

Exercice N°1 : ©

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

$$(2x - 3)(x - 1)^2 - 4(2x - 3) < 0 ; (6x - 7)^2 - (2x - 3)^2 > 0 ; 3(4 - x)(2x - 1) + 2(3 - x)(4x - 16) \leq 0 .$$

$$\frac{3x - 5}{x - 2} \leq \frac{x - 2}{3x - 5} ; \frac{x}{x - 1} < \frac{x + 3}{x + 1} ; \frac{x^2 - 4}{x - 1} \leq x + 3 .$$

$$\sqrt{3x - 5} \leq \sqrt{x + 1} ; \sqrt{x^2 + 1} > x + 2 .$$

Exercice N°2 : ©

On considère un rectangle dont le périmètre en mètres est $2 \cdot p$. Ses dimensions en mètres sont x et y . Si on augmente x de 5 m et y de 3m la surface augmente de 195 m².

1. Montrer que : $x = \frac{5}{2}p - 90$ et $y = 90 - \frac{3}{2}p$.
2. Pour quelles valeurs de p le problème est – il possible ?
3. Pour quelles valeurs de p le rectangle est un carré ?

Exercice N°3 : ©

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$$\square \quad 4x^2 - 9x + 2 = 0 ; 2x^2 - 3x + 7 = 0 ; 3x^2 + x\sqrt{3} + \frac{1}{4} = 0 .$$

$$\square \quad x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0 ; 17x^2 - 20x + 3 = 0 ; 61x^2 + 95x + 34 = 0 .$$

$$\square \quad \sqrt{2x^2 + 1} = 3(x - 1) ; (2x^2 - 4x + 1)^2 = (x^2 + 2x - 2)^2 .$$

$$\square \quad 3x^2 - 2|x| - 1 = 0 ; 2(x + 3)^2 - 9(x + 3) - 5 = 0 ; (x^2 + x + 1)^2 - 4(x^2 + x - 2) = 17 .$$

Exercice N°4 : ©

Soit l'équation (E) : $ax^2 - 5x - 14 = 0$ (a un réel non nul).

Déterminer a pour que le réel 2 soit racine de (E). Calculer l'autre racine de l'équation (E).

Exercice N°5 : ©

Soit l'équation (E) : $x^2 - 2x\sqrt{5} - 8 = 0$.

Sans calculer les racines x' et x'' , calculer les expressions suivantes : $A = (2x' + 1)(2x'' + 1)$ et $B = x'^2 + x''^2$.

Exercice N°6 :

On considère l'équation $(E) : x^2 + 5x - 14 = 0$.

1. Sans calculer le discriminant, dire pourquoi (E) admet deux racines distinctes.
2. Sans calculer les racines x' et x'' de (E) , calculer chacune des expressions suivantes :

$$A = x'x'' ; B = (2x' - 1)(2x'' - 1) \text{ et } C = x'^2 + x''^2.$$

3. Calculer x'' , sachant que $x' = 2$.

4. Trouver deux réels x et y vérifiant :
$$\begin{cases} x + y = -5 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{14} \end{cases}$$

Exercice N°7 :

Soit $A(x) = x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6}$

- a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $A(x) = 0$

- b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $\frac{A(x)}{x^2 - 3} = 0$

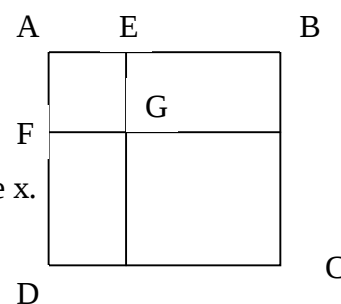
Exercice N°8 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $2x^2 - 5x + 3 = 0$.
2. Déterminer l'ensemble D des réels x pour les quels l'expression $A(x) = \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$ soit définie.
3. On considère l'expression $A(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6$.
 - a) Vérifier que $A(x) = (x - 2)(2x^2 - 5x + 3)$.
 - b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 \geq 0$.
4. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 - 5x + 4 = 0$.
b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
5. Simplifier l'expression : $B(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{2x^3 - 9x^2 + 13x - 6}$

Exercice N°9 :

Le carré ABCD mesure 10 cm de côté, nous choisissons un point E sur [AB] et nous dessinons les carrés AEGF et GHCI.

- a) En posant $AE = x$, calculer S_1 aire du carré AEGF et S_2 aire de GHCI en fonction de x .
- b) On pose $S(x)$ la somme des aires S_1 et S_2 . Montrer que $S(x) = 2x^2 - 20x + 100$.
- c) Déterminer x , pour que $S(x)$ soit égale à la moitié de l'aire du carré ABCD.



Exercice N°10 : ©

1. Parmi les rectangles de périmètre 40 m, déterminer celui qui a une aire maximale.
2. Une fenêtre formée d'un rectangle surmonté d'un triangle équilatéral a 5 cm de périmètre.
 - a) Soit x la largeur du rectangle. Montrer que l'aire de la fenêtre est $S(x) = \frac{(\sqrt{3} - 6)x^2 + 10x}{4}$.
 - b) Trouver les dimensions du triangle pour que $S(x)$ soit maximale.

Exercice N°1 :

- $(2x - 3)(x - 1)^2 - 4(2x - 3) < 0$: c'est une **inéquation produit**

$$(2x - 3)[(x - 1)^2 - 4] < 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(x - 1 - 2)(x - 1 + 2) < 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 3)(x - 3)(x + 1) < 0$$

On factorise

Tableau de signes

x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	3	$+\infty$
$2x - 3$	-	-	0	+	+
$x - 3$	-	-	-	0	+
$x + 1$	-	0	+	+	+
$(2x - 3)(x - 3)(x + 1)$	-	0	+	0	+

$$S_{IR} =]-\infty, -1[\cup \left] \frac{3}{2}, 3[$$

- $\frac{3x - 5}{x - 2} \leq \frac{x - 2}{3x - 5}$: c'est une **inéquation fractionnaire**

$$\Leftrightarrow \frac{3x - 5}{x - 2} - \frac{x - 2}{3x - 5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(3x - 5)^2 - (x - 2)^2}{(x - 2)(3x - 5)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x - 3)(4x - 7)}{(x - 2)(3x - 5)} \leq 0$$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	2	$+\infty$
$2x - 3$	-	0	+	+	+	+
$4x - 7$	-	-	-	0	+	+
$x - 2$	-	-	-	-	0	+
$3x - 5$	-	-	0	+	+	+
$\frac{(2x - 3)(4x - 7)}{(x - 2)(3x - 5)}$	+	0	-	+	0	+

$$S_{IR} = \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{3} \right[\cup \left[\frac{7}{4}, 2 \right[$$

$$\bullet \sqrt{x^2 + 1} > x + 2$$

Si $x \in]-\infty, -2]$ alors $x + 2 \leq 0$ et par suite $\sqrt{x^2 + 1} > x + 2$ est toujours vrai donc $S_1 =]-\infty, -2]$

Si $x \in [-2, +\infty[$ alors $x + 2 \geq 0$ et par suite

$$\underbrace{\sqrt{x^2 + 1}}_{\geq 0} > \underbrace{x + 2}_{\geq 0} \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq (x + 2)^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow 4x \leq -3 \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{4}$$

$$\text{Donc } S_2 = \left] -\infty, -\frac{3}{4} \right] \cap [-2, +\infty[= \left[-2, -\frac{3}{4} \right]$$

$$S_{IR} = S_1 \cup S_2 =]-\infty, -2] \cup \left[-2, -\frac{3}{4} \right] = \left] -\infty, -\frac{3}{4} \right]$$

Exercice N°2 :

1. On sait que le périmètre du rectangle est $2p \Rightarrow 2(x + y) = 2p \Rightarrow x + y = p$ (*)

$$(x + 5)(y + 3) = xy + 195 \quad (**)$$

$$(*) \Rightarrow y = p - x.$$

On remplace dans (**), on obtient :

$$(x + 5)(p - x + 3) = x(p - x) + 195 \Leftrightarrow px - x^2 + 3x + 5p - 5x + 15 = px - x^2 + 195$$

$$\Leftrightarrow -2x = -5p + 180 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}p - 90$$

$$\text{D'où } y = p - x = p - \frac{5}{2}p + 90 = -\frac{3}{2}p + 90$$

$$2. \quad x = \frac{5}{2}p - 90 \text{ et } y = 90 - \frac{3}{2}p.$$

$$\text{Puisque } x > 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}p - 90 > 0 \Rightarrow \frac{5}{2}p > 90 \Rightarrow p > 36$$

$$\text{Et } y > 0 \Rightarrow y = 90 - \frac{3}{2}p > 0 \Rightarrow \frac{3}{2}p < 90 \Rightarrow p < 60$$

$$\text{D'où } 36 < p < 60.$$

3. Pour que le rectangle soit un carré il faut et il suffit que :

$$x = y \Leftrightarrow \frac{5}{2}p - 90 = 90 - \frac{3}{2}p \Leftrightarrow 4p = 180 \Leftrightarrow p = 45.$$

Exercice N°3 :

$$\square \quad 4x^2 - 9x + 2 = 0 ; \Delta = (-9)^2 - 4 \times 4 \times 2 = 81 - 32 = 49 > 0$$

$$x' = \frac{9 - \sqrt{49}}{8} = \frac{1}{4} \text{ et } x'' = \frac{9 + \sqrt{49}}{8} = 2$$

$$2x^2 - 3x + 7 = 0 ; \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 7 = 9 - 56 = -47 < 0 \Rightarrow \text{l'équation n'a pas de solutions.}$$

$$3x^2 + x\sqrt{3} + \frac{1}{4} = 0 ; \Delta = \sqrt{3}^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{4} = 3 - 3 = 0 \Rightarrow \text{l'équation admet une racine double}$$

$$x' = x'' = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\square \quad x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0 ; \Delta = \underbrace{(2 + \sqrt{3})^2 - 4 \times 2\sqrt{3}}_{(\bar{a}+b)^2 - 4ab} = (2 - \sqrt{3})^2 > 0$$

$$x' = \frac{2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ et } x'' = \frac{2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}}{2} = 2$$

$$17x^2 - 20x + 3 = 0 ; 17 - 20 + 3 = 0 \Rightarrow \text{l'équation admet deux racines évidentes } x' = 1 \text{ et } x'' = \frac{3}{17}$$

$$61x^2 + 95x + 34 = 0 ; 61 - 95 + 34 = 0 \Rightarrow \text{l'équation admet deux racines évidentes } x' = -1 \text{ et } x'' = -\frac{34}{61}$$

$$\square \quad \sqrt{2x^2 + 1} = 3(x - 1) : \text{c'est une équation irrationnelle}$$

$$\text{Condition : } x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$\sqrt{2x^2 + 1} = 3(x - 1) \Leftrightarrow 2x^2 + 1 = 9(x^2 - 2x + 1) \Leftrightarrow 7x^2 - 18x + 8 = 0$$

$$\Delta' = (-9)^2 - 7 \times 8 = 81 - 56 = 25 > 0$$

$$\Rightarrow x' = \frac{9-5}{7} = \frac{4}{7} \text{ et } x'' = \frac{9+5}{7} = 2, \text{ or il faut que } x \geq 1 \Rightarrow x = 2.$$

$$\square \quad 3x^2 - 2|x| - 1 = 0 : \text{c'est une équation qui se ramène à une équation du second degré après un changement de variables}$$

$$\text{On pose } t = |x|, \text{ l'équation devient : } 3t^2 - 2t - 1 = 0 ; 3 - 2 - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ ou } t = -\frac{1}{3}$$

$$|x| = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

$$|x| = -\frac{1}{3} < 0 \text{ impossible}$$

$$(x^2 + x + 1)^2 - 4(x^2 + x - 2) = 17$$

$$\text{On pose } t = x^2 + x + 1, \text{ l'équation devient : } t^2 - 4(t - 3) = 17 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = 0 ; 1 - (-4) - 5 = 0$$

$$\Rightarrow t = -1 \text{ ou } t = 5$$

$$x^2 + x + 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 0 ; \Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0 \Rightarrow \text{pas de solutions}$$

$$x^2 + x + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 4 = 0 ; \Delta = 17 > 0 \Rightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ ou } x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

Exercice N°4 :

$$(E) : ax^2 - 5x - 14 = 0$$

$$2 \text{ est une racine de (E)} \Leftrightarrow 4a - 10 - 14 = 0 \Leftrightarrow a = 6$$

$$\text{Si 2 est une racine alors } x'x'' = 2x'' = -\frac{14}{a} = -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3} \Leftrightarrow x'' = -\frac{7}{6}$$

Exercice N°5 :

$$(E) : x^2 - 2x\sqrt{5} - 8 = 0$$

$$A = (2x' + 1)(2x'' + 1) = 4 \underbrace{x'x''}_{\frac{c}{a}} + 2 \underbrace{(x' + x'')}_{-\frac{b}{a}} + 1 = 4 \times (-8) + 2 \times (-2\sqrt{5}) + 1 = -31 - 4\sqrt{5}$$

$$B = x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = (-2\sqrt{5})^2 - 2 \times (-8) = 20 + 16 = 36$$

Exercice N°10 : « Problèmes d'optimisation »

1. Soient x et y les dimensions du rectangle, on a : $2(x + y) = 40 \Leftrightarrow x + y = 20 \Leftrightarrow y = 20 - x$

L'aire du rectangle est : $S = xy = x(20 - x) = -x^2 + 20x$

$$S = -x^2 + 20x = -(x - 10)^2 + 100$$

Or $-(x - 10)^2 \leq 0 \Rightarrow S \leq 100 \Rightarrow S$ atteint son maximum 100 pour $x = 10$

Ainsi S est maximale lorsque les dimensions du rectangle sont $x = 10$ et $y = 10$ c'est donc un carré.

2. a)

- Le périmètre de la fenêtre est $3x + 2y = 5$

$$\Rightarrow y = \frac{5 - 3x}{2}$$

- L'aire de la fenêtre est la somme des aires du rectangle et du triangle

Soit S_1 l'aire du triangle

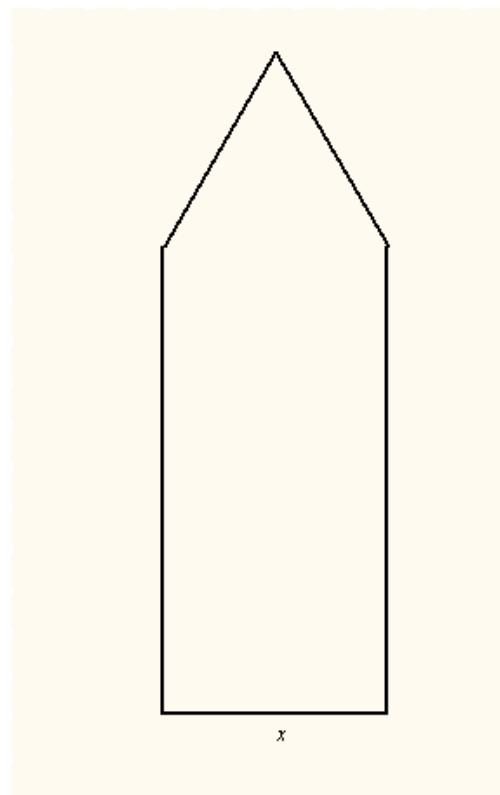
$$\Rightarrow S_1 = \frac{x \times \frac{x\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

Soit S_2 l'aire du rectangle

$$\Rightarrow S_2 = xy = x\left(\frac{5 - 3x}{2}\right) = \frac{5x - 3x^2}{2}$$

$$\text{Ainsi } S = S_1 + S_2 = \frac{5x - 3x^2}{2} + \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S = \frac{(\sqrt{3} - 6)x^2 + 10x}{4}$$



b) Soit $S_{\max}$ l'aire maximale de la fenêtre, on a : $S(x) \leq S_{\max}$ pour tout x .

$$\text{signifie } \frac{(\sqrt{3} - 6)x^2 + 10x}{4} \leq S_{\max} \text{ signifie } (\sqrt{3} - 6)x^2 + 10x - 4S_{\max} \leq 0 \text{ pour tout } x$$

Or un trinôme du second degré garde un signe constant (signe de a) tout en s'annulant

lorsque son discriminant est nul donc $\Delta' = 25 + 4(\sqrt{3} - 6)S_{\max} = 0$ signifie $S_{\max} = \frac{25}{4(6 - \sqrt{3})}$.

$$\text{Dans ce cas } x = -\frac{b'}{a} = -\frac{5}{\sqrt{3} - 6} = \frac{5(6 + \sqrt{3})}{33}.$$