

# STATISTIQUE I

S1 - Module M5

Filière: Sc. Économiques- Gestion

PARTIE 1: Les Séries Simples

Chapitre 2 : Paramètres de Tendances Centrales

Driss TOUIJAR

Faculté des Sc. Juridiques, Économiques et Sociales  
Département des Sc Économiques et de Gestion- Fès



# Table des matières : Partie 1- Chapitre 2

## 1 Introduction



# Table des matières : Partie 1- Chapitre 2

- 1 Introduction
- 2 A) LES MOYENNES



# Table des matières : Partie 1- Chapitre 2

- 1 Introduction
- 2 A) LES MOYENNES
  - I) La moyenne arithmétique



# Table des matières : Partie 1- Chapitre 2

- 1 Introduction
- 2 A) LES MOYENNES
  - I) La moyenne arithmétique
    - 1) Définition



# Table des matières : Partie 1- Chapitre 2

## 1 Introduction

## 2 A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle



# Table des matières : Partie 1- Chapitre 2

## 1 Introduction

## 2 A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques



# Table des matières : Partie 1- Chapitre 2

## 1 Introduction

## 2 A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation



# Table des matières : Partie 1- Chapitre 2

## 1 Introduction

## 2 A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation
- II) La moyenne Géométrique



# Table des matières : Partie 1- Chapitre 2

## 1 Introduction

## 2 A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation
- II) La moyenne Géométrique
- III) La moyenne Harmonique



# Table des matières : Partie 1- Chapitre 2

## 1 Introduction

## 2 A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation
- II) La moyenne Géométrique
- III) La moyenne Harmonique
- IV) La moyenne Quadratique



# Table des matières : Partie 1- Chapitre 2

## 1 Introduction

## 2 A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation
- II) La moyenne Géométrique
- III) La moyenne Harmonique
- IV) La moyenne Quadratique
- VI) Résultat comparatif



# Table des matières : Partie 1- Chapitre 2

## 1 Introduction

## 2 A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation
- II) La moyenne Géométrique
- III) La moyenne Harmonique
- IV) La moyenne Quadratique
- VI) Résultat comparatif
- VII) Conclusion :



# Table des matières : Partie 1- Chapitre 2

## 1 Introduction

## 2 A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation
- II) La moyenne Géométrique
- III) La moyenne Harmonique
- IV) La moyenne Quadratique
- VI) Résultat comparatif
- VII) Conclusion :

## 3 B) LE MODE



# Table des matières : Partie 1- Chapitre 2

## 1 Introduction

## 2 A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation
- II) La moyenne Géométrique
- III) La moyenne Harmonique
- IV) La moyenne Quadratique
- VI) Résultat comparatif
- VII) Conclusion :

## 3 B) LE MODE

- (1) Définition



# Table des matières : Partie 1- Chapitre 2

## 1 Introduction

## 2 A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation
- II) La moyenne Géométrique
- III) La moyenne Harmonique
- IV) La moyenne Quadratique
- VI) Résultat comparatif
- VII) Conclusion :

## 3 B) LE MODE

- (1) Définition



# Table des matières : Partie 1- Chapitre 2

## 1 Introduction

## 2 A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation
- II) La moyenne Géométrique
- III) La moyenne Harmonique
- IV) La moyenne Quadratique
- VI) Résultat comparatif
- VII) Conclusion :

## 3 B) LE MODE

- (1) Définition



# Table des matières : Partie 1- Chapitre 2

## 1 Introduction

## 2 A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation
- II) La moyenne Géométrique
- III) La moyenne Harmonique
- IV) La moyenne Quadratique
- VI) Résultat comparatif
- VII) Conclusion :

## 3 B) LE MODE

- (1) Définition



# Table des matières : Partie 1- Chapitre 2

## 1 Introduction

## 2 A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation
- II) La moyenne Géométrique
- III) La moyenne Harmonique
- IV) La moyenne Quadratique
- VI) Résultat comparatif
- VII) Conclusion :

## 3 B) LE MODE

- (1) Définition



# Table des matières : Partie 1- Chapitre 2

## 1 Introduction

## 2 A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation
- II) La moyenne Géométrique
- III) La moyenne Harmonique
- IV) La moyenne Quadratique
- VI) Résultat comparatif
- VII) Conclusion :

## 3 B) LE MODE

- (1) Définition



# Table des matières : Partie 1- Chapitre 2

## 1 Introduction

## 2 A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation
- II) La moyenne Géométrique
- III) La moyenne Harmonique
- IV) La moyenne Quadratique
- VI) Résultat comparatif
- VII) Conclusion :

## 3 B) LE MODE

- (1) Définition



# Table des matières : Partie 1- Chapitre 2

## 1 Introduction

## 2 A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation
- II) La moyenne Géométrique
- III) La moyenne Harmonique
- IV) La moyenne Quadratique
- VI) Résultat comparatif
- VII) Conclusion :

## 3 B) LE MODE

- (1) Définition



# Introduction

- Ici, il s'agit de faire une **synthèse** de l'information, contenue dans la série brute, par **le chiffre** ; et ce en calculant des **paramètres** dits de **tendance centrale**, qui caractérisent l'ordre de grandeur des observations.



# Introduction

- Ici, il s'agit de faire une **synthèse** de l'information, contenue dans la série brute, par **le chiffre** ; et ce en calculant des **paramètres** dits de **tendance centrale**, qui caractérisent l'ordre de grandeur des observations.
- Dans ce chapitre, on analysera **trois** de ces paramètres qui sont :



# Introduction

- Ici, il s'agit de faire une **synthèse** de l'information, contenue dans la série brute, par **le chiffre** ; et ce en calculant des **paramètres** dits de **tendance centrale**, qui caractérisent l'ordre de grandeur des observations.
- Dans ce chapitre, on analysera **trois** de ces paramètres qui sont :
  - **Les Moyennes,**



# Introduction

- Ici, il s'agit de faire une **synthèse** de l'information, contenue dans la série brute, par **le chiffre** ; et ce en calculant des **paramètres** dits de **tendance centrale**, qui caractérisent l'ordre de grandeur des observations.
- Dans ce chapitre, on analysera **trois** de ces paramètres qui sont :
  - **Les Moyennes**,
  - **Le Mode**,



# Introduction

- Ici, il s'agit de faire une **synthèse** de l'information, contenue dans la série brute, par **le chiffre** ; et ce en calculant des **paramètres** dits de **tendance centrale**, qui caractérisent l'ordre de grandeur des observations.
- Dans ce chapitre, on analysera **trois** de ces paramètres qui sont :
  - **Les Moyennes**,
  - **Le Mode**,
  - **La Médiane**.



## Pour montrer l'essentiel et cacher le superflu

### Les Conditions de : George Udny Yule (1871-1951)



- 1 Le paramètre doit être Objectif,

## Pour montrer l'essentiel et cacher le superflu

### Les Conditions de : George Udny Yule (1871-1951)



- 1 Le paramètre doit être Objectif,
- 2 Le paramètre doit être facile à calculer,

## Pour montrer l'essentiel et cacher le superflu

### Les Conditions de : George Udny Yule (1871-1951)



- 1 Le paramètre doit être Objectif,
- 2 Le paramètre doit être facile à calculer,
- 3 Le paramètre doit dépendre de toutes les observations,

## Pour montrer l'essentiel et cacher le superflu

### Les Conditions de : George Udny Yule (1871-1951)



- 1 Le paramètre doit être Objectif,
- 2 Le paramètre doit être facile à calculer,
- 3 Le paramètre doit dépendre de toutes les observations,
- 4 Le paramètre doit avoir une signification concrète

## Pour montrer l'essentiel et cacher le superflu

### Les Conditions de : George Udny Yule (1871-1951)



- 1 Le paramètre doit être Objectif,
- 2 Le paramètre doit être facile à calculer,
- 3 Le paramètre doit dépendre de toutes les observations,
- 4 Le paramètre doit avoir une signification concrète
- 5 Le paramètre doit se prêter aux calculs algébriques

## Pour montrer l'essentiel et cacher le superflu

### Les Conditions de : George Udny Yule (1871-1951)



- 1 Le paramètre doit être Objectif,
- 2 Le paramètre doit être facile à calculer,
- 3 Le paramètre doit dépendre de toutes les observations,
- 4 Le paramètre doit avoir une signification concrète
- 5 Le paramètre doit se prêter aux calculs algébriques
- 6 Le paramètre doit être stable

# Plan

1

Introduction

2

A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation
- II) La moyenne Géométrique
- III) La moyenne Harmonique
- IV) La moyenne Quadratique
- VI) Résultat comparatif
- VII) Conclusion :



# Moyenne arithmétique

## Définition 1

La **moyenne arithmétique**, notée  $\bar{x}$ , d'une variable statistique  $X$  de distribution  $\{(x_i, n_i)_{1 \leq i \leq k}\}$  est la quantité :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i x_i$$



# Moyenne arithmétique

## Définition 1

La **moyenne arithmétique**, notée  $\bar{x}$ , d'une variable statistique  $X$  de distribution  $\{(x_i, n_i)_{1 \leq i \leq k}\}$  est la quantité :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{i=k} f_i x_i$$



# Moyenne arithmétique

## Définition 1

La **moyenne arithmétique**, notée  $\bar{x}$ , d'une variable statistique  $X$  de distribution  $\{(x_i, n_i)_{1 \leq i \leq k}\}$  est la quantité :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{i=k} f_i x_i$$

Où,  $n$  est la taille de la population, et les  $x_i$  sont les modalités dans le cas d'une **v.s.d.** et les **centres des classes** dans le cas **d'une v.s.c.**



## Exemple 1 : 20 femmes selon le nombre d'enfants

$x_i$
0
1
2
3
4
5
<b>Total</b>

## Exemple 1 : 20 femmes selon le nombre d'enfants

$x_i$	$n_i$
0	1
1	3
2	5
3	6
4	3
5	2
<b>Total</b>	20

## Exemple 1 : 20 femmes selon le nombre d'enfants

$x_i$	$n_i$	$n_i x_i$
0	1	0
1	3	3
2	5	10
3	6	18
4	3	12
5	2	10
<b>Total</b>	20	53

## Exemple 1 : 20 femmes selon le nombre d'enfants

$x_i$	$n_i$	$n_i x_i$	$f_i$
0	1	0	0,05
1	3	3	0,15
2	5	10	0,25
3	6	18	0,3
4	3	12	0,15
5	2	10	0,1
<b>Total</b>	20	53	1

## Exemple 1 : 20 femmes selon le nombre d'enfants

$x_i$	$n_i$	$n_i x_i$	$f_i$	$f_i x_i$
0	1	0	0,05	0
1	3	3	0,15	0,15
2	5	10	0,25	0,5
3	6	18	0,3	0,9
4	3	12	0,15	0,6
5	2	10	0,1	0,5
<b>Total</b>	20	53	1	2,65

## Exemple 1 : 20 femmes selon le nombre d'enfants

$x_i$	$n_i$	$n_i x_i$	$f_i$	$f_i x_i$
0	1	0	0,05	0
1	3	3	0,15	0,15
2	5	10	0,25	0,5
3	6	18	0,3	0,9
4	3	12	0,15	0,6
5	2	10	0,1	0,5
<b>Total</b>	20	53	1	2,65

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=6} n_i x_i = \frac{53}{20} = 2,65 \quad \text{ou}$$

## Exemple 1 : 20 femmes selon le nombre d'enfants

$x_i$	$n_i$	$n_i x_i$	$f_i$	$f_i x_i$
0	1	0	0,05	0
1	3	3	0,15	0,15
2	5	10	0,25	0,5
3	6	18	0,3	0,9
4	3	12	0,15	0,6
5	2	10	0,1	0,5
<b>Total</b>	20	53	1	2,65

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=6} n_i x_i = \frac{53}{20} = 2,65 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{i=6} f_i x_i = 2,65$$

## Exemple 2 : Pour les revenus des femmes

<i>Classes</i>
[0 , 35[
[35 , 70[
[70 , 140[
Total

## Exemple 2 : Pour les revenus des femmes

<i>Classes</i>	<i>f<sub>i</sub></i>
[0 , 35[	0,30
[35 , 70[	0,45
[70 , 140[	0,25
<b>Total</b>	<b>1</b>

## Exemple 2 : Pour les revenus des femmes

<i>Classes</i>	<i>f<sub>i</sub></i>	<i>x<sub>i</sub></i>
[0 , 35[	0,30	$17,5 = \frac{0+35}{2}$
[35 , 70[	0,45	$52,5 = \frac{35+70}{2}$
[70 , 140[	0,25	$105 = \frac{70+140}{2}$
<b>Total</b>	<b>1</b>	<b>---</b>

## Exemple 2 : Pour les revenus des femmes

<i>Classes</i>	$f_i$	$x_i$	$f_i x_i$
$[0, 35[$	0,30	$17,5 = \frac{0+35}{2}$	$5,25 = 0,30 \times 17,5$
$[35, 70[$	0,45	$52,5 = \frac{35+70}{2}$	$23,625 = 0,45 \times 52,5$
$[70, 140[$	0,25	$105 = \frac{70+140}{2}$	$26,25 = 0,25 \times 105$
<b>Total</b>	<b>1</b>	<b>---</b>	<b>55,125</b>

## Exemple 2 : Pour les revenus des femmes

<i>Classes</i>	$f_i$	$x_i$	$f_i x_i$
$[0, 35[$	0,30	$17,5 = \frac{0+35}{2}$	$5,25 = 0,30 \times 17,5$
$[35, 70[$	0,45	$52,5 = \frac{35+70}{2}$	$23,625 = 0,45 \times 52,5$
$[70, 140[$	0,25	$105 = \frac{70+140}{2}$	$26,25 = 0,25 \times 105$
<b>Total</b>	<b>1</b>	<b>---</b>	<b>55,125</b>

$$\bar{x} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{i=3} n_i x_i =$$

## Exemple 2 : Pour les revenus des femmes

<i>Classes</i>	$f_i$	$x_i$	$f_i x_i$
$[0, 35[$	0,30	$17,5 = \frac{0+35}{2}$	$5,25 = 0,30 \times 17,5$
$[35, 70[$	0,45	$52,5 = \frac{35+70}{2}$	$23,625 = 0,45 \times 52,5$
$[70, 140[$	0,25	$105 = \frac{70+140}{2}$	$26,25 = 0,25 \times 105$
<b>Total</b>	<b>1</b>	<b>---</b>	<b>55,125</b>

$$\bar{x} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{i=3} n_i x_i = \sum_{i=1}^{i=3} f_i x_i = 55,125 \text{ m€}$$

# Plan

1

Introduction

2

## A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation
- II) La moyenne Géométrique
- III) La moyenne Harmonique
- IV) La moyenne Quadratique
- VI) Résultat comparatif
- VII) Conclusion :



## Propriété : Changement d'origine et d'échelle

Soit  $X$  une variable statistique de moyenne arithmétique  $\bar{x}$ .  
Si  $Y$  est une variable statistique telle que  $Y = aX + b$ , où  
 $a$  et  $b$  sont des réels quelconques, alors la moyenne  
arithmétique de  $Y$  est



## Propriété : Changement d'origine et d'échelle

Soit  $X$  une variable statistique de moyenne arithmétique  $\bar{x}$ .  
Si  $Y$  est une variable statistique telle que  $Y = aX + b$ , où  
 $a$  et  $b$  sont des réels quelconques, alors la moyenne  
arithmétique de  $Y$  est :  $\bar{y} = a\bar{x} + b$



## Propriété : Changement d'origine et d'échelle

Soit  $X$  une variable statistique de moyenne arithmétique  $\bar{x}$ .  
Si  $Y$  est une variable statistique telle que  $Y = aX + b$ , où  
 $a$  et  $b$  sont des réels quelconques, alors la moyenne  
arithmétique de  $Y$  est :  $\bar{y} = a\bar{x} + b$

## Démonstration.

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{i=k} f_i y_i = \sum_{i=1}^{i=k} f_i (a x_i + b)$$

## Propriété : Changement d'origine et d'échelle

Soit  $X$  une variable statistique de moyenne arithmétique  $\bar{x}$ .  
Si  $Y$  est une variable statistique telle que  $Y = aX + b$ , où  
 $a$  et  $b$  sont des réels quelconques, alors la moyenne  
arithmétique de  $Y$  est :  $\bar{y} = a\bar{x} + b$

### Démonstration.

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \sum_{i=1}^k f_i y_i = \sum_{i=1}^k f_i (a x_i + b) \\ &= a \underbrace{\sum_{i=1}^k f_i x_i}_{=\bar{x}} + b \underbrace{\sum_{i=1}^k f_i}_{=1}\end{aligned}$$

## Propriété : Changement d'origine et d'échelle

Soit  $X$  une variable statistique de moyenne arithmétique  $\bar{x}$ .  
Si  $Y$  est une variable statistique telle que  $Y = aX + b$ , où  
 $a$  et  $b$  sont des réels quelconques, alors la moyenne  
arithmétique de  $Y$  est :  $\bar{y} = a\bar{x} + b$

### Démonstration.

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \sum_{i=1}^k f_i y_i = \sum_{i=1}^k f_i (a x_i + b) \\ &= a \underbrace{\sum_{i=1}^k f_i x_i}_{=\bar{x}} + b \underbrace{\sum_{i=1}^k f_i}_{=1} = a\bar{x} + b\end{aligned}$$

□

# Plan

1

Introduction

2

A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation
- II) La moyenne Géométrique
- III) La moyenne Harmonique
- IV) La moyenne Quadratique
- VI) Résultat comparatif
- VII) Conclusion :



## Propriétés algébriques de la moyenne arithmétique

i) la moyenne des écarts à la moyenne arithmétique est nulle

$$\sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - \bar{x}) = 0$$

## Propriétés algébriques de la moyenne arithmétique

i) la moyenne des écarts à la moyenne arithmétique est nulle

$$\sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - \bar{x}) = 0$$

ii) La moyenne des carrés des écarts à une constante  $a$  est minimale pour  $a = \bar{x}$

$$\underbrace{\min}_{a \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - \bar{x})^2$$

## Propriétés algébriques de la moyenne arithmétique

### Démonstration.

$$\sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - \bar{x} + \bar{x} - a)^2$$

## Propriétés algébriques de la moyenne arithmétique

### Démonstration.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - a)^2 &= \sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - \bar{x} + \bar{x} - a)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{i=k} f_i (\bar{x} - a)^2\end{aligned}$$

## Propriétés algébriques de la moyenne arithmétique

### Démonstration.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - a)^2 &= \sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - \bar{x} + \bar{x} - a)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{i=k} f_i (\bar{x} - a)^2 \\ &+ 2(\bar{x} - a) \underbrace{\sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - \bar{x})}_{=0}\end{aligned}$$

## Propriétés algébriques de la moyenne arithmétique

### Démonstration.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - a)^2 &= \sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - \bar{x} + \bar{x} - a)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{i=k} f_i (\bar{x} - a)^2 \\ &+ 2(\bar{x} - a) \underbrace{\sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - \bar{x})}_{=0} \\ &= \sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - \bar{x})^2 + \overbrace{(\bar{x} - a)^2}^{\geq 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{i=k} f_i}_{=1}\end{aligned}$$

## Propriétés algébriques de la moyenne arithmétique

### Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - a)^2 &= \sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - \bar{x} + \bar{x} - a)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{i=k} f_i (\bar{x} - a)^2 \\
 &\quad + 2(\bar{x} - a) \underbrace{\sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - \bar{x})}_{=0} \\
 &= \sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - \bar{x})^2 + \overbrace{(\bar{x} - a)^2}^{\geq 0} \overbrace{\sum_{i=1}^{i=k} f_i}^{=1} \\
 &> \sum_{i=1}^{i=k} f_i (x_i - \bar{x})^2
 \end{aligned}$$

# Plan

1

Introduction

2

A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation
- II) La moyenne Géométrique
- III) La moyenne Harmonique
- IV) La moyenne Quadratique
- VI) Résultat comparatif
- VII) Conclusion :



## Propriété d'agrégation

### Definition

Soit une population  $P$  de taille  $n$ , composée de  $m$  sous populations  $P_1, P_2, \dots, P_m$ ; de tailles respectives

$n_1, n_2, \dots, n_m$  et de moyennes respectives  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ .

Alors la moyenne arithmétique  $\bar{x}$  de la population  $P$  est donnée par :

## Propriété d'agrégation

### Definition

Soit une population  $P$  de taille  $n$ , composée de  $m$  sous populations  $P_1, P_2, \dots, P_m$ ; de tailles respectives

$n_1, n_2, \dots, n_m$  et de moyennes respectives  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ .

Alors la moyenne arithmétique  $\bar{x}$  de la population  $P$  est donnée par :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=m} n_i \bar{x}_i$$

## Exemple

- 1 Le salaire moyen des cadres dans l'entreprise **E** est de  $4000 \text{ DH}$ .

## Exemple

- 1 Le salaire moyen des cadres dans l'entreprise **E** est de  $4000 \text{ DH}$ .
- 2 Le salaire moyen des cadres masculins est de  $4200 \text{ DH}$ .

## Exemple

- 1 Le salaire moyen des cadres dans l'entreprise **E** est de *4000 DH*.
- 2 Le salaire moyen des cadres masculins est de *4200 DH*.
- 3 Le salaire moyen des cadres féminins est de *3000 DH*.

## Exemple

- 1 Le salaire moyen des cadres dans l'entreprise **E** est de *4000 DH*.
- 2 Le salaire moyen des cadres masculins est de *4200 DH*.
- 3 Le salaire moyen des cadres féminins est de *3000 DH*.
- 4 Quelle est la répartition hommes -femmes des cadres ?

## Exemple

- 1 Le salaire moyen des cadres dans l'entreprise **E** est de  $4000 \text{ DH}$ .
- 2 Le salaire moyen des cadres masculins est de  $4200 \text{ DH}$ .
- 3 Le salaire moyen des cadres féminins est de  $3000 \text{ DH}$ .
- 4 Quelle est la répartition hommes -femmes des cadres ?

## Démonstration.

Soit  $\bar{x}$  Le salaire moyen global dans **E**, celui des hommes  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$  celui des femmes. On a :  $\bar{x} = f_1 \bar{x}_1 + f_2 \bar{x}_2$  □

## Exemple

### Démonstration.

$$\text{suite : } \begin{cases} f_1 & + & f_2 & = & 1 \\ f_1 \bar{x}_1 & + & f_2 \bar{x}_2 & = & \bar{x} \end{cases}$$

## Exemple

### Démonstration.

$$\text{suite : } \begin{cases} f_1 & + & f_2 & = & 1 \\ f_1 \bar{x}_1 & + & f_2 \bar{x}_2 & = & \bar{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1 & + & f_2 & = & 1 \\ 4200 f_1 & + & 3000 f_2 & = & 4000 \end{cases}$$

## Exemple

### Démonstration.

$$\text{suite : } \begin{cases} f_1 + f_2 = 1 \\ f_1 \bar{x}_1 + f_2 \bar{x}_2 = \bar{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1 + f_2 = 1 \\ 4200 f_1 + 3000 f_2 = 4000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_2 = 1 - f_1 \\ 4200 f_1 + 3000 (1 - f_1) = 4000 \end{cases}$$

## Exemple

### Démonstration.

$$\text{suite : } \begin{cases} f_1 + f_2 = 1 \\ f_1 \bar{x}_1 + f_2 \bar{x}_2 = \bar{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1 + f_2 = 1 \\ 4200 f_1 + 3000 f_2 = 4000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_2 = 1 - f_1 \\ 4200 f_1 + 3000 (1 - f_1) = 4000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f_1 = 83,3\% \text{ et } f_2 = 16,7\%$$



## Definition

On appelle **moyenne géométrique** de la distribution  $\{(x_i, n_i)_{1 \leq i \leq k}\}$ , que l'on note  $G$ , la racine  $n^{\text{ème}}$  du produit des  $x_i^{n_i}$  :

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^k x_i^{n_i}} = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \times \cdots \times x_i^{n_i} \times \cdots \times x_k^{n_k}}$$

$$\text{, où } n = \sum_{i=1}^k n_i$$

C'est plus pratique d'utiliser le logarithme népérien :

$$\ln(G) = \ln \left( [x_1^{n_1} \times \dots \times x_i^{n_i} \times \dots \times x_k^{n_k}]^{\frac{1}{n}} \right)$$

C'est plus pratique d'utiliser le logarithme népérien :

$$\begin{aligned}\ln(G) &= \ln \left( [x_1^{n_1} \times \dots \times x_i^{n_i} \times \dots \times x_k^{n_k}]^{\frac{1}{n}} \right) \\ &= \frac{1}{n} \ln(x_1^{n_1} \times \dots \times x_i^{n_i} \times \dots \times x_k^{n_k})\end{aligned}$$

C'est plus pratique d'utiliser le logarithme népérien :

$$\begin{aligned}\ln(G) &= \ln \left( [x_1^{n_1} \times \dots \times x_i^{n_i} \times \dots \times x_k^{n_k}]^{\frac{1}{n}} \right) \\ &= \frac{1}{n} \ln(x_1^{n_1} \times \dots \times x_i^{n_i} \times \dots \times x_k^{n_k}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \ln(x_i^{n_i})\end{aligned}$$

C'est plus pratique d'utiliser le logarithme népérien :

$$\begin{aligned}\ln(G) &= \ln \left( [x_1^{n_1} \times \dots \times x_i^{n_i} \times \dots \times x_k^{n_k}] \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \ln(x_1^{n_1} \times \dots \times x_i^{n_i} \times \dots \times x_k^{n_k}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \ln(x_i^{n_i}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \ln(x_i) = \sum_{i=1}^k f_i \log(x_i) = \overline{\ln(x)}\end{aligned}$$

Exemple :

Calculons la moyenne géométrique de 2, 12, 2, 50 :



Exemple :

Calculons la moyenne géométrique de 2, 12, 2, 50 :

$$G = \sqrt[4]{2^2 \times 12 \times 50} = 6,999$$



Exemple :

Calculons la moyenne géométrique de 2, 12, 2, 50 :

$$G = \sqrt[4]{2^2 \times 12 \times 50} = 6,999$$

D'une autre façon, calculons  $\ln(G)$  :

$$\ln(G) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 n_i \ln(x_i)$$



Exemple :

Calculons la moyenne géométrique de 2, 12, 2, 50 :

$$G = \sqrt[4]{2^2 \times 12 \times 50} = 6,999$$

D'une autre façon, calculons  $\ln(G)$  :

$$\begin{aligned}\ln(G) &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 n_i \ln(x_i) \\ &= \frac{1}{4} [2 \ln(2) + \ln(12) + \ln(50)]\end{aligned}$$



Exemple :

Calculons la moyenne géométrique de 2, 12, 2, 50 :

$$G = \sqrt[4]{2^2 \times 12 \times 50} = 6,999$$

D'une autre façon, calculons  $\ln(G)$  :

$$\begin{aligned}\ln(G) &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 n_i \ln(x_i) \\ &= \frac{1}{4} [2 \ln(2) + \ln(12) + \ln(50)] = 1,964\end{aligned}$$



Exemple :

Calculons la moyenne géométrique de 2, 12, 2, 50 :

$$G = \sqrt[4]{2^2 \times 12 \times 50} = 6,999$$

D'une autre façon, calculons  $\ln(G)$  :

$$\ln(G) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 n_i \ln(x_i)$$

$$= \frac{1}{4} [2 \ln(2) + \ln(12) + \ln(50)] = 1,964$$

$$\Rightarrow G = \exp(1,964) = 7$$



Exemple :

Calculons la moyenne géométrique de 2, 12, 2, 50 :

$$G = \sqrt[4]{2^2 \times 12 \times 50} = 6,999$$

D'une autre façon, calculons  $\ln(G)$  :

$$\begin{aligned}\ln(G) &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 n_i \ln(x_i) \\ &= \frac{1}{4} [2 \ln(2) + \ln(12) + \ln(50)] = 1,964 \\ \Rightarrow G &= \exp(1,964) = 7\end{aligned}$$

Remarque :

Veillez à la cohérence log/anti-log

# moyenne géométrique

## Domaines d'application :

On utilise la moyenne géométrique dans le calcul :

- 1 du taux d'accroissement moyen,

# moyenne géométrique

## Domaines d'application :

On utilise la moyenne géométrique dans le calcul :

- 1 du taux d'accroissement moyen,
- 2 de certains indices statistique.

## Definition

On appelle **moyenne harmonique** de la distribution  $\{(x_i, n_i)_{1 \leq i \leq k}\}$ , que l'on note  $H$ , l'inverse de la moyenne arithmétique de la distribution :  $\{(\frac{1}{x_i}, n_i)_{1 \leq i \leq k}\}$  :

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{i=k} n_i \frac{1}{x_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{i=k} \frac{f_i}{x_i}}$$

, où  $n = \sum_{i=1}^{i=k} n_i$

# moyenne harmonique

Exemple :

Calculons la moyenne harmonique de 2, 12, 2, 50 :

# moyenne harmonique

Exemple :

Calculons la moyenne harmonique de 2, 12, 2, 50 :

$$\frac{1}{H} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{f_i}{x_i}$$

# moyenne harmonique

Exemple :

Calculons la moyenne harmonique de 2, 12, 2, 50 :

$$\frac{1}{H} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{f_i}{x_i}$$

$$= \frac{f_1}{2} + \frac{f_2}{12} + \frac{f_3}{50} =$$

# moyenne harmonique

Exemple :

Calculons la moyenne harmonique de 2, 12, 2, 50 :

$$\frac{1}{H} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{f_i}{x_i}$$

$$= \frac{f_1}{2} + \frac{f_2}{12} + \frac{f_3}{50} = \frac{0,5}{2} + \frac{0,25}{12} + \frac{0,25}{50} = 0.2758333$$

# moyenne harmonique

Exemple :

Calculons la moyenne harmonique de 2, 12, 2, 50 :

$$\frac{1}{H} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{f_i}{x_i}$$

$$= \frac{f_1}{2} + \frac{f_2}{12} + \frac{f_3}{50} = \frac{0,5}{2} + \frac{0,25}{12} + \frac{0,25}{50} = 0.2758333$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{0,2758333} = 3,625$$

# moyenne harmonique

## Domaines d'application :

On utilise cette moyenne dans :

- 1 le calcul des durées moyennes,

# moyenne harmonique

## Domaines d'application :

On utilise cette moyenne dans :

- 1 le calcul des durées moyennes,
- 2 le calcul des moyennes de rapports et de pourcentages,

# moyenne harmonique

## Domaines d'application :

On utilise cette moyenne dans :

- 1 le calcul des durées moyennes,
- 2 le calcul des moyennes de rapports et de pourcentages,
- 3 les études du pouvoir d'achat (inverse du MGP)...etc.

## Definition

On appelle **moyenne quadratique** de la distribution  $\{(x_i, n_i)_{1 \leq i \leq k}\}$ , que l'on note  $Q$ , la racine carrée de la moyenne arithmétique de la distribution :

$\{(x_i^2, n_i)_{1 \leq i \leq k}\}$  :

$$Q = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i x_i^2} =$$

## Definition

On appelle **moyenne quadratique** de la distribution  $\{(x_i, n_i)_{1 \leq i \leq k}\}$ , que l'on note  $Q$ , la racine carrée de la moyenne arithmétique de la distribution :  $\{(x_i^2, n_i)_{1 \leq i \leq k}\}$  :

$$Q = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=k} f_i x_i^2}$$

# moyenne quadratique

Exemple :

Calculons la moyenne quadratique de 2, 12, 2, 50 :



# moyenne quadratique

Exemple :

Calculons la moyenne quadratique de 2, 12, 2, 50 :

$$Q^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{i=3} n_i x_i^2 = \frac{1}{4} (2 \times 4 + 144 + 2500)$$



# moyenne quadratique

Exemple :

Calculons la moyenne quadratique de 2, 12, 2, 50 :

$$Q^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{i=3} n_i x_i^2 = \frac{1}{4} (2 \times 4 + 144 + 2500) = \frac{2652}{4} = 663 \Rightarrow Q = \sqrt{663} = 25,749$$



# moyenne quadratique

## Domaines d'application :

La moyenne quadratique intervient dans le calcul de certains paramètres de dispersion.



## Résultat comparatif

Pour une même série statistique, on montre que les quatre moyennes vérifient toujours l'ordre suivant :

## Résultat comparatif

Pour une même série statistique, on montre que les quatre moyennes vérifient toujours l'ordre suivant :

$$H < G < \bar{x} < Q$$

## Conclusion

- Un inconvénient de la moyenne arithmétique est qu'elle est très sensible aux valeurs extrêmes de la série,

## Conclusion

- Un inconvénient de la moyenne arithmétique est qu'elle est très sensible aux valeurs extrêmes de la série,
- La moyenne géométrique est peu sensible à ces dernières,

## Conclusion

- Un inconvénient de la moyenne arithmétique est qu'elle est très sensible aux valeurs extrêmes de la série,
- La moyenne géométrique est peu sensible à ces dernières,
- En ce qui concerne la moyenne harmonique, elle est plus sensible aux plus petites valeurs de la série qu'aux plus grandes.

## Definition

Le mode, noté  $M_o$ , d'une série statistique est la valeur de cette série dont l'effectif (ou la fréquence) est plus grand que les effectifs (ou les fréquences) des valeurs voisines.

## Remarque :

C'est le plus simple mais le moins utilisé !



# Plan

## 1 Introduction

## 2 A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation
- II) La moyenne Géométrique
- III) La moyenne Harmonique
- IV) La moyenne Quadratique
- VI) Résultat comparatif
- VII) Conclusion :

## B) LE MODE



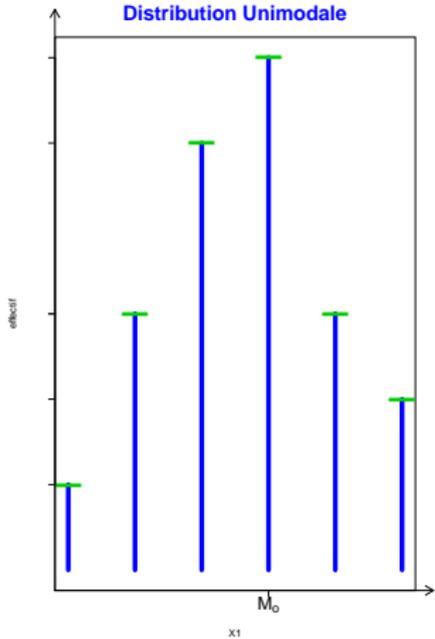
# Le Mode dans le cas d'une v.s.d.

Dans le cas d'une v.s.d. la détermination du mode est immédiate à partir du tableau statistique ou du diagramme en bâtons.

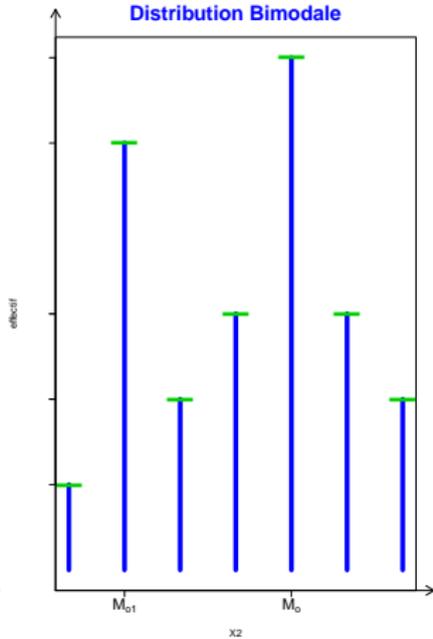
## Exemple :

Ci-dessous on donne trois diagrammes en bâtons associés respectivement, à une distribution unimodale (qui a un seul mode), et à une distribution bimodale (qui a deux modes), et à une distribution qui a un intervalle modal.

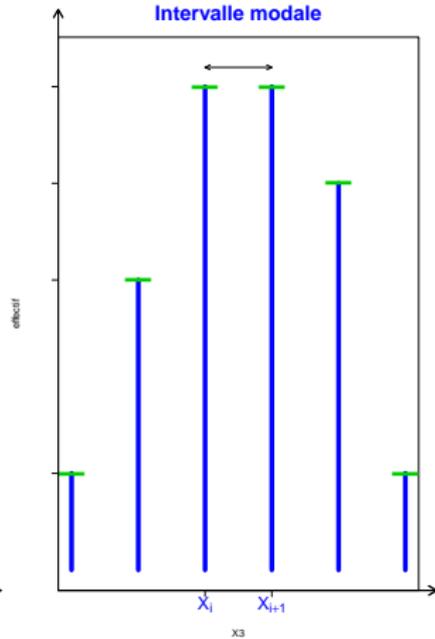
Distribution Unimodale



Distribution Bimodale



Intervalle modale



# Mode-V.S.D.

Exemple 1 : 20 femmes selon le nombre d'enfants

$x_i$	$n_i$	$f_i$
0	1	0,05
1	3	0,15
2	5	0,25
3	6	0,3
4	3	0,15
5	2	0,1
<b>Total</b>	20	1

# Mode-V.S.D.

Exemple 1 : 20 femmes selon le nombre d'enfants

$x_i$	$n_i$	$f_i$
0	1	0,05
1	3	0,15
2	5	0,25
3	6	0,3
4	3	0,15
5	2	0,1
<b>Total</b>	20	1

# Mode-V.S.D.

Exemple 1 : 20 femmes selon le nombre d'enfants

$x_i$	$n_i$	$f_i$
0	1	0,05
1	3	0,15
2	5	0,25
3	6	0,3
4	3	0,15
5	2	0,1
<b>Total</b>	20	1

# Mode-V.S.D.

Exemple 1 : 20 femmes selon le nombre d'enfants

$x_i$	$n_i$	$f_i$
0	1	0,05
1	3	0,15
2	5	0,25
3	6	0,3
4	3	0,15
5	2	0,1
<b>Total</b>	20	1

⇒  $M_o = 3$  enfants

# Plan

## 1 Introduction

## 2 A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation
- II) La moyenne Géométrique
- III) La moyenne Harmonique
- IV) La moyenne Quadratique
- VI) Résultat comparatif
- VII) Conclusion :

## B) LE MODE

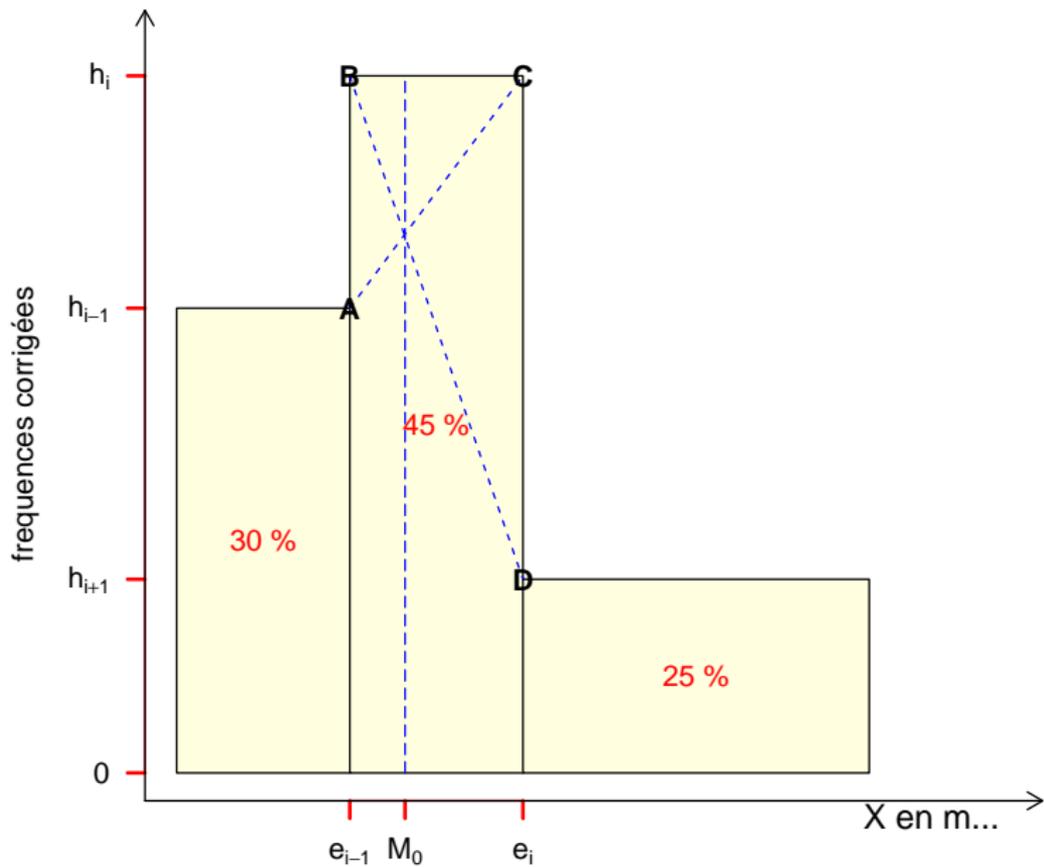


# Le Mode dans le cas d'une v.s.c.

Dans le cas d'une **v.s.c.** la détermination du **mode** est immédiate à partir de l'**histogramme**.



# Histogramme de la variable Revenu





# Mode-V.S.C.

Exemple : 20 femmes selon le Revenu

<i>Classe</i>	$f_i$	$a_i$	$f'_i = h_i$
$[0, 35[$	0,30	35	0,30
$[35, 70[$	0,45	35	0,45
$[70, 140[$	0,25	35	0,13
Total	1	$a_r = 35$	--

# Mode-V.S.C.

Exemple : 20 femmes selon le Revenu

<i>Classe</i>	<i>f<sub>i</sub></i>	<i>a<sub>i</sub></i>	<i>f'<sub>i</sub> = h<sub>i</sub></i>
[0 , 35[	0,30	35	0,30
[35 , 70[	0,45	35	0,45
[70 , 140[	0,25	35	0,13
<b>Total</b>	<b>1</b>	<b>a<sub>r</sub> = 35</b>	<b>--</b>

$$M_o = e_1 + a_2 \times \frac{h_2 - h_1}{2 h_2 - (h_1 + h_3)}$$

# Mode-V.S.C.

Exemple : 20 femmes selon le Revenu

<i>Classe</i>	$f_i$	$a_i$	$f'_i = h_i$
[0 , 35[	0,30	35	0,30
[35 , 70[	0,45	35	0,45
[70 , 140[	0,25	35	0,13
<b>Total</b>	<b>1</b>	$a_r = 35$	--

$$M_o = e_1 + a_2 \times \frac{h_2 - h_1}{2h_2 - (h_1 + h_3)}$$

$$M_o = 35 + 35 \times \frac{0,45 - 0,3}{0,9 - (0,3 + 0,13)}$$

# Mode-V.S.C.

Exemple : 20 femmes selon le Revenu

Classe	$f_i$	$a_i$	$f'_i = h_i$
[0 , 35[	0,30	35	0,30
[35 , 70[	0,45	35	0,45
[70 , 140[	0,25	35	0,13
Total	1	$a_r = 35$	--

$$M_o = e_1 + a_2 \times \frac{h_2 - h_1}{2h_2 - (h_1 + h_3)}$$
$$M_o = 35 + 35 \times \frac{0,45 - 0,3}{0,9 - (0,3 + 0,13)}$$

$$M_o = 46,17 \text{ m€}$$

## Definition

La Médiane, notée  $M$ , d'une série statistique, est la **valeur** de la série qui partage la **population** en deux parties d'effectifs égaux. Par conséquent, on aura **autant** d'observations **inférieures à  $M$**  que d'observations **supérieures à  $M$** .



# Plan

## 1 Introduction

## 2 A) LES MOYENNES

- I) La moyenne arithmétique
  - 1) Définition
  - 2) Changement d'origine et d'échelle
  - 3) Propriétés algébriques
  - 4) Propriété d'agrégation
- II) La moyenne Géométrique
- III) La moyenne Harmonique
- IV) La moyenne Quadratique
- VI) Résultat comparatif
- VII) Conclusion :



## a) Cas d'une série brute

Soit la série ordonnée de  $n$  observations :  $x_1, x_2, \dots, x_n$  .

## a) Cas d'une série brute

Soit la série ordonnée de  $n$  observations :  $x_1, x_2, \dots, x_n$  .

- Si  $n$  est **impaire**, alors la valeur médiane est l'observation qui occupe le rang  $\frac{(n + 1)}{2}$ .

## a) Cas d'une série brute

Soit la série ordonnée de  $n$  observations :  $x_1, x_2, \dots, x_n$  .

- Si  $n$  est **impaire**, alors la valeur médiane est l'observation qui occupe le rang  $\frac{(n + 1)}{2}$ .
- Si  $n$  est **paire**, on ne peut plus déterminer exactement la **médiane**, par contre on aura un **intervalle médian** :

$$\left[ x_{\frac{n}{2}} , x_{\frac{n+1}{2}} \right]$$

## b) Cas d'une distribution

### (i) Cas d'une v.s.d.

Soit  $X$  une v.s.d. de distribution  $\{(x_i, n_i)_{1 \leq i \leq k}\}$ . Pour déterminer sa médiane, on utilise les fréquences cumulées croissantes  $F_i$ .

## b) Cas d'une distribution

### (i) Cas d'une v.s.d.

Soit  $X$  une v.s.d. de distribution  $\{(x_i, n_i)_{1 \leq i \leq k}\}$ . Pour déterminer sa médiane, on utilise les fréquences cumulées croissantes  $F_i$ .

**Procédure à suivre :**

## b) Cas d'une distribution

### (i) Cas d'une v.s.d.

Soit  $X$  une v.s.d. de distribution  $\{(x_i, n_i)_{1 \leq i \leq k}\}$ . Pour déterminer sa médiane, on utilise les fréquences cumulées croissantes  $F_i$ .

#### Procédure à suivre :

- Si  $\forall i F_i \neq 0,5$ ; autrement dit, si aucune fréquence cumulée  $F_i$  n'est égale à  $0,5$ , dans ce cas la médiane est la modalité  $x_i$  qui correspond à la plus petite fréquence cumulée dépassant strictement  $0,5$ .

## b) Cas d'une distribution

### (i) Cas d'une v.s.d.

Soit  $X$  une v.s.d. de distribution  $\{(x_i, n_i)_{1 \leq i \leq k}\}$ . Pour déterminer sa médiane, on utilise les fréquences cumulées croissantes  $F_i$ .

#### Procédure à suivre :

- Si  $\forall i F_i \neq 0,5$ ; autrement dit, si aucune fréquence cumulée  $F_i$  n'est égale à  $0,5$ , dans ce cas la médiane est la modalité  $x_i$  qui correspond à la plus petite fréquence cumulée dépassant strictement  $0,5$ .
- S'il existe une modalité  $x_i$  pour laquelle  $F_i = 0,5$ , dans ce cas on parle d'un intervalle médian :  $[x_i, x_{i+1}]$ .

## Détermination de la médiane : VSD

Exemple : On reprend les 20 femmes selon le nb d'enfants

$x_i$	$f_i\%$	$F_i\%$
0	5	5
1	15	20
2	25	45
3	30	75
4	15	90
5	10	100
<b>Total</b>	100	Au plus

## Détermination de la médiane : VSD

Exemple : On reprend les 20 femmes selon le nb d'enfants

$x_i$	$f_i\%$	$F_i\%$
0	5	5
1	15	20
2	25	45
3	30	75
4	15	90
5	10	100
<b>Total</b>	100	Au plus

$$F_3 = 45 < 50\% < F_4 = 75 \Rightarrow$$

$$x_4 = M = 3$$

## b) Cas d'une distribution

### (ii) Cas d'une v.s.c.

Dans le cas **continue**, la médiane est toujours **unique** :

## b) Cas d'une distribution

### (ii) Cas d'une v.s.c.

Dans le cas **continue**, la médiane est toujours **unique** : c'est la valeur qui partage **exactement** la population en deux parties égales. En d'autres termes,  $M$  est la **solution** de l'équation :

$$F(M) = 0,5 = (50\%)$$

où  $F$  est la **fonction de répartition** de  $X$ .

## b) Cas d'une distribution

### (ii) Cas d'une v.s.c.

Il y a **deux** méthodes pour déterminer la **médiane** :

## b) Cas d'une distribution

### (ii) Cas d'une v.s.c.

Il y a **deux** méthodes pour déterminer la **médiane** :

- **Détermination graphique :**

La médiane correspond à l'abscisse du point de la courbe cumulative qui admet pour ordonnée la valeur **0,5** (ou 50%).  
(Graphique de l'exemple)

## b) Cas d'une distribution

### (ii) Cas d'une v.s.c.

Il y a **deux** méthodes pour déterminer la **médiane** :

- **Détermination graphique :**

La médiane correspond à l'abscisse du point de la courbe cumulative qui admet pour ordonnée la valeur **0,5** (ou 50%).  
(Graphique de l'exemple)

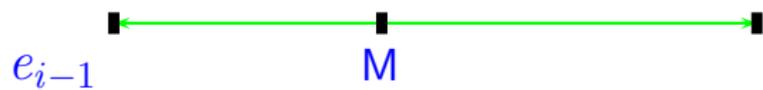
- **Détermination par interpolation :**

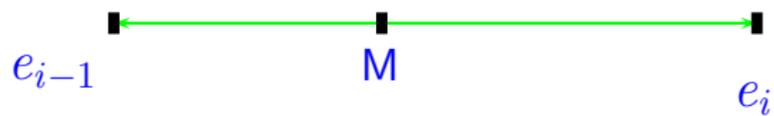
D'après le tableau (colonne des  $F_i$ ), on détermine la classe contenant la médiane  $M$  ; c'est la classe  $[e_{i-1}, e_i[$  telle que,  $F_{i-1} \leq 50\% < F_i$  puis on détermine  $M$  par interpolation linéaire. Donc on a :

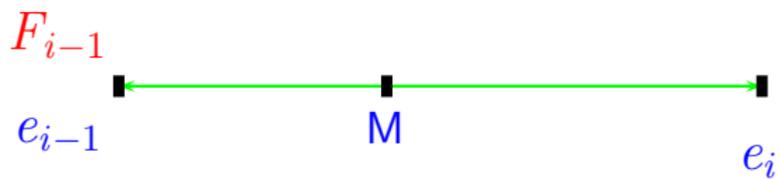


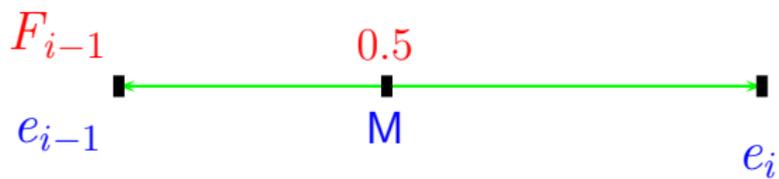


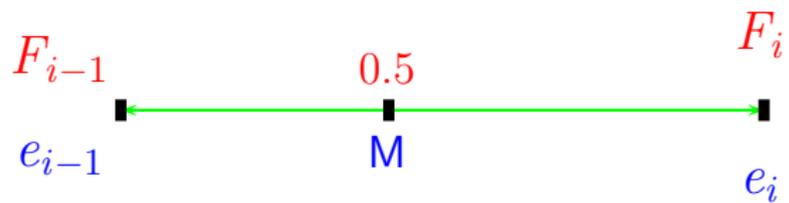


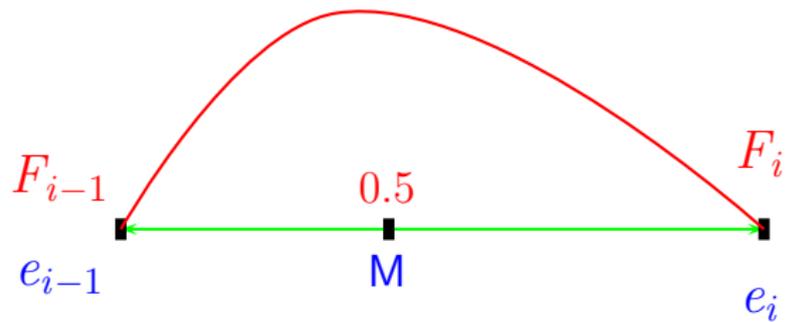


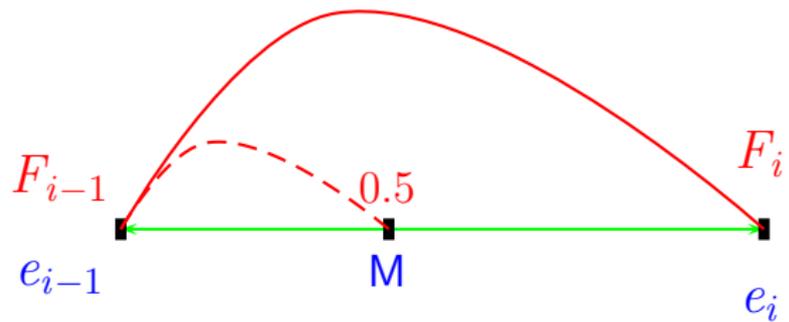


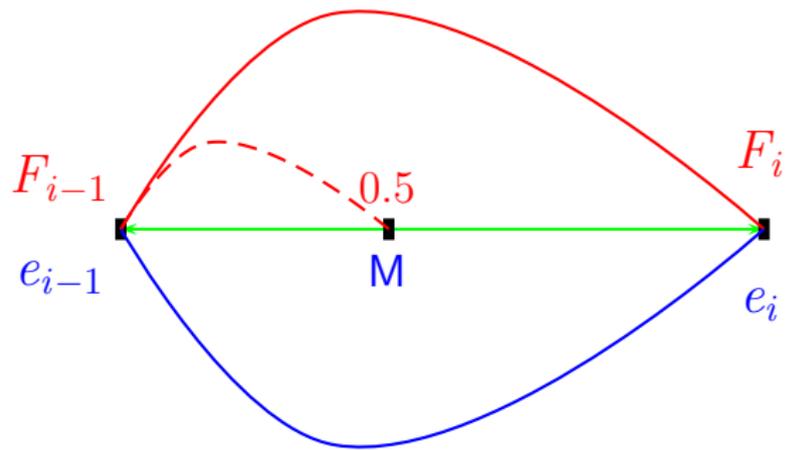


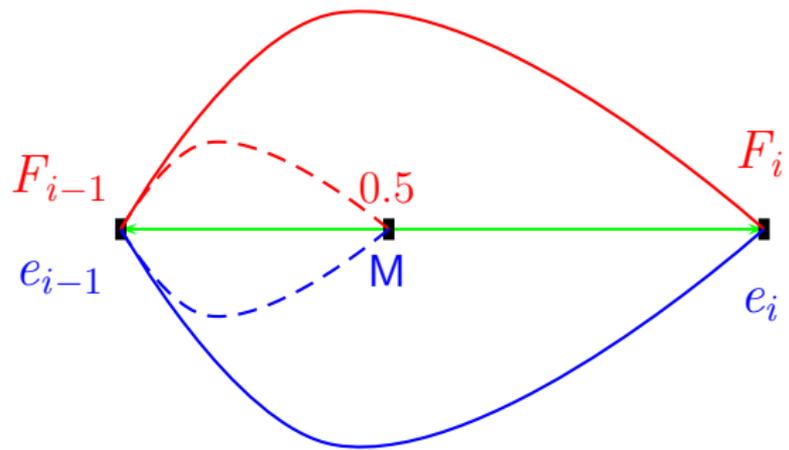


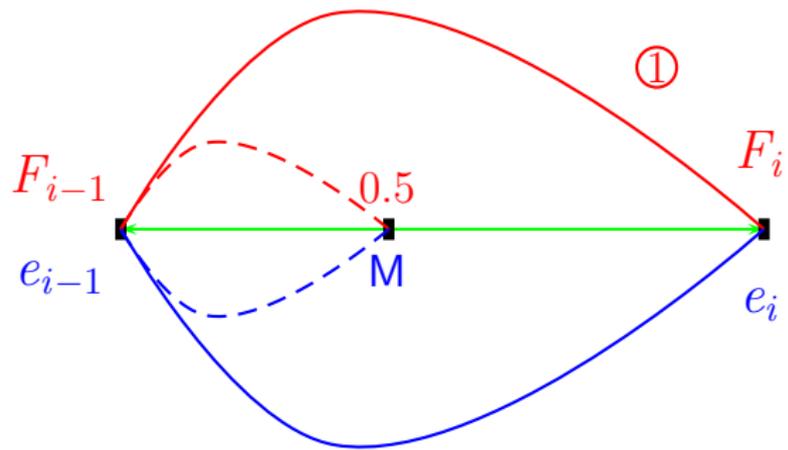


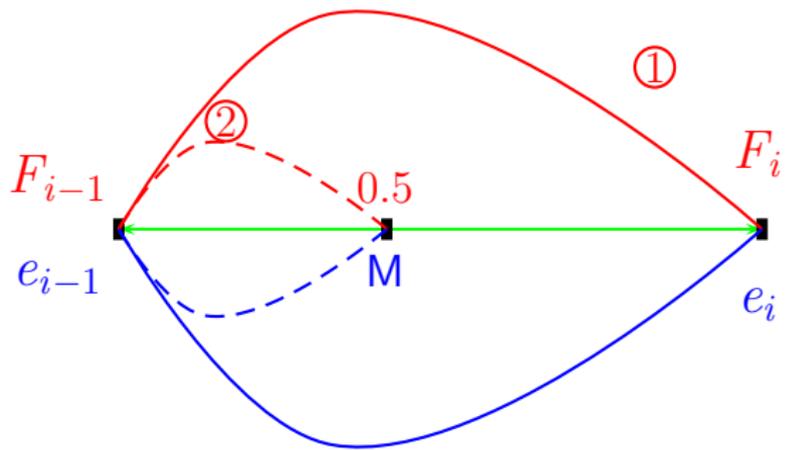


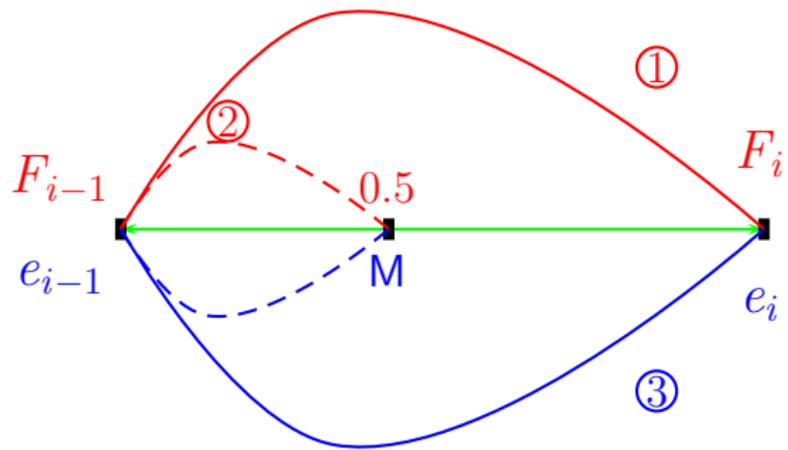


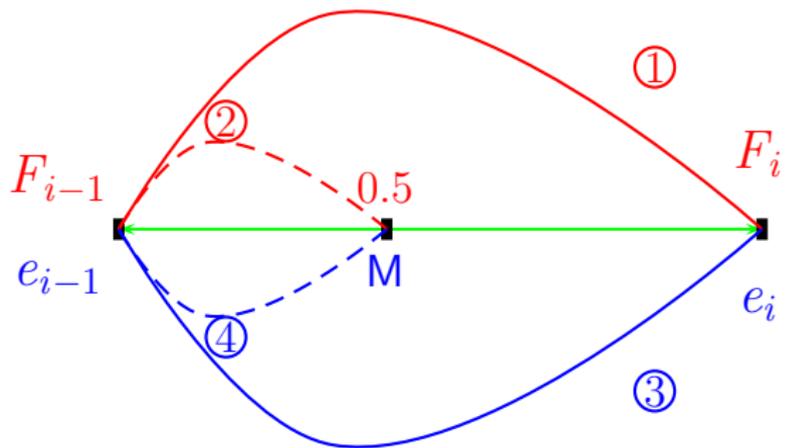


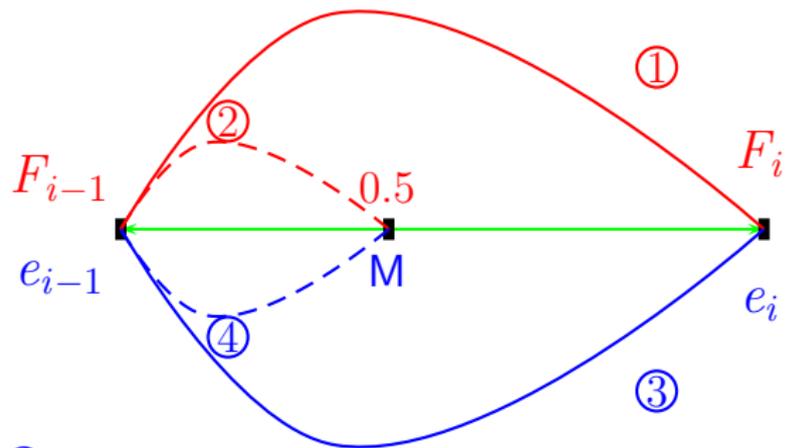




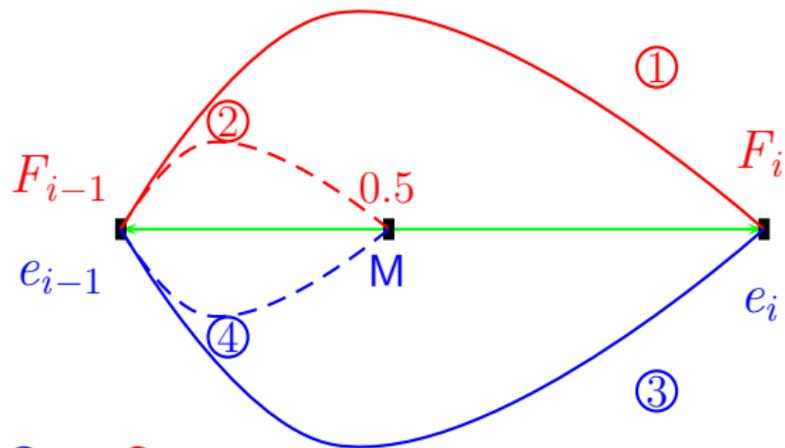




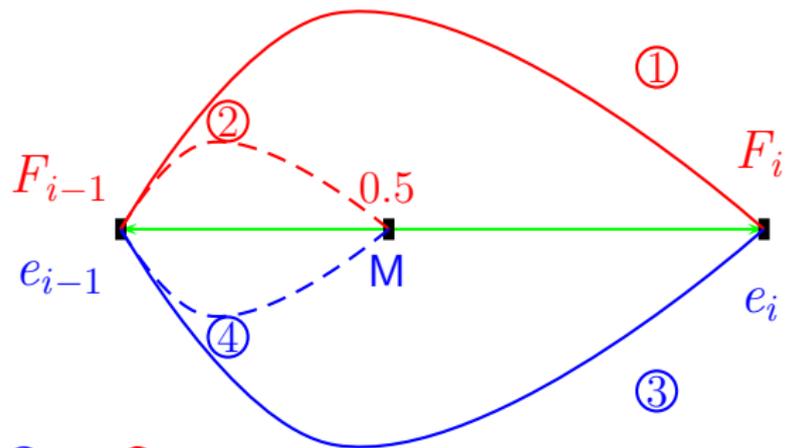




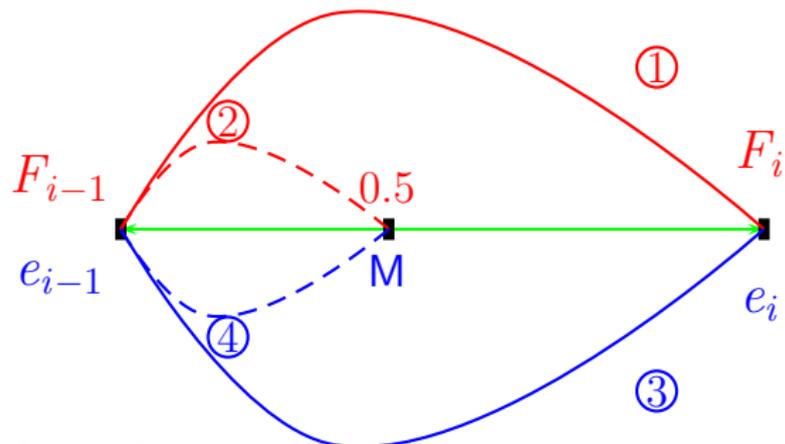
$$\frac{\textcircled{4}}{\textcircled{3}} =$$



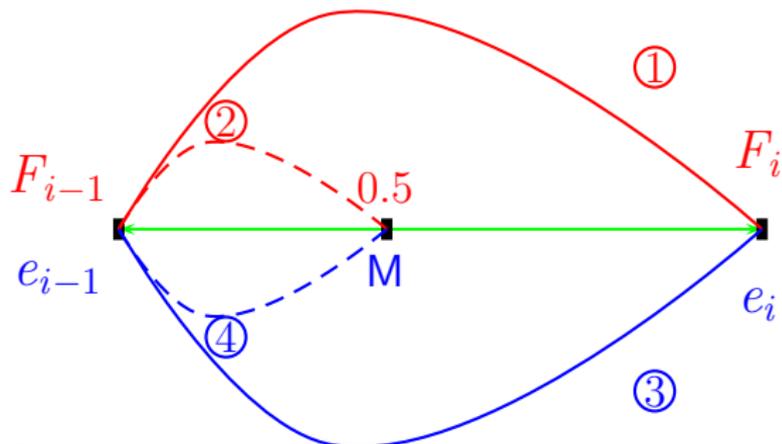
$$\frac{\textcircled{4}}{\textcircled{3}} = \frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}}$$



$$\frac{\textcircled{4}}{\textcircled{3}} = \frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} \Leftrightarrow$$

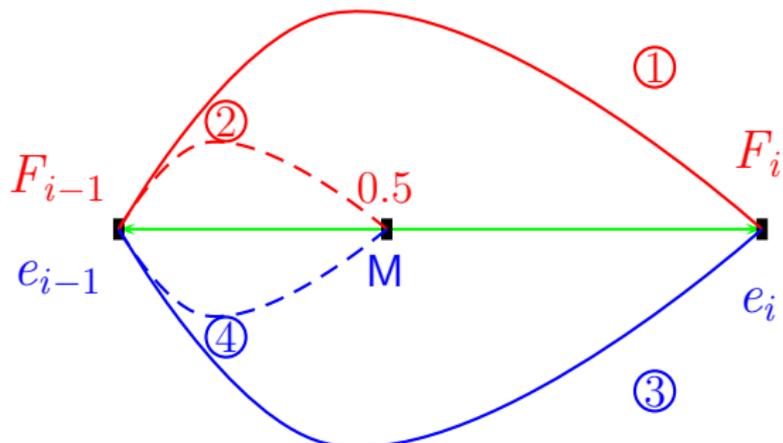


$$\frac{\textcircled{4}}{\textcircled{3}} = \frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} \Leftrightarrow \frac{M - e_{i-1}}{a_i} = \frac{0,5 - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}}$$



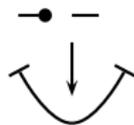
$$\frac{\textcircled{4}}{\textcircled{3}} = \frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} \Leftrightarrow \frac{M - e_{i-1}}{a_i} = \frac{0,5 - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}}$$

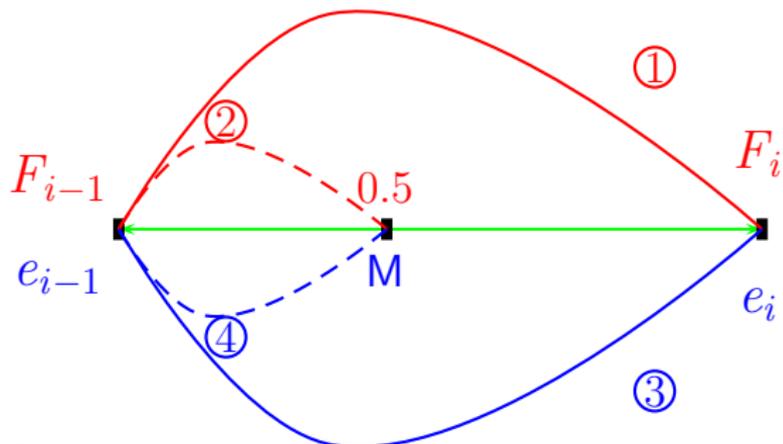
$$\Leftrightarrow M = e_{i-1} + a_i \frac{0,5 - F_{i-1}}{f_i}$$



$$\frac{\textcircled{4}}{\textcircled{3}} = \frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} \Leftrightarrow \frac{M - e_{i-1}}{a_i} = \frac{0,5 - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}}$$

$$\Leftrightarrow M = e_{i-1} + a_i \frac{0,5 - F_{i-1}}{f_i}$$





$$\frac{\textcircled{4}}{\textcircled{3}} = \frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} \Leftrightarrow \frac{M - e_{i-1}}{a_i} = \frac{0,5 - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}}$$

$$\Leftrightarrow M = e_{i-1} + a_i \frac{0,5 - F_{i-1}}{f_i}$$



## La Médiane dans le cas d'une v.s.c.

On vient de démontrer que l'expression algébrique de La Médiane est :

$$\Leftrightarrow M = e_{i-1} + a_i \frac{0,5 - F_{i-1}}{f_i}$$

Où

- $[e_{i-1}, e_i]$  ( $\exists M$  (qui contient la médiane)) : est la classe médiane
- $a_i$  : est son amplitude
- $f_i$  : étant sa fréquence
- $F_{i-1}$  : étant la fréquence cumulée de la classe précédente

La Médiane dans le cas d'une v.s.c.

## Exemple : 20 femmes selon le Revenu

<i>Classe</i>	$a_i$	$f_i$	$F_i$
[0 , 35[	35	0,30	0,30
[35 , 70[	35	0,45	0,75
[70 , 140[	70	0,25	1
Total		1	<i>au plus</i>

La Médiane dans le cas d'une v.s.c.

## Exemple : 20 femmes selon le Revenu

<i>Classe</i>	<i>a<sub>i</sub></i>	<i>f<sub>i</sub></i>	<i>F<sub>i</sub></i>
[0 , 35[	35	0,30	0,30
[35 , 70[	35	0,45	0,75
[70 , 140[	70	0,25	1
Total		1	<i>auplus</i>

$$F_1 = 30\% \leq 50\% < F_2 = 75\% \Rightarrow \\ M \in [35 , 70[$$

La Médiane dans le cas d'une v.s.c.

## Exemple : 20 femmes selon le Revenu

<i>Classe</i>	$a_i$	$f_i$	$F_i$
[0 , 35[	35	0,30	0,30
[35 , 70[	35	0,45	0,75
[70 , 140[	70	0,25	1
<b>Total</b>		<b>1</b>	<i>auplus</i>

$$F_1 = 30\% \leq 50\% < F_2 = 75\% \Rightarrow M \in [35 , 70[$$

$$M = e_1 + a_2 \times \frac{0,5 - F_1}{f_2}$$

## La Médiane dans le cas d'une v.s.c.

### Exemple : 20 femmes selon le Revenu

<i>Classe</i>	$a_i$	$f_i$	$F_i$
[0 , 35[	35	0,30	0,30
[35 , 70[	35	0,45	0,75
[70 , 140[	70	0,25	1
<b>Total</b>		1	<i>auplus</i>

$$F_1 = 30\% \leq 50\% < F_2 = 75\% \Rightarrow M \in [35 , 70[$$

$$M = e_1 + a_2 \times \frac{0,5 - F_1}{f_2}$$

$$M = 35 + 35 \times \frac{0,5 - 0,3}{0,45}$$

La Médiane dans le cas d'une v.s.c.

## Exemple : 20 femmes selon le Revenu

<i>Classe</i>	$a_i$	$f_i$	$F_i$
[0 , 35[	35	0,30	0,30
[35 , 70[	35	0,45	0,75
[70 , 140[	70	0,25	1
<b>Total</b>		1	<i>auplus</i>

$$F_1 = 30\% \leq 50\% < F_2 = 75\% \Rightarrow M \in [35 , 70[$$

$$M = e_1 + a_2 \times \frac{0,5 - F_1}{f_2}$$

$$M = 35 + 35 \times \frac{0,5 - 0,3}{0,45}$$

$$M \text{ 50,56 m€}$$

## Revenu des 20 femmes

<i>Classe</i>	<i>F<sub>i</sub>%</i>
[0 , 35[	30
[35 , 70[	75
[70 , 140[	100
<i>Total</i>	<i>Au Plus</i>

# Conclusion Générale

- Population hétérogène : La moyenne arithmétique est préférable à la médiane et au mode.



# Conclusion Générale

- Population hétérogène : La **moyenne arithmétique** est préférable à la médiane et au mode.
- Présence des valeurs aberrantes (ou extrêmes) : La **médiane** est préférable.



# Conclusion Générale

- Population hétérogène : La **moyenne arithmétique** est préférable à la médiane et au mode.
- Présence des valeurs aberrantes (ou extrêmes) : La **médiane** est préférable.
- Résultats d'un concours : la note **médiane** est la plus significative.



# Conclusion Générale

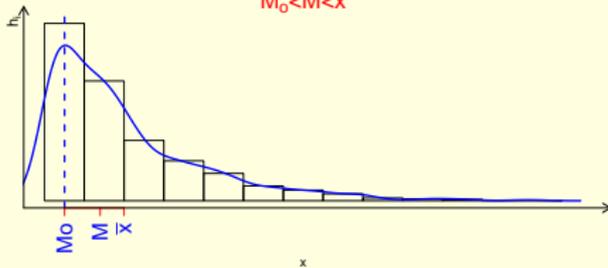
- **Population hétérogène** : La **moyenne arithmétique** est préférable à la médiane et au mode.
- **Présence des valeurs aberrantes (ou extrêmes)** : La **médiane** est préférable.
- **Résultats d'un concours** : la note **médiane** est la plus significative.
- **Démographie** : " **L'espérance de vie** " est conseillée pour comparer des pays en voie de dvpt. Pour un seul, la durée **médiane** ou le **mode** (âge le plus fréquent à la mort) sont utilisés.



# Revenu des 20 femmes : Positions Relatives des 3 Paramètres $M_O$ , $M$ et $\bar{x}$ :

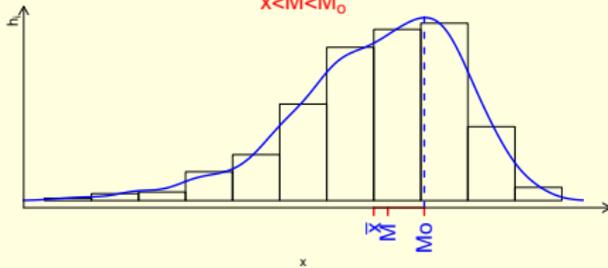
Distribution Unimodale dissymétrique étalée à droite

$$M_O < M < \bar{x}$$



Distribution Unimodale dissymétrique étalée à gauche

$$\bar{x} < M < M_O$$



Distribution Unimodale symétrique

$$M_O = M = \bar{x}$$

