

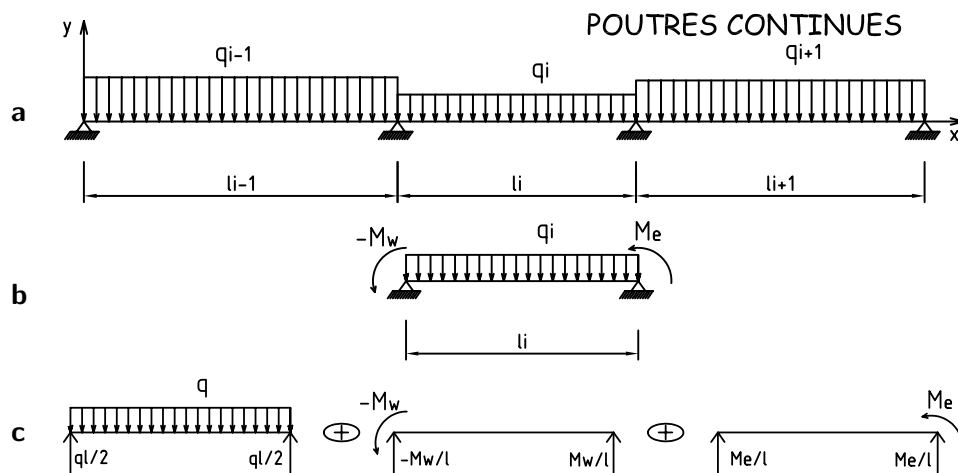
## 7 Poutres et Planchers continus

L'objectif de cette partie est de présenter les méthodes de calcul des sollicitations (moment fléchissant et effort tranchant) dans les poutres et planchers continus. Comme nous le verrons, ces méthodes sont adaptées au matériau béton armé puisqu'elles prennent en compte les capacités d'adaptation et le phénomène d'amortissement du béton armé.

### 7.1 Particularités liées au Béton Armé

#### 7.1.1 Rappel de Résistance des Matériaux

Une poutre continue est une poutre reposant sur plusieurs appuis simples, et dont les moments sur appuis, hormis les appuis de rives, ne sont pas nuls (voir la Figure 47a pour la définition des notations).



**Fig. 47** : **a** : notations utilisées pour l'étude d'une poutre continue. **b** : définition de la travée isostatique de référence. **c** décomposition du chargement sur la travée isostatique de référence en trois chargements simples.

Pour une poutre élastique, ce problème peut être résolu par l'utilisation de la formule des trois moments (ou méthode de Clapeyron) qui fournit  $n - 2$  équations reliant les moments sur appuis (où  $n$  est le nombre d'appuis). Sachant que sur les deux appuis de rive les moments sont nuls, il est alors possible de résoudre ce système et ainsi d'obtenir les moments sur appuis. Une fois connus les moments sur appuis  $M_w$  et  $M_e$ , chaque travée peut être étudiée séparément comme une poutre isostatique soumise à deux moments à ces extrémités, comme indiqué sur la Figure 47b.

Le théorème de superposition permet alors de résoudre ces trois chargements (chargement sur la travée, moments à l'appui gauche et à l'appui droit) séparément, comme indiqué sur la Figure 47c.

Finalement, en notant  $\mu(x)$  le moment de la travée isostatique de référence dû au chargement sur la poutre (qui peut être plus compliqué que la charge répartie tracée sur la Figure 47), on obtient le moment fléchissant et l'effort

tranchant le long de la travée :

$$M(x) = \mu(x) + M_w \left(1 - \frac{x}{l}\right) + M_e \frac{x}{l}$$

$$V(x) = -\frac{d\mu(x)}{dx} + \frac{M_w - M_e}{l}$$

La résolution de l'équation  $V(x) = 0$  permet de connaître l'abscisse d'effort tranchant nul et donc de moment fléchissant maximal en travée.

### 7.1.2 Adaptation du Béton Armé

Pour comprendre le phénomène d'adaptation, nous allons étudier le comportement à la rupture de trois poutres en béton armé de même section brute et de même portée  $l$ , et armées par la même section d'acier  $A_0$ . Chacune de ces trois poutres est soumise à une charge ponctuelle à mi-travée. La poutre **1**, dite de référence, a ses armatures en partie basse et repose sur deux appuis simples. La poutre **2** a le même ferrailage que la première, mais elle est encastree à ses extrémités. La poutre **3** est identique à la deuxième mais elle est montée à l'envers (voir la Figure 48a).

Après application d'une charge relativement faible, les parties de béton tendu qui ne sont pas armées vont se fissurer, comme indiqué sur la Figure 48b. La poutre **1** est bien armée, et elle ne va pas fissurer. La poutre **2** se fissure au niveau des encastremets, tandis que la poutre **3** se fissure au centre.

Finalement, la poutre **2** après fissuration fonctionne de façon identique à la poutre **1**, tandis que la poutre **3** fonctionne comme deux consoles de portée  $l/2$  reprenant chacune une demi charge (voir Figure 48c). Par conséquent, pour les trois poutres, le moment dans la section la plus sollicitée vaut :

$$M = \frac{Pl}{4}.$$

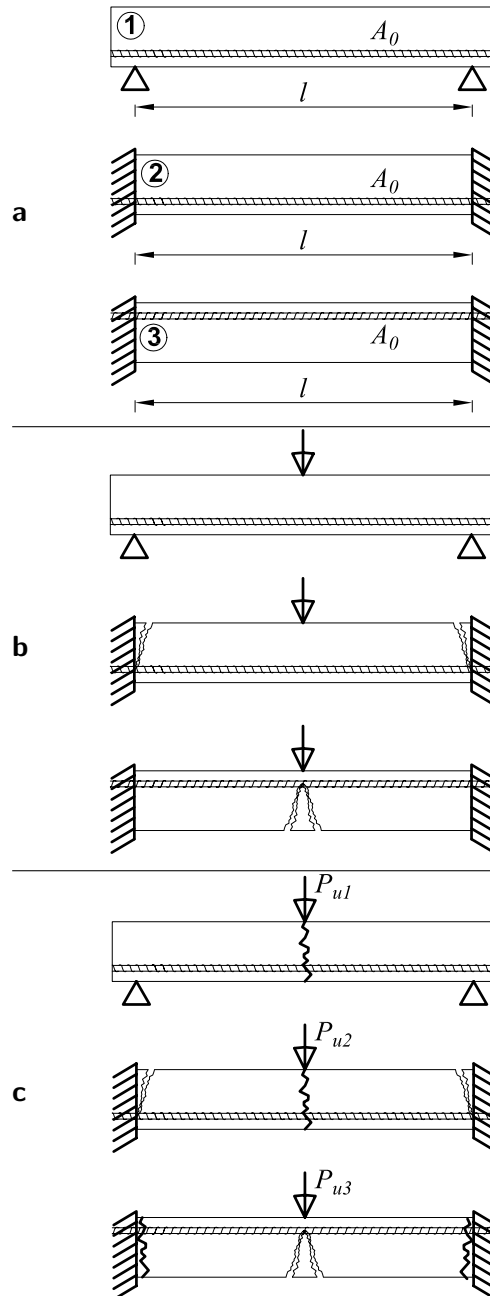
A l'ELU, le moment ultime étant proportionnel à la section d'acier dans la section la plus sollicitée ( $M_u \approx A_0 z f_{su}$ ), on en déduit que cette limite est atteinte pour une même valeur de la charge ( $P_{u1} = P_{u3} = P_{u2} \approx 4A_0 z f_{su}/l$ ).

En conclusion, la charge à la rupture ne dépend que de la section d'acier  $A_0$  correspondant au fonctionnement isostatique, indépendamment de la position des aciers pour les poutres encastrees. La fissuration des sections les moins armées permet une redistribution des moments qui diffère de celle donnée par la théorie de la résistance des matériaux, c'est le phénomène d'adaptation.

On adoptera pour les poutres continues un ferrailage analogue à celui défini sur la Figure 49, où les sections d'acier en travée  $A_t$  et sur appuis  $A_w$  et  $A_e$  (chapeaux) vérifient l'inégalité suivante :

$$A_t + \frac{A_w + A_e}{2} \geq A_0,$$

avec  $A_0$  la section d'acier calculée pour la travée isostatique de référence correspondante.



**Fig. 48** : **a** : Définition des trois poutres de portée  $l$ , de même section de béton et armée chacune par une section d'acier  $A_0$ . **b** : Allure de la fissuration dans les trois poutres pour en début chargement. **c** Allure de la fissuration à la rupture.

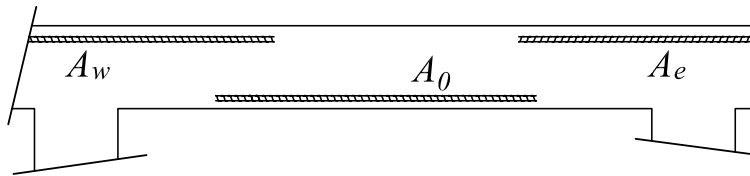


Fig. 49: Forme du ferrailage à adopter dans une poutre continue

### 7.1.3 Phénomène d'amortissement

Sous charge de longue durée, ce qui est généralement le cas pour des ouvrages de Génie Civil au moins pour les charges permanentes, le béton armé est un matériau qui flue. C'est à dire qu'il continue à se déformer au cours du temps même si la charge reste constante. Cette déformation de fluage est loin d'être négligeable pour le béton armé puisqu'elle peut représenter jusqu'à trois fois la déformation instantanée, pour une charge constante et un temps infini.

Pour les poutres continues, le fluage entraîne que l'amortissement est beaucoup plus rapide que pour une poutre élastique. Par conséquent, on supposera que le moment sur un appui ne dépend que des charges supportées par les deux travées adjacentes de l'appui considéré, comme indiqué sur la Figure 50.

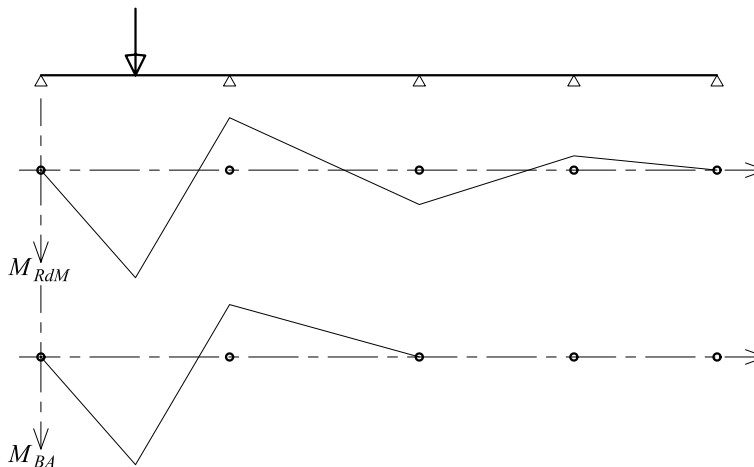


Fig. 50 : Comparaison du moment fléchissant obtenu dans une poutre continue par application d'une force ponctuelle sur la travée de rive, dans le cas de la théorie de la RdM et dans le cas du béton armé.

## 7.2 Domaines d'application des méthodes propres aux BA

Selon que les quatre conditions suivantes sont vérifiées ou pas, on appliquera différentes méthodes (B.6.2,2).

- a) la méthode s'applique aux *constructions courantes*, c'est-à-dire lorsque  $q \leq 2g$  ou  $q \leq 5kN/m^2$ .

- b) les moments d'inertie des sections transversales sont identiques le long de la poutre.
- c) les portées successives sont dans un rapport compris entre 0.8 et 1.25 (25%).
- d) la fissuration ne compromet pas la tenue du béton armé et de ses revêtements (FPP).

✓ Si **a**, **b**, **c** et **d** sont vérifiées, on appliquera la *méthode forfaitaire* (Annexe E1 du BAEL).

✓ Si **a** n'est pas vérifiée (cas des planchers à charge d'exploitation relativement élevée), on appliquera la *méthode de Caquot* (Annexe E2 du BAEL).

✓ Si **a** est vérifiée mais une ou plus des trois conditions **b**, **c** et **d** ne le sont pas, on appliquera la *méthode de Caquot minorée* (Annexe E2 du BAEL).

Ces trois méthodes sont présentés dans les parties suivantes.

**Remarque 1** Si les quatre conditions sont vérifiées, il est toujours possible d'utiliser la méthode de Caquot minorée, qui conduira à un ferrailage mieux dimensionner que celui obtenu avec la méthode forfaitaire. Mais la méthode de Caquot est plus longue que la méthode forfaitaire!

**Remarque 2** Ces méthodes s'appliquent uniquement aux poutres supportant une dalle faisant office de table de compression. Pour le calcul d'une poutre de chemin de roulement par exemple, on utilisera la théorie classique de la résistance des matériaux pour calculer les moments sur appuis.

## 7.3 Méthode forfaitaire (Annexe E.1)

### 7.3.1 Domaine d'application B.6.210

Pour déterminer les moments sur appui et en travée, il est possible d'utiliser la méthode forfaitaire si les quatre conditions **a**, **b**, **c** et **d** sont vérifiées.

### 7.3.2 Application de la méthode

**Valeurs des moments** Les valeurs des moments en travée  $M_t$  et sur appui  $M_w$  et  $M_e$  doivent vérifier :

1.  $M_t + (M_w + M_e)/2 \geq Max(1.05M_0, (1 + 0.3\alpha)M_0)$
2.  $M_t \geq (1 + 0.3\alpha)M_0/2$  dans une travée intermédiaire,  
 $M_t \geq (1.2 + 0.3\alpha)M_0/2$  dans une travée de rive.
3. la valeur absolue de chaque moment sur appui intermédiaire doit être au moins égale à :  
0.6 $M_0$  pour une poutre à deux travées,  
0.5 $M_0$  pour les appuis voisins des appuis de rive d'une poutre à plus de deux travées,  
0.4 $M_0$  pour les autres appuis intermédiaires d'une poutre à plus de trois travées.

avec  $M_0$  la valeur maximale du moment fléchissant dans la *travée de référence* (travée isostatique indépendante de même portée et supportant le même chargement que la travée considérée) et  $\alpha = q/(g + q)$  le rapport des charges d'exploitation à la somme des charges non pondérée. La Figure 51 résume ces conditions.

#### Deux travées

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 0.6 \max(M_{01}, M_{02}) & & 0 & & M_a < 0 \\ \Delta & & \Delta & & \Delta & & M_t > 0 \\ & (0.6+0.15\alpha) M_{01} & & (0.6+0.15\alpha) M_{02} & & & \end{array}$$

#### Plus de deux travées

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 0.5 \max(M_{01}, M_{02}) & & 0.4 \max(M_{02}, M_{03}) & & \\ \Delta & & \Delta & & \Delta & & \\ & (0.6+0.15\alpha) M_{01} & & (0.5+0.15\alpha) M_{02} & & (0.5+0.15\alpha) M_{03} & \\ \text{appui de} & & \text{appui voisin} & & \text{appui} & & \\ \text{rive} & & \text{de rive} & & \text{intermédiaire} & & \end{array}$$

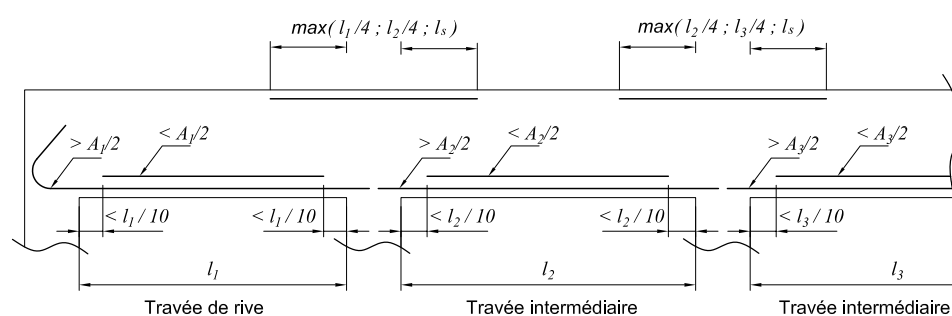
**Fig. 51** : Conditions données par la méthode forfaitaire à vérifier par les moments sur appui et en travée pour des poutres à deux travées et plus de deux travées.

*Remarque* : lorsque, sur l'appui de rive, la poutre est solidaire d'un poteau ou d'une poutre, il convient de disposer sur cet appui des aciers supérieurs pour équilibrer  $M_a = -0.15M_0$ .

**Mode opératoire** Dans la pratique, on prend la valeur minimale des moments sur appui  $M_w$  et  $M_e$  (en valeur absolue), puis on calcule  $M_t$  par la formule des moments.

### 7.3.3 Armatures longitudinales

Lorsque les trois conditions suivantes sont réunies :  $q \leq g$ , les charges sont réparties et les moments sur appui sont pris à leur valeur absolue minimale (valeurs adoptées sur la Figure 51), il est alors possible de déterminer de façon forfaitaire la longueur des chapeaux et l'arrêt des barres, comme indiqué sur la Figure 52.



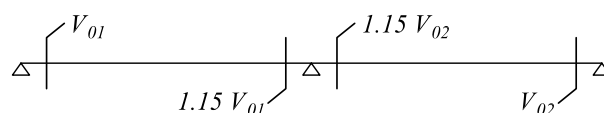
**Fig. 52:** Arrêt des barres forfaitaire.

Lorsqu'il n'est pas possible de réaliser l'arrêt forfaitaire des barres, il faut tracer la courbe enveloppe des moments fléchissants (voir la méthode de Caquot).

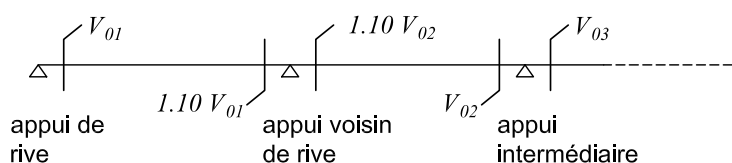
### 7.3.4 Effort tranchant

Pour déterminer la valeur de l'effort tranchant aux appuis, ce dernier est calculé en faisant abstraction de la continuité, *sauf* pour les appuis voisins des appuis de rive. En notant  $V_{0i}$  la valeur absolue de l'effort tranchant sur les appuis de la travée isostatique de référence  $i$ , les valeurs absolues de l'effort tranchant aux appuis sont déterminés de façon forfaitaire comme indiqué sur la Figure 53.

#### Deux travées



#### Plus de deux travées



**Fig. 53 :** Valeur forfaitaire de l'effort tranchant dans des poutres continues à deux travées et plus de deux travées.

## 7.4 Méthode de Caquot (Annexe E.2)

appliquée aux poutres à moments d'inertie égaux et non solidaires des poteaux

### 7.4.1 Domaine d'application B.6.220

La méthode s'applique essentiellement aux poutres - planchers des *constructions industrielles*, c'est-à-dire pour des charges d'exploitation élevées :  $q > 2g$  ou  $q > 5kN/m^2$ .

Elle peut aussi s'appliquer lorsqu'une des trois conditions **b**, **c** ou **d** de la méthode forfaitaire n'est pas validée (Inerties variables ; différence de longueur entre les portées supérieure à 25% ; fissuration préjudiciable ou très préjudiciable). Dans ce cas, il faut appliquer la *méthode de Caquot minorée* qui consiste à prendre  $g' = 2g/3$  pour le calcul des moments sur appui.

### 7.4.2 Principe de la méthode

La méthode proposée par Albert Caquot tient compte :

- de la variation du moment d'inertie due aux variations de la largeur de la table de compression, en réduisant légèrement les moments sur appui et en augmentant proportionnellement ceux en travée.
- de l'amortissement de l'effet des chargements des poutres en BA, en ne considérant que les travées voisines de l'appui pour déterminer le moment sur appui.

### 7.4.3 Evaluation des moments sur appui

**Hypothèses** Pour le calcul des moments sur appui  $M_a$ , on fait les hypothèses suivantes :

- seules les charges sur les travées voisines de l'appui sont prises en compte,
- on adopte des longueurs de *portées fictives*  $l'$ , telles que :
  - $l' = l$  pour les deux travées de rive,
  - $l' = 0.8l$  pour les travées intermédiaires.

**Valeurs des moments sur appui** Pour le cas de charges réparties, les moments sur appui intermédiaire sont donnés par :

$$M_a = -\frac{p_w l_w^3 + p_e l_e^3}{8.5(l_w + l_e)},$$

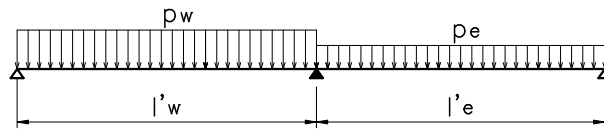
où les notations sont définies sur la Figure 54.

Pour des charges ponctuelles, les moments sur appui intermédiaire sont donnés par :

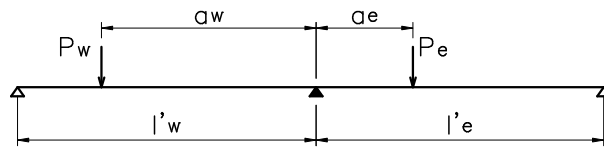
$$M_a = -\frac{k_w(a_w)P_w l_w^2 + k_e(a_e)P_e l_e^2}{l_w + l_e},$$

avec les notations définies sur la Figure 55 et l'évolution des coefficients  $k(a)$  en fonction de  $a$  est définie dans l'annexe E.2 du BAEL.





**Fig. 54** : Notations pour le calcul des moments sur appui par la méthode de Caquot dans le cas de charges réparties.



**Fig. 55** : Notations pour le calcul des moments sur appui par la méthode de Caquot dans le cas de charges ponctuelles.

Le moment total est obtenu comme la somme des moments sur appui des différents chargements.

**Méthode de Caquot minorée (B.6.210)** Lorsqu'il est possible d'appliquer la méthode de Caquot minorée (voir condition ci-dessus), le calcul des moments sur appui dus aux charges permanentes se fait avec  $g' = 2g/3$  (et uniquement le calcul des moments sur appuis, on reprend la totalité de  $g$  ensuite pour le calcul des moments en travée).

#### 7.4.4 Moments en travée

Pour les calculs des moments en travée  $M_t$ , on fait les hypothèses suivantes :

- ✓ on utilise la longueur des portées réelles  $l$  (et non plus  $l'$ ),
- ✓ on ne considère que les deux travées adjacentes et les trois cas de charge définis sur la Figure 56.

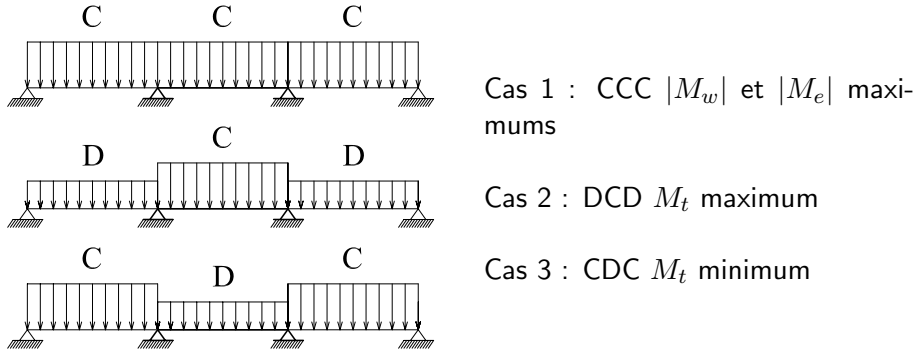
L'évolution du moment en travée  $M(x)$ , pour un cas de charge, est donné par :

$$M(x) = \mu(x) + M_w \left(1 - \frac{x}{l}\right) + M_e \frac{x}{l},$$

où  $\mu(x)$  est le moment dans la travée isostatique de référence correspondant au cas de charge étudié. La position du moment maximum en travée est obtenu en recherchant l'abscisse où la dérivée de  $M(x)$  s'annule, soit dans le cas d'un chargement symétrique sur la travée :

$$x_{M_{t\max}} = \frac{l}{2} - \frac{M_w - M_e}{pl}.$$

Dans la pratique, pour le calcul de  $x_{M_{t\max}}$  on ne s'intéressera qu'au cas de charge qui conduit à la plus grande valeur du moment en travée. Pour les travées paires c'est le cas de charge 2, tandis que pour les travées impaires, c'est le cas de charge 3 qui conduit à la valeur maximale du moment en travée.



**Fig. 56** : Définition des trois cas de charge à prendre en compte. Chacun de ces trois cas correspond à une valeur extrême des moments de la deuxième travée et des appuis 2 et 3. A l'ELU  $C = 1.35g + 1.5q$  et  $D = 1.35g$  et à l'ELS  $C = g + q$  et  $D = g$ .

On prendra garde de bien travailler avec les bonnes valeurs des moments sur appuis et de la charge  $p$  en fonction du cas de charge considéré.

#### 7.4.5 Effort tranchant

L'effort tranchant, pour un cas de charge donné, est calculé classiquement comme l'opposé de la dérivée du moment fléchissant, soit :

$$V(x) = -\frac{d\mu(x)}{dx} + \frac{M_w - M_e}{l}.$$

Sur l'appui  $i$ , les valeurs à gauche et à droite de l'effort tranchant sont donc :

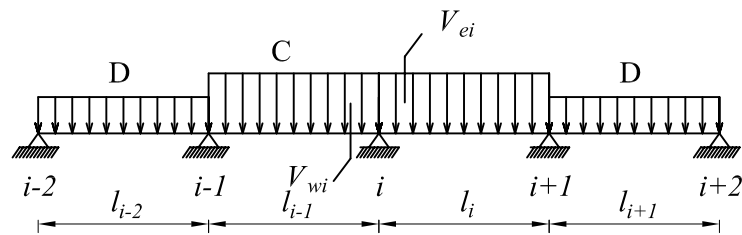
$$V_{wi} = V_{0w} - \frac{M_{a_i} - M_{a_{i-1}}}{l_{i-1}},$$

$$V_{ei} = V_{0e} - \frac{M_{a_{i+1}} - M_{a_i}}{l_i},$$

où

- $V_{0w}$  et  $V_{0e}$  sont les efforts tranchants à gauche et à droite de l'appui  $i$  des travées isostatiques de référence  $i - 1$  et  $i$ , respectivement,
- $M_{a_{i-1}}$ ,  $M_{a_i}$ ,  $M_{a_{i+1}}$  sont les moments sur les appuis  $i - 1$ ,  $i$  et  $i + 1$ , respectivement,
- $l_{i-1}$  et  $l_i$  sont les portées des travées  $i - 1$  et  $i$ , à droite des appuis  $i - 1$  et  $i$ , respectivement (voir la figure plus loin pour ces notations).

Le cas de charge correspondant aux efforts tranchants maximums sur l'appui  $i$  se produit lorsque les deux travées adjacentes sont chargées et les autres déchargées (voir Figure 57).



**Fig. 57** : Cas de charge conduisant à la valeur maximale de l'effort tranchant sur l'appui  $i$ .

#### 7.4.6 Tracé des Moments fléchissants

Pour illustrer cette partie, nous prendrons l'exemple d'une poutre à 4 travées de portées identiques ( $l = 5.00m$ ), supportant une charge permanente  $g = 20kN/m$  et une charge d'exploitation  $q = 25kN/m$ , correspondant à une charge surfacique de  $6kN/m^2$ .

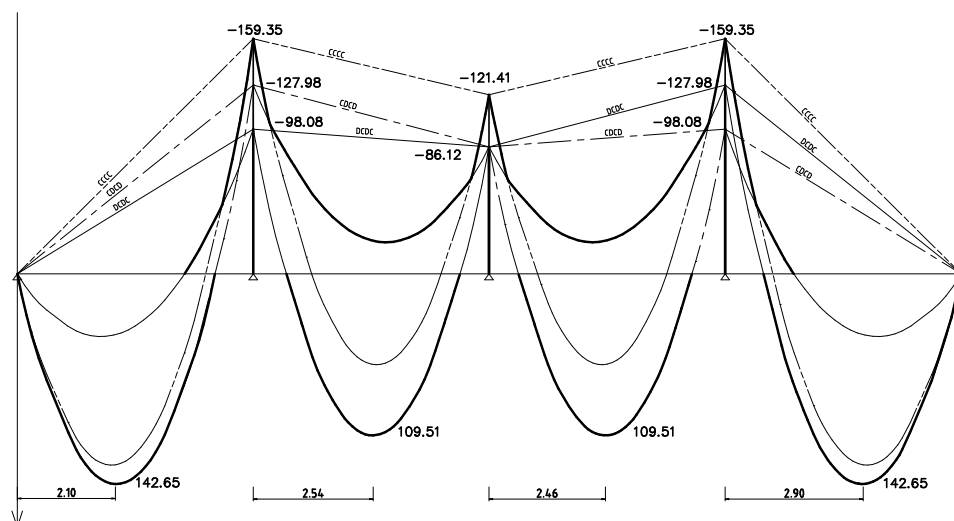
**Présentation des calculs** La présentation des calculs se fait dans un tableau qui comporte autant de colonnes qu'il y a de travées sur la poutre. Pour un calcul à l'ELU de la méthode de Caquot non-minorée, ce tableau prend la forme présentée sur la Figure 58. Dans le cas de la méthode de Caquot minorée, on ajoutera 3 lignes :  $g' = 2g/3$ ,  $C'1.35g' + 1.5q$  et  $D'1.35g'$ .

portée $l$ [m]	5.00	5.00	5.00	5.00	
portée fictive $l'$ [m]	5.00	4.00	4.00	4.00	
charge permanente $g$ [kN/m]	20	20	20	20	
charge exploitation $q$ [kN/m]	25	25	25	25	
Chargée C $1.35g + 1.5q$ [kN/m]	64.5	64.5	64.5	64.5	
Déchargée D $1.35g$ [kN/m]	27	27	27	27	
$M_a$ cas 1 : CCCC [kNm]	0	-159.35	-121.41	-159.35	0
$M_a$ cas 2 : DCDC [kNm]	0	-98.08	-86.12	-127.98	0
$M_a$ cas 3 : CDCD [kNm]	0	-127.98	-86.12	-98.08	0
$M_{iso,C}$ Chargée [kNm]	201.56	201.56	201.56	201.56	
$M_{iso,D}$ Déchargée [kNm]	84.38	84.38	84.38	84.38	
$x_{M_{tmaxi}}$ [m]	2.10	2.54	2.46	2.90	
$M_{tmaxi}$ [kNm]	142.65	109.51	109.51	142.65	

**Fig. 58**: Forme du tableau à remplir pour appliquer la méthode de Caquot

**Courbe enveloppe des moments fléchissants** Le tracé des trois courbes de moment fléchissant correspondant aux trois cas de charge est fait à partir des informations calculées dans le tableau ci-dessus. La courbe enveloppe (courbe épaisse sur la Figure 59) reproduit le contour des moments maximums (en

travée) et minimums (sur appui). A partir de cette courbe, il est maintenant possible de calculer les sections d'acier et de tracer l'épure d'arrêt de barres.



**Fig. 59** : Tracé des moments fléchissants des trois cas de charge et de la courbe enveloppe.

La Figure 60 présente une méthode graphique qui permet de tracer rapidement les paraboles et de déterminer l'abscisse du moment maximal.

Il est aussi possible de tracer rapidement des paraboles sous AutoCAD à partir de la connaissance de  $M_w$ ,  $M_e$  et  $M_t$ . Pour cela, tracer une polyligne comme définie sur la Figure 61. Transformer ensuite cette polyligne en Spline. Penser à modifier la valeur des variables splinetype et splinesegs : splinetype=5 (spline de type parabolique) et splinesegs=80 (discrétisation, 80 par exemple).

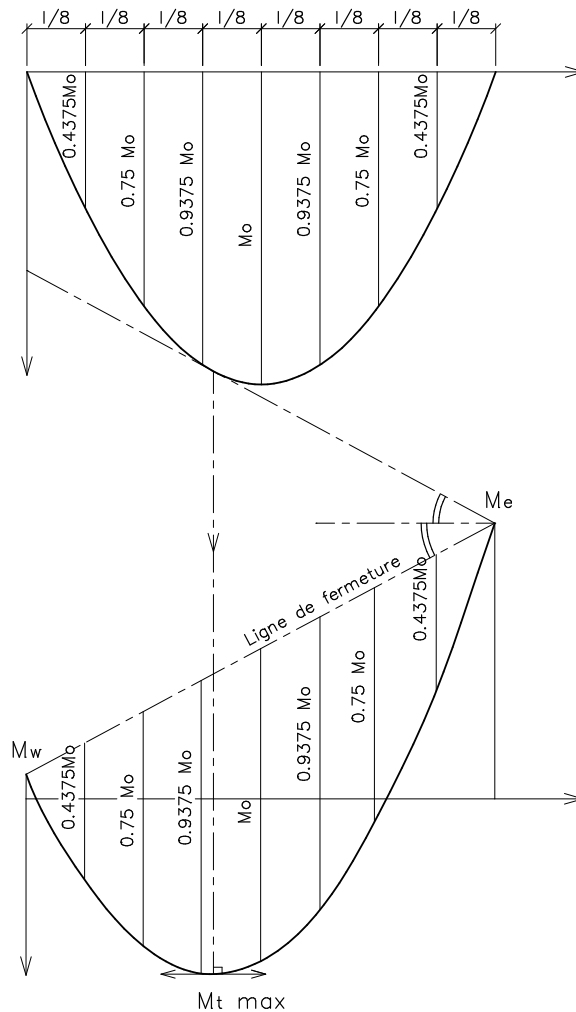
#### 7.4.7 Tracé de l'épure d'arrêt de barres

**Hypothèse relative au calcul des sections d'acier** On suppose que la valeur du bras de levier  $z_b$  (distance entre le centre de gravité des armatures et le point d'application de la résultante des contraintes de compression du béton) est constante le long de la poutre. En pratique, le calcul des sections d'acier se fait uniquement aux abscisses de moment maximum (en travée et sur appui). Par conséquent, le *moment résistant* repris par un groupe de barres est directement proportionnel à sa section :  $M_{Ri} = A_i \sigma_{st} z_b$ , où  $\sigma_{st} = f_{su}$  à l'ELU et  $\sigma_{st} = \bar{\sigma}_{st}$  à l'ELS.

**Ancrage des barres** La longueur d'ancrage des barres est :

- $l_a = l_s$  pour un ancrage droit,
- $l_a = 0.4l_s$  pour un ancrage avec crochet normal<sup>1</sup> (A.6.1,253) s'il s'agit d'une barre à haute adhérence,

<sup>1</sup>l'ancrage normal comporte une partie en demi-cercle de rayon supérieur à  $5.5\phi$  pour les HA et  $3\phi$  pour les ronds lisses suivie d'un retour rectiligne égale à  $2\phi$



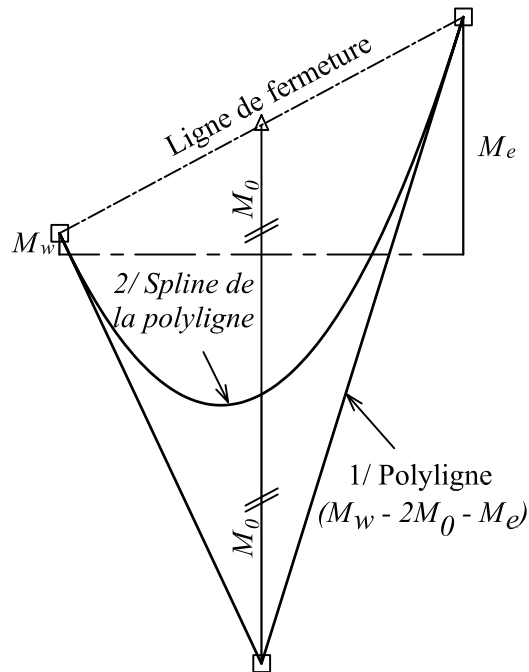
**Fig. 60** : Méthode graphique pour tracer une parabole et trouver la valeur maximale.

- $l_a = 0.6l_s$  pour un ancrage avec crochet normal s'il s'agit d'un rond lisse.

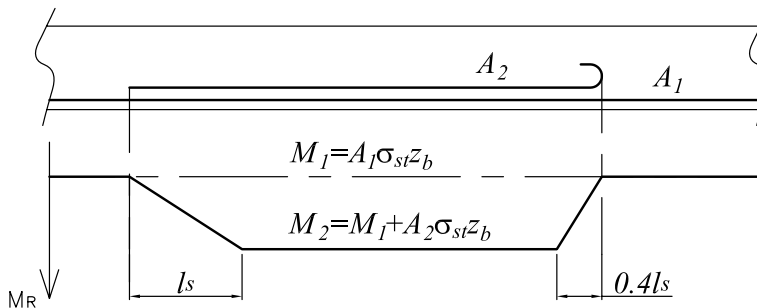
En pratique, le *moment résistant* d'un ensemble de barres est défini comme indiqué sur la Figure 62.

**Règle du décalage** On tient compte de l'existence de bielles de béton inclinées à  $45^\circ$  en décalant dans le sens défavorable la courbe enveloppe du moment fléchissant de  $0.8h$ . Ceci revient dans la plupart des cas à rallonger forfaitairement les aciers de  $0.8h$  à chaque extrémités.

**Ordre d'arrêt des armatures** On procède à l'arrêt des armatures de façon symétrique et en commençant par les barres les plus proches de l'axe neutre, comme indiqué sur la Figure 63.



**Fig. 61:** Méthode pour tracer une parabole sous AutoCAD.

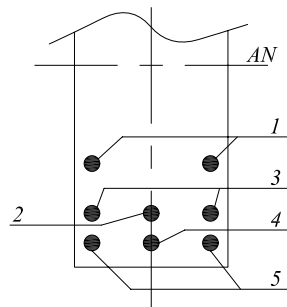


**Fig. 62 :** Définition de la valeur du moment résistant en fonction de l'arrêt des barres du ferrailage longitudinal.

**Épure d'arrêt de barres** En tenant compte des longueurs d'ancrage et de la règle du décalage, l'épure d'arrêt de barres se construit en utilisant la courbe enveloppe des moments fléchissant. La section d'acier des moments maximums est calculée, puis un choix sur le nombre de barres est effectué. Si le ferrailage est composé de plusieurs lits, le *moment résistant* repris par chacun des lits est tracé sur le diagramme des moments fléchissants. L'intersection de ces droites de moment résistant avec la courbe enveloppe détermine les arrêts de barres (il faut ensuite rajouter  $0.8h$ ).

La Figure 64 présente de façon théorique le tracé de l'épure d'arrêt de barres, en prenant en compte la règle du décalage de la courbe enveloppe du moment fléchissant.

Pour l'exemple traité au cours de cette partie, l'épure d'arrêt de barres est



**Fig. 63** : Définition de l'ordre d'arrêt des barres en fonction de leur position dans la section.

présentée sur la Figure 65, avec comme hypothèses de calcul  $h = 50\text{cm}$ ,  $b = 18\text{cm}$ ,  $f_{c28} = 30\text{MPa}$  et  $f_e = 500\text{MPa}$ . Pour des raisons de symétrie, seules les deux premières travées sont représentées. Notez que la règle du décalage est appliquée ici aux barres qui sont rallongées de  $0.8h$  à chacune de leurs extrémités, ce qui en pratique est plus simple que de décaler la courbe enveloppe du moment fléchissant et conduit aux mêmes résultats.

Pour déterminer la longueur des barres appartenant à deux travées contiguës, il ne faut pas oublier de rajouter la largeur des poteaux, puisque les dimensions sont indiquées à partir des nus d'appuis.

## 7.5 Déformation des poutres (BAEL B.6.5,1)

L'article B.6.5,1 précise les conditions à vérifier pour ne pas avoir à faire une vérification sur les flèches limites pour les poutres. Les trois conditions à vérifier sont :

$$h \geq \text{Max}\left[1/16; \frac{M_t}{10M_0}\right]l,$$

$$A_{sx} \leq \frac{4.2b_0d}{f_e},$$

et

$$l \leq 8.00\text{ m},$$

avec  $f_e$  en MPa.

Dans ces formules,  $M_t$  est le moment en travée,  $M_0$  le moment en travée de la travée isostatique de référence et  $l$  la portée.

Si ces conditions n'étaient pas vérifiées, le calcul des flèches est présenté à la Section 8 de ce cours.

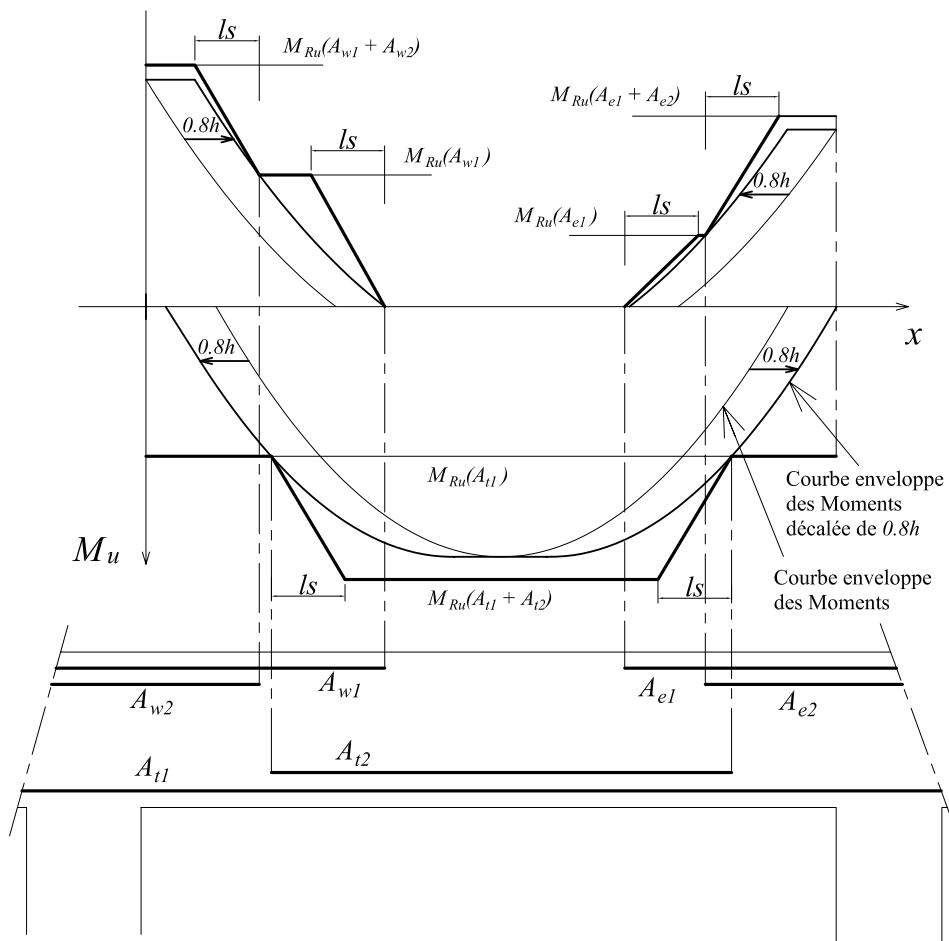
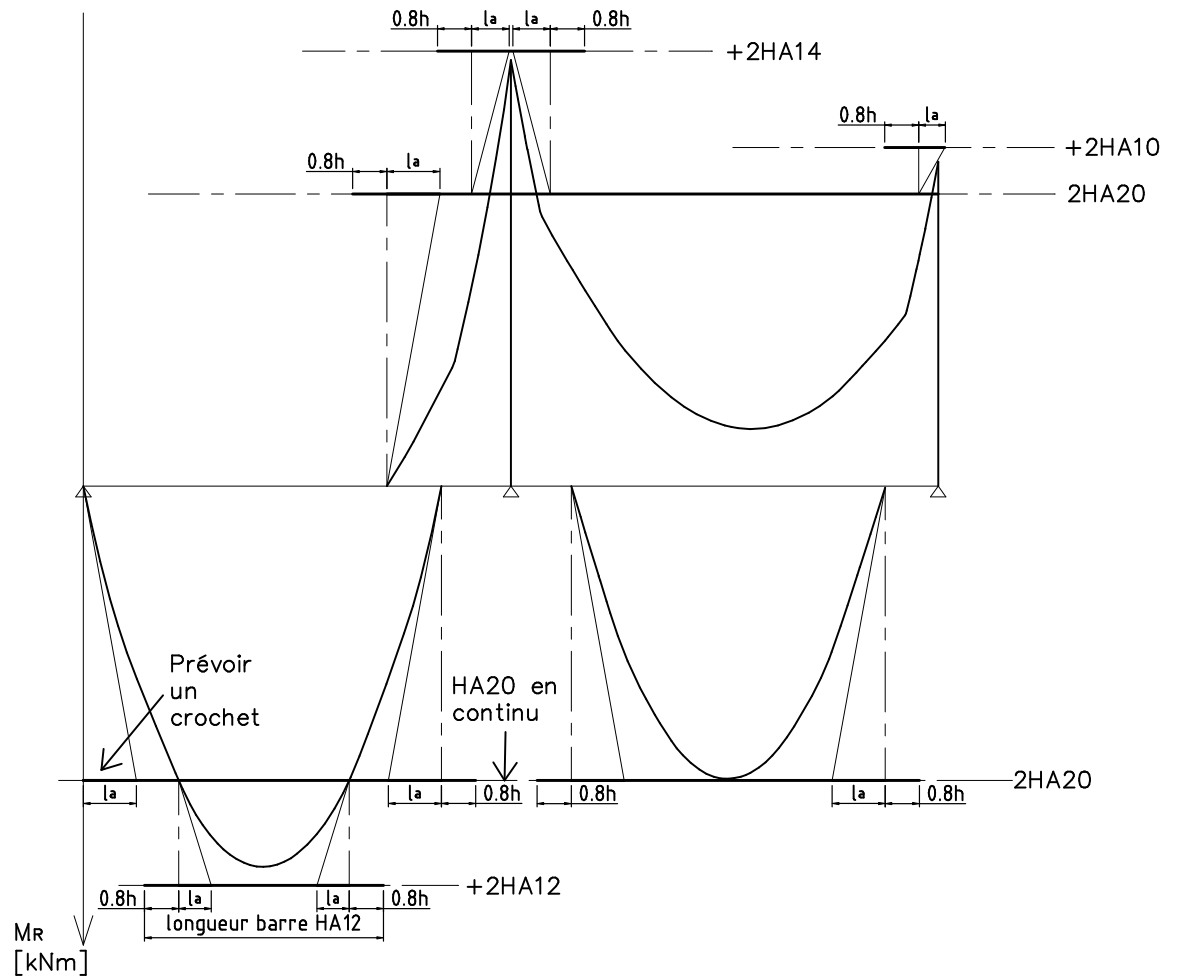


Fig. 64: Epure d'arrêt des barres.





**Fig. 65:** Epure d'arrêt de barres de l'exemple traité.

## 8 Déformation des éléments fléchis

On s'intéresse dans cette partie à l'Etat Limite de Service vis-à-vis des déformations des éléments fléchis. On cherche à vérifier que les flèches de service restent inférieures aux flèches admissibles déterminées pour que l'usage de la structure se fasse dans de bonnes conditions (non fissuration des revêtements de sol et des cloisons, bonne fermeture des portes et des fenêtres, ...).

### 8.1 Valeurs limites des flèches (B.6.5,3)

Pour les éléments reposant sur deux appuis ou plus (poutre et dalle), les flèches sont limitées à :

$$\frac{l}{500} \quad \text{si la portée } l \leq 5.00 \text{ m,}$$

$$0.005 + \frac{l}{1000} \quad \text{sinon,}$$

où la flèche et la portée  $l$  sont exprimées en mètre.

Pour les éléments en console, les flèches sont limitées à :

$$\frac{l}{250} \quad \text{si la portée de la console } l \leq 2.00 \text{ m,}$$

### 8.2 Evaluations des flèches

#### 8.2.1 Influence de la fissuration

L'évaluation des flèches des éléments en BA est complexe à cause de la fissuration :

- avant la fissuration, l'élément se comporte comme si son inertie était constante sur toute sa longueur et valait celle de sa section totale (acier + béton) rendue homogène par rapport au béton en adoptant un coefficient d'équivalence  $n = 15$ .

- après la fissuration son inertie est variable et elle se situe certainement entre l'inertie initiale non-fissurée et l'inertie de la section dont le béton tendu est négligé.

La flèche *réelle*  $f$  est donc comprise entre :

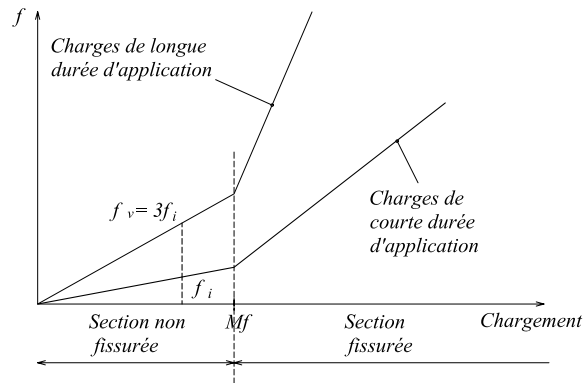
- la flèche  $f_i$  de la section homogène non fissurée,
- la flèche  $f_v$  de la section complètement fissurée.

On admet que la section commencera à fissurer dès lors que la fibre de béton la plus tendue supportera une contrainte de traction  $f_{t_j}$  correspondant à l'application du moment de fissuration  $M_f$ .

#### 8.2.2 Influence de la durée d'application des charges

Les déformations dues au fluage du béton sous chargement de longue durée étant trois fois plus importantes que les déformations instantanées, il convient d'évaluer la durée d'application des charges.

En résumé, on peut dire que la flèche *réelle* se situe entre les deux courbes de la Figure 66 en fonction du chargement appliqué.



**Fig. 66** : Courbes enveloppes de la flèche réelle d'un élément soumis à de la flexion.

### 8.2.3 Flèches pour la section fissurée

Le BAEL (B.6.5,2 commentaires) définit un moment d'inertie fictif (ou fissurée) :

$$I_f = 1.1 \frac{I_0}{1 + \lambda\mu},$$

où  $I_0$  est le moment d'inertie de la section non fissurée homogénéisée par rapport au béton,

$\lambda = \lambda_i = 0.05b f_{t28} / [(2b + 3b_0)\rho]$  pour les déformations instantanées,

$\lambda = \lambda_v = 2/5\lambda_i$  pour les déformations de longue durée,

$\mu = \text{Max} [0; 1 - (1.75 f_{t28}) / (4\rho\sigma_{st} + f_{t28})]$ .

Dans ces expressions :

- $I_0$  est le moment quadratique de la section totale homogénéisée par rapport au béton calculé avec un coefficient d'équivalence  $n = 15$ ,
- les résistances caractéristiques  $f_{t28}$  et  $\sigma_{st}$  sont exprimées en  $MPa$ ,
- $\rho = A_s / (b_0 d)$  le pourcentage d'armatures tendues.

### 8.2.4 Calcul des flèches

**Calcul global** On adoptera (Commentaires du B.6.5,2) les expressions suivantes pour le calcul des flèches :

$$f = \frac{M_t l^2}{10 E_b I} \quad \text{pour les poutres et dalles,}$$

$$f = \frac{M_t l^2}{4 E_b I} \quad \text{pour les consoles,}$$

avec

-  $E_b = E_{b_i}$  et  $I = I_{f_i}$  si la charge est de courte durée,

-  $E_b = E_{b_v}$  et  $I = I_{f_v}$  si la charge est de longue durée.

**Calcul plus précis** Il est possible de faire un calcul plus précis (mais plus compliqué) en intégrant les courbures le long de la poutre. Pour le béton armé, la courbure dans une section est donnée par :

$$\frac{1}{r} = \frac{\epsilon_{st} + \epsilon_{bc}}{d} = \frac{M}{EI},$$

où  $\epsilon_{bc} = \sigma_{bc}/E_b$  et

$$\epsilon_{st} = \begin{cases} \frac{\sigma_{st}}{E_s} - \frac{f_{tj}}{2E_s\rho_f} & \text{si } \rho_f = A_s/B_f \geq f_{tj}/\sigma_{st}, \\ \frac{\sigma_{st}}{E_s} & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec  $B_f = b_0 \times \text{Max}[0.3d; 2(h-d)]$  est l'aire du tirant équivalent à la zone tendue autour des aciers (aire de béton mobilisée par l'entraînement des armatures).

La première expression de  $\epsilon_{st}$  correspond à la valeur moyenne de la déformation entre deux fissures sachant que la contrainte dans les aciers est maximale au niveau des fissures et minimale à mi-distance de deux fissures. La deuxième expression de  $\epsilon_{st}$  suppose que l'adhérence du béton n'a plus lieu (la contrainte d'adhérence a dépassé sa valeur admissible).

### 8.2.5 Flèche nuisible

Les flèches se cumulent et pour évaluer la valeur de la flèche à chaque étape de la construction, il faut tenir compte des différentes phases (par exemple pour une dalle) :

- 1/ Coulage de la dalle,
- 2/ Pose des cloisons,
- 3/ Pose du revêtement de sol,
- 4/ Exploitation du bâtiment.

On définit la flèche nuisible comme la flèche due aux charges appliquées à partir de la pose des cloisons. On calcule :

- les flèches instantanée et différée  $f_{g_i}$  et  $f_{g_v}$  dues à l'ensemble des charges permanentes,
- la flèche instantanée  $f_{j_i}$  due aux charges permanentes appliquées au moment de la mise en œuvre des cloisons,
- la flèche instantanée  $f_{p_i}$  due à l'ensemble des charges permanentes et d'exploitation supportées par l'élément considéré.

La flèche nuisible aux cloisons à comparer aux valeurs admissible vaut :

$$\Delta f_t = f_{g_v} - f_{j_i} + f_{p_i} - f_{g_i}.$$

## 9 Poteaux en compression simple

### 9.1 Définition

Un poteau est une poutre droite verticale soumise uniquement à une compression centrée ( $N > 0$  et  $M_z = 0$ ).

Le béton résistant très bien à la compression, il serait théoriquement inutile de placer des armatures. MAIS les charges transmises au poteau ne sont jamais parfaitement centrées (imperfections d'exécution, moments transmis par les poutres, dissymétrie du chargement).

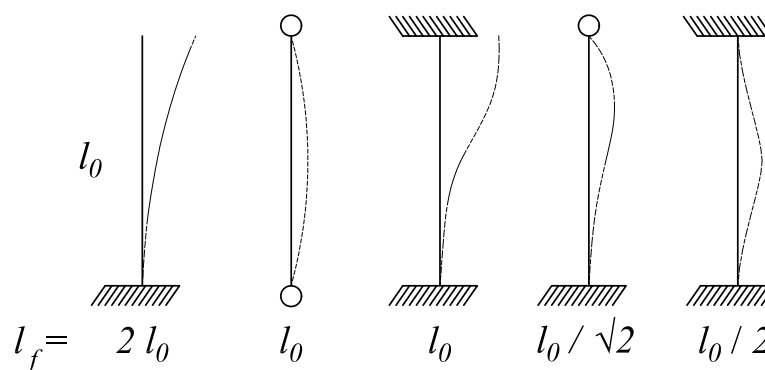
Pour ces raisons, on introduit des armatures longitudinales calculées de façon forfaitaire (car ces moments sont difficiles à estimer). Le risque de flambement des armatures longitudinales conduit à placer des armatures transversales (cadres, étriers ou épingles).

D'un point de vue Réglementaire (B.8.2.1), le poteau est soumis à une compression centrée si :

- l'excentricité de l'effort normal est petite,
- l'imperfection de rectitude est inférieure à  $Max(1cm, l_0/500)$ ,
- l'élanement  $\lambda$  est inférieur à 70 (voir ci-dessous).

### 9.2 Elancement d'un poteau

L'élanement d'un poteau est  $\lambda = l_f/i$ , où  $i = \sqrt{I/B}$  est le *rayon de giration* du poteau et  $l_f$  sa *longueur de flambement*, déterminée à partir de la Figure 67 pour un poteau isolé et de la Figure 68 pour un bâtiment à ossature BA.



**Fig. 67** : Définition de la longueur de flambement pour différentes conditions de liaison du poteau.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs du moment quadratique minimal  $I_{mini}$ , de la section  $B$ , du rayon de giration  $i$ , ainsi que les valeurs du rapport de la longueur de flambement sur la dimension caractéristique de la section pour des valeurs un élanement de 50, et pour les trois formes de section classiques.

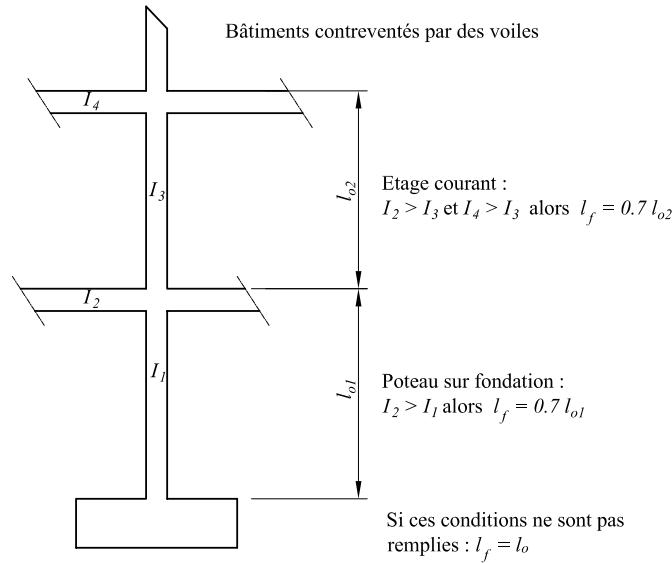


Fig. 68: Valeurs des longueurs de flambement des poteaux d'un bâtiment.

Section	$I_{mini} [m^4]$	$B [m^2]$	$i [m]$	$\lambda < 50$ si
carré $a \times a$	$a^4/12$	$a^2$	$a/\sqrt{12} = \sqrt{B/12}$	$l_f/a < 14.4$
rectangulaire $a \times b$	$a^3b/12$	$ab$	$a/\sqrt{12}$	$l_f/a < 14.4$
circulaire $D$	$\pi D^4/64$	$\pi D^2/4$	$D/4 = \sqrt{B/4\pi}$	$l_f/D < 12.5$

### 9.3 Justification des poteaux (B.8.4)

La justification se fait à l'ELU. La section de béton étant entièrement comprimée, le diagramme des déformations passe par le Pivot C ( $\epsilon_{bc} = \epsilon_{sc} = 2\text{‰}$ ).

#### 9.3.1 Effort normal résistant théorique

Un section en béton armé de surface  $B$ , contenant une section d'acier  $A$ , résiste théoriquement à un effort normal ultime de:

$$N_{u_{théorique}} = Bf_{bu} + A\sigma_{s_{2\text{‰}}}$$

où  $\sigma_{s_{2\text{‰}}} = E_s \times 2\text{‰}$  est la contrainte dans les aciers pour une déformation de  $2\text{‰}$  correspondant au Pivot C du diagramme de déformation.

En fait, les règles BAEL apportent de nombreuses corrections qui:

- pénalisent les poteaux de faible section en remplaçant  $B$  par une *section réduite*  $B_r$ , obtenue en enlevant  $1\text{cm}$  de béton sur toute la périphérie de la section ,
- supposent que les charges sont appliquées bien après 28 jours ( $1.1 \times f_{c28}$ ),
- tiennent compte du fait que les effets du second ordre (flambement) sont négligés, en minorant l'effort normal résistant par un coefficient de flambement  $\alpha$  fonction de l'élancement  $\lambda$ ,

- admettent que  $\sigma_{s_{2\circ/0\circ}} \approx 0.85f_e/\gamma_s$ .

### 9.3.2 Effort normal résistant ultime

Avec ces correctifs, l'effort normal ultime  $N_u$  d'un poteau doit être au plus égal à :

$$N_u \leq N_{ulim} = \alpha \left[ \frac{B_r f_{c28}}{0.9\gamma_b} + A \frac{f_e}{\gamma_s} \right]$$

où  $\gamma_b = 1.5$ ,  $\gamma_s = 1.15$ , et l'expression de  $\alpha(\lambda)$  est donnée par :

$\lambda$	0	→	50	→	70
$\alpha$	0.85	$\frac{0.85}{1 + 0.2(\lambda/35)^2}$	0.6	$0.6(50/\lambda)^2$	0.31

Lorsque plus de la moitié des charges est appliquée avant 90 jours, il faut remplacer  $\alpha$  par  $\alpha/1.10$ .

Lorsque la majeure partie des charges est appliquée avant 28 jours,  $f_{c28}$  est remplacée par  $f_{c_j}$  et  $\alpha$  par  $\alpha/1.20$ .

La Figure 69 donne l'évolution de  $\alpha$  en fonction de l'élanement  $\lambda$ . Etant donné la forte décroissance de  $\alpha$  en fonction  $\lambda$ , il convient de choisir une valeur de l'élanement inférieure à  $\lambda = 50$  et, si possible, proche de  $\lambda = 35$ .

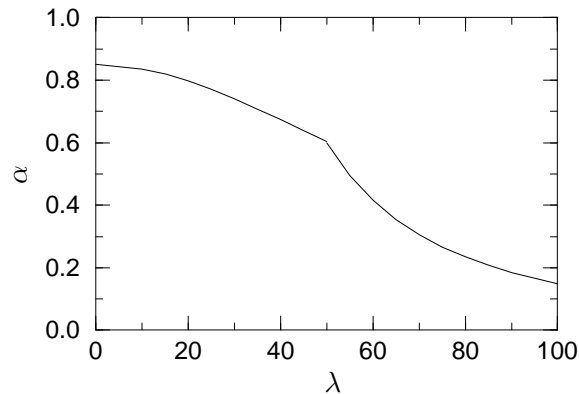


Fig. 69: Variation du coefficient  $\alpha$  en fonction de l'élanement  $\lambda$

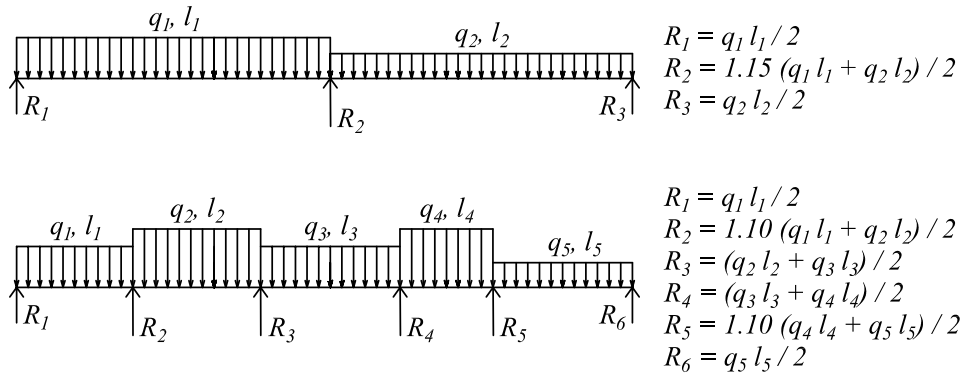
## 9.4 Dispositions constructives et recommandations diverses

### 9.4.1 Evaluation des charges verticales (B.8.1,1)

Dans les bâtiments comportant des travées solidaires supportées par des poteaux, il convient de majorer les charges calculées en admettant la discontinuité des travées de (voir Figure 70 :

- 15% pour le poteau central d'une poutre à deux travées,

- 10% pour les poteaux intermédiaires voisins des poteaux de rive dans le cas d'une poutre comportant au moins 3 travées.



**Fig. 70 :** Effort normal à prendre en compte dans les poteaux supportant une poutre continue.

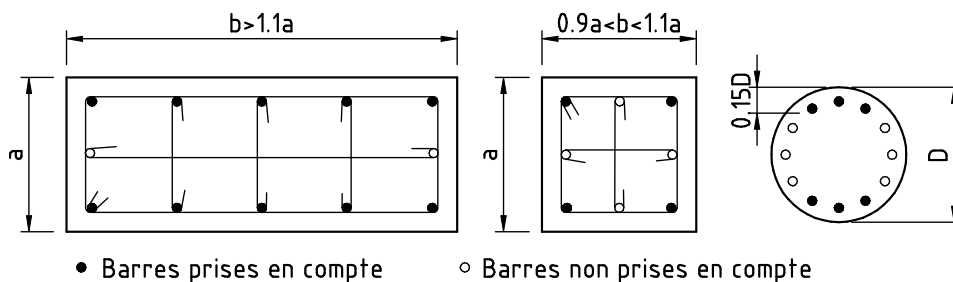
**9.4.2 Coffrage minimal**

La plus petite dimension de la section d'un poteau doit être supérieure à 25cm et sa section supérieure à 625cm<sup>2</sup> (Règle PS92, article 11.331).

**9.4.3 Section d'acier de calcul**

Pour le calcul de  $N_u$ , les aciers pris en compte dans  $A$ , sont

- les barres maintenues par des cadres espacés *au maximum* de 15 fois le diamètre des barres (A.4.1,2),
- les barres qui augmentent la rigidité dans le plan de flambement lorsque  $\lambda > 35$  (B.8.4,1 et voir Figure 71).



**Fig. 71:** Acier à prendre en compte pour le calcul de  $N_u$ .

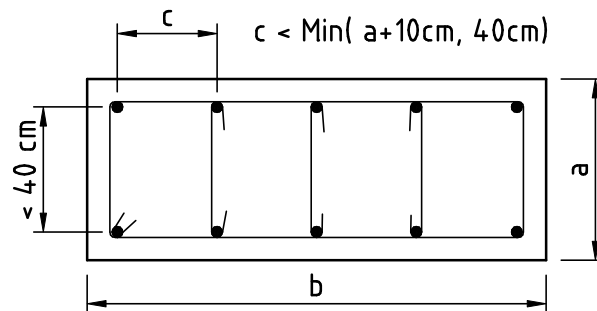


#### 9.4.4 Ferrailage minimal

La valeur de  $A$  doit vérifier les conditions suivantes (A.8.1,2):

$$A_{min} = \text{Max} \left[ 4\text{cm}^2/\text{m de longueur de paroi}, \frac{0.2B}{100} \right] \leq A \leq \frac{5B}{100}.$$

L'espacement  $c$  entre deux armatures longitudinales est au plus égal à (A.8.1,22), comme indiqué sur la Figure 72.



**Fig. 72:** *Espacement maximal des armatures longitudinales d'un poteau.*

La longueur de recouvrement (A.6.1,24) est au moins égale à  $l_r = 0.6l_s$ , où  $l_s$  est la longueur de scellement droit.

#### 9.4.5 Armatures transversales A.8.1,3

Le diamètre des armatures transversales est au moins égal au tiers du diamètre des armatures longitudinales:  $\Phi_t \geq \Phi_l/3$ .

Les armatures transversales sont espacées au maximum de  $\{15\Phi_l, 40\text{cm}, a + 10\text{cm}\}$ .

Il faut placer au moins 3 nappes d'armatures transversales dans les zones de recouvrement.

## 10 Fondations superficielles

### 10.1 Généralités et définitions

Il s'agit des ouvrages de transition entre les éléments porteurs de la structure et le sol. Les fondations superficielles font l'objet des *DTU 13.11* (Cahier des clauses techniques et spéciales) et *13.12* (règles de calcul) publiés en 1988, ainsi que de la partie *B.9* du *BAEL*.

#### 10.1.1 Notations

On utilise les notations et le vocabulaire définis sur la Figure 73.

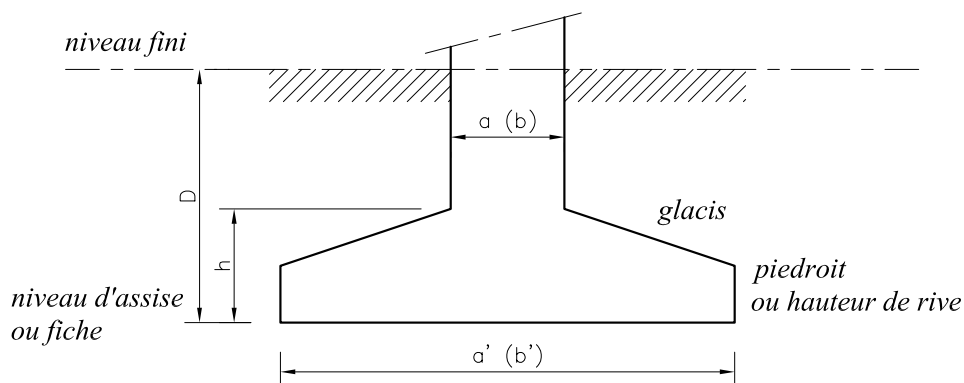


Fig. 73: Notations pour les fondations superficielles.

#### 10.1.2 Profondeur hors-gel

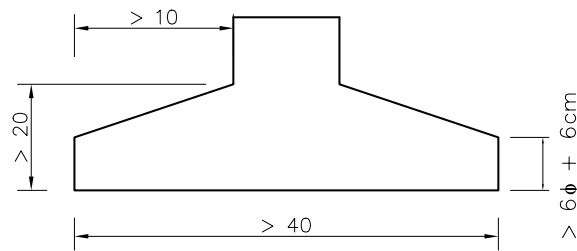
La base de la fondation est arrêtée à un niveau tel que l'eau incluse dans le sol ne gèle pas. Selon la région  $50\text{ cm} \leq D \leq 90\text{ cm}$  et il faut ajouter  $5\text{ cm}/200\text{ m}$  pour des altitudes supérieures à  $150\text{ m}$ . Par exemple, en Isère  $D \geq 50\text{ cm}$ , donc pour une construction en Isère à  $1000\text{ m}$  :  $D \geq 75\text{ cm}$ .

#### 10.1.3 Dimensions minimales-maximales

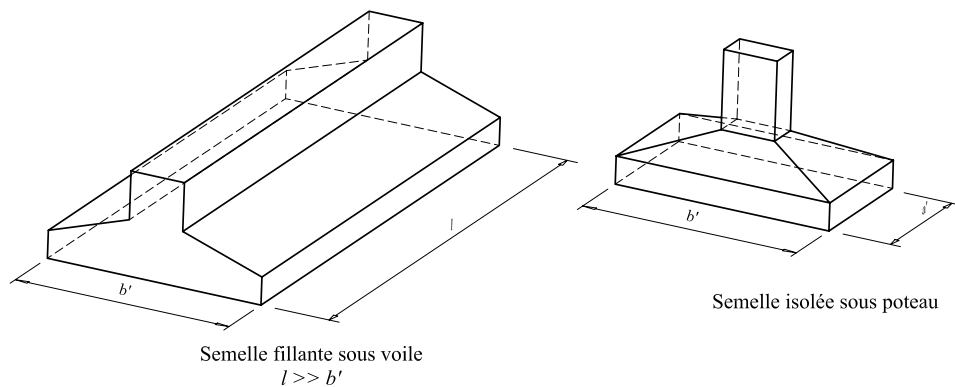
Une fondation superficielle aura une largeur minimale de  $40\text{ cm}$  et une hauteur minimale de  $20\text{ cm}$ . Son piedroit sera au minimum de  $6\phi + 6\text{ cm}$ , où  $\phi$  est le diamètre des aciers (voir Figure 74). De plus, si  $D \geq 3.00\text{ m}$ , on doit vérifier  $b' \geq D/6$  (sinon, on parle de fondations profondes, voir DTU 13.2).

#### 10.1.4 Solutions en fonction du type de porteurs

En fonction du type de porteur on adoptera soit une semelle filante sous un voile soit une semelle isolée sous un poteau, comme indiqué sur la Figure 75.



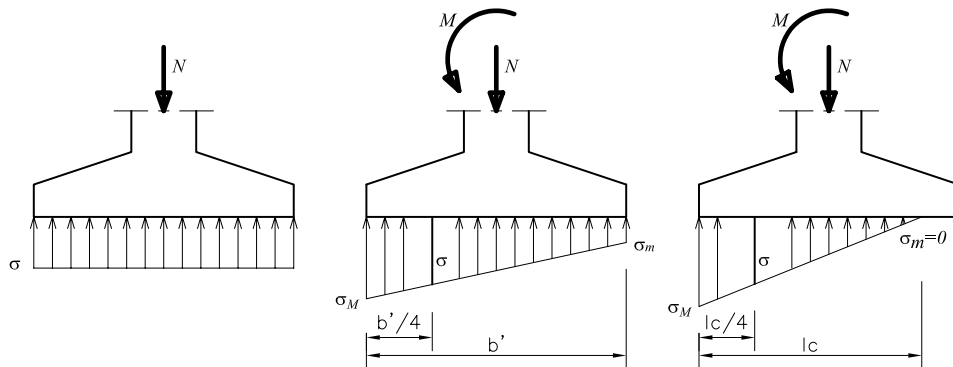
**Fig. 74:** Dimensions minimales d'une fondation superficielle.



**Fig. 75:** Définitions d'une semelle filante et d'une semelle isolée.

## 10.2 Condition de portance du sol

Lorsque la répartition des contraintes du sol n'est pas uniforme (seulement linéaire), on admet de comparer la valeur de la contrainte de calcul du sol  $q$  ( $q_u$  à l'ELU et  $q_s$  à l'ELS) à  $\sigma = (3\sigma_M + \sigma_m)/4$ , où les contraintes  $\sigma$  sont obtenues par l'équilibre statique sous le chargement  $(N, M)$ , comme indiqué sur la Figure 76.



**Fig. 76 :** Valeur de la contrainte à prendre en compte pour vérifier la condition de portance du sol, en fonction de la répartition des contraintes sous la semelle.

### 10.3 Semelle sous mur non-armée transversalement

On admet ce type de fondation (on parle de semelle en *gros béton*) lorsque la hauteur de la fondation  $h$  est au moins égale au double du débord  $(b' - b)/2$  et que le mur transmet une charge uniforme et centrée (voir Figure 77). Si le sol est très homogène, le ferrailage de chaînage n'est pas nécessaire.

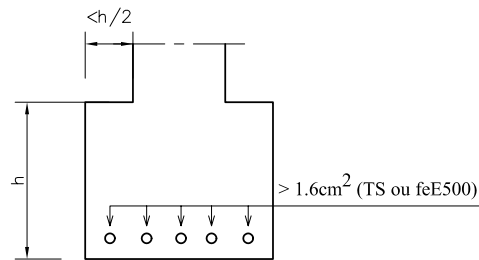


Fig. 77: Semelle filante en gros béton.

### 10.4 Semelle en béton armé, continue sous mur

La largeur de la fondation  $b'$  est obtenue par la condition de portance du sol. Sa hauteur utile  $d$  est donnée par une condition de rigidité :  $(b' - b)/4 \leq d \leq (b' - b)$ . La section d'acier transversale est calculée par la méthode des bielles.

#### 10.4.1 Domaine d'application de la méthode des bielles :

- ✓ semelle rigide :  $(b' - b)/4 \leq d \leq (b' - b)$ ,
- ✓ sol entièrement comprimé :  $e_s \leq b'/6$ ,
- ✓ poteau entièrement comprimé :  $e_p \leq b/6$ .

La figure 78 définit ces différentes excentricités et les notations utilisées pour définir la géométrie d'une fondation.

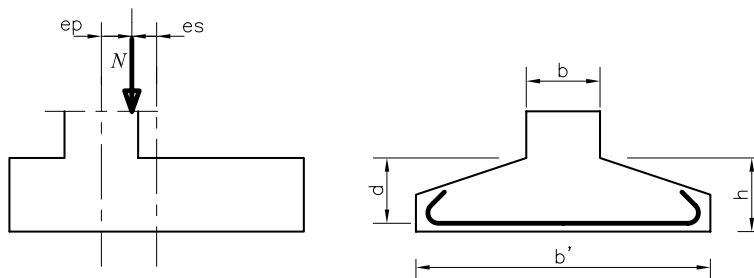
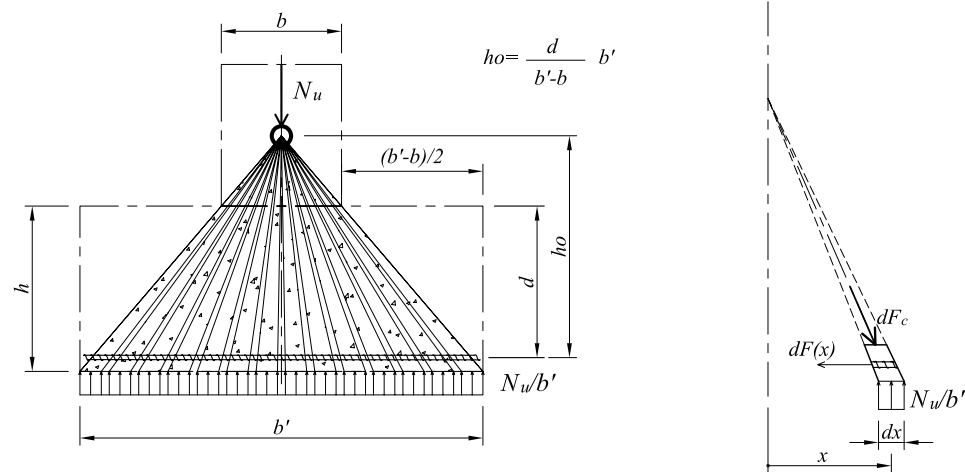


Fig. 78 : Définition des excentricités  $e_s$  et  $e_p$  et des notations définissant la géométrie de la fondation.

### 10.4.2 Principe de la méthode des bielles :

La charge  $N_u$  est transmise au sol par l'intermédiaire de bielles de béton comprimées maintenues entre-elles par les armatures inférieures.



**Fig. 79 :** Transmission de l'effort normal selon des bielles de béton comprimées. Equilibre d'un tronçon élémentaire d'armature.

En adoptant les notations de la Figure 79, l'équilibre d'un tronçon élémentaire  $dx$  d'armature et de bielle conduit à l'égalité suivante :

$$dF(x) = \frac{x}{h_0} \frac{N_u}{b'} dx = \frac{x(b' - b)}{db'^2} N_u dx$$

D'où la valeur de l'effort de traction dans les armatures à l'abscisse  $x$  :

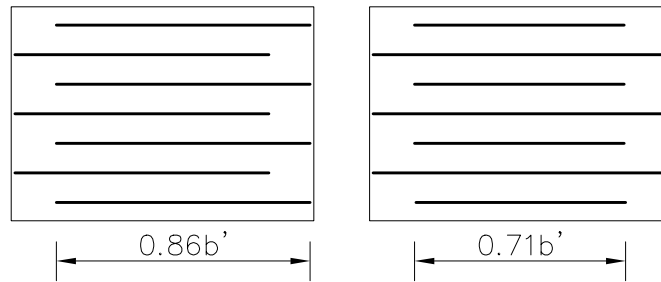
$$F(x) = \int_x^{b'/2} dF(x) = - \int_{-b'/2}^x dF(x) = \frac{(b' - b)}{2db'^2} \left( \frac{b'^2}{4} - x^2 \right) N_u$$

L'effort dans les aciers varie de façon parabolique et sa valeur est maximale au milieu de la fondation ( $x = 0$ ). L'effort de traction dans les aciers à l'ELU est limité à  $A_s f_{su}$ , par conséquent, la section maximale (en  $x = 0$ ) d'acier à mettre en place est donnée par :

$$A_s = \frac{N_u(b' - b)}{8df_{su}}$$

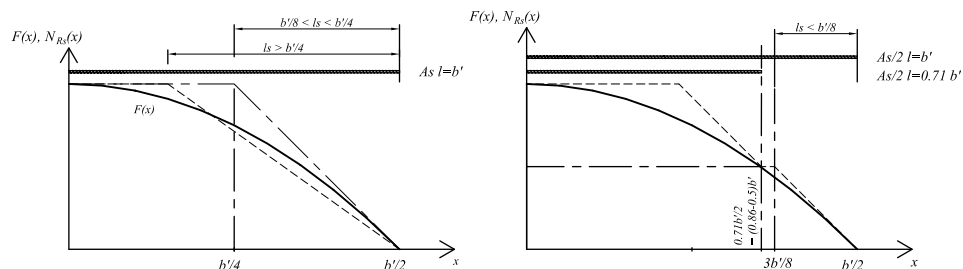
La variation de l'effort de traction dans les aciers étant parabolique, l'arrêt et l'ancrage des armatures dépend du rapport  $l_s/b'$  ( $l_s$  longueur de scellement droit). On distingue 3 cas :

- ✓  $l_s \geq b'/4$  et il faut prévoir des crochets d'ancrage,
- ✓  $b'/8 \leq l_s \leq b'/4$  et un ancrage droit des barres est suffisant,
- ✓  $l_s \leq b'/8$  et les barres peuvent être arrêtées comme indiqué sur la Figure 80.



**Fig. 80:** Arrêt forfaitaire des barres lorsque  $l_s \leq b'/8$ .

Les Figures 81 permettent de comprendre les règles concernant l'ancrage des barres dans les fondations en fonction de la valeur du rapport  $l_s/b'$ . Les deux premiers cas sont présentés sur la première figure et le troisième cas sur la deuxième figure. Par exemple, lorsque  $l_s \geq b'/4$ , on voit sur la première figure que la courbe de l'effort normal résistant de la barre sans crochet  $N_{Rs}$  (courbe pointillée) coupe la courbe de l'effort normal dans l'armatures  $F(x)$  (courbe continue épaisse). Il faut donc prévoir un crochet, qui aura comme effet de diminuer la longueur de l'ancrage, et donc la longueur sur laquelle l'effort  $N_{Rs}$  passe de 0 à sa valeur maximale  $A_s f_{su}$ .



**Fig. 81 :** Evolution de l'effort normal dans les aciers  $F(x)$  et de l'effort normal résistant  $N_{Rs}$  des barres en fonction du rapport  $l_s/b'$ .

## 10.5 Semelle isolée sous poteau

Les dimensions de la fondation  $a' \times b'$  sont déduites de la condition de portance. Le calcul du ferrailage est conduit avec la méthode des bielles, de façon identique à celui d'une semelle filante. Deux choix sont possibles :

- soit on adopte des dimensions de semelle homothétiques par rapport à celles du poteau  $a'/b' = a/b$  et ceci va conduire à des ferrailages différents selon  $a'$  et  $b'$ ,
- soit on adopte des débords identiques  $b' - b = a' - a$ , ce qui va conduire à un ferrailage identique dans les deux directions (en toute rigueur la méthode des bielles ne s'applique plus, mais c'est néanmoins ce qui est fait couramment).

## 10.6 Semelles équilibrant un effort normal et un moment fléchissant

Le poteau est calculé en flexion composée.

Les aciers du poteau sont ancrés, en fonction des efforts qu'ils transmettent, avec les aciers de la semelle.

La semelle est alors calculée comme une poutre en prenant comme chargement les contraintes dues à l'action du poteau et du sol sur la semelle. On admet de ne pas vérifier la semelle vis à vis de l'effort tranchant si la condition de rigidité  $d \geq (a' - a)/4$  est satisfaite.

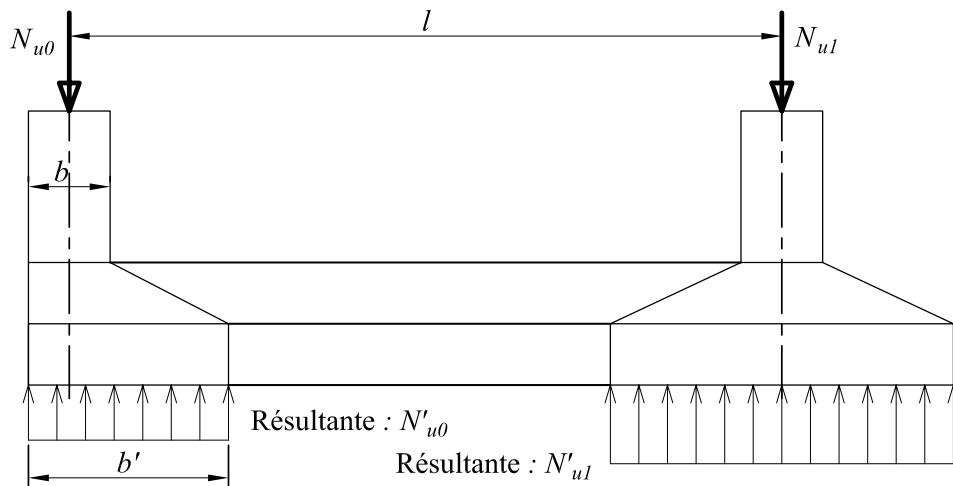
Dans le cas où le diagramme des contraintes de l'action du sol reste trapézoïdal, il est possible de continuer à utiliser la méthode des bielles en admettant un effort normal fictif  $N_u = (3\sigma_M + \sigma_m)a'b'/4$

## 10.7 Semelles excentrées

Les semelles excentrées par rapport à la charge qui leur est transmise proviennent de la nécessité de ne pas construire à l'extérieur du périmètre de la propriété.

Pour permettre à la semelle d'être efficace sur toute sa surface, on met en place une poutre de redressement (ou longrine). On admet qu'une partie de la charge  $N_{u1}$  est utilisée pour amener une répartition uniforme des contraintes du sol (voir Figure 82) sous la semelle excentrée, de sorte que l'on a :

$$N'_{u0} = N_{u0} \frac{l}{2l - (b' - b)} \quad \text{et} \quad N'_{u1} = N_{u1} - N_{u0} \frac{(b' - b)}{2l - (b' - b)}$$

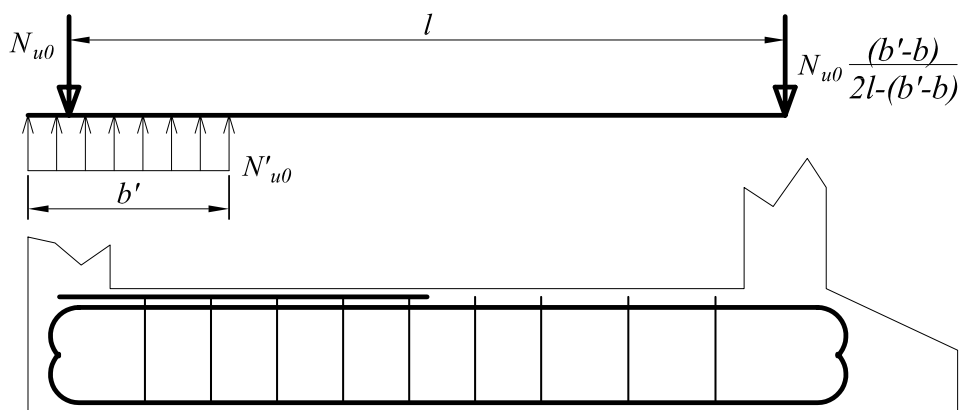


**Fig. 82:** Fonctionnement d'une semelle excentrée avec longrine.

Pour remplir son rôle, la longrine doit être rigide et on adopte  $h \geq l/10$ .

Le calcul des aciers de la semelle 1 se fait sous la charge réduite  $N'_{u1}$  de façon classique.

Le calcul des aciers de la semelle excentrée dans le sens transversal se fait par la méthode des bielles. Dans le sens longitudinal, il faut faire le calcul de la poutre de redressement sous le chargement donné sur la Figure 83.



**Fig. 83** : *Chargement à prendre en compte pour le calcul d'une poutre de redressement (longrine) et allure du ferrailage à mettre en place.*



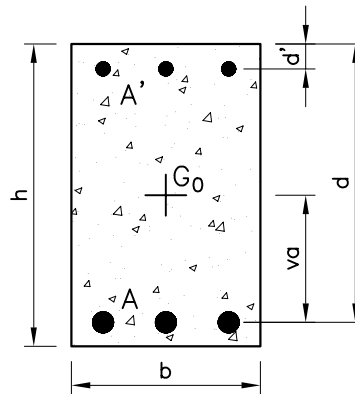
## 11 Eléments soumis à de la flexion composée

Dans ce qui suit, on se limitera aux éléments de sections rectangulaires vis à vis de l'état limite ultime de rupture (ELUR).

### 11.1 Notations et données du problème

La Figure 84 définit les notations complémentaires nécessaires pour les calculs en flexion composée, avec :

- ✓  $G_0$  est le centre de gravité de la section de béton seul,
- ✓  $d'$  définit la position des aciers supérieurs (les moins tendus),
- ✓  $A'$  est la section des aciers supérieurs,
- ✓  $v_a$  donne la position des aciers inférieurs par rapport à  $G_0$ .



**Fig. 84 :** Notations utilisées pour définir la géométrie de la section en flexion composée.

Une section est soumise à la *flexion composée* lorsqu'elle reprend :

- soit un effort normal  $N_u$  et un moment fléchissant  $M_{uG_0}$  appliqués au centre de gravité du béton seul  $G_0$ .
- soit un effort normal  $N_u$  excentré de  $e_0 = M_{uG_0}/N$  par rapport au centre de gravité du béton seul  $G_0$ . Le point d'application de  $N_u$  est appelé le *centre de pression*.

#### Remarques :

- Ces deux cas sont bien sûr identiques.
- Il existe, *peut-être*, un effort tranchant non nul, mais comme pour la flexion simple le calcul est mené par ailleurs.
- Lorsque l'excentricité  $e_0$  de l'effort normal  $N$  est selon les deux directions, on parle de flexion déviée composée.

Selon les valeurs de l'effort normal  $N_u$  et de l'excentricité  $e_0$ , la section est :

- soit entièrement tendue :  $N_u < 0$  et le centre de pression est entre les armatures,
- soit entièrement comprimée  $N_u > 0$  et le centre de pression est dans le noyau central,

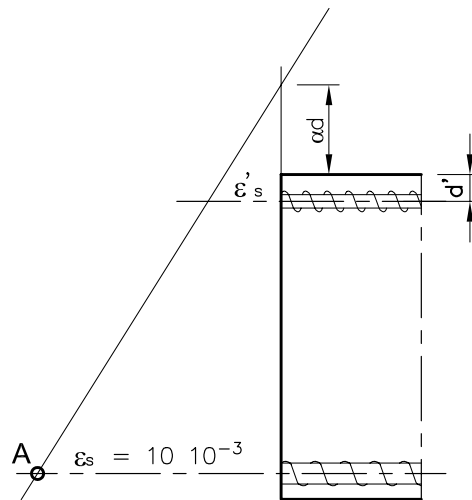
- soit partiellement tendue/comprimée :  $N_u < 0$  ou  $N_u > 0$  et le centre de pression est hors du noyau central.

Lorsque la section est sollicitée **en flexion composée avec compression**, elle doit être vérifiée vis à vis de l'Etat Limite Ultime de Stabilité de Forme (ELUSF de flambement). Toutefois, lorsque  $l_f/h \leq \text{Max}(15, 20(e_0 + e_a)/h)$ , elle peut être vérifiée uniquement en flexion composée, à condition d'augmenter l'excentricité de :

- $e_a = \text{Max}(2cm, l/250)$  (excentricité additionnelle)
  - $+ e_2 = 3l_f^2/(10^4 h) \cdot (2 + \alpha\Phi)$  (excentricité forfaitaire prenant en compte les effets du second ordre)
- où  $\alpha = M_G/(M_G + M_Q)$  et  $\Phi = 2$  (rapport de la déformation due au fluage sur la déformation instantanée).

## 11.2 Section entièrement tendue

Dans ce cas, on a  $y_u < 0$  et  $\alpha < 0$ , la droite de déformation passe par le Pivot A, comme indiqué sur la Figure 85.



**Fig. 85** : Droites de déformation en flexion composée dans le cas où la section est entièrement tendue.

Seuls les aciers travaillent, l'écriture du moment fléchissant au centre de gravité des aciers conduit aux deux équations suivantes :

$$\begin{cases} M_{uA} = N_u(v_a + e_0) = -A'(d - d')\sigma'_s & \text{en A} \\ M_{uA'} = N_u(v_a + e_0 - d + d') = A(d - d')\sigma_s & \text{en A'}. \end{cases}$$

Attention, dans ces équations,  $\sigma_s$  et  $\sigma'_s$  sont négatifs. Une solution économique consiste à faire travailler au mieux les aciers, c'est-à-dire dans le domaine plastique  $\sigma_s = \sigma'_s = -f_{su}$ , d'où :

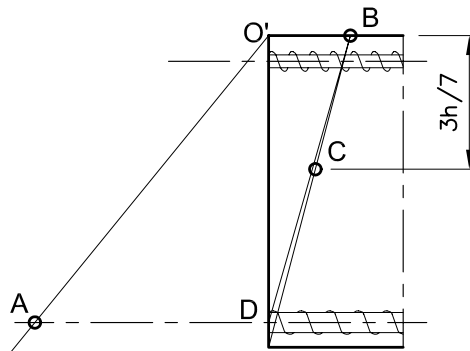
$$A = \frac{N_u(d - d' - v_a - e_0)}{(d - d')f_{su}} \quad \text{et} \quad A' = \frac{N_u(v_a + e_0)}{(d - d')f_{su}}$$

**Condition de non-fragilité :**

La condition de non-fragilité impose de mettre en place une section minimale d'acier telle que  $A + A' \geq B f_{t28} / f_e$ .

**11.3 Section partiellement comprimée (tendue)**

Dans ce cas, on a  $0 \leq y_u \leq h$ ,  $0 \leq \alpha \leq h/d$ , et on est dans les domaines des Pivots A et B. Le diagramme de déformation est compris entre les deux diagrammes limites  $AO'$  et  $BC$ , comme définie sur la Figure 86. Lorsque  $0 \leq y_u \leq d$  les aciers tendus sont nécessaires et si  $d \leq y_u \leq h$  ils ne sont plus nécessaires (du moins, ils sont comprimés).



**Fig. 86 :** Droites de déformation en flexion composée dans le cas où la section est partiellement tendue/comprimée.

Les équations de l'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} N_u = N_{bc} + A' \sigma'_s + A \sigma_s \\ M_{u_A} = N_u (v_a + e_0 + e_a + e_2) = N_{bc} z + A' \sigma'_s (d - d') \end{cases}$$

Pour résoudre ce problème on se ramène à un calcul de flexion simple. La même section de béton soumise en flexion simple au moment fléchissant  $M_{u_A}$  doit être armée par des sections d'acier  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$ , solutions des équations de l'équilibre suivantes :

$$\begin{cases} 0 = N_{bc} + \mathcal{A}' \sigma'_s + \mathcal{A} \sigma_s \\ M_{u_A} = N_{bc} z + \mathcal{A}' \sigma'_s (d - d') \end{cases}$$

Par identification, on obtient :

$$A = \mathcal{A} + \frac{N_u}{\sigma_s} \quad \text{et} \quad A' = \mathcal{A}'$$

Par conséquent :

- si  $N_u > 0$  (compression) alors  $N_u / \sigma_s < 0$  et il y a diminution ...
  - si  $N_u < 0$  (traction) alors  $N_u / \sigma_s > 0$  et il y a augmentation ...
  - ... de  $N_u / \sigma_s$  de la section d'acier tendu par rapport au calcul en flexion simple.
- Pour le calcul de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$ , deux cas sont à considérer :
- les aciers comprimés ne sont pas nécessaires, alors  $\mathcal{A}' = 0$  et  $\mathcal{A} = -M_{u_A} / (z \sigma_s)$ ,

où  $\sigma_s$  est déterminé selon la valeur de  $\epsilon_s$  ( $M_{uA} \Rightarrow \mu_u \Rightarrow \alpha \Rightarrow$  Pivot A ou B  $\Rightarrow \epsilon_s \Rightarrow \sigma_s \Rightarrow \mathcal{A}$ )

• les aciers comprimés sont nécessaires, et c'est plus compliqué ! Dans le cas où la section des aciers comprimés est connue ( $\mathcal{A}'$  est une donnée), le calcul de la section  $\mathcal{A}$  est conduit de la façon suivante :

1/ On fait une hypothèse sur la valeur de la contrainte  $\sigma'_s$  dans les aciers supérieurs ( $\sigma'_s = f_{su}$  est une bonne hypothèse de départ)

2/ On pose  $M_{u2} = \mathcal{A}'\sigma'_s(d-d')$  (le moment repris par les aciers supérieurs) et on travaille avec le moment  $M_{u1} = M_{uA} - M_{u2} = N_{bc}z$  comme sur une section sans acier comprimé (calcul de  $\mu_u = M_{u1}/(bd^2f_{bu}) \Rightarrow \alpha \Rightarrow$  Pivot A ou B  $\Rightarrow \epsilon_s$  et  $\epsilon'_s \Rightarrow \sigma_s$  et  $\sigma'_s$  et on vérifie l'hypothèse sur  $\sigma'_s \Rightarrow$  si elle est vérifiée on passe au point suivant, sinon il faut modifier  $\sigma'_s$ ).

3/ L'équation de l'équilibre des efforts normaux  $0 = N_{bc} + \mathcal{A}'\sigma'_s + \mathcal{A}\sigma_s$  permet alors de calculer la section d'acier  $\mathcal{A}$  :

$$\mathcal{A} = -\frac{M_{uA} - \mathcal{A}'\sigma'_s(d-d')}{z\sigma_s} - \mathcal{A}'\frac{\sigma'_s}{\sigma_s}$$

Remarque 1 : La connaissance de  $\alpha$  entraîne la connaissance des déformations dans les aciers :

✓ Si  $\alpha \leq \alpha_{AB} = 0.259$  la droite de déformation passe par le Pivot A et on a :

$$\epsilon_s = 10\text{‰} \quad \text{et} \quad \epsilon'_s = 10\text{‰} \frac{d' - \alpha d}{d(1 - \alpha)}$$

✓ Si  $\alpha > \alpha_{AB} = 0.259$  la droite de déformation passe par le Pivot B et on a :

$$\epsilon_s = 3.5\text{‰} \frac{1 - \alpha}{\alpha} \quad \text{et} \quad \epsilon'_s = 3.5\text{‰} \left( \alpha \frac{d'}{d} - 1 \right)$$

Attention aux signes dans ces expressions : une déformation est positive en traction. Puis les contraintes sont obtenues par :

$$\begin{cases} \sigma_s = -E_s\epsilon_s & \text{si } -\epsilon_l \geq \epsilon_s \leq \epsilon_l \text{ (élastique)} \\ \sigma_s = f_{su} & \text{si } \epsilon_s < -\epsilon_l \text{ (plastique en compression)} \\ \sigma_s = -f_{su} & \text{si } \epsilon_s > \epsilon_l \text{ (plastique en traction)} \end{cases}$$

Remarque 2 : il y a une deuxième solution qui consiste à fixer la droite de déformation ( $\alpha$ ) de telle sorte que la section d'acier totale  $\mathcal{A} + \mathcal{A}'$  soit minimale. Ceci est obtenue pour une valeur de  $\alpha = 0.69$  soit  $\mu_u = 0.400$ .

#### Condition de non-fragilité :

La sollicitation provoquant la fissuration du béton de la section supposée non-armée et non fissurée doit entraîner dans les aciers tendus de la section réelle une contrainte au plus égale à sa limite d'élasticité  $f_e$ .

Les matériaux travaillent dans le domaine élastique (ELS avec, dans un premier temps, le béton tendu non négligé). La section est soumise à un effort normal

$N_{ser}$  excentré de  $e_0 = M_{serG_0}/N_{ser}$  par rapport au centre de gravité de la section de béton seul.

• L'effort de fissuration  $N_f$  est celui pour lequel la section non-armée et non-fissurée commence à fissurer (on atteint  $\sigma_t = -f_{t28}$  sur la fibre inférieure), soit :

$$\sigma_t = -f_{t28} = \frac{N_f}{B} + \frac{N_f e_0 (-h)}{I_z} \quad \text{avec} \quad I_z = \frac{bh^3}{12} \quad \text{et} \quad B = bh$$

d'où l'expression de l'effort de fissuration  $N_f$  :

$$N_f = \frac{2BI_z f_{t28}}{Be_0 h - 2I_z}$$

• Les équation de l'équilibre de la section réelle soumise à  $N_f$  excentré de  $e_0$  sont :

$$\begin{cases} N_f = N_{bc} + A\sigma_s & \text{pour l'effort normal} \\ M_A = N_f(e_0 + v_a) = N_{bc}z & \text{pour le moment fléchissant en A.} \end{cases}$$

La condition de non-fragilité,  $|\sigma_s| \leq f_e$ , entraîne :

$$A \geq \frac{N_f(e_0 + v_a)}{zf_e} - \frac{N_f}{f_e}$$

Sachant que  $v_a = d - h/2$ ,  $d \approx 0.9h$  et  $z \approx 0.9d$ , il vient :

$$A \geq 0.23bd \frac{f_{t28}}{f_e} \frac{e_0 - 0.455d}{e_0 - 0.185d}$$

#### Remarque

Lorsque  $N = 0$ ,  $e_0 \rightarrow \infty$  et on retrouve la formule  $A \geq 0.23bdf_{t28}/f_e$  obtenue pour le cas de la flexion simple .

### 11.4 Section entièrement comprimée

On a  $y_u > h$  et  $\alpha > h/d$ . La droite de déformation passe par le Pivot C, comme indiqué sur la Figure 87. Dans ce cas, le calcul des sections d'acier est plus compliqué puisqu'il n'est plus possible d'utiliser le diagramme rectangulaire simplifié. Le comportement du béton est représenté par le diagramme parabole rectangle. Néanmoins, on peut faire l'hypothèse que la déformation est constante sur la section et vaut  $2\text{‰}$  (Pivot C,  $\alpha = \infty$ ). Avec cette hypothèse, la contrainte dans le béton est constante et vaut  $f_{bu}$ .

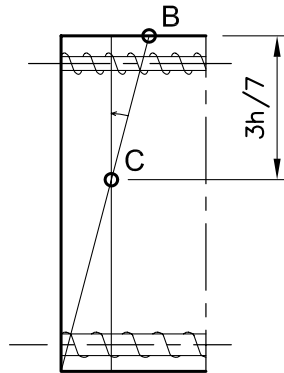
Ceci conduit aux sections d'acier suivantes :

$$A = \frac{N_u - bhf_{bu}}{\sigma_{s2\text{‰}}} - A' \quad \text{et} \quad A' = \frac{N_u(v_a + e_0) - hb f_{bu}(d - h/2)}{\sigma_{s2\text{‰}}(d - d')}$$

où

- $\sigma_{s2\text{‰}} = f_e/\gamma_s = 348 \text{ MPa}$  pour un  $f_e E400$  (domaine plastique),
- $\sigma_{s2\text{‰}} = E_s 2\text{‰} = 400 \text{ MPa}$  pour un  $f_e E500$  (domaine élastique).

Lorsque l'excentricité risque de s'inverser, cette solution n'est pas très satisfaisante puisque on préfère placer des sections d'acier identiques. Il vaut mieux, alors, avoir recours à des Abaques (diagrammes d'interaction).



**Fig. 87** : Droites de déformation en flexion composée dans le cas où la section est entièrement comprimée.

## 11.5 Diagrammes d'interaction

Ces diagrammes sont réalisés en traitant le problème à l'envers. Une courbe du diagramme correspond à une section de béton ( $b$ ,  $h$ ) et un ferrailage ( $A$ ,  $A'$ ) pour lesquels ont envisagé toutes les droites de déformation : de la traction simple ( $\alpha = -\infty$ ) à la compression simple ( $\alpha = \infty$ ). Dans le plan  $[M, N]$ , pour chaque valeur de  $\alpha$  on calcule le couple  $M_{u_{G_0}}(\alpha)$  et  $N_u(\alpha)$  correspondants au moment fléchissant et à l'effort normal résistants de la section pour cette droite de déformation. On trace une courbe d'interaction à partir des équations de l'équilibre de la section (ici pour une section rectangulaire  $bh$  armée par  $A$  et  $A'$ ) :

$$\begin{cases} N_u(\alpha) = N_{bc} + A'\sigma'_s(\epsilon'_s) + A\sigma_s(\epsilon_s) \\ M_{u_{G_0}}(\alpha) = N_{bc}(z - v_a) + A'\sigma'_s(\epsilon'_s)(d - v_a - d') - A\sigma_s(\epsilon_s)v_a \end{cases}$$

Attention, dans ces équations,  $N_u$ ,  $M_{u_{G_0}}$ ,  $\sigma'_s$  et  $\sigma_s$  sont des valeurs algébriques ( $N_u$  ou  $\sigma > 0$  en compression et  $M_u > 0$  si la fibre inférieure est tendue).

Les inconnues dans ces équations sont calculées en fonction de  $\alpha$  :

- $N_{bc}$  et  $z$  ont des expressions différentes sur 3 domaines de  $\alpha$  :

$\alpha$	$< 0$	$0 \rightarrow d/h$	$> d/h$
$N_{bc}$	0	$0.8bdf_{bu}\alpha$	$bh f_{bu}\alpha'$
$z$	sans objet	$d(1 - 0.4\alpha)$	$\alpha''h$

avec  $\alpha' = 1 - 64/[21(7\alpha - 3)^2]$  et  $\alpha'' = [7 - 12(1 - \alpha')]/(14\alpha')$  déduits de la loi de comportement parabole rectangle du béton.

- $\sigma_s$  et  $\sigma'_s$  sont déterminées en fonction de  $\epsilon_s$  et  $\epsilon'_s$ , et donc de  $\alpha$  :

$\alpha$	$< \alpha_l^I (< 0)$	$\alpha_l^I \rightarrow \alpha_l^{II}$	$\alpha_l^{II} \rightarrow \alpha_l^{III}$	$\alpha_l^{III} \rightarrow \alpha_l^{IV}$	$> \alpha_l^{IV}$
Pivot	A	A $\rightarrow$ B	B	B $\rightarrow$ C	C
$\epsilon'_s$	$> \epsilon_l$	$\epsilon_l \rightarrow -\epsilon_l$	$< -\epsilon_l$	$< -\epsilon_l$	$-\epsilon_l \rightarrow -2\text{‰}$
$\sigma'_s$	$-f_{su}$	$-E_s \epsilon'_s$	$f_{su}$	$f_{su}$	$-E_s \epsilon'_s$
$\epsilon_s$	$10\text{‰}$	$10\text{‰}$	$10\text{‰} \rightarrow \epsilon_l$	$\epsilon_l \rightarrow -1.76\text{‰}$	$-1.76\text{‰} \rightarrow -2\text{‰}$
$\sigma_s$	$-f_{su}$	$-f_{su}$	$-f_{su}$	$-E_s \epsilon_s$	$-E_s \epsilon_s$

où pour un  $f_e E500$ ,  $\epsilon_l = f_{su}/E_s = 2.17\text{‰}$ , et en faisant les hypothèses  $d' \approx 0.1h$ ,  $d \approx 0.9h$  nous avons :

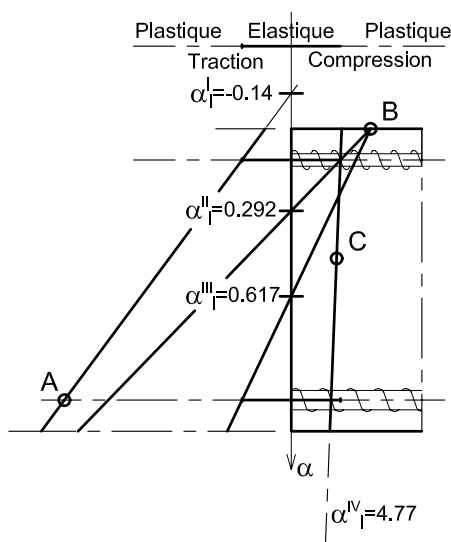
✓  $\alpha_l^I = (10d' - 2.17d)/[(10 - 2.17)d] \approx -0.14$ , ce qui correspond au Pivot A et A' à la limite élastique en traction,

✓  $\alpha_l^{II} = 3.5d'/[(3.5 - 2.17)d] \approx 0.292$ , ce qui correspond au Pivot A et A' à la limite élastique en compression,

✓  $\alpha_l^{III} = 3.5/(3.5 + 2.17) = 0.617$ , ce qui correspond au Pivot B et A à la limite élastique en traction,

✓  $\alpha_l^{IV} = (2.17 \cdot 3h/7 - 2d')/[(2.17 - 2)d] \approx 4.77$ , ce qui correspond au Pivot C et A' revient à la limite élastique.

Ces quatre droites de déformation sont tracées sur la Figure 88. Les formules permettant de calculer les valeurs des déformations dans les aciers  $\epsilon_s$  et  $\epsilon'_s$  ont été données au Paragraphe 11.3.



**Fig. 88** : Droites de déformation limites qui correspondent au passage du comportement élastique au comportement plastique des aciers tendus ou comprimés.

Un diagramme d'interaction est composée de l'ensemble des courbes d'interaction pour une section de béton donnée en faisant varier les sections d'acier. La Figure 89 présente un exemple de diagramme d'interaction dans le cas particulier où  $A = A'$  et  $f_e = 500 \text{ MPa}$ .

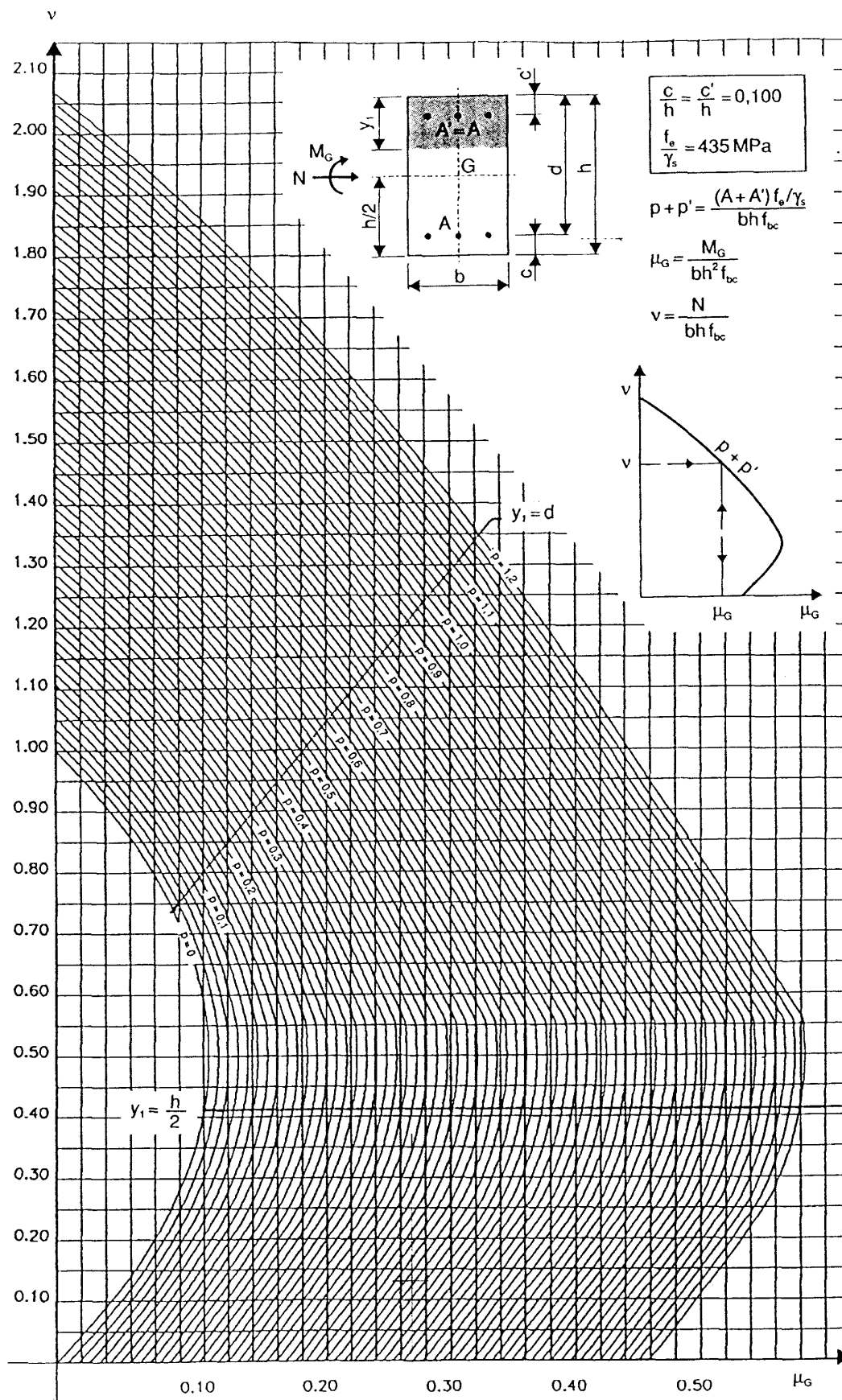


Fig. 89: Exemple de diagramme d'interaction.



## 12 Ouvrages de référence

- Cours de Béton Armé de Christian Joris.
- BAEL 91, modifié 99.
- Traité de physique du bâtiment. Tome 2. Mécanique des ouvrages. Edition du CSTB, 1999.
- Précis de bâtiment. Conception, mise en oeuvre et normalisation. Edition Afnor, 1991.
- Maîtrise du BAEL91 et des DTU associés. J. Perchat et J. Roux. Edition Eyrolles, 1994.
- Cours de béton armé. BAEL91. Calcul des éléments simples et des structures de bâtiments. J.P. Mougine. Edition Eyrolles, 1992.
- Béton Armé. BAEL91 et DTU associés. J.P. Mougine. Edition Eyrolles, 1995.
- Ouvrages en béton armé. H. Renaud et F. Letertre. Edition Foucher, 1978.