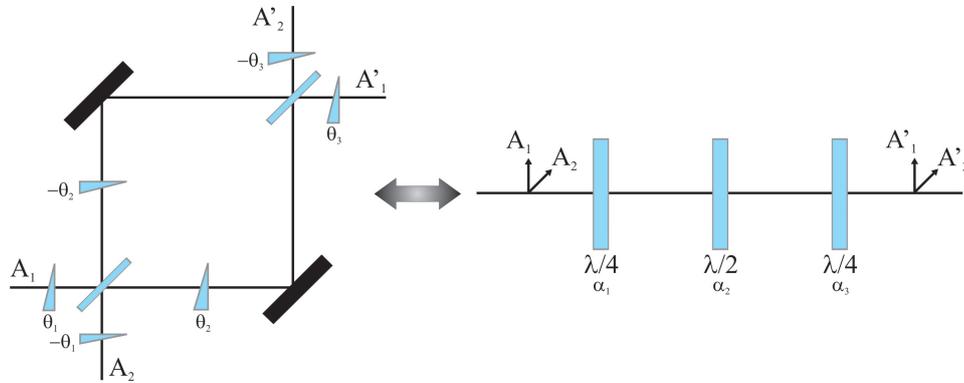


Fig. 2.4: Une transformation arbitraire sur deux modes est obtenue à l'aide de déphasages et de lames séparatrices, et se réduit à 3 paramètres indépendants. Lorsque les deux modes sont polarisés orthogonalement, la transformation est obtenue de manière équivalente à l'aide de 3 lames biréfringentes tournées selon des angles  $\alpha_i$ .

Lorsque les deux modes diffèrent uniquement par leur polarisation, cette transformation arbitraire peut être réalisée à l'aide de deux lames  $\lambda/4$  et d'une lame  $\lambda/2$  (*cf.* Fig. 2.4). Il a été montré dans [Simon et Mukunda, 1990] que ce nombre de lames est minimal et que toute association de ces trois lames dans un ordre quelconque est équivalente.

Nous verrons au §5.C.2c) l'aspect expérimental correspondant à cette partie : cette association de lame permet effectivement d'obtenir un état dont la matrice de covariance est sous la forme standard.

### c) Intrication de formation pour les états symétriques

L'expression de la décomposition convexe optimale qui apparaît dans la définition de l'intrication de formation (2.54) a été trouvée dans le cas d'un mélange statistique d'états Gaussiens *symétriques*<sup>21</sup> à 2 modes (c'est-à-dire un état tel que  $a = b$ ). Cette

21. Des bornes inférieures pour  $E_F$  ont été établies dans le cas non symétrique [Rigolin et Escobar, 2004].

décomposition est Gaussienne, de sorte que le minimum est réalisé pour des états purs Gaussiens à 2 modes [Giedke *et al.*, 2003], ce qui mène à l'expression :

$$E_F = \max\{0, g(\tilde{\nu}_-)\} \quad (2.75)$$

où

$$g(x) = \frac{(1+x)^2}{4x} \log_2 \left[ \frac{(1+x)^2}{4x} \right] - \frac{(1-x)^2}{4x} \log_2 \left[ \frac{(1-x)^2}{4x} \right] \quad (2.76)$$

$E_F$  est ainsi une fonction décroissante de  $\tilde{\nu}_-$  : la quantification de l'intrication qu'elle fournit est équivalente à celle donnée par les négativités.

#### d) Classement des états Gaussiens par leur quantité d'intrication

L'équivalence entre les négativités et l'intrication de formation pour les états Gaussiens symétriques à 2 modes pourrait mener à penser que, pour tous les états Gaussiens à 2 modes (symétriques ou non !), il existe une unique quantification de l'intrication qui reposerait sur la plus petite des valeurs propres symplectiques de la transposée partielle de la matrice de covariance,  $\tilde{\nu}_-$ .

En réalité il n'en est rien, et il existe une seconde classe de mesures, les “mesures Gaussiennes d'intrication” (que nous n'aborderons pas ici), qui débouchent sur un classement différent. Pour 2 modes, toutes les mesures ne coïncident que dans le cas symétrique.

Le lecteur pourra trouver de plus amples informations, et une discussion approfondie sur ce sujet, dans l'article d'où est tiré ce chapitre [Adesso et Illuminati, 2007] ou dans [Adesso et Illuminati, 2005].

### E.3 Information et intrication extrême

Il s'agit, dans cette dernière section, de relier l'intrication d'un état Gaussien à 2 modes avec la quantité d'information que lui et ses sous-systèmes contiennent. On a vu au §D.2 que ces deux notions sont étroitement reliées pour les états purs. Quant aux états impurs, le §D.3 a montré qu'une partie de l'information était encodée dans le taux de mélange individuel des sous-systèmes, et l'état global possède également un certain degré de mélange. Ceci suggère qu'on puisse extraire de ces grandeurs des informations sur les corrélations entre les sous-systèmes.

Les études ont montré que, à puretés individuelles et globale fixées, la négativité d'états Gaussiens à 2 modes de taux de mélange fixé possède une borne inférieure et une borne supérieure [Adesso *et al.*, 2004a, Adesso *et al.*, 2004b, Adesso *et al.*, 2005]. Ceci mène à l'inégalité suivante sur le séralien :

$$\frac{2}{\mu} + \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\mu_1^2 \mu_2^2} \leq \Delta \leq \min \left\{ \frac{(\mu_1 + \mu_2)^2}{\mu_1^2 \mu_2^2} - \frac{2}{\mu}, 1 + \frac{1}{\mu^2} \right\} \quad (2.77)$$

qui a amené à définir des “états Gaussiens extrêmement intriqués” à puretés individuelles et globale fixées. Les états qui saturent la partie gauche de l'inégalité (2.77) sont

dits “maximalement intriqués” (GMEMS) ; ceux qui saturent la partie droite de l’inégalité sont dits “minimalement intriqués” (GLEMS).

Ainsi, l’intrication – quantifiée par les négativités – des états Gaussiens à 2 modes est bornée supérieurement et inférieurement par des quantités ne dépendant que des puretés individuelles et globale ; le seul degré de liberté restant étant l’invariant symplectique  $\Delta$ .

L’existence des GMEMS et des GLEMS débouche sur deux résultats importants.

Tout d’abord, cela permet de classer la séparabilité des états Gaussiens en fonction de leurs puretés individuelles et globale : cette classification<sup>22</sup> est résumée dans le tableau 2.3.

Tab. 2.3: Classification des propriétés de séparabilité des états Gaussiens à 2 modes en fonction de leur pureté globale  $\mu$  et des puretés individuelles  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

Degré de pureté	Propriétés d’intrication
$\mu < \mu_1 \mu_2$	état non physique
$\mu_1 \mu_2 \leq \mu \leq \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \mu_2}$	états séparables
$\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \mu_2} < \mu \leq \frac{\mu_1 \mu_2}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_1^2 \mu_2^2}}$	zone de coexistence d’états intriqués et séparables
$\frac{\mu_1 \mu_2}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_1^2 \mu_2^2}} < \mu \leq \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2 +  \mu_1 - \mu_2 }$	états intriqués
$\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2 +  \mu_1 - \mu_2 } < \mu$	état non physique

Par ailleurs, ceci permet de définir un nouvel estimateur de l’intrication dans les états Gaussiens bipartitionnés à 2 modes, à partir de la valeur moyenne des négativités des GMEMS et des GLEMS [Adesso *et al.*, 2004a].

22. Le lecteur pourra également trouver un schéma explicitant cette classification dans [Adesso *et al.*, 2004a]

## F Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre le formalisme symplectique, qui permet de caractériser totalement un état Gaussien et les transformations agissant sur cet état. Ce formalisme propose une écriture unifiée des propriétés essentielles d'un état Gaussien, tant du point de vue des fondements de la mécanique quantique (inégalité de Heisenberg) que pour l'information ou l'intrication contenues dans cet état. Il a en outre permis de dégager plusieurs critères d'intrication, en particulier pour les états Gaussiens à 2 modes qui vont nous intéresser tout au long de cette thèse.

Avant d'utiliser ce formalisme pour caractériser des états obtenus expérimentalement, nous allons dans le chapitre suivant présenter l'instrument que nous utilisons pour les produire : l'oscillateur paramétrique optique auto-verrouillé en phase.