

---

## applications de l'instabilité elliptique

### 1.1.1 Aéronautique

Historiquement, l'instabilité elliptique a été découverte durant la guerre froide, quasiment simultanément de part et d'autre du rideau de fer. A l'Ouest, l'instabilité elliptique a été découverte dans un contexte aéronautique, au cours des études de sillages d'avions. En effet, l'avion génère en se déplaçant différents tourbillons qu'il laisse dans son sillage. En particulier, la portance des ailes génère deux tourbillons principaux (fig. 1.1a), intenses et contra-rotatifs. La portance des gros porteurs produit des tourbillons d'une telle intensité qu'un petit avion traversant son sillage subit un violent mouvement de roulis qui le met en danger. Ce type d'accidents a conduit les aéroports à imposer des temps d'attente entre chaque décollage et atterrissage. Le trafic augmentant, la dissipation de ces tourbillons devient alors un enjeu économique important. Les études de ces tourbillons de sillage et de leur dissipation ont ainsi conduit Crow (1969) à étudier l'interaction d'une paire de tourbillons contra-rotatifs, étude précisée par Widnall *et al.* (1971) et Moore (1971). Ces travaux montrent l'existence d'une instabilité à grande longueur d'onde, dite de Crow, qui engendre la formation d'anneaux de vorticité (fig. 1.1b), mais ces travaux semblent également indiquer l'existence d'une instabilité à courte longueur d'onde. Cependant, Moore & Saffman (1974) soulignent que ces prédiction théoriques sont probablement un artefact de la théorie utilisée. Simultanément, en considérant la dynamique d'anneaux tourbillonnaires, Widnall *et al.* (1974) prouvent que les analyses précédentes ne sont en fait correctes qu'en présence d'une forte vitesse axiale, et démontrent l'existence de l'instabilité dans un contexte plus général : l'instabilité elliptique est découverte<sup>1</sup> ! Le mécanisme de l'instabilité sera expliqué par Moore & Saffman (1975) et Tsai & Widnall (1976), et elle est donc parfois appelée instabilité de Moore-Saffman-Tsai-Widnall (MSTW). Plus tard, Bayly (1986) et Waleffe (1990) démontrent son existence dans le contexte plus générique des écoulements à lignes de courant elliptiques, et elle est donc explicitement nommée par Malkus (1989) instabilité elliptique<sup>2</sup>. Dans les sillages d'avions, cette instabilité, tout comme l'instabilité de Crow, est donc susceptible d'être excitée et ainsi de favoriser la dissipation des tourbillons de bout d'aile (voir le brevet de Corjon *et al.*, 2004, basé sur cette idée).

### 1.1.2 Géo/Astro-physique

Il est couramment admis que les forces de flottabilité sont à l'origine du champ magnétique des planètes et des étoiles. Ainsi, le modèle actuellement accepté pour la Terre considère que le champ magnétique terrestre provient de la convection thermo-solutale du noyau externe liquide. Cependant, la validité d'un tel modèle est discutable pour certaines planètes ou lunes telles que la Lune primitive, la Terre primitive, Ganymède, Mercure, etc. De plus, même dans les cas où ce modèle semble valide, des mécanismes additionnels peuvent modifier significativement le mouvement du fluide, en particulier les forçages

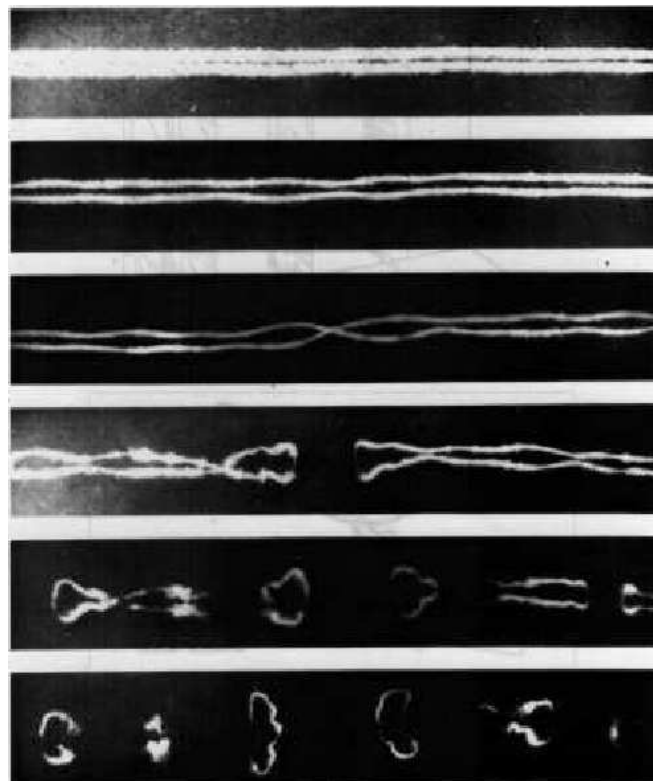
---

1. Pour l'anecdote, Sheila Widnall sera nommée à la tête de l'U.S. Air Force entre 1993 et 1997, devenant ainsi la première femme à ce haut poste du département de la défense.

2. Malkus (1989) la nomme aussi instabilité de marées puisque dans un contexte géophysique, la déformation elliptique provient des effets de marées.



(a)



(b)

FIGURE 1.1 – (a) *Tourbillons dans le sillage d'un avion civil (1974, Credit : NASA).* (b) *Tourbillons dans le sillage d'un B-47 (tiré de Crow, 1969). Les photographies sont espacées de 15 s. L'instabilité de Crow est clairement visible pour les deux tourbillons contra-rotatifs, tout comme les anneaux de vorticité qui en résultent.*

mécaniques tels que les marées, la précession ou la libration. Il semble donc important de caractériser la réponse du fluide à ces forçages pour les noyaux fluides des planètes telluriques mais aussi, plus généralement, pour les atmosphères des planètes gazeuses, les océans internes, aussi appelés *de sub-surface*, des satellites de glace et les zones convectives ou radiatives des étoiles.

## 1.2 Introduction aux fluides tournants

Cette section établit les équations fondamentales régissant la dynamique d'un fluide incompressible dans un repère en rotation en partant des équations usuelles de Navier-Stokes en repère galiléen. L'adimensionnement des équations fait alors apparaître les nombres adimensionnels pertinents pour ces écoulements. Une présentation plus complète du sujet peut être trouvée dans les ouvrages de Greenspan (1968), de Rieutord (1997) ou de Guyon *et al.* (2001).

### 1.2.1 Dynamique en référentiel non-galiléen

On note  $\rho$  la masse volumique du fluide, supposé incompressible et newtonien,  $\nu$  sa viscosité cinématique,  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  le vecteur rotation dépendant du temps  $t$  du référentiel,  $\mathbf{r}$  le vecteur position,  $\mathbf{u}_a$  la vitesse du fluide dans un repère galiléen (repère absolu représenté par un indice  $a$ ) et  $\mathbf{u}_r$  sa vitesse dans le repère en rotation (représenté par un indice  $r$ ). En repère galiléen, les équations de Navier-Stokes pour un fluide soumis à un potentiel  $\phi$  de forces massiques (e.g.  $\phi = gz$  pour la gravité) s'écrivent alors :

$$\partial_t \mathbf{u}_a + \mathbf{u}_a \cdot \nabla \mathbf{u}_a = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}_a - \nabla \phi, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_a = 0. \quad (1.2)$$

Dans le référentiel non-galiléen lié à  $\boldsymbol{\Omega}$ , (1.1) et (1.2) s'écrivent (cf. encart)

$$\partial_t \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_r \cdot \nabla \mathbf{u}_r = -\nabla \tilde{p} + \nu \Delta \mathbf{u}_r - 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_r - (d_t \boldsymbol{\Omega})_a \times \mathbf{r}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_r = 0. \quad (1.4)$$

avec la pression réduite  $\tilde{p} = p/\rho + \phi + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2/2$ , que l'on notera  $p$  par la suite. Le travail de la force de Coriolis, normale au mouvement des particules fluides, est nul mais nous verrons par la suite qu'elle confère aux fluides tournants une sorte d'élasticité s'opposant aux mouvements selon l'axe de rotation, ce qui permet la propagation d'ondes appelées *ondes inertielles*. La force d'entraînement, ici centrifuge, dérive d'un potentiel et ne fait donc qu'induire un gradient radial de pression pour les fluides confinés. Cependant, dès lors qu'une surface libre est présente, cette force est primordiale : l'aplatissement terrestre, par exemple, provient majoritairement de son effet. Enfin, l'accélération de Poincaré  $-(d_t \boldsymbol{\Omega})_a \times \mathbf{r}$  est un terme de forçage de l'équation de Navier-Stokes : lorsqu'elle est non-nulle, l'écoulement trivial  $\mathbf{u}_r = \mathbf{0}$ , appelé *rotation solide*, n'est plus solution.

Dans un souci de simplification des notations, on omettra l'indice  $r$  dans la suite.

**Accélération en référentiel non-galiléen**

En notant  $D$  une dérivée lagrangienne, les variations temporelles d'un champ vectoriel quelconque  $\mathbf{A}$  dans les deux repères sont alors liées par

$$(D_t \mathbf{A})_a = (D_t \mathbf{A})_r + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{A}$$

Appliquée au vecteur  $\mathbf{r}$ , cette équation donne immédiatement

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{u}_r + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{r}$$

et appliquée de nouveau à l'expression précédente, on obtient

$$(D_t \mathbf{u}_a)_a = (D_t \mathbf{u}_r)_r - \mathbf{f}_c - \mathbf{f}_e - \mathbf{f}_p$$

avec les pseudo-forces d'inertie usuelles

(i) de Coriolis  $\mathbf{f}_c = -2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_r$

(ii) d'entraînement  $\mathbf{f}_e = -\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = -1/2 \nabla(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2$

(iii) de Poincaré  $\mathbf{f}_p = -(\mathbf{d}_t \boldsymbol{\Omega})_a \times \mathbf{r}$

**1.2.2 Équation de vortacité**

Le rotationnel de l'équation (1.3) donne l'équation pour la vortacité  $\boldsymbol{\zeta}$ , définie par  $\boldsymbol{\zeta} = \nabla \times \mathbf{u}$  :

$$\partial_t \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta} - [(\boldsymbol{\zeta} + 2 \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla] \mathbf{u} = \nu \Delta \boldsymbol{\zeta} \quad (1.5)$$

Par rapport à l'équation usuelle de vortacité en référentiel inertiel, le référentiel tournant introduit un terme, dit de *vortacité planétaire*,  $2 \boldsymbol{\Omega}$  qui s'ajoute au terme de vortacité  $\boldsymbol{\zeta}$ . La somme  $\boldsymbol{\zeta} + 2 \boldsymbol{\Omega}$  est appelée vortacité absolue. En l'absence de rotation, le terme  $\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla \mathbf{u}$  représente les variations de vortacité liées à celles de longueur ou d'orientation des tubes de vortacité. La rotation ajoute une contribution supplémentaire à ces variations, qui peut être dominante pour des vitesses de rotation élevées.

**1.2.3 Adimensionnement**

Avec  $R$  et  $U$  les échelles de longueur et de vitesse dans le référentiel en rotation à la vitesse typique  $\Omega$ , l'équation (1.3) s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* = -\nabla^* p_r^* + \frac{1}{Re} \Delta^* \mathbf{u}^* - \frac{2}{Ro} \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}^* - R\Omega \left( \frac{d\mathbf{e}_z}{dt^*} \right)_a \times \mathbf{r}^* \quad (1.6)$$

avec  $\mathbf{e}_z = \boldsymbol{\Omega}/\|\boldsymbol{\Omega}\|$ , l'exposant  $*$  indiquant une variable adimensionnelle ou un opérateur considéré par rapport aux variables adimensionnelles. Le nombre de Reynolds  $Re = UR/\nu$  et de Rossby  $U/(\Omega R)$  apparaissent alors comme étant les nombres adimensionnels pilotant l'écoulement. Le premier représente le rapport entre les ordres de grandeur du terme de transport advectif de l'équation du mouvement et le terme visqueux. Le second est le rapport entre les ordres de grandeur du terme de transport advectif de l'équation du

mouvement et du terme de force de Coriolis : les écoulements à faibles nombres de Rossby sont dominés par les effets dûs à la rotation. Pour les écoulements naturels terrestres de surface, le nombre de Rossby ne devient faible que pour des écoulements à grandes échelles :  $\Omega \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  donc même en considérant des écoulements rapides avec des vitesses de l'ordre de  $U \sim 10 \text{ m.s}^{-1}$ , l'effet de la rotation terrestre n'est significatif (i.e.  $Ro \sim 0.1$ ) que pour des écoulements impliquant des échelles supérieures à  $L \sim 1000 \text{ km}$ . Cela explique pourquoi la rotation terrestre influence le sens des mouvements cycloniques de grande échelle et leur impose un sens de rotation opposé dans les hémisphères nord et sud, mais n'influence pas les tornades<sup>3</sup>.

Enfin, le rapport entre les ordres de grandeur du terme visqueux et du terme de force de Coriolis définit le nombre d'Ekman  $E = \nu/(\Omega R^2)$ . Ce nombre intervient principalement dans l'étude des écoulements près d'une paroi en rotation. Notons que lorsque la vitesse typique de l'écoulement est celle de la rotation i.e.  $U \sim \Omega R$ , on a alors  $Re = 1/E$ .

### 1.3 Écoulements à bas nombre de Rossby

Dans cette section, on considère les écoulements à faibles nombres de Rossby, i.e. ceux pour lesquels les effets de rotation et de force de Coriolis sont dominants. L'écoulement dit de rotation solide est alors la principale réponse du fluide tournant. A cet écoulement primaire s'ajoutent des écoulements de plus faibles amplitudes, dit secondaires, comme les écoulements géostrophiques présentés en section 1.3.1. Enfin, les écarts à cet écoulement de base sont associés à des propagations d'ondes dans les fluides tournants. De telles ondes ne sont pas liées à la compressibilité du fluide (ce serait alors des ondes acoustiques) mais à l'effet de la force de Coriolis. La linéarité des équations du mouvement à faible nombre de Rossby permet une étude simple de ces ondes qui jouent un rôle primordial en géophysique. La présentation de ces notions indispensables se base sur l'introduction aux fluides tournants de Guyon *et al.* (2001), en partie synthétisée dans la thèse de Lagrange (2009).

#### 1.3.1 Écoulements géostrophiques

Comme cela a été mentionné, en l'absence d'accélération de Poincaré la rotation solide est toujours solution de l'équation du mouvement (section 1.2.1). L'équation du mouvement (1.3) admet aussi d'autres solutions, moins triviales, dont certaines peuvent être déterminées sous quelques hypothèses simplificatrices. Supposant  $Ro \ll 1$  et  $E \ll 1$ , les équations (1.3) et (1.5) se réduisent à

$$\partial_t \mathbf{u} + 2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla p, \quad (1.7)$$

$$\partial_t \zeta = 2 (\mathbf{e}_z \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (1.8)$$

---

3. et encore moins les tourbillons de vidange de baignoire, qui sont principalement contrôlés par les conditions initiales, ainsi que par la géométrie du conteneur (effets de bords).

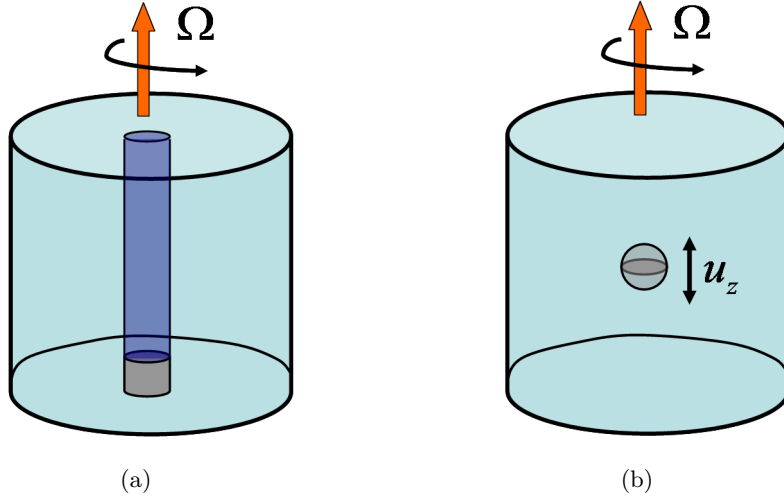


FIGURE 1.2 – (a) Si un petit cylindre est fixé sur le fond d'un cylindre fluide en rotation à vitesse  $\Omega$ , une colonne de Taylor se forme au-dessus, qu'on peut visualiser par injection d'encre. (b) Une bille de même densité que le fluide est légèrement déplacée selon l'axe de rotation du fluide. Du fait de la rotation du fluide, la bille subit alors une force de rappel et oscille, comme si le fluide possédait une élasticité.

Les écoulements géostrophiques sont alors les solutions de ces équations pour  $\Omega$  et  $\mathbf{u}$  quasi-stationnaires, i.e sont solutions de

$$\nabla p = -2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} , \quad (1.9)$$

$$\partial_z \mathbf{u} = \mathbf{0} . \quad (1.10)$$

Il vient alors qu'un écoulement géostrophique a les trois caractéristiques suivantes, qui constituent le *théorème de Taylor-Proudman* :

1. l'écoulement est normal au gradient de pression : les lignes de courant coïncident donc avec les isobares,
2. la vitesse  $\mathbf{u}$  de l'écoulement est indépendante de la coordonnée définie le long de l'axe de rotation, notée  $z$ ,
3. la section d'une courbe plane normale à  $\Omega$  qui suit le mouvement du fluide reste constante (en particulier, la section des tubes de vorticit   reste constante par le th  or  me de Kelvin).

On donne ci-dessous quelques cas d'applications permettant d'introduire des notions utiles pour la suite.

### Colonnes de Taylor-Proudman

Consid  rons un petit objet fix   sur la paroi inf  rieure d'un cylindre de fluide en rotation solide. La vitesse de rotation du cylindre est alors l  g  rement chang  e de sorte qu'une

faible rotation différentielle est créée entre le cylindre et le fluide. L'expérience (fig. 1.2a) montre qu'apparaît alors au dessus de notre objet un écoulement qui s'étend sur toute la hauteur du cylindre (car il est indépendant de  $z$ ) : il forme une colonne de fluide. En fait, tout se passe comme si l'intérieur de cette colonne était séparé de l'extérieur. A l'extérieur de la colonne on a alors le même écoulement que si on avait un fluide parfait en rotation s'écoulant autour d'un cylindre solide vertical. Cette colonne de fluide a été prédite théoriquement par Proudman et confirmée expérimentalement par Taylor. On parle de *colonne de Taylor* ou de *cylindres géostrophiques*. De fait, du colorant injecté à l'intérieur de cette colonne y reste pendant très longtemps tandis que du colorant injecté à l'extérieur évite le cylindre. De plus, un déplacement de l'obstacle sur le fond déplacerait également la colonne de Taylor qui le surplombe ainsi que le colorant. Notons que dans de telles expériences, l'écoulement n'est pas parfaitement géostrophique car le théorème de Taylor-Proudman n'est par exemple pas vérifié à l'éventuelle surface libre ou à l'interface intérieur/extérieur de la colonne de Taylor où la viscosité n'est plus négligeable (il y a donc un petit échange de fluide à ce niveau).

### Coriolis et élasticité apparente des fluides en rotation

Considérons à présent un objet solide, une bille par exemple, au sein d'un fluide tournant (fig. 1.2b). Un mouvement vertical nécessite alors une force plus importante lorsque le fluide est en rotation, et l'influence du mouvement vertical se transmet à de grandes distances en-dessous et au-dessus de la bille (en l'absence de rotation, la perturbation due au mouvement s'amortirait sur une distance de l'ordre de la dimension de l'objet). Enfin, des injections de colorant montrent que le déplacement du solide génère des rotations du fluide de sens contraire au-dessus et en dessous de celui-ci. Tout ceci est quantifiable avec l'équation (1.8) dont la composante selon  $e_z$  s'écrit  $\partial_t \zeta_z = 2 \partial_z u_z$ , ce qui permet d'écrire la divergence de (1.7) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta p) - 4 \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (1.11)$$

ce qui donne pour une perturbation périodique de pulsation  $\lambda$

$$\Delta p - \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0, \quad (1.12)$$

équation appelée *équation de Poincaré* depuis le travail de Cartan (1922). Supposant le corps de révolution autour de  $e_z$  et  $\partial_r p = 0$  sur l'axe du corps, une vitesse de translation orientée par  $e_z$  génère une vorticité  $\zeta_z$  de signe contraire au-dessus et en-dessous de l'objet ainsi qu'une surpression au-dessus de l'objet, et une dépression en-dessous. De plus, pour de faibles amplitudes, ces écarts de pression augmentent linéairement avec le déplacement : si on relâche le corps, il revient en oscillant à sa position d'équilibre. Tout se passe donc comme si le fluide en rotation était muni d'une certaine élasticité, d'une 'raideur' dimensionnelle de l'ordre de l'échelle de pression  $\rho \Omega^2 R^2$ . Cette élasticité apparente n'est en aucun cas liée à la compressibilité du fluide mais uniquement à la rotation qui tend à s'opposer aux perturbations tridimensionnelles (théorème de Taylor-Proudman).

### Cylindre tangent

Dans les deux cas précédents, la simple présence d'un solide dans un fluide tournant génère deux zones distinctes quasiment indépendantes l'une de l'autre : la colonne de Taylor sus-jacente au solide et le reste du fluide. Naturellement, à l'interface entre ces deux zones, un cisaillement, lissé par la viscosité, peut apparaître sur le pourtour de la colonne de Taylor, pourtour aussi appelé *cylindre tangent*. Cette zone où la viscosité ne peut plus être négligée est appelée *couche de Stewartson* et a donné lieu à de nombreuses études (Morrison & Morgan, 1956; Proudman, 1956; Stewartson, 1957, 1966). Elles constituent en fait un cas particulier de couches visqueuses appelées *couches internes de cisaillement* (voir section 1.3.4).

## 1.3.2 Ondes inertielles

### 1.3.2.1 Relation de dispersion et propagation

Prenant deux fois le rotationnel de (1.7), on obtient, avec (1.4) :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta \mathbf{u}) + 4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{u} = 0 . \quad (1.13)$$

Les solutions de (1.13) forment une famille orthogonale appelée *ondes inertielles*, qui est un sous-ensemble des ondes planes (i.e. modes normaux : voir Waleffe, 1990). On peut donc chercher une solution de (1.13) sous la forme

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_0 e^{i\phi} = \mathbf{u}_0 e^{i(\lambda t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (1.14)$$

où  $\lambda$  est la pulsation de l'onde, et  $\mathbf{k}$  son vecteur d'onde. L'introduction de cette solution dans l'équation (1.13) donne la relation de dispersion des ondes inertielles

$$\lambda = 2 \cos \gamma \quad (1.15)$$

avec  $\gamma$  l'angle entre  $\mathbf{k}$  et  $\boldsymbol{\Omega}$ . La relation de dispersion ne dépend donc pas de la norme de  $\mathbf{k}$  mais seulement de son orientation, et  $\lambda$  augmente lorsque  $\mathbf{k}$  se rapproche de l'axe de rotation. De plus, il apparaît que la fréquence adimensionnée des ondes inertielles est toujours comprise sur une certaine plage de valeurs<sup>4</sup> :  $\lambda \in [-2; 2]$ . Il est intéressant de noter l'analogie directe entre les ondes inertielles et les ondes dites internes associées à la stratification du milieu de propagation. En effet, dans ce dernier cas, la relation de dispersion peut s'écrire  $\lambda = N \sin \gamma$ , avec  $N = \sqrt{-g \partial_z(\rho/\rho_0)}$  la fréquence de Brünt-Vaisälä,  $g$  étant la gravité et  $\rho_0$  la moyenne sur  $z$  de la masse volumique (e.g. Rieutord & Noui, 1999, pour une étude de cette analogie en géométrie sphérique).

La condition d'incompressibilité donne  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0$ , ce qui implique que toute onde hydrodynamique est transverse dans un fluide incompressible, en particulier les ondes

4. Notons que le résultat  $\lambda \in [-2; 2]$  provient directement du préfacteur 2 de la force de Coriolis. En effet, la reprise de l'étude avec une force de Coriolis  $\mathbf{f}_c = -\alpha \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$  mène à  $\lambda \in [-|\alpha|; |\alpha|]$ .



inertielles. La vitesse selon  $\mathbf{k}$  pour laquelle la phase  $\phi$  de l'onde inertielle est constante est appelée vitesse de phase, et est donnée par

$$\mathbf{v}_p = \pm 2 \frac{\cos \gamma}{\|\mathbf{k}\|} \mathbf{e}_k \quad (1.16)$$

où  $\mathbf{e}_k = \mathbf{k}/\|\mathbf{k}\|$ . La propagation des ondes inertielles est donc clairement dispersive. La vitesse de propagation de l'énergie est appelée vitesse de groupe et vaut :

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{k}} = \pm \frac{2}{\|\mathbf{k}\|} \mathbf{e}_k \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_k) \quad (1.17)$$

ce qui traduit une propagation de l'énergie perpendiculairement à  $\mathbf{k}$ . Lorsque  $\cos \gamma = 0$ , la relation de dispersion donne  $\lambda = 0$ , ce qui mène à une vitesse de phase nulle et une vitesse de groupe  $\mathbf{v}_g = \pm 2 \|\mathbf{k}\|^{-1} \mathbf{e}_z$  : on retrouve alors les écoulements géostrophiques, résultant de l'équilibre entre les forces de pression et de Coriolis. Dans le cas général, un écoulement quelconque implique aussi bien des modes géostrophiques (modes inertiels avec  $\lambda = 0$ ) que des ondes inertielles.

### 1.3.2.2 Surface caractéristique

Le caractère hyperbolique de l'équation (1.13) implique l'existence de surfaces, appelées *surfaces caractéristiques*, le long desquelles une discontinuité de pression ou de vitesse (parallèle à ces dernières) peut se propager. Ces surfaces sont des cônes dont le demi-angle au sommet  $\theta$  dépend de la fréquence adimensionnelle  $\lambda$  selon

$$\cos \theta = \lambda/2 . \quad (1.18)$$

Une expérience historique (Görtler, 1944, 1957) permet de les observer dans un cylindre de fluide en rotation grâce à un disque horizontal oscillant le long de l'axe de rotation. L'amplitude des mouvements étant faible, tout comme le rayon du disque devant celui du cylindre, cela permet d'observer la propagation d'une petite perturbation dans un tel système. Pour  $\lambda < 2$ , la perturbation se propage le long de cônes d'angle au sommet donné par (1.18). Pour  $\lambda = 2$ , ces surfaces caractéristiques deviennent des plans horizontaux. Les colonnes de Taylor-Proudman présentées en section 1.3.1 correspondent à des surfaces caractéristiques telles que  $\lambda = 0$  (modes géostrophiques).

### 1.3.2.3 Modes inertiels, modes de Kelvin

L'équation (1.13) est hyperbolique, ce qui rend difficile l'obtention des solutions vérifiant les conditions aux limites d'une géométrie quelconque. Cependant, ces solutions en domaine confiné, appelées *modes inertiels*, peuvent être obtenues analytiquement pour des géométries simples telles que le cylindre (Kelvin, 1880), la sphère (Bryan, 1889; Zhang *et al.*, 2001) ou le sphéroïde (Zhang *et al.*, 2004). Dans le cas du cylindre, ces solutions, appelées *modes de Kelvin*, ont été généralisées récemment au cas visqueux par Herreman (2009). Cependant, dans la plupart des cas, les modes inertiels ne sont pas connus analytiquement et doivent donc être calculés numériquement : c'est ainsi le cas de la coquille sphérique<sup>5</sup> ou de l'ellipsoïde triaxial.

5. même si certains modes, purement toroïdaux, comme le mode de spin-over ont été obtenus analytiquement (Rieutord & Valdettaro, 1997).

Les modes inertiels se retrouvent dans différents contextes, ce qui en fait encore aujourd'hui un sujet d'étude à part entière. Ainsi, dans un contexte aérospatial, ces modes peuvent affecter, lorsqu'ils sont forcés, la stabilité des engins volants en rotation contenant des réservoirs de carburant liquide. Par exemple, la dynamique des satellites en rotation est couplée à la dynamique du fluide embarqué, qui doit donc être correctement décrite (Stewartson, 1959; Gans, 1984; Garg *et al.*, 1986; Agrawal, 1993; Bao & Pascal, 1997). Ces modes ont également été observés au sein des océans (Chelton & Schlax, 1996; Cipollini *et al.*, 2001) mais aussi dans l'atmosphère (Kursinski *et al.*, 1996), contextes dans lesquels ils sont aussi appelés *ondes de Rossby* (voir le livre de Vanyo, 2001, pour ces applications spécifiques). Enfin, à plus grande échelle, ces modes inertiels sont également étudiés en géo- et astrophysique. Ainsi, ces modes pourraient être présents au sein du noyau liquide terrestre et Aldridge & Lumb (1987) disent en avoir identifiés certains dans les données de grande précision de Melchior & Ducarme (1986). Cependant, même si leur détection est vraisemblable (Rieutord, 1995, 2000), ce point reste débattu (e.g. Melchior *et al.*, 1988; Crossley *et al.*, 1991; Banka & Crossley, 1999) et pour le moment seul le mode de spinover du noyau liquide terrestre semble avoir été détecté (Neuberg *et al.*, 1987). Enfin, ces modes pourraient jouer un rôle au sein des étoiles en rotation rapide (e.g. Papaloizou & Pringle, 1978) et des planètes géantes gazeuses (e.g. Schaeffer & Cardin, 2005). Kuhn *et al.* (2000) associent d'ailleurs certaines observations solaires à la présence d'ondes inertielles (voir aussi Busse *et al.*, 2005; Kaladze & Wu, 2006, à ce sujet), ce qui reste encore débattu (Williams *et al.*, 2007).

### 1.3.3 Couches et pompage d'Ekman

Dans les sections précédentes, la viscosité a été négligée, ce qui n'est pas toujours possible. Par exemple, les ondes inertielles dans une sphère en rotation sont amorties par viscosité et n'apparaissent donc pas sans forçage. Usuellement, selon l'approche de la théorie des couches limites, on sépare l'écoulement en un écoulement de volume supposé non-visqueux et un écoulement de proche paroi où la viscosité est prédominante. La transition entre ces deux écoulements s'effectue alors à une distance caractéristique  $\delta_E$  de la paroi qui correspond à l'état d'équilibre entre force de Coriolis et force visqueuse (exception faite des parois selon l'axe de rotation, comme les parois latérales d'un cylindre, où la couche visqueuse résulte d'un équilibre entre le terme d'advection et le terme visqueux<sup>6</sup>). Cette couche de fluide entre la paroi et  $\delta_E$  est appelée couche d'Ekman et a une taille caractéristique  $\delta_E \sim \sqrt{E}$ . Les couches d'Ekman ont la particularité d'aspirer ou de refouler du fluide : c'est le pompage d'Ekman  $\mathbf{u}_p$ . Ainsi, les couches d'Ekman influencent l'écoulement en volume et le pompage d'Ekman peut être vu comme un écoulement secondaire en  $\sqrt{E}$ .

**Exemple :** dans le cas simple d'une paroi perpendiculaire à l'axe de rotation  $\Omega$  et de normale sortante  $\mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_z$  une expression du pompage d'Ekman est  $\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{n} = -\sqrt{E/4} \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{e}_z$ . On en déduit que si  $\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{e}_z > 0$  (resp.  $\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{e}_z < 0$ ) la couche d'Ekman éjecte (resp. aspire) du fluide.

6. On parle alors de couche limite visqueuse.

Les applications géophysiques se situent en général dans la limite  $E \ll 1$ , et les couches d'Ekman sont ainsi typiquement très fines et donc difficiles à étudier expérimentalement. Dans le noyau terrestre, la loi d'échelle  $\delta_E \sim \sqrt{E}$  prédit une couche d'Ekman laminaire d'une épaisseur de l'ordre de 1 m. Notons cependant que des instabilités sont susceptibles de s'y développer (e.g. Lorenzani, 2001, en géométrie sphérique). Ainsi, Faller (1963) a identifié deux types d'instabilités, notées I et II, au sein des couches d'Ekman laminaires, qui apparaissent respectivement pour des nombres de Reynolds locaux (basés sur l'épaisseur et la vitesse locales de la couche) de 125 et 55. L'analyse de stabilité linéaire de Lingwood (1997) permet d'expliquer les résultats expérimentaux et d'interpréter ces instabilités en termes d'instabilités convectives. L'instabilité de type I, aussi appelée *instabilité cross-flow*, est associée à la présence d'un point d'inflexion instable dans le profil de vitesse de la couche, tandis que l'instabilité de type II est due à l'effet combiné des forces de Coriolis et visqueuses (voir la revue de Faller, 1991). D'après ces résultats, les couches d'Ekman purement laminaires du noyau terrestre pourraient n'être que marginalement stables car leurs nombres de Reynolds locaux sont typiquement autour de 100 (Cardin & Olson, 2007). Une série de travaux récents sur ces couches d'Ekman, prenant en compte l'influence du champ magnétique<sup>7</sup>, confirme que la couche d'Ekman à la frontière noyau-manteau pourrait se déstabiliser dans une bande critique s'étendant sur 45° de part et d'autre de l'équateur terrestre (Desjardins *et al.*, 1999, 2001, 2004).

### 1.3.4 Latitude critique, éruption de couche limite

Pour étudier les fluides visqueux en rotation, on a longtemps supposé que les effets de viscosité étaient confinés à la couche d'Ekman et que l'écoulement pouvait être décomposé en puissances de  $E^{1/2}$  dans ces couches comme dans l'intérieur (le *bulk*) du fluide. Hormis le travail pionnier de Stewartson (1972) et celui plus récent de Kerswell (1995), qui montrent l'existence d'autres lois d'échelles dans ces écoulements, une exception notable à cette hypothèse usuelle concerne le cas particulier de couches internes alignées avec l'axe de rotation, qui a suscité un certain nombre d'études (Morrison & Morgan, 1956; Proudman, 1956; Stewartson, 1957, 1966). Ces couches apparaissent notamment sur le cylindre tangent associé à un objet immergé dans un fluide en rotation (voir section 1.3.1). Dans ce cas, des couches en  $E^{1/3}$ ,  $E^{1/4}$  et même  $E^{2/7}$  (Stewartson, 1966) peuvent être présentes : elles transportent alors du fluide entre les différentes couches visqueuses de l'écoulement et résolvent les discontinuités de vitesses générées par les conditions aux limites. Ainsi, en plus du pompage d'Ekman usuel en  $E^{1/2}$  s'ajoute un nouveau pompage obéissant à une loi d'échelle différente.

En fait, de façon plus générale, des couches internes de cisaillement apparaissent dès lors qu'un fluide en rotation solide est perturbé avec une fréquence  $\lambda$  inférieure à deux fois la rotation de base ( $\lambda \in [-2; 2]$ ). En effet, les équations non-visqueuses linéarisées sont alors hyperboliques et des discontinuités dans l'écoulement peuvent se propager sans atténuation le long de cônes caractéristiques. Ainsi, en présence de viscosité, ces discontinuités sont lissées par des couches de cisaillement internes apparaissant le long de ces

7. On parle alors de *couches d'Ekman-Hartmann*.

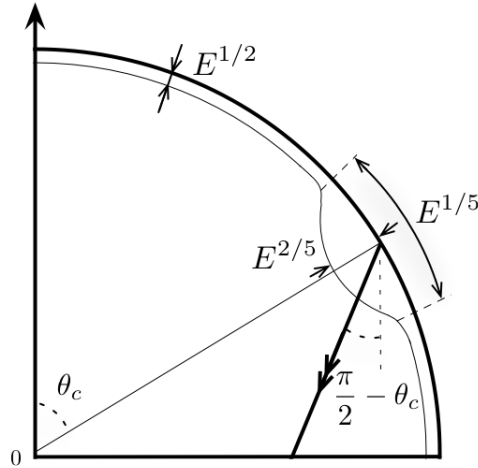


FIGURE 1.3 – Schéma représentant les différentes lois d'échelle proposées par Kerswell (1995) pour les couches de cisaillement interne au niveau des latitudes critiques (Credit : A. Sauret).

surfaces caractéristiques. Comme indiqué en section 1.3.2, Görtler (1944, 1957) et Oser (1958) ont observé ces surfaces expérimentalement dans le cas d'un disque oscillant axialement (voir Greenspan (1968) pour la théorie et les références associées). Elles peuvent être observées dans d'autres cas tels que par exemple en présence de coins (cf. Wood (1965, 1966) ainsi que les observations expérimentales de McEwan (1970)) ou en présence de discontinuités dans les conditions aux limites (Walton (1975), analogue oscillant du travail de Stewartson (1957)). Notons que Tilgner (2000) a montré qu'en fait ces couches de cisaillement sont les enveloppes de paquets d'ondes inertielles localisées dans l'espace, ce qui les distingue nettement des couches de cisaillement en fluides non-tournants.

On peut à présent se demander si une perturbation purement visqueuse telle qu'une couche d'Ekman oscillante (en temps et/ou en espace, par exemple du fait d'une libration ou d'une déformation des parois) peut générer des couches internes de cisaillement. De fait, dans un tel cas, des couches de cisaillement peuvent être créées à une latitude particulière  $\theta$  appelée *latitude critique*<sup>8</sup> donnée par  $\lambda = 2 \cos \theta_c$ . A cette latitude, l'énergie transportée par les ondes inertielles court le long de la paroi solide au lieu d'être réfléchi dans l'intérieur du fluide (e.g. Greenspan, 1968). Notons que cet effet est essentiellement non-visqueux (Kerswell, 1995) alors même que l'origine de la perturbation est purement visqueuse. Stewartson & Roberts (1963) ont montré que cela conduit à un changement local de l'épaisseur de la couche d'Ekman qui passe soudainement du scaling usuel en  $E^{1/2}$  à une épaisseur en  $E^{2/5}$  (fig. 1.3) : c'est l'*éruption de la couche d'Ekman*, ainsi baptisée par Bondi & Lyttleton (1953). Enfin, contrairement à ce qu'on a longtemps pensé, même si cet effet est local, il peut avoir une grande importance. Kerswell (1995) démontre en effet que les couches de cisaillement générées ne sont pas négligeables et peuvent transpor-

8. De façon rigoureuse, l'angle  $\theta$  est en fait la colatitude.

ter du moment angulaire à travers tout le fluide, donc être dynamiquement importantes. Noir *et al.* (2001) confirment cela numériquement en considérant la taille des zones de cisaillement et les vitesses impliquées en leur sein, et valident le processus de génération non-linéaire d'une circulation géostrophique dans la couche d'Ekman proposé par Busse (1968) pour expliquer les expériences de Malkus (1968). Ce processus a d'ailleurs récemment été mis en évidence et mesuré expérimentalement par Morize *et al.* (2010).

### 1.3.5 Spin-up

Le spin-up est le processus de mise en rotation d'un fluide. Le cas le plus simple est celui d'un fluide au repos dans un conteneur soudainement mis en rotation. Cependant, le terme spin-up recouvre également des changements impulsionsnels de vitesse pour des fluides extérieurs ou intérieurs à un domaine solide, éventuellement stratifiés, en présence d'un champ magnétique, etc. Le spin-up joue un rôle important dans la dynamique des écoulements atmosphériques et océaniques pour lesquels les effets de la rotation terrestre sont importants voire dominants. Ce problème a donc été très étudié durant cette dernière décennie pour des fluides homogènes ou stratifiés, dans différentes configurations et géométries. La plupart de ces travaux sont mis en perspective dans les articles de review de Benton & Clark (1974) et Duck & Foster (2001).

Si on considère un cylindre infini de rayon  $R$ , le spin-up est une simple diffusion de la vitesse à travers le volume. En effet, l'écoulement axisymétrique  $U_\theta(r, t) \mathbf{e}_\theta$  est alors régi par l'équation de Navier-Stokes en projection selon  $\mathbf{e}_\theta$  :

$$\frac{\partial U_\theta(r, t)}{\partial t} = E \Delta U_\theta(r, t) = E \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) U_\theta(r, t) \quad (1.19)$$

adimensionnée par la longueur  $R$  et le temps  $\Omega^{-1}$ ,  $\Omega$  étant la vitesse angulaire de la paroi. Une résolution analytique est alors possible (cf. encart). Dans la réalité, le cylindre est de hauteur finie  $H$ , ce qui entraîne la présence de deux zones de recirculation au niveau des parois solides supérieures et inférieures : c'est le pompage d'Ekman (e.g. Wedemeyer, 1964). Ce pompage accélère notablement la mise en rotation du fluide dès lors que  $H/(2R) \gg E^{-1/4}$  (Greenspan & Howard, 1963).

Naturellement, en géométrie sphérique, le pompage d'Ekman est inévitable, et la vitesse azimutale lors d'un incrément de vitesse de  $1/\delta$  à 1 est donnée par Greenspan (1968) :

$$U_\theta(r, t) = U_\theta(r, t = 0) + \frac{\delta - 1}{\delta} e^{-(1-s^2)^{-3/4} t \sqrt{E}}. \quad (1.20)$$

Enfin, notons qu'en présence de turbulence, par exemple induite par de la convection thermique, la viscosité turbulente semble devoir être utilisée pour expliquer les données expérimentales (Brito *et al.*, 2004). La turbulence en volume accélère donc le spin-up mais il reste à expliciter le mécanisme sous-jacent par lequel les tensions de Reynolds permettent un transfert de moment plus efficace.

**Spin-up 2D : solution analytique**

Considérant un cylindre de rayon  $R$  avec un barreau cylindrique intérieur fixe de rayon  $r_i$ , on définit le paramètre  $\delta$  par  $U_\theta(r, t = 0) = (r/\delta)(1 - r_i^2/r^2)/(1 - r_i^2)$ , ce qui correspond à un incrément de vitesse de  $1/\delta$  à 1 du cylindre externe (une vitesse initiale nulle correspondant à  $\delta \rightarrow \infty$ ), on obtient l'évolution temporelle du champ de vitesse total (e.g. Sauret, 2009)

$$U_\theta(r, t) = \frac{r}{\delta} \frac{1 - r_i^2/r^2}{1 - r_i^2} + 2 \frac{\delta - 1}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{e^{-s_n^2 E t}}{s_n},$$

d'où on peut déduire la vortacité  $\omega(r, t) = U_\theta(r, t)/r + \partial_r U_\theta(r, t)$ ,

avec  $A_n = [J_1(s_n, r) Y_1(s_n, r_i) - J_1(s_n, r_i) Y_1(s_n, r)]/f'(s, 1)$ ,

où  $f(s, r) = J_1(s, r) Y_1(s, r_i) - J_1(s, r_i) Y_1(s, r)$ ,

$J_1$  et  $Y_1$  étant respectivement les fonctions de Bessel de première et seconde espèce et  $s_n$  le  $n$ -ième zéro de  $f(s, 1)$ .

**1.4 Écoulements de base dûs aux forçages**

Les ondes inertielles existent dans tout fluide en rotation. Habituellement amorties par viscosité, la présence d'un forçage mécanique permet d'en exciter certaines. Plus généralement, un forçage mécanique force un écoulement appelé *écoulement de base*. Cette section décrit cet écoulement pour les forçages de libration, précession et marées. La section 1.5 sera ensuite consacrée à l'étude de stabilité de cet écoulement de base.

**1.4.1 Forçages mécaniques : libration, précession et marées**

Les astres sont soumis à des perturbations mécaniques variées, qui peuvent avoir des répercussions importantes sur les mouvements de leurs couches fluides. Lorsque ces perturbations présentent une certaine régularité en temps ou en espace, elles sont appelées *forçages mécaniques (harmoniques)*. Les principaux forçages mécaniques s'exerçant sur les astres sont la précession, les marées et la libration (fig. 1.4).

**1.4.1.1 Précession, nutations**

L'axe de rotation propre d'une planète change au cours du temps. Son mouvement moyen, appelé précession, se manifeste par un mouvement de rotation de l'axe de rotation propre de la planète (fig. 1.4a). Ainsi, l'axe de rotation de la Terre autour duquel cette dernière tourne en 23.93 h décrit lui même un mouvement de rotation avec une période d'environ 25 700 ans, décrivant ainsi un cône de demi-angle au sommet égal à environ  $23.5^\circ$ , angle appelé *obliquité*<sup>9</sup>. Ainsi, il y a 4800 ans par exemple, c'est l'étoile Thuban qui se trouvait être au pôle Nord céleste (fig. 1.5a), jouant le rôle d'étoile polaire<sup>10</sup>. La

9. L'obliquité est l'angle entre l'axe de rotation propre d'une planète et une perpendiculaire à son plan orbital.

10. C'était alors l'apogée de la civilisation égyptienne antique et il semblerait d'ailleurs que certains temples égyptiens furent construits en référence à Thuban (voir e.g. Belmonte, 2001).

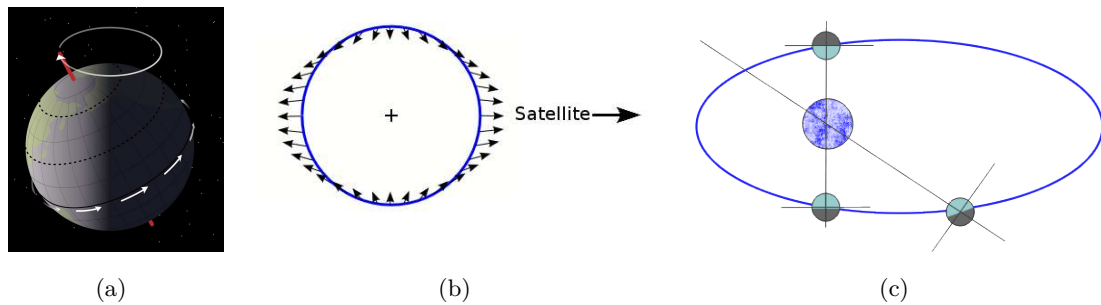


FIGURE 1.4 – Les principaux forçages mécaniques : (a) la précession est un mouvement de rotation de l’axe de rotation propre d’une planète, (b) les forces de marées déforment les enveloppes d’une planète, et (c) la libration est une différence instantanée périodique entre les vitesses angulaires de rotation propre et de révolution orbitale.

première description historique de ce mouvement de l’axe des pôles terrestres, aussi appelé *précession des équinoxes* en astronomie, est attribuée à Hipparque, aux environs de -150 (e.g. Meeus & Savoie, 1992; Thomson, 2009).

Le mouvement de l’axe de rotation propre d’une planète se compose donc d’un mouvement moyen, la précession, auquel s’ajoute un mouvement oscillant : la nutation. Découverte en 1728 par l’astronome britannique James Bradley, elle fut expliquée 20 ans plus tard par D’Alembert (1749), puis Euler (1749) qui en donna une description plus concise<sup>11</sup>. La nutation est usuellement décomposée en deux composantes : la *nutation en longitude*, qui est une oscillation périodique de la vitesse de précession, et une *nutation en obliquité* qui est une oscillation périodique de l’obliquité, i.e. de l’orientation de l’axe de rotation propre de la planète. Pour la Terre par exemple, la nutation provient essentiellement d’une oscillation appelée *nutation de Bradley*, d’une période de 18.6 ans et d’une amplitude de  $17''$  en longitude et  $9''$  en obliquité. Les autres termes de la nutation terrestre sont beaucoup plus faibles (le second plus important, d’une période de 183 jours, a une amplitude de  $1.3''$  en longitude et  $0.6''$  en obliquité). Pour la Terre, notons qu’une récente convention [IAU, 2001, IB 88, Résolution B1.7] réserve le terme nutation aux oscillations de périodes supérieures à deux jours (le terme libration est alors parfois employé pour les oscillations de périodes inférieures à deux jours : voir e.g. Brzeziński & Capitaine, 2010).

#### 1.4.1.2 Marées

Les marées sont dues à la présence d’autres corps à proximité de l’astre considéré, exerçant sur lui leur attraction gravitationnelle (fig. 1.4b). L’astre n’étant pas parfaitement rigide, il répond à ce forçage en se déformant dans son ensemble : chaque couche de l’astre, de son atmosphère à son noyau interne, est donc déformée. Sur Terre, ce phénomène est clairement visible sur l’hydrosphère, et les premières observations du mouvement

11. Euler omis cependant de mentionner les travaux de D’Alembert sur lesquels il s’est appuyé, ce qui mena D’Alembert à revendiquer vigoureusement son antériorité (voir Wilson, 1987, pour plus de détails).



(a)



(b)

FIGURE 1.5 – (a) La précession des équinoxes se traduit par un déplacement moyen du pôle Nord céleste le long d'un cercle. Dans l'hémisphère Nord, ce déplacement anti-horaire est superposé ici à la carte du ciel, permettant ainsi de localiser les étoiles pouvant indiquer le Nord. Credit : <http://calgary.rasc.ca/radecl.htm> (autorisation de L. McNish, auteur de l'image). (b) L'image de gauche montre la Lune (le 5 juillet 2003) à un moment de sa libration défavorable à l'observation, comparé à l'image de droite (le 29 décembre 2003). Par rapport à l'image de droite, notons la proximité du cratère Endymion et de la Mer des Crises avec le bord de la Lune sur l'image de gauche, et les Mers de Humboldt, Marginale et de Smyth ne sont pas visibles. La libration lunaire est principalement due à la variation de sa vitesse orbitale : on parle de librations optiques. Credit : [www.stargazing.net/david](http://www.stargazing.net/david) (autorisation de David Haworth, auteur de l'image).



montant (flux ou flot) puis descendant (reflux ou jusant) des eaux des mers et des océans remontent à l'Antiquité, au IV<sup>ème</sup> siècle av. J.-C. (Pythéas en Atlantique, Alexandre le Grand en Inde). Même si une description précise des cycles de la marée océanique et de son lien avec la Lune et le Soleil est donnée par Posidonios au I<sup>er</sup> siècle av. J.-C., il faut attendre le travail de Newton pour expliquer correctement ce lien, en termes d'interaction gravitationnelle (voir Cartwright, 2001, pour le détail historique).

### 1.4.1.3 Librations

Enfin, considérons un astre tournant sur lui-même avec une période  $T_{spin}$  (durée du jour sidéral de l'astre), en orbite autour d'un attracteur avec une période orbitale  $T_{orb}$  (durée de l'année sur l'astre). On suppose que  $T_{spin} = T_{orb}$ , ce qui signifie que l'astre tourne en moyenne aussi vite sur lui-même qu'il tourne autour de son astre attracteur. L'astre est alors dit *synchronisé*, et c'est par exemple le cas de notre Lune. On appelle alors librations les oscillations de l'astre perçues par un observateur à la surface de l'astre attracteur. Usuellement, les librations désignent ainsi les faibles oscillations de la Lune que l'on peut observer depuis la Terre (fig. 1.5b). C'est d'ailleurs dans ce contexte que les librations ont été observées pour la première fois par G. D. Cassini (la première explication du phénomène sera proposée par Newton, 1687). Ces librations se composent d'une *libration en latitude* (oscillation Nord-Sud de la Lune, qui semble alors dire oui de la tête) et d'une *libration en longitude* (oscillation Est-Ouest de la Lune, qui semble alors dire non de la tête). Les librations, qu'elles soient en longitude ou en latitude, ont deux origines : une origine purement géométrique due aux positions respectives de la Lune et de l'observateur, on parle alors de *libration optique* ou *apparente*, et une origine physique liée aux oscillations de la rotation lunaire, on parle alors de *libration physique* ou *réelle*.

**Librations optiques en latitude** : la libration optique lunaire en latitude provient principalement de l'inclinaison de  $5.14^\circ$  du plan orbital lunaire par rapport au plan orbital terrestre, appelé *plan de l'écliptique*. Avec l'obliquité lunaire, d'environ  $1.54^\circ$ , un observateur terrestre perçoit ainsi une oscillation (de période  $T_{spin} = T_{orb}$ ) apparente Nord-Sud de la Lune d'environ  $6.7^\circ$ , valeur que les perturbations solaires peuvent modifier de  $\pm 0.9^\circ$ .

**Librations optiques en longitude** : la libration optique en longitude provient principalement de la vitesse variable de la Lune sur son orbite (ce qui est liée à son excentricité orbitale non-nulle). Ainsi, il existe une différence instantanée entre les vitesses angulaires de rotation propre et de révolution orbitale : même si les vitesses moyennes (en temps) sont les mêmes, les vitesses instantanées ne sont pas égales (fig. 1.4c). Ce phénomène donne une oscillation Est-Ouest de la Lune d'environ  $8.16^\circ$  pour un observateur terrestre : la Lune nous montre en moyenne la même face mais il est périodiquement possible d'en voir un peu plus sur son bord Est ou son bord Ouest (fig. 1.5b). Une autre libration optique en longitude, dite *parallactique* ou *diurne*, provient du fait que l'observateur terrestre est à la surface de la Terre<sup>12</sup>. Cela mène à une parallaxe d'environ  $1.9^\circ$ , favorisant l'observation du bord Est (resp. Ouest) lunaire en début (resp. fin) de nuit.

---

12. qui n'est pas ponctuelle!

**Librations physiques** : la libration physique provient de l'oscillation de l'axe de rotation propre de l'astre observé. La libration physique admet deux origines : les forçages périodiques externes, telles que par exemple les perturbations gravitationnelles des autres corps en orbite ou les modifications du moment angulaire atmosphérique (voir Noir *et al.*, 2009, pour une revue), ou des perturbations non-périodiques telles que l'impact d'un astéroïde. Dans le premier cas, les librations physiques sont dites *forçées* et les périodes de librations associées sont liées aux périodes des forçages, tandis que dans le second cas, les librations physiques sont dites *libres*, et la période de libration est alors liée aux fréquences propres de l'astre (donc à sa répartition des masses) même si cette terminologie est parfois ambiguë (e.g. Bois, 1995). Notons qu'après un impact, les librations physiques libres finissent par disparaître, amorties par dissipation (pour la Lune, voir par exemple Rambaux & Williams, 2011, pour plus de détails).

Plus généralement, notons qu'on parle de libration pour tout astre en résonance spin-orbite<sup>13</sup>. Notons aussi que le forçage mécanique associé à la libration en latitude correspond à celui de la nutation en obliquité, tandis que le forçage mécanique associé à la libration en longitude correspond à la variation de la longueur du jour pour un astre qui n'est pas en résonance spin-orbite : ainsi, un même forçage mécanique est appelé différemment si l'astre est en résonance spin-orbite ou non.

## 1.4.2 Précession

### 1.4.2.1 Conteneur sphéroïdal

Dans le cas d'un fluide non-visqueux dans un sphéroïde en précession, l'écoulement de base fut déterminé quasiment simultanément par Hough (1895) à Cambridge, et Sloudsky (1895) à Moscou, puis réobtenu un peu plus tard par Poincaré (1910). Cet écoulement, maintenant appelé *écoulement de Poincaré*, est une rotation solide autour d'un axe fixe dans le référentiel en précession, auquel s'ajoute un écoulement irrotationnel permettant d'assurer la condition de non-pénétration aux bords (voir aussi Malkus, 1994). Cependant, en l'absence de viscosité, une infinité de solutions existe et seule l'introduction d'une couche d'Ekman permet de déterminer sans ambiguïté l'écoulement solution : c'est ce qu'a fait Busse (1968), aboutissant à une formule analytique implicite.

Vanyo (1991) et Vanyo *et al.* (1995) tentèrent de confirmer expérimentalement cette théorie dans un conteneur d'ellipticité<sup>14</sup>  $f = 1/100$  sans toutefois y parvenir clairement (voir Pais & Le Mouél, 2001). Des simulations numériques ont donc été menées, d'abord dans des coquilles sphériques (Tilgner, 1999b; Tilgner & Busse, 2001), puis pour une sphère (Noir *et al.*, 2001), et enfin dans des conteneurs sphéroïdaux par Lorenzani &

13. En ralentissant progressivement sous les effets de marées, les astres passent par des états intermédiaires stables (sous certaines conditions) correspondant à des valeurs rationnelles simples du rapport de la période rotation propre sur la période orbitale. Ces rapports, liés à un phénomène de résonance, sont notés  $p : q$  ou  $p/q$ , ce qui signifie que l'astre tourne  $p$  fois sur lui-même lorsqu'il fait  $q$  révolutions orbitales. Typiquement, Mercure est en résonance spin-orbite 3 : 2, tandis que la Lune actuelle est en résonance 1 : 1 (rotation synchrone).

14. Ici, l'ellipticité  $f$  du sphéroïde est définie par  $f = 1 - b/a$ ,  $a$  et  $b$  étant respectivement le rayon équatorial et polaire.

Tilgner (2001), validant la théorie de Busse (1968). Noir *et al.* (2003) ont alors confirmé expérimentalement cette théorie avec de nouvelles expériences, dans un conteneur de rapport d'aspect plus grand (i.e.  $f = 1/25$ ).

En section 2.5, nous reprenons ce cheminement pour un ellipsoïde triaxial en précession : nous considérons tout d'abord un fluide non-visqueux (section 2.5.1.1) en suivant la méthode de Poincaré (1910), puis un fluide visqueux (section 2.5.2) en étendant les résultats de Busse (1968) à ce cas plus général, avant de valider numériquement ces prédictions (section 2.5.2).

**Interprétation en terme de forçage d'ondes inertielles** : l'écoulement stationnaire décrit ci-dessus correspond au forçage du mode inertiel noté  $(2, 1, 1)$  dans Greenspan (1968), parfois appelé *mode de spinover* ou *mode de tilt-over*. Ce mode, qui correspond dans la sphère à une simple rotation autour d'un axe équatorial, est excité par un léger mais soudain changement de la direction de l'axe de rotation d'un fluide en rotation solide<sup>15</sup> (Greenspan, 1968). La précession pouvant être vue comme une séquence de changements infinitésimaux de la direction de l'axe de rotation du fluide, il est logique de voir apparaître ce mode. De plus, stationnaire dans la sphère, ce mode se met à dériver lorsque l'aplatissement du conteneur est non-nul (il n'a alors plus la dépendance temporelle du tilt-over de la sphère). Ainsi, comme l'ont remarqué Stewartson & Roberts (1963), Greenspan (1968) puis Noir *et al.* (2003), une résonance est possible entre le forçage de précession et le mode de tilt-over.

#### 1.4.2.2 Conteneur cylindrique

Dans une analyse linéaire non-visqueuse, Kelvin (1880) proposa que l'écoulement de base corresponde à une rotation solide, solution particulière des équations sur laquelle se superposent des modes inertiels (les modes de Kelvin), permettant le respect des conditions aux limites sur les parois normales à l'axe de rotation (avec naturellement une fréquence  $\lambda \in [-2; 2]$  pour chacun des modes). Une telle analyse, étendue par Kudlick (1966) et Greenspan (1968) au cas visqueux (prise en compte des couches visqueuses au niveau des parois), suffit pour prédire précisément les structures et paramètres des modes (i.e. amplitude, fréquence et taux de décroissance visqueuse). Elle a été vérifiée par de nombreuses études expérimentales et numériques (Fultz, 1959; McEwan, 1970; Kobine, 1995; Kerswell & Barenghi, 1995). Cependant, lorsque la fréquence de précession est proche de la fréquence libre d'un mode, son amplitude diverge par un phénomène de résonance<sup>16</sup>. Il est alors nécessaire d'inclure à la fois les effets visqueux (ce qui a été fait par Gans, 1970, dans le cas particulier de la résonance d'un cylindre précessant à  $90^\circ$ ) et les effets non-linéaires pour prévoir la saturation en amplitude des modes. L'ensemble de ces effets a finalement été pris en compte dans une analyse faiblement non-linéaire par Meunier *et al.* (2008) dans le cas d'une faible précession (i.e.  $Ro \ll 1$ ) à un angle quelconque, et validé expérimentalement dans la même étude.

15. C'est d'ailleurs ainsi que W. Malkus et W.G. Wing ont déterminé expérimentalement la fréquence propre ( $\lambda_{211} = 1$ ) et le facteur de décroissance visqueuse de ce mode.

16. Cette résonance entre le forçage et une onde inertielle est appelée *résonance directe*, par opposition aux *résonances paramétriques* d'ondes inertielles qui sont des instabilités (section 1.5).

### 1.4.3 Libration en longitude dans une sphère

La libration longitudinale étant une variation périodique de la vitesse angulaire du conteneur, elle n'est rien d'autre qu'une perturbation périodique d'un fluide en rotation. De même que dans l'expérience de Görtler décrite en section 1.3.2, cette perturbation est susceptible d'exciter des ondes inertielles, ce qui a été étudié expérimentalement pour la première fois par Aldridge & Toomre (1969) dans une sphère. De plus, Aldridge (1967) fait état de deux observations expérimentales qui susciteront l'attention :

1. Un écoulement moyen de rotation, dit *zonal*, est créé en volume
2. Une instabilité centrifuge, localisée près de la paroi extérieure se manifeste, sous la forme de rouleaux, dits de *Taylor-Görtler*.

Durant la même période, Wang (1970) obtient analytiquement l'écoulement zonal dans un cylindre avec les méthodes développées pour la précession (Busse, 1968), et confirme ses résultats expérimentalement. Vingt ans plus tard, Rieutord (1991) confirme les résonances d'ondes inertielles observées par Aldridge (voir aussi Tilgner, 1999a, à ce sujet). Plus récemment, motivés par les applications géophysiques de la libration, Noir *et al.* (2009) reviennent à la sphère et étudient expérimentalement l'apparition des rouleaux de Taylor-Görtler. Cette étude est complétée numériquement par Calkins *et al.* (2010), confirmant notamment la présence de l'écoulement zonal. Busse (2010) adapte son calcul de 1968, et obtient ainsi analytiquement l'écoulement zonal dans la sphère pour de faibles fréquences de libration. Cette théorie faiblement non-linéaire a été confirmée expérimentalement et numériquement par Sauret *et al.* (2010), puis étendue au cas d'une fréquence quelconque de libration dans une coquille sphérique (Sauret *et al.*, 2011b). Enfin, Noir *et al.* (2010) étudient expérimentalement l'apparition des rouleaux de Taylor-Görtler dans un cylindre, ainsi que l'écoulement zonal, travaux complétés numériquement et théoriquement par Sauret *et al.* (2011a).

Précisons un peu les choses : de façon générale, on considère un conteneur axisymétrique arbitraire mais fini, de rayon  $R$ , contenant un fluide homogène incompressible de viscosité cinématique  $\nu$ . Dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen, on suppose que la paroi externe tourne à la vitesse

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \left( \Omega_0 + \frac{\Delta\Omega}{2} \cos(\omega_{lib}t) \right) \mathbf{k}, \quad (1.21)$$

où  $\Omega_0$  est la vitesse angulaire moyenne,  $\Delta\Omega$  est l'amplitude de libration,  $\omega_{lib}$  la pulsation de libration et  $\mathbf{k}$  le vecteur unitaire de l'axe de rotation du conteneur. Avec  $R$  et  $\Omega_0^{-1}$  les échelles de longueur et de temps respectivement, la condition aux limites à la paroi externe s'écrit (cf. section 1.2) :

$$\mathbf{u} = r (1 + \epsilon \cos(\omega t)) \mathbf{e}_\theta, \quad (1.22)$$

où  $\mathbf{e}_\theta$  est le vecteur unitaire orthoradial,  $r$  est la coordonnée radiale polaire,  $\mathbf{u}$  la vitesse dans le référentiel galiléen,  $\epsilon = \Delta\Omega/(2\Omega_0)$  l'amplitude adimensionnée de libration et  $\omega = \omega_{lib}/\Omega_0$  la pulsation de libration adimensionnée. Les travaux cités ci-dessus ne considèrent que des géométries axisymétriques, et se concentrent tous sur un régime, appelé ici *non quasi-statique* : la fréquence de libration est suffisamment grande pour que l'intérieur

fluide ne puisse pas suivre les oscillations de la paroi externe. En régime quasi-statique au contraire, le spin-up (cf. section 1.3.5) s'effectue sur un temps beaucoup plus court que la période des oscillations et l'intérieur fluide suit la vitesse de la paroi externe. Ainsi, le temps adimensionnel de spin-up étant d'ordre  $1/\sqrt{E}$  en présence de pompage d'Ekman, le rapport  $\omega/\sqrt{E}$  permet de distinguer le régime quasi-statique ( $\omega/\sqrt{E} \ll 1$ ) de l'autre régime ( $\omega/\sqrt{E} \gg 1$ ). Pour  $\omega/\sqrt{E} \gg 1$ , le fluide en volume est donc immobile en première approximation, hormis proche de la paroi externe, sur une épaisseur visqueuse, où il est soumis au cisaillement induit par les variations de vitesse de la paroi. Cependant, un écoulement moyen zonal est alors observé dans l'intérieur fluide, d'ordre  $\epsilon^2$ , et l'écoulement de base de la libration pour l'intérieur fluide d'un conteneur axisymétrique peut donc s'écrire

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \omega \ll \sqrt{E} : r (1 + \epsilon \cos(\omega t)) \mathbf{e}_\theta \\ \omega \gg \sqrt{E} : r (1 + \epsilon^2 \Omega_2(r)) \mathbf{e}_\theta \end{cases} \quad (1.23)$$

avec  $\Omega_2(r)$  la vitesse angulaire de l'écoulement zonal moyen, obtenue analytiquement par Wang (1970) pour le cylindre, et Busse (2010) en géométrie sphérique (voir aussi Sauret *et al.*, 2011b).

#### 1.4.4 Déformations de marées

Considérons un système binaire, par exemple formé d'une planète et de sa lune. Chacun des corps exerce sur l'autre un champ gravitationnel dont résultent des forces de marées qui déforment l'ensemble de leurs couches : c'est la *déformation de marées*. Ainsi, notre Lune déforme la croûte terrestre deux fois par jour avec une amplitude de 50 cm. En première approximation, la déformation de marées déforme les coupes normales à l'axe de rotation en des ellipses (section 1.4.4.1). Cependant, de façon plus générique, la déformation de marées peut-être vue comme un développement multipolaire (section 1.4.4.2), somme d'une déformation dipolaire, tripolaire, etc.

##### 1.4.4.1 Déformation elliptique (ou dipolaire)

En première approximation, la déformation de marées rend les parois elliptiques. Une couche fluide interne adjacente à une paroi solide, telle que par exemple la couche fluide du noyau terrestre à la frontière noyau-manteau, est donc forcée de suivre une ellipse à vitesse constante. Mathématiquement, la condition à la paroi, ellipse d'équation  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ , s'écrit donc  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = U_w$  avec  $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = (x b/a, y a/b)$  un vecteur tangent à l'ellipse et  $\mathbf{t} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}/|\tilde{\boldsymbol{\tau}}|$  le vecteur unitaire associé. Dans l'intérieur (le 'bulk'), les lignes de courant sont donc elliptiques et le champ de vitesses associé à un tel écoulement s'écrit de façon exacte :

$$\mathbf{u}_b = -\frac{a}{b} y \mathbf{e}_x + \frac{b}{a} x \mathbf{e}_y, \quad (1.24)$$

avec  $(a, b)$  les demi-axes des ellipses. Cet écoulement, solution des équations de Navier-Stokes, est l'écoulement considéré par Gledzer *et al.* (1977) ou Kerswell (2002) pour l'étude

de l'instabilité elliptique en géométrie ellipsoïdale. Par ailleurs, lorsque l'instabilité elliptique est étudiée en milieu infini, Le Dizès & Eloy (1999) ou Kerswell (2002) privilégient l'écoulement suivant écrit sous forme de fonction de courant  $\Psi$  en coordonnées polaires<sup>17</sup> :

$$\Psi = -\frac{r^2}{2} + \beta \frac{r^2}{2} \cos 2\theta, \quad (1.25)$$

avec  $\beta = |a^2 - b^2|/(a^2 + b^2)$ , appelé ellipticité par la suite<sup>18</sup>. Le champ de vitesse associé à la fonction de courant (1.25) est donc

$$\mathbf{u}_b = -(1 + \beta) y \mathbf{e}_x + (1 - \beta) x \mathbf{e}_y. \quad (1.26)$$

Le lien entre les expressions (1.24) et (1.26) est le suivant. Considérant  $\beta = |a^2 - b^2|/(a^2 + b^2)$ , Kerswell (2002) pose  $(a, b) = (\sqrt{1 + \beta}, \sqrt{1 - \beta})$  pour l'écoulement (1.24), ce qui mène à l'écoulement considéré par Bayly (1986) :

$$\mathbf{u}_b = -A y \mathbf{e}_x + A^{-1} x \mathbf{e}_y, \quad (1.27)$$

avec  $A = \sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)}$ , parfois également appelé ellipticité ou paramètre d'ellipticité. L'échelle de longueur est alors donnée par  $R = \sqrt{(a^2 + b^2)}/2$ . Comme le remarquent Bayly (1986) et Kerswell (2002), les écoulements (1.26) et (1.24) (ou (1.27)) sont alors équivalents à l'échelle de temps près : le facteur multiplicatif  $\sqrt{1 - \beta^2}$  nécessaire pour passer de (1.27) à (1.26) revient à passer de l'échelle de temps  $\Omega^{-1}$  à l'échelle de temps  $(\sqrt{1 - \beta^2} \Omega)^{-1}$ . Cette nouvelle échelle de temps permet d'obtenir un écoulement qui disparaît lorsque  $\beta \rightarrow 1$ , comme pour l'écoulement (1.26), au contraire de l'écoulement (1.24) qui tend vers un écoulement de Couette plan lorsque  $\beta \rightarrow 1$ . Dans (1.25) ou (1.26), le premier terme correspond à une rotation solide, et le deuxième à un écoulement élongationnel (à  $-45^\circ$  de l'axe polaire). Notons dès à présent que les lignes d'iso-vitesses sont alors des ellipses d'ellipticité  $2\beta$ .

Il est important de remarquer que la vitesse de (1.24) vaut  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = \|\tilde{\mathbf{r}}\|^{-1} = [(x b/a)^2 + (y a/b)^2]^{-1/2}$ , ce qui implique qu'elle varie le long de la ligne de courant : la vitesse est plus faible dans les zones de plus grande courbure (e.g. la vitesse est plus grande au petit-axe qu'au grand axe). Par conséquent, entre l'intérieur et la paroi, une zone de raccordement va apparaître pour faire la transition entre les lignes de courant elliptiques de l'intérieur, solution de Navier-Stokes mais avec une vitesse variable, et la paroi où le fluide est forcé de suivre une ellipse à vitesse constante. Ce raccordement est localisé dans la couche visqueuse de proche paroi, i.e. la couche d'Ekman en géométrie sphérique, d'épaisseur typique  $O(\sqrt{E})$ , et il est possible d'en tenir compte sous certaines hypothèses<sup>19</sup> (cf. section 1.4.4.2).

17. avec par définition ( $u_r = r^{-1} \partial_\theta \Psi$ ,  $u_\theta = -\partial_r \Psi$ )

18.  $\beta$  n'est pas l'excentricité mathématique  $\varepsilon$  des lignes de courant, liée à  $\beta$  par  $\varepsilon = \sqrt{2\beta/(1 + \beta)}$ . La définition de l'ellipticité variant selon les sources, nous appellerons ici  $\beta$  l'ellipticité.

19. Concernant la couche visqueuse associée à cet écoulement de base, mentionnons également ici le travail peu connu de Kilgenstein (1985) qui calcule analytiquement son développement aux courts instants pour un ellipsoïde triaxial dont la rotation est soudainement stoppée.

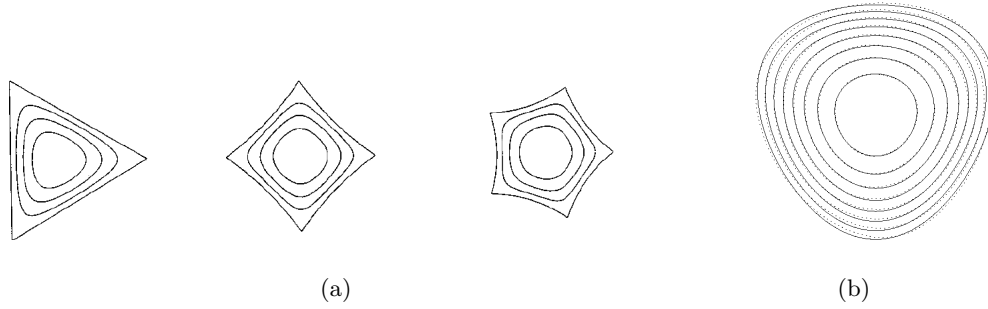


FIGURE 1.6 – (a) Lignes de courant pour  $n = 3, 4, 5$  (de gauche à droite), la ligne de courant extérieure étant obtenue pour  $\beta_n = 1$  (tiré de Le Dizès & Eloy, 1999). (b) Figure tirée de Eloy (2000) montrant l'écoulement théorique (1.28), en traits pleins, et l'écoulement (1.30) tenant compte de la correction visqueuse en traits discontinus pour  $n = 3$ ,  $\beta_3 = 0.2$  et  $E = 0.1$ .

#### 1.4.4.2 Déformation multipolaire

Comme l'ont remarqué Le Dizès & Eloy (1999), il est possible de généraliser l'écoulement elliptique présenté en section 1.4.4.1 à une déformation multipolaire, définie par la fonction de courant

$$\Psi_n = -\frac{r^2}{2} + \beta \frac{r^n}{n} \cos n\theta, \quad (1.28)$$

où  $n$  est un entier plus grand que 1 lié au nombre de symétries de l'écoulement associé<sup>20</sup>. L'écoulement est donc ici une rotation solide (premier terme), superposé à un écoulement élongationnel multipolaire (second terme) d'ordre  $n$  et d'intensité  $\beta$ . La forme de la ligne de courant  $\Psi_n = C$  est caractérisée par le paramètre (voir Le Dizès & Eloy, 1999, pour plus de détails)

$$\beta_n = \beta \left( \frac{2nC}{n-2} \right)^{n/2-1} \quad (1.29)$$

qui mesure son asymétrie (voir fig. 1.6). Pour  $n = 2$ , l'écoulement est celui de la section 1.4.4.1 : toutes les lignes de courant sont des ellipses d'ellipticité  $\beta_2 = \beta$ . Pour  $n \geq 3$ , la déformation des lignes de courant n'est plus homogène, ce que reflète la variation de  $\beta_n$  avec la valeur  $C$  : la ligne de courant tend vers le cercle pour les petits  $\beta_n$  et devient de plus en plus angulaire lorsque  $\beta_n$  tend vers 1, valeur limite pour laquelle apparaissent  $n$  points singuliers (coins). Pour  $\beta_n > 1$ , les lignes de courant ne sont plus fermées et nous nous restreignons donc à la gamme  $\beta_n \in [0; 1]$ .

De même qu'en section 1.4.4.1, si cet écoulement est généré par une paroi déformée, l'adhérence à la paroi impose une vitesse tangentielle constante le long de celle-ci et une zone de raccordement va alors apparaître entre l'intérieur, où (1.28) est établi, et la paroi.

20.  $n = 1$  correspond simplement à un déplacement du centre.

La fonction de courant (1.28) doit alors être corrigée afin de tenir compte de l'existence de cette zone. Dans la limite des faibles déformations (i.e.  $\beta \ll 1$ ), la correction au premier ordre de la fonction de courant pour de faibles viscosités  $E \lesssim \beta$  a été obtenue analytiquement par Eloy (2000). La fonction de courant de l'écoulement total peut alors s'écrire

$$\Psi_n = -\frac{r^2}{2} + \beta \frac{r^n}{n} \sin n\theta + \beta \sqrt{E} \frac{1-n}{n^{3/2}} e^{k_\nu(r-1)} \sin \left[ k_\nu(r-1) + n\theta + \frac{\pi}{4} \right] \quad (1.30)$$

avec  $k_\nu = \sqrt{n/(2E)}$  et une paroi située en  $\psi = -1/2$  (cf. fig. 1.6b).

## 1.5 Instabilités inertielles

Les instabilités inertielles sont les instabilités directement liées à l'inertie du fluide et donc au terme  $D_t \mathbf{u} = \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  dans l'équation de Navier-Stokes (1.1). Les instabilités inertielles existent donc au sein d'un fluide homogène non-visqueux, contrairement par exemple à l'instabilité de Rayleigh-Taylor ou à l'instabilité visqueuse des écoulements parallèles. Un certain nombre d'instabilités, telles que l'instabilité de Taylor-Couette (ou centrifuge) ou l'instabilité elliptique, se rangent dans cette classe d'instabilités.

Considérant plus particulièrement les fluides en rotation, le passage dans le référentiel tournant fait émerger du terme d'inertie  $D_t \mathbf{u}$  les pseudo-forces d'inertie (cf. encadré de la section 1.2). Les instabilités inertielles peuvent alors être plus particulièrement rattachées à l'une ou l'autre de ces forces : l'instabilité de Taylor-Couette par exemple est plus particulièrement associée à la présence de la force d'entraînement centrifuge tandis que l'instabilité elliptique est plutôt reliée à la force de Coriolis. Naturellement, la famille des instabilités inertielles plutôt rattachées à la force de Coriolis trouvent une description privilégiée en terme d'ondes inertielles dans la mesure où ces dernières sont directement associées à cette force. Ainsi, il est possible de les interpréter en termes de résonance d'ondes inertielles, ce que l'on appellera par la suite l'approche ou l'analyse *globale*<sup>21</sup> : c'est par exemple le cas des instabilités de Crow, elliptique, multipolaire (section 2.3.9) ou de l'instabilité de courbure d'un anneau de vorticité (Fukumoto & Hattori, 2003; Hattori & Fukumoto, 2003; Fukumoto & Hattori, 2005). Dans le cas particulier où il existe un forçage périodique imposé, en espace ou en temps, ces instabilités s'insèrent dans le cadre plus général des instabilités paramétriques : le mécanisme sous-jacent est alors une résonance d'une paire d'ondes inertielles avec la perturbation externe périodique appliquée (cf. encart).

Donnons quelques exemples. Considérons tout d'abord le cas d'un forçage temporel avec par exemple un cylindre de fluide en rotation dont la hauteur varie périodiquement en temps, ce qui suppose un fluide légèrement compressible (fig. 1.7 a). De même qu'en section 1.3.2, il est alors possible d'exciter des ondes inertielles : quand la fréquence du forçage est proche de celle d'une onde, une *résonance directe* entre le forçage et l'onde permet à l'onde de croître et de se maintenir en dépit de l'amortissement visqueux. Dans ce cas, déjà rencontré pour l'écoulement de base d'un cylindre en précession (section 1.4.2), la croissance initiale est régie par un processus linéaire, transférant directement de

21. Par opposition à une approche ou analyse *locale* : voir section 2.1.3.



**Instabilité paramétrique**

Un oscillateur est paramétrique lorsque sa période propre dépend du temps. Typiquement, un enfant sur une balançoire déplie et replie ses jambes au cours d'une période, modifiant à chaque instant la longueur effective du pendule ainsi constitué et donc sa période propre. Le système modèle de ce type d'instabilité est le botafumeiro, encensoir géant fixé à la croisée du transept de la cathédrale de St Jacques de Compostelle : huit hommes (les tiraboleiros) donnent de la corde au point le plus élevé du mouvement et tirent sur elle au point le plus bas, accroissant ainsi spectaculairement l'oscillation de l'encensoir <sup>a</sup>. En l'assimilant à un pendule simple de longueur  $l$  dont le point de suspension oscille verticalement à la pulsation  $\omega_e$ , en l'absence de frottement son mouvement est régi par

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 [1 + 2f \cos(\omega_e t)] \sin \theta = 0$$

où  $\theta$  est la position de l'encensoir par rapport à la verticale,  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  est la période propre du pendule et  $f$  un paramètre du forçage (uniquement dépendant de la gravité, de l'amplitude et de la pulsation du forçage). L'étude de l'équation ci-dessus, appelée *équation de Mathieu*, montre que l'oscillateur peut alors se déstabiliser sous certaines conditions (i.e. si l'énergie est apportée au 'bon' moment) : l'amplitude des mouvements augmente alors à chaque période. Ce type d'instabilité se retrouve dans différents domaines de la physique tels que la mécanique des fluides avec par exemple l'instabilité de Faraday ou l'électrocinétique avec un circuit LC (i.e. avec une inductance et une capacité) où la distance entre les armatures du condensateur varie périodiquement.

<sup>a</sup>. Il s'élève à 20.6 m de haut, formant un arc de 65 m tout au long du transept et passe au ras du sol à une vitesse de 68 km/h, laissant derrière lui un fin sillage de fumée et d'encens.

l'énergie du forçage vers l'onde. Un autre processus peut également avoir lieu, d'origine fondamentalement non-linéaire cette fois : le terme  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  peut permettre de coupler deux ondes inertielles avec le forçage externe, la résonance est alors une *résonance triadique*. Cette instabilité paramétrique, étudiée expérimentalement (Graftieaux *et al.*, 2002; Graftieaux, 2003) et numériquement (Duguet, 2004; Duguet *et al.*, 2005, 2006), a récemment été analysée théoriquement (Racz, 2006; Racz & Scott, 2008a,b) avec les méthodes et outils déjà développés pour les autres instabilités paramétriques des fluides en rotation, comme l'instabilité elliptique ou l'instabilité de précession d'un fluide non-visqueux dans un sphéroïde.

Considérons à présent un exemple de forçage spatial avec un vortex soumis à un cisaillement dans un plan normal à l'axe de rotation, par exemple du fait de la présence d'un deuxième vortex parallèle ou du fait que le vortex tourne au sein d'un conteneur déformé. Dans ce cas, de même que dans le cas du forçage temporel, le cisaillement peut se combiner avec une paire d'ondes inertielles, formant une résonance triadique, et ainsi donner lieu à une instabilité paramétrique appelée instabilité elliptique. Cette instabilité, au centre de ce travail, sera présentée plus en détail en section 2.1. Notons que dans le premier cas des deux vortex en interaction, les centres des vortex sont susceptibles de se déplacer, contrairement au cas du fluide tournant dans un conteneur déformé. Dans le cas

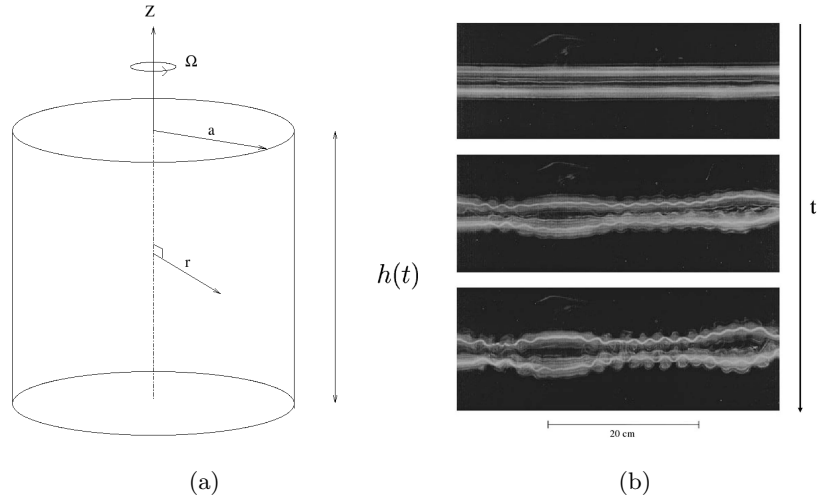


FIGURE 1.7 – (a) *Cylindre de fluide en rotation dont la hauteur varie périodiquement en temps.* (b) *Visualisation, issue de Leweke & Williamson (1998a), de l'évolution temporelle (du haut vers le bas) d'une paire de vortex sous l'action combinée de l'instabilité de Crow (grande longueur d'onde) et de l'instabilité elliptique (courte longueur d'onde). La coupe est faite le long de l'axe de rotation des deux vortex, pour  $Re=2750$ , et la paire évolue vers l'observateur.*

où les vortex parallèles sont contra-rotatifs, cela peut donner lieu à une autre instabilité appelée *instabilité de Crow* ou *instabilité coopérative*<sup>22</sup> (voir aussi section 1.1.1). Cette instabilité, qui n'existe donc pas dans le cas du vortex confiné dans un conteneur, résulte également d'une résonance triadique (e.g. Kuhlmann *et al.*, 2005). Contrairement à l'instabilité elliptique qui peut se développer sur des longueurs d'ondes arbitrairement petites en l'absence de viscosité, l'instabilité de Crow est une instabilité dite de grande longueur d'onde dans la mesure où elle se développe sur une échelle de l'ordre de la distance entre les vortex (fig. 1.7 b).

Enfin, dans le cas d'un fluide tournant au sein d'un conteneur de taille fixée, outre l'instabilité elliptique, d'autres instabilités inertielles peuvent se développer. Si par exemple, le cisaillement qui s'ajoute à la rotation de base n'est pas dipolaire mais tripolaire ou, plus généralement, multipolaire (cf. section 1.4.4.2), une *instabilité multipolaire* peut se développer sur l'écoulement de base (1.28), le modifiant complètement. Cette instabilité, dont l'étude commence avec l'analyse de stabilité locale de Le Dizès & Eloy (1999), fera l'objet de la section 2.3.9.

Par ailleurs, dans le cas d'un conteneur axisymétrique en précession, l'écoulement de base introduit en section 1.4.2 peut se déstabiliser par couplage de modes inertiels, instabilité appelée ici *instabilité inertielle de précession*. Cette instabilité est bien comprise

22. Notons qu'un unique vortex proche d'une paroi devrait aussi exciter cette instabilité mais cela n'a pas encore été observé.

pour le cylindre depuis les travaux théoriques et expérimentaux de Lagrange *et al.* (2007, 2008, 2011). En revanche, en géométrie sphérique, elle reste mal connue en dépit de l'étude théorique de Kerswell (1993b) sur l'instabilité d'un fluide non-visqueux dans un sphéroïde en précession<sup>23</sup>. En effet, les résultats numériques de Tilgner & Busse (2001); Lorenzani (2001); Lorenzani & Tilgner (2001, 2002, 2003) montrent qu'une instabilité dite visqueuse apparaît dans le cas de fluides en rotation au sein d'une sphère en précession (le mécanisme proposé par Kerswell (1993b), basé sur le cisaillement dû à l'ellipticité du conteneur, ne peut expliquer en l'état une telle instabilité). Cette instabilité a été interprétée (Lorenzani & Tilgner, 2003) comme une déstabilisation des couches internes de cisaillement (voir section 1.3.4). Ainsi, en géométrie sphéroïdale, l'instabilité inertielle de précession et l'instabilité visqueuse de précession sont toutes deux susceptibles d'être excitées, mais il n'est pas possible actuellement de distinguer l'une de l'autre en présence d'adhérence aux parois (voir l'étude de Lorenzani & Tilgner, 2003, qui porte sur ce problème) : nous regrouperons donc ces instabilités sous le terme générique *instabilité de précession*<sup>24</sup>.

---

23. Kerswell (1993b) la nomme *instabilité de cisaillement*, appellation que nous ne retenons pas pour éviter toute confusion avec l'*instabilité de Kelvin-Helmholtz* (aussi appelée *instabilité de cisaillement*).

24. Note : ces deux formes d'instabilité de précession sont capables d'exciter une dynamo (voir respectivement Tilgner, 2005; Wu & Roberts, 2009, pour les instabilités visqueuse et inertielle de précession).

## 1.6 Problématique générale

Les sections précédentes ont introduit les mécanismes importants à l'œuvre au sein des fluides en rotation. Parmi ceux-ci, les instabilités jouent un rôle particulier car leur apparition modifie profondément l'écoulement fluide. Ainsi, un simple fluide en rotation au sein d'un conteneur ellipsoïdal est susceptible de se déstabiliser complètement par excitation de l'instabilité elliptique : l'écoulement devient alors complexe et complètement tridimensionnel. Les forces de marées déformant l'ensemble des enveloppes d'un astre (atmosphère, océan, manteau, noyau d'une planète, zones convectives et radiatives d'une étoile, etc.) leur donnant une forme ellipsoïdale, il a été suggéré que l'instabilité elliptique puisse apparaître au sein des enveloppes fluides de certaines planètes. Une telle apparition aurait de multiples répercussions géophysiques pour l'astre en question. Par exemple, l'écoulement, profondément modifié par l'instabilité, n'évacuerait pas la chaleur avec la même efficacité, ce qui est primordial dans le cas de l'interface noyau liquide - manteau. Par ailleurs, dans le cas d'un fluide conducteur, l'apparition de l'instabilité a un effet direct sur le champ magnétique. Enfin, la dissipation accrue dans la couche fluide, liée à la présence de l'instabilité, doit être prise en compte dans l'évolution orbitale de l'astre. Son apparition au sein d'étoiles doubles permettrait par exemple d'accélérer leur synchronisation. Ces quelques exemples montrent que les conséquences de l'instabilité elliptique peuvent être importantes, et il importe donc de correctement la caractériser dans un contexte planétaire. C'est à cela que s'attache ce travail.

Au sein du chapitre 2, la pertinence de l'instabilité elliptique dans un contexte planétaire est étudiée. Ainsi, la section 2.3 caractérise l'instabilité elliptique d'un point de vue hydrodynamique, apportant par exemple un élément de réponse aux questions suivantes : quelle est l'influence de l'aplatissement polaire d'une planète ? Quelle est la vigueur de l'écoulement généré par l'instabilité elliptique ? Quel est le surcroît de dissipation liée à l'apparition de l'instabilité elliptique au sein du noyau liquide d'une planète ? La section 2.4 étudie l'interaction de la libration et des marées, répondant entre autres à la question suivante : sous quelles conditions une instabilité elliptique peut-elle être excitée par libration ? Enfin, la section 2.6 considère l'influence d'un champ thermique sur l'instabilité elliptique. Ce point est important car la plupart des écoulements géophysiques sont convectifs, et il est donc important de vérifier que l'instabilité elliptique peut se développer sur des tels écoulements.

Le chapitre 3 s'intéresse à l'interaction de l'instabilité elliptique avec un champ magnétique. En effet, le champ magnétique des astres étant souvent mesuré, il pourrait être une signature de la présence de l'instabilité elliptique au sein d'un astre. Le problème inductif, posé par le cas d'un astre immergé au sein d'un champ magnétique externe tel que par exemple Io, soumis au champ magnétique jovien, est d'abord considéré et caractérisé numériquement, expérimentalement et théoriquement. Le problème dynamo, plus difficile, qui considère l'excitation spontanée d'un champ magnétique par l'instabilité elliptique, est également abordé avec les outils numériques et expérimentaux.

Enfin, en section 4, les résultats obtenus sont appliqués à différents astres. En section 4.2, les différents scénarios pouvant exciter une instabilité elliptique sont présentés dans

un contexte astrophysique général, liant mécanique des fluides et mécanique céleste. La stabilité des corps telluriques du système solaire vis à vis de l'instabilité elliptique est alors réévaluée, et l'étude étendue aux exoplanètes telluriques. En section 4.1, nous considérons plus particulièrement la Lune primitive. Proposant une nouvelle interprétation de l'origine du magnétisme lunaire, encore mal expliquée, nous combinons nos résultats pour évaluer quantitativement la pertinence d'un scénario s'appuyant sur une instabilité inertielle et démontrons son accord avec les données disponibles. Enfin, en section 4.3, le cas des corps gazeux est abordé, en considérant particulièrement les systèmes extra-solaires à Jupiters chauds.