

# Un système modèle pour étudier l'influence des variations de température sur une assemblée de grains frictionnels

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>De l'expérience au modèle . . . . .</b>	<b>68</b>
<b>3.2</b>	<b>Détails du modèle . . . . .</b>	<b>70</b>
3.2.1	Modélisation des effets de la dilatation thermique .	70
3.2.2	Réaction frictionnelle du support . . . . .	72
3.2.3	Equations mécaniques régissant la dynamique d'un réarrangement interne . . . . .	73
3.2.4	Adimensionnement des équations différentielles ré- gissant le mouvement et procédure numérique . . .	74
<b>3.3</b>	<b>Le système constitué de 2 blocs . . . . .</b>	<b>75</b>
3.3.1	Système déterministe . . . . .	75
3.3.2	Introduction du bruit . . . . .	79
<b>3.4</b>	<b>Augmentation de la taille du système . . . . .</b>	<b>85</b>
3.4.1	Etude du cas à 3 blocs . . . . .	85
3.4.2	Généralisation de l'étude : le système constitué de N blocs . . . . .	89
<b>3.5</b>	<b>Discussion . . . . .</b>	<b>95</b>
3.5.1	Reptation d'un solide frictionnel . . . . .	95
3.5.2	Quel est l'intérêt de notre modèle ? . . . . .	98
<b>3.6</b>	<b>Remarques . . . . .</b>	<b>98</b>

3.6.1	Sur la modélisation des effets de la température . .	98
3.6.2	Sur le choix de la loi de friction . . . . .	99

### 3.1 De l'expérience au modèle

Le système expérimental présenté dans la première partie de ce manuscrit montre qu'un matériau granulaire est sensible à des variations de sa température. Les dilatations engendrées sont en effet capables de déplacer les grains sur une distance de l'ordre de la taille des rugosités de leurs surfaces. On peut aussi raisonner en terme de force pour expliquer la déstabilisation du système suite à une variation de température. Supposons que deux grains de rayon  $R$  reposent sur un support plan (Fig. 3.1). A température ambiante ces deux grains sont en contact ponctuel. Lors d'un accroissement de la température, les grains s'interpénètrent et appliquent l'un sur l'autre une force élastique. La zone de contact lors d'un accroissement  $r$  du rayon  $R$  des billes

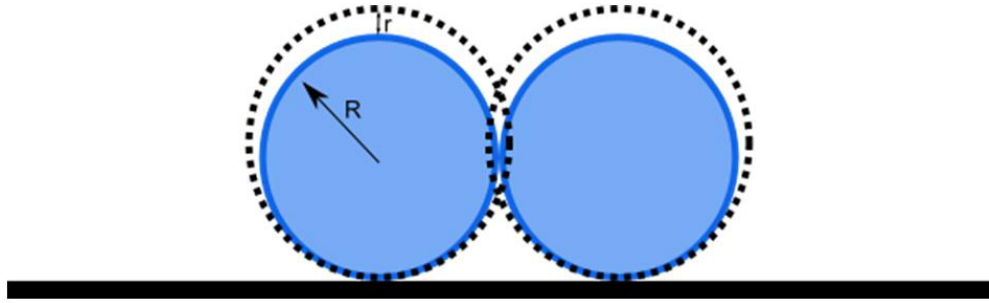


FIGURE 3.1 – Deux billes en interaction mutuelle par le contact de Hertz reposant sur un support frictionnel

est approximativement  $rR$ . Ainsi la force élastique qu'applique une bille sur sa voisine est de l'ordre de  $YrR\frac{r}{R}$ ,  $Y$  étant le module d'Young du matériau. Pour conduire au déplacement d'une des billes, cette force doit dépasser la force de friction solide  $\mu_s\rho R^3g$  avec  $\rho$  la masse volumique des grains utilisés. Ainsi, il y a glissement si :

$$Y \times rR \times \frac{r}{R} \sim \mu_s\rho R^3g$$

soit,

$$\frac{r}{R} \sim \left(\frac{\mu_s\rho Rg}{Y}\right)^{\frac{1}{2}}$$

On peut estimer le rapport  $\frac{r}{R}$  en considérant le coefficient de dilatation thermique et la variation de température  $\Delta T$ . On a  $\kappa \Delta T = \frac{r}{R}$ . Alors la variation de température suffisante pour induire le glissement d'une bille est de l'ordre de :

$$\Delta T = \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\mu_s \rho R g}{Y} \right)^{\frac{1}{2}}$$

En considérant les ordres de grandeur des paramètres, on obtient :

$$\Delta T \sim 1K$$

pour  $R \sim 500 \mu m$ ,  $Y \sim 10^{11} Pa$ ,  $\mu_s \sim 1$ ,  $\rho \sim 2000 kg.m^{-3}$  et  $\kappa \sim 10^{-5} K^{-1}$ .

Avec ce raisonnement extrêmement simpliste, on trouve qu'une variation de la température des grains de quelques degrés suffit à déstabiliser un grain frictionnel. Une vision encore plus schématique de ce raisonnement consiste à remplacer les billes par des blocs solides (Fig. 3.2). L'élasticité du matériau peut être modélisée par un ressort reliant ces deux blocs solides. L'effet de la température sur ce système est prise en compte par une variation linéaire de la longueur à vide du ressort avec la température [32]. Sous l'effet de

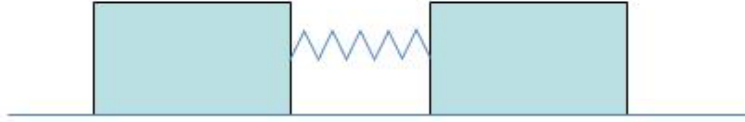


FIGURE 3.2 – Schéma simplifié du système étudié : les billes sont remplacées par des blocs

l'application répétée de cycles de température, on s'attend par symétrie à ce que le mouvement du centre de masse de ce système soit nul. Les deux blocs solides vont s'éloigner lors d'une dilatation, puis se rapprocher à nouveau lors de la contraction suivante. Pour créer un mouvement d'ensemble du système (et briser sa symétrie), le substrat doit être incliné par rapport à l'horizontale. On s'attend ainsi à ce que le système se déplace dans le sens de la pente. C'est ce qu'il se passe également pour la colonne de grains : il y a compaction dans le sens de la gravité.

Ce système constitué de 2 blocs solides frictionnels reliés par un ressort dont la longueur à vide dépend de la température et reposant sur un plan incliné possède les ingrédients physiques minimaux du système expérimental

de la colonne de grains chauffés cycliquement. En effet, l'élasticité des grains est prise en compte par le ressort reliant les blocs solides, leur dilatation thermique, par la dépendance avec la température de la longueur à vide des ressorts, la friction des grains sur des zones de contact plus petites que leur surface caractéristique ( le carré de leur diamètre) par la friction d'un nombre fini de blocs avec le plan incliné. Enfin dans les deux cas, la gravité est le moteur de la compaction. Nous nous intéressons donc dans la suite de ce chapitre à une généralisation de ce modèle à un système constitué de  $N$  blocs.

## 3.2 Détails du modèle

Le système d'étude, de masse totale  $M$ , est composé de  $N$  blocs ponctuels de masse identique  $m = \frac{M}{N}$  (Fig. 3.3). Ils sont reliés à leurs voisins par des ressorts de masse nulle, de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$  à la température  $T_0$ . Chacun de ces blocs est soumis aux forces élastiques des 2 ressorts voisins, à son poids  $mg$  ( $g$  étant l'accélération de la pesanteur) et à la réaction du plan incliné sur lequel ils sont posés. Ce plan incliné fait un angle  $\alpha$  avec l'horizontale.

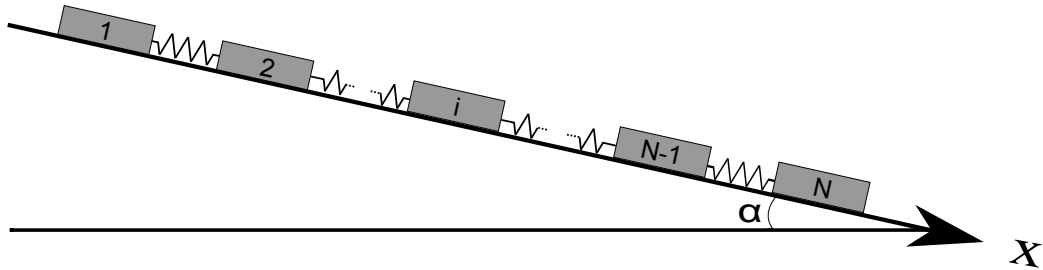


FIGURE 3.3 – Schéma du système étudié

### 3.2.1 Modélisation des effets de la dilatation thermique

Afin de tenir compte de la dilatation thermique des grains, nous supposons que la longueur à vide du ressort  $l$  varie linéairement avec la température. Ainsi  $l(T) = l_0[1 + \kappa(T - T_0)]$  où  $\kappa$  représente le coefficient de dilatation thermique du matériau considéré et  $l_0$  la longueur à vide du ressort à la

température  $T_0$ . La force élastique induite par le bloc  $n+1$  sur le bloc  $n$  à la température  $T$  est

$$f_{n+1 \rightarrow n} = -k[x_n - x_{n+1} + l(T)] \quad (3.1)$$

Il est également nécessaire de savoir comment évolue la température du système. Il est intéressant de remarquer que le temps typique d'un réarrangement interne est très petit devant le temps typique des variations de température. En effet, un réarrangement mécanique correspondant à la relaxation de la contrainte élastique appliquée sur un bloc est la phase de glissement d'un mouvement de "stick slip". Cette phase de glissement est une demi sinusoïde de pulsation  $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ , la période propre de l'oscillateur masse ressort de masse  $m$  et de constante de raideur  $2k$ . Le temps dynamique  $\tau_{dyn}$  de ce réarrangement est le temps typique nécessaire à une onde sonore pour se propager entre 2 blocs.  $\tau_{dyn}$  est majoré par le temps de propagation de l'onde sur la longueur du matériau. Autrement dit  $\tau_{dyn} < \frac{L}{c_s}$  avec  $c_s$  la vitesse des ondes sonores longitudinales dans le solide considéré.

Quant aux variations de température du système, elles ne peuvent pas être plus rapides que le temps caractéristique de la relaxation de la température dans le système. La température de chaque bloc change significativement si les variations de température du milieu environnant ont une durée typique  $\tau_{th}$  de l'ordre de  $\frac{C_v L^2}{\lambda}$ ,  $C_v$  et  $\lambda$  étant respectivement la capacité calorifique volumique et la conductivité thermique du matériau.

Concrètement, pour un solide de taille  $L$  allant du millimètre au centimètre, le temps thermique  $\tau_{th}$  va, en ordre de grandeur, de la fraction de seconde à quelques minutes, alors que le temps de réarrangement interne peut être estimé à  $\tau_{dyn} \sim 10^{-6} - 10^{-5}$ s. On peut donc considérer que la température du système est constante pendant la durée d'un réarrangement mécanique. Cela signifie que les échelles temporelles d'évolution de la température  $\tau_{th}$  et de la position des blocs  $\tau_{dyn}$  sont décorrélées. Ainsi, seules les valeurs extrêmes de la température choisies tous les temps thermiques  $\tau_{th}$  importent. Dans la suite, on choisit 2 types de sollicitations thermiques :

- Soit la température oscillera périodiquement avec une période de  $2\tau_{th}$  provoquant une dilatation oscillant à la même période entre  $-A_\theta$  et  $A_\theta$ .
- Soit la température sera choisie aléatoirement à chaque temps thermique en suivant une loi de probabilité gaussienne conduisant à une

dilatation aléatoire tirée selon la distribution suivante

$$p(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\theta^2}} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2}\right) \quad (3.2)$$

où  $\sigma_\theta$  représente l'ordre de grandeur typique d'une dilatation thermique.

### 3.2.2 Réaction frictionnelle du support

La force exercée par le plan incliné sur un bloc possède une composante tangentielle et une composante normale au plan de contact. La composante normale compense la composante normale du poids du bloc,  $mg \cos \alpha$ . La composante tangentielle est donnée par les lois d'Amontons Coulomb, c'est-à-dire :

- quand le bloc  $i$  est à l'arrêt, il faut que la résultante des forces tangentielles qui s'exercent sur lui ne dépasse pas en valeur absolue le seuil de friction  $\mu_{s,i} mg \cos \alpha$  nécessaire à la mise en mouvement du bloc  $i$ . Le coefficient de friction statique  $\mu_{s,i}$  caractérise les forces de contact entre le plan incliné et le bloc  $i$ . La condition de vitesse nulle nous permet de savoir que la position du bloc  $i$  ne change pas. Nous ne disposons *a priori* que d'un encadrement de la force de friction. La valeur de la composante horizontale de la réaction du support est donnée par la condition que la somme des forces appliquées au bloc  $i$  à l'arrêt est nulle.
- quand le bloc  $i$  se déplace relativement à son support, la force qui s'oppose à son mouvement caractérise le taux moyen de dissipation d'énergie due au glissement des 2 surfaces en regard. Elle est donnée par  $f_{d,i} = -\mu_d mg \cos \alpha S(\dot{x}_i)$ , où  $\dot{x}_i$  est la vitesse du bloc  $i$  et  $S$  désigne la fonction signe [ $S(u) = 1$  si  $u > 0$  et  $S(u) = -1$  si  $u < 0$ ]. L'expression de cette force permet de déduire la trajectoire du bloc par la résolution de l'équation différentielle régissant le mouvement.

Nous supposerons dans la suite que le coefficient de friction statique  $\mu_{s,i}$  caractérisant le contact entre le plan incliné et le bloc  $i$  prend à chaque arrêt une nouvelle valeur avec une probabilité donnée par une distribution  $p(\mu_s)$ . Ceci nous permet de modéliser l'hétérogénéité des propriétés de la surface de contact [5, 33]. En revanche, le coefficient de friction  $\mu_d$  sera considéré comme constant. En effet, lors de son mouvement, le bloc explore une large surface de contact. Les fluctuations occasionnées par les hétérogénéités de surface

sont donc moyennées sur la longueur de glissement. On veillera cependant à choisir, conformément aux observations expérimentales, le coefficient de friction statique  $\mu_{s,i}$  plus grand que le coefficient de friction statique  $\mu_d$ . Concrètement, dans l'étude qui va suivre, nous allons choisir des valeurs de  $\mu_s$  suivant une distribution gaussienne  $p(\mu_s)$  :

$$p(\mu_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\mu^2}} \exp\left[-\frac{(\mu_s - \bar{\mu}_s)^2}{2\sigma_\mu^2}\right]$$

où  $\bar{\mu}_s$  et  $\sigma_\mu$  sont respectivement la valeur moyenne et l'écart type de la distribution (on s'assurera que  $\sigma_\mu \ll (\bar{\mu}_s - \mu_d)$  pour qu'en pratique  $\mu_s$  reste toujours plus grand que  $\mu_d$ ). Cette distribution standard nous permettra de discuter quantitativement quelques résultats. De plus, on pourra se rendre compte de l'apport de cette variabilité sur les caractéristiques du système en comparant ces résultats avec ceux obtenus pour  $\mu_s$  constant.

### 3.2.3 Equations mécaniques régissant la dynamique d'un réarrangement interne

Un bloc  $i$  ( $i=1,N$ ) commence à glisser si le rapport de la force tangentielle et de la force normale dépasse la valeur du coefficient de friction statique. Pour le système considéré, cette condition s'écrit :

$$|k(x_2 - x_1 - l_0(1 + \kappa(T - T_0)) + mg \sin \alpha| > \mu_{s,1} mg \cos \alpha \quad (3.3)$$

$$|k(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) + mg \sin \alpha| > \mu_{s,i} mg \cos \alpha \quad (3.4)$$

$$|k(x_{N-1} - x_N + l_0(1 + \kappa(T - T_0)) + mg \sin \alpha| > \mu_{s,N} mg \cos \alpha \quad (3.5)$$

Lorsque le bloc  $i$  ( $i=1,N$ ) est en mouvement, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -k[x_1 - x_2 + l_0(1 + \kappa(T - T_0))] \\ &\quad - \mu_d mg S(\dot{x}_1) \cos \alpha + mg \sin \alpha \quad (i = 1) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_n &= -k[2x_n - (x_{n+1} + x_{n-1})] \\ &\quad - \mu_d mg S(\dot{x}_n) \cos \alpha + mg \sin \alpha \quad (i \neq 1, N) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_N &= -k[x_N - x_{N-1} - l_0(1 + \kappa(T - T_0))] \\ &\quad - \mu_d mg S(\dot{x}_N) \cos \alpha + mg \sin \alpha \quad (i = N) \end{aligned} \quad (3.8)$$

### 3.2.4 Adimensionnement des équations différentielles régissant le mouvement et procédure numérique

Nous travaillerons dans la suite du manuscrit avec des variables adimensionnées. Le temps caractéristique d'un système masse ressort  $\tau_{dyn} = (\frac{m}{k})^{1/2}$  apparaît naturellement dans ces équations. Rappelons qu'à cette échelle, la température est supposée constante. En adimensionnant l'échelle de temps par cette quantité ainsi que la longueur par  $\frac{mg}{k}$ , et en introduisant la dilatation  $\theta = \kappa(T - T_0)$ , on obtient le système d'équations adimensionnées suivant. La condition pour que le patin  $i$  se mette en mouvement s'écrit maintenant :

$$|\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 - (1 + \theta)\tilde{l}_0 + \sin \alpha| > \mu_{s,1} \cos \alpha \quad (i = 1) \quad (3.9)$$

$$|\tilde{x}_{i+1} + \tilde{x}_{i-1} - 2\tilde{x}_i + \sin \alpha| > \mu_{s,i} \cos \alpha \quad (i \neq 1, N) \quad (3.10)$$

$$|\tilde{x}_{N-1} - \tilde{x}_N + (1 + \theta)\tilde{l}_0 + \sin \alpha| > \mu_{s,N} \cos \alpha \quad (i = N) \quad (3.11)$$

Les équations du mouvement lorsque le patin  $i$  bouge sont :

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}}_1 &= -[\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + (1 + \theta)\tilde{l}_0] \\ &\quad - \mu_d S(\dot{\tilde{x}}_1) \cos \alpha + \sin \alpha \quad (i = 1) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}}_i &= -[2\tilde{x}_i - (\tilde{x}_{i+1} + \tilde{x}_{i-1})] \\ &\quad - \mu_d S(\dot{\tilde{x}}_i) \cos \alpha + \sin \alpha \quad (i \neq 1, N) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}}_N &= -[\tilde{x}_N - \tilde{x}_{N-1} - (1 + \theta)\tilde{l}_0] \\ &\quad - \mu_d S(\dot{\tilde{x}}_N) \cos \alpha + \sin \alpha \quad (i = N) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Pour résoudre ce système d'équations, la méthode numérique employée est la suivante. Tout d'abord, on dira que lorsqu'un bloc passe de l'arrêt au mouvement et réciproquement, on dit qu'il "change d'état". On décrit la procédure à partir d'un système stable à la fin de la dilatation thermique  $\theta_q$  au temps thermique  $t_q = q\tau_{th}$ . Au cours de cette dilatation thermique, le système a connu  $k$  réarrangements. Les positions des patins  $i$  et les valeurs des coefficients de friction statique se notent respectivement  $x_i^k$  et  $\mu_{s,i}^k$ . Au temps thermique suivant  $t_{q+1}$ , on choisit aléatoirement une nouvelle valeur de la dilatation  $\theta_{q+1}$ . On cherche la dilatation minimale qui rompt une des conditions de stabilité. C'est le réarrangement mécanique  $k+1$ , ayant lieu à la dilatation  $\theta^{k+1}$ , conduisant les blocs à de nouvelles positions stables  $x_i^{k+1}$ . Pour trouver ces nouvelles positions, on intègre numériquement les équations du mouvement avec un pas de temps  $\Delta t \ll (\frac{m}{k})^{1/2}$ , en utilisant l'algorithme Velocity Verlet [1]. Cet algorithme consiste à calculer les positions à l'instant  $t + \Delta t$  en fonction des positions, des vitesses et des accélérations à l'instant



$t$ , puis à calculer les vitesses à l'instant  $t + \Delta t$  en fonction des vitesses à l'instant  $t$  et des accélérations aux instants  $t$  et  $t + \Delta t$ . A la fin de chaque pas de temps  $\Delta t$ , on vérifie d'une part que les blocs en mouvement n'ont pas déstabilisé leurs voisins et d'autre part que les blocs en mouvement ne s'arrêtent pas, c'est-à-dire qu'aucun des blocs ne "change d'état". Si pendant cet incrément de temps, un bloc "change d'état", on estime à partir de la valeur des vitesses et accélérations aux temps  $t$  et  $t + \Delta t$ , l'incrément de temps  $\Delta t_p$  ( $\Delta t_p < \Delta t$ ) correspondant au "changement d'état" d'un bloc. La procédure numérique utilise alors exceptionnellement cet incrément de temps  $\Delta t_p$  pour l'intégration numérique des équations. Quand un bloc s'arrête, on choisit aléatoirement dans la distribution  $p(\mu_s)$  une nouvelle valeur de  $\mu_s$ . On répète cette procédure jusqu'à ce que tous les blocs soient à l'arrêt. Chaque bloc est alors à la position  $x_i^{k+1}$  et possède un coefficient de friction statique  $\mu_{s,i}^{k+1}$ . On cherche alors la nouvelle valeur de la dilatation  $\theta^{k+2}$  pour laquelle un réarrangement mécanique a lieu, et par la même procédure on trouve la nouvelle configuration stable. Quand la dilatation  $\theta^{j+1}$  nécessaire au prochain réarrangement  $j + 1$  est au-delà de la valeur initialement choisie  $\theta_{q+1}$ , on considère que les positions  $x_i^j$  et les coefficients de friction  $\mu_{s,i}^j$  à la fin du précédent réarrangement correspondent aux positions et aux coefficients de friction à la fin du temps thermique  $t_{q+1}$ . On choisit alors aléatoirement une nouvelle valeur de la dilatation  $\theta_{q+2}$ , et on répète la procédure précédemment exposée.

Par cette méthode on résout la dynamique interne des réarrangements. Par la suite, on s'intéressera toutefois principalement à la dynamique du système à l'échelle du temps thermique.

### 3.3 Le système constitué de 2 blocs

#### 3.3.1 Système déterministe

On cherche à connaître le déplacement d'un système constitué de 2 blocs soumis à des cycles de température d'amplitude constante avec un coefficient de friction statique unique (Fig. 3.4).

Pour  $\alpha = 0$ , le système est symétrique donc le mouvement du centre de masse  $x_g$  est nul.

Pour  $\alpha \neq 0$ , lors d'une dilatation ( $\theta > 0$ ) de la longueur à vide du ressort, le ressort est en compression. Le patin 1 subit une force élastique contraire à la gravité, alors que le patin 2 subit la force opposée s'ajoutant à la gravité. Les conditions de stabilité (3.9) et (3.11) s'écrivent :

$$-\tilde{x}_2 + \tilde{x}_1 + \tilde{l}_0(1 + \theta) > \mu_s \cos \alpha + \sin \alpha \quad (3.15)$$

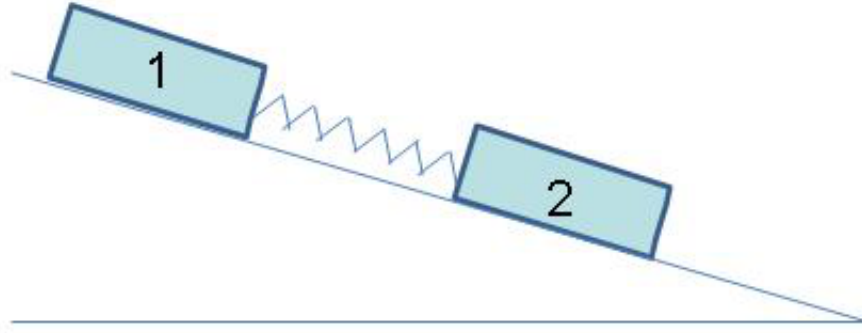


FIGURE 3.4 – Système de deux blocs sur un plan incliné

qui correspond à la condition de mise en mouvement du patin 1.

$$-\tilde{x}_2 + \tilde{x}_1 + \tilde{l}_0(1 + \theta) > \mu_s \cos \alpha - \sin \alpha \quad (3.16)$$

qui correspond à la condition de mise en mouvement du patin 2

On voit que la pente introduit un biais systématique dans la condition de glissement. Le patin 2 subit une force élastique orientée dans le même sens que la force de gravité. Il glisse donc toujours en premier. La résolution de l'équation (3.16) nous permet de trouver la dilatation de décrochage  $\theta_d$  pour laquelle le patin 2 perd sa stabilité.

$$\theta_d = \frac{\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha + (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 + \tilde{l}_0)}{\tilde{l}_0} \quad (3.17)$$

L'équation du mouvement vérifiée par le patin 2 est

$$\ddot{\tilde{x}}_2 = -[\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 + \tilde{l}_0(1 + \theta_d)] - \mu_d \cos \alpha + \sin \alpha$$

En supposant le bloc 1 stable (le mouvement du bloc 2 pourrait déstabiliser le bloc 1), la solution de cette équation différentielle est la somme d'un sinus et d'un cosinus de pulsation  $\omega = 1$ . Compte tenu des conditions initiales (la position initiale du bloc 2 vérifie la relation (3.17) et la vitesse initiale du patin 2 est nulle) on obtient pour la phase de glissement :

$$\tilde{x}_2(t) = \tilde{x}_1 - \tilde{l}_0(1 + \theta_d) - \mu_d \cos \alpha + \sin \alpha + (\mu_d - \mu_s) \cos \alpha \cos(t)$$

La vitesse du bloc 2 s'annule après une demi oscillation. Supposons que le bloc 2 s'arrête définitivement. Il s'est donc déplacé de  $\Delta\tilde{x}_2 = \tilde{x}_{2f} - \tilde{x}_{2i}$  donné par

$$\Delta\tilde{x}_2 = 2(\mu_s - \mu_d) \cos \alpha$$

Nous devons maintenant vérifier la validité des hypothèses avancées lors du calcul précédent.

- Le bloc 2 s'arrête définitivement à la première annulation de sa vitesse. Pour cela il suffit que, lorsque sa vitesse s'annule, la force qui s'exerce sur lui soit en valeur absolue inférieure au coefficient de friction dynamique. Par définition, la position initiale du bloc 2 vérifie la condition donnée par l'équation (3.17). Alors le bloc 2 repart vers le haut si  $-2(\mu_s - \mu_d) \cos \alpha > 2 \sin \alpha$ . Cette condition n'est jamais satisfaite. Le bloc 2 s'arrête après une demi oscillation.
- Le bloc 2 n'entraîne pas le bloc 1 dans sa chute. Autrement dit, la force élastique qui s'exerce sur le bloc 1 lorsque le bloc 2 s'arrête, doit être inférieure à  $\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha$ . Le ressort est comprimé d'une quantité  $(\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha)$  lorsque le mouvement du patin 2 s'initie. Comme le déplacement du bloc 2 est de  $2(\mu_s - \mu_d) \cos \alpha$ , la condition pour que le bloc 1 perde sa stabilité s'écrit

$$\begin{aligned} 2(\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha) &< 2(\mu_s - \mu_d) \cos \alpha \\ \text{soit} \quad \tan \alpha &> \mu_d \end{aligned}$$

Si cette condition est vérifiée, l'écriture du principe fondamental de la dynamique stipule que l'accélération du système est positive. Comme le système possède une vitesse initiale non nulle, il ne s'arrête plus. Le système avalanche. En dessous de l'angle critique  $\tan \alpha_c = \mu_d$ , le mouvement du bloc 2 ne provoque pas le mouvement du bloc 1.

En résumé, au cours d'une dilatation, le premier réarrangement mécanique aura lieu si la dilatation atteint la valeur  $\theta_d$ . A cette température, le bloc 2 est animé d'un mouvement de "stick-slip" et glisse seul sur une distance de  $2(\mu_s - \mu_d) \cos \alpha$ . Le prochain événement de glissement a lieu pour un incrément de température  $\Delta\theta = \Delta\tilde{x}_2$ . Le nombre de décrochement dans une dilatation  $2A_\theta$  est  $n = \frac{2A_\theta}{\Delta\theta}$ . Le centre de masse du système se déplace alors de  $\tilde{l}_0 A_\theta$ .

Lors d'une contraction, le raisonnement à suivre est identique. Dans ces

conditions, le ressort est étiré par rapport à sa longueur à vide. C'est le bloc 1 qui glisse systématiquement en premier, effectuant un mouvement de stick slip d'amplitude  $2(\mu_s - \mu_d)\cos\alpha$ . Au cours d'une contraction d'amplitude  $-2A_\theta$ , le centre de masse du système se déplacera également de  $\tilde{l}_0 A_\theta$ .

Il est amusant de voir que, contrairement à l'intuition, pour des grandes amplitudes de température la vitesse de déplacement du système ne dépend pas de l'angle d'inclinaison. Comme la force de friction diminue et le cisaillement augmente quand l'angle croît, on s'attendrait à voir couler le système pour une inclinaison plus grande. D'après l'analyse précédente, le déplacement est contrôlé par la seule dilatation thermique du matériau. Quelque soit l'inclinaison, les 2 blocs s'écartent d'une quantité  $2\tilde{l}_0 A_\theta$  (Fig.3.5). Pour tout  $\alpha \neq 0$ , la vitesse de reptation du système  $\tilde{v}_G$  est donc :

$$\tau_{th}\tilde{v}_G \approx \tilde{l}_0 A_\theta$$

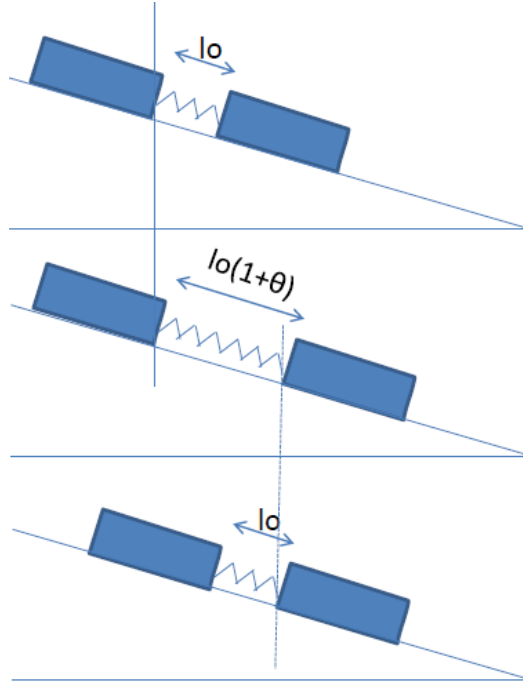


FIGURE 3.5 – Reptation du système constitué de 2 blocs. Lors d'une dilatation ( $\Delta\theta > 0$ ), le bloc en bas se déplace en suivant l'extension du ressort. Lors d'une contraction ( $\Delta\theta < 0$ ), c'est le bloc en haut qui se déplace en suivant également la rétraction du ressort.

Nous allons voir que cette prédiction est exacte uniquement dans la limite des grandes amplitudes de cycle de température. En effet, plaçons nous au début d'une dilatation. Supposons que la contraction précédente de la longueur à vide  $l_0$  ait provoqué un événement de réarrangement. Le ressort est en extension, avec une extension comprise entre  $\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha$  et  $\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha - 2(\mu_s - \mu_d) \cos \alpha$ . La dilatation minimale pour provoquer le déplacement du bloc 2 doit être telle que le ressort est maintenant en compression, avec une compression minimale valant  $\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha$ . Il existe alors une amplitude de dilatation minimale  $\Delta\theta_c$  en dessous de laquelle le système ne bouge plus  $\Delta\theta_c = 2(\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha)$ . Finalement pour des cycles de températures d'amplitude  $2A_\theta$ , le déplacement à chaque demi cycle thermique est  $\frac{1}{2}\tilde{l}_0(2A_\theta - \Delta\theta_c)$  à  $(\mu_s - \mu_d) \cos \alpha$  près (c'est-à-dire à un réarrangement près). Pour tout  $\alpha \neq 0$ , la vitesse de reptation du système  $\tilde{v}_G$  est donc :

$$\tau_{th} \tilde{v}_G \simeq \tilde{l}_0 A_\theta - (\mu_s \cos(\alpha) - \sin(\alpha))$$

En résumé, dans le cas de cycles de température et d'un coefficient de friction statique unique, il est possible de trouver une solution analytique à ce problème. Cette analyse montre l'existence d'une amplitude de température critique entre un écoulement continu et un arrêt du système. Si nous soumettons ce système à des variations de température gaussiennes, nous nous attendons à observer une transition plus douce entre arrêt et écoulement du système. En effet, il y aura toujours une probabilité non nulle de choisir une variation de température capable de débloquent le système. C'est ce que nous étudions au prochain paragraphe. Nous regardons également l'effet d'une distribution gaussienne du coefficient de friction statique sur la dynamique de reptation du système.

### 3.3.2 Introduction du bruit

Dans le cas de variations de température et de coefficients de friction statique distribués suivant une loi gaussienne, nous utilisons la méthode numérique présentée plus haut pour calculer le déplacement moyen du système en fonction de l'angle d'inclinaison du support.

Sur la figure 3.6, nous pouvons voir que conformément à l'analyse proposée au paragraphe précédent, pour une dilatation (resp. une contraction) le bloc 2 glisse (resp. reste à l'arrêt), alors que le bloc 1 reste à l'arrêt (resp. glisse). Pour de grandes amplitudes de cycle de dilatation, chaque déplacement du centre de masse est de l'ordre de  $\frac{1}{2}l_0|\Delta\theta|$ . On peut évaluer le déplacement moyen pour une série de dilatations distribuées selon une gaussienne de variance  $\sigma_\theta$  (Eq. 3.2). En effet, la distribution de la différence

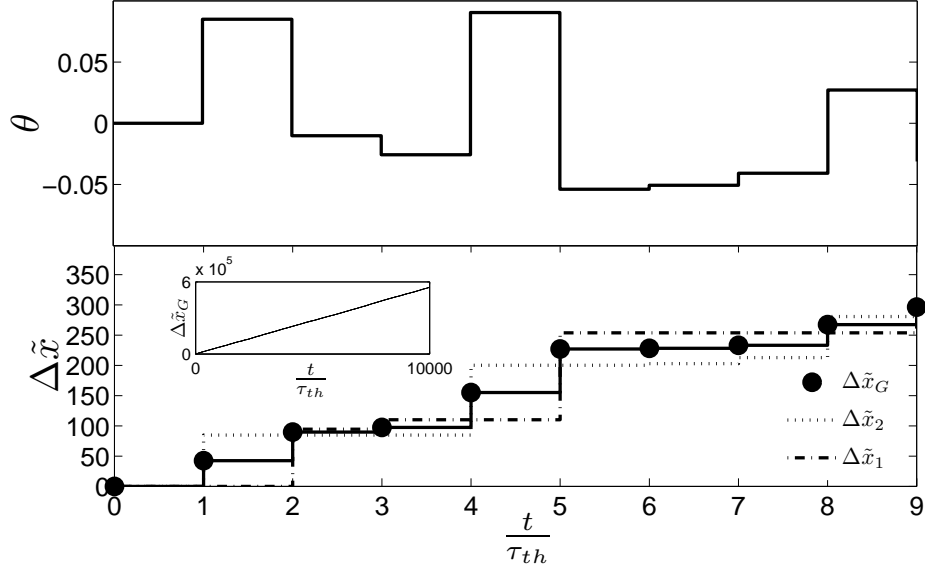


FIGURE 3.6 – Mouvement de reptation du système constitué de 2 blocs. En haut : les variations de température issues d’une distribution gaussienne sont représentées en fonction du temps. En bas : les déplacements des blocs 1 et 2 et du centre de masse sont représentés en fonction du temps. Dans l’encadré, est tracé le déplacement du centre de masse en fonction du temps aux temps longs ( $\tilde{l}_0 = 10^3$ ,  $\mu_d = 0.5$ ,  $\bar{\mu}_s = 0.6$ ,  $\sigma_\mu = 0.01$ ,  $\sigma_\theta = 0.1$  et  $\tan \alpha = 0.25$ ).

des dilatations  $\Delta\theta$  est une gaussienne de moyenne nulle et d’écart type  $\sqrt{2\sigma_\theta}$ .

$$\begin{aligned}
 p(\Delta\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(\theta_1) p(\Delta\theta + \theta_1) d\theta_1 \\
 p(\Delta\theta) &= \frac{1}{2\pi\sigma_\theta} \exp\left(-\frac{(\Delta\theta)^2}{4\sigma_\theta^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\sqrt{2}\theta + \frac{\Delta\theta}{\sqrt{2}})^2}{2\sigma_\theta^2}\right] d\theta \\
 p(\Delta\theta) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma_\theta}} \exp\left[-\frac{(\Delta\theta)^2}{4\sigma_\theta^2}\right]
 \end{aligned}$$

Ainsi, le déplacement moyen est égal à

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{x}_g \rangle &= \int_0^\infty \frac{1}{2} \tilde{l}_0 \Delta\theta p(\Delta\theta) d\Delta\theta \\
 \langle \tilde{x}_g \rangle &= \tilde{l}_0 \frac{\sigma_\theta}{\sqrt{\pi}}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

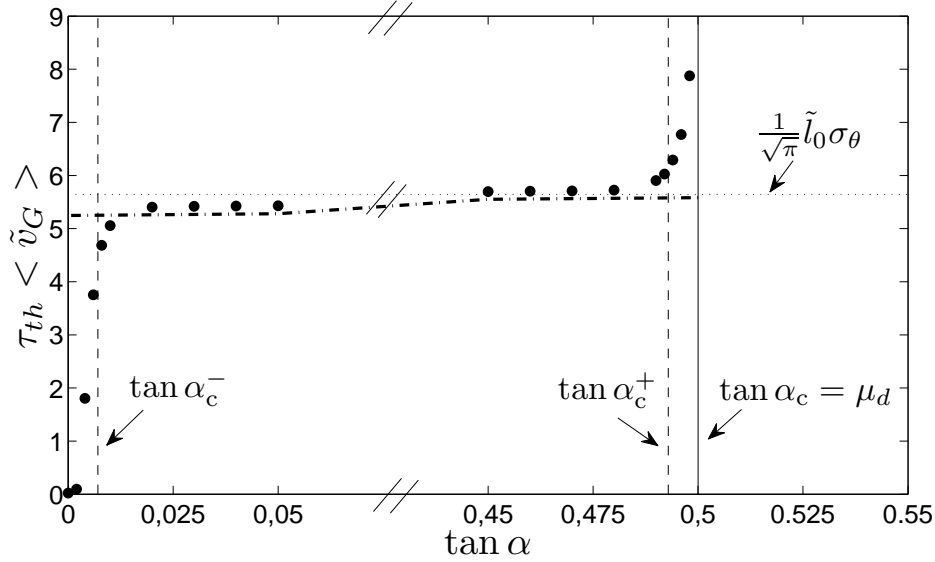


FIGURE 3.7 – Vitesse du centre de masse du système constitué de 2 blocs en fonction de l'angle. Les lignes en pointillé et en tiret représentent respectivement les prédictions théoriques issues des équations (3.18) et (3.19) ( $\tilde{l}_0 = 10^3$ ,  $\mu_d = 0.5$ ,  $\bar{\mu}_s = 0.6$ ,  $\sigma_\mu = 0.01$ ,  $\sigma_\theta = 0.01$  et  $\tan \alpha = 0.25$ )

Dans le cas de variations gaussiennes de température, le déplacement moyen ne dépend pas, en première approximation, de l'angle d'inclinaison. Les figures 3.7, 3.8 et 3.9 montrent que cette formule n'est vérifiée que pour de grandes amplitudes de température. On observe sur la figure 3.7, une légère augmentation de la vitesse moyenne lorsque l'angle d'inclinaison augmente. La nécessité d'inverser la mobilisation de la force de friction lorsqu'on passe d'une dilatation à une contraction permet de comprendre cette dépendance. Du paragraphe précédent, on sait que la dilatation minimale critique vaut  $2(\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha)$ . Pour estimer la correction moyenne apportée par ce terme, il est nécessaire de connaître la probabilité qu'une dilatation soit suivie par une contraction ou réciproquement. Cette probabilité s'exprime ainsi :

$$p(\theta_{i+2} < \theta_{i+1}, \theta_{i+1} > \theta_i) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\theta_i) \left[ \int_{\theta_i}^{\infty} p(\theta_{i+1}) \left( \int_{-\infty}^{\theta_{i+1}} p(\theta_{i+2}) d\theta_{i+2} \right) d\theta_{i+1} \right] d\theta_i$$

$$p(\theta_{i+2} < \theta_{i+1}, \theta_{i+1} > \theta_i) = \frac{1}{3}$$

On en déduit alors que dans 2/3 des cas, le sens de variation de la dilatation change de signe. En supposant que chaque variation de température est suffisamment grande pour provoquer un réarrangement, on trouve une valeur approchée du déplacement du centre de masse dans le cas de variations gaussiennes de température.

$$\langle \tilde{x}_g \rangle = \tilde{l}_0 \frac{\sigma_\theta}{\sqrt{\pi}} - \frac{2}{3}(\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha) \quad (3.19)$$

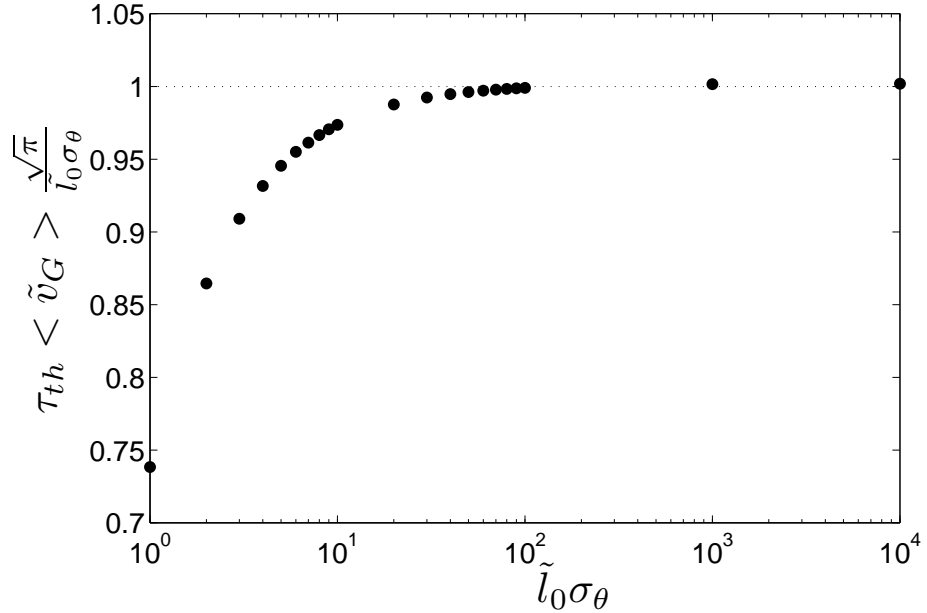


FIGURE 3.8 – Vitesse du centre de masse du système constitué de 2 blocs en fonction de l'amplitude des cycles de température ( $\tilde{l}_0 = 10^3$ ,  $\mu_d = 0.5$ ,  $\mu_s = 0.6$ ,  $\sigma_\mu = 0.01$  et  $\tan \alpha = 0.25$ )

Sur la figure 3.7 nous ajoutons cette nouvelle relation de la vitesse de reptation avec l'angle  $\alpha$ . La correction apportée rend compte de la légère augmentation de la vitesse avec  $\alpha$ . Comme prévu, on remarque sur la figure 3.9 que lorsque l'amplitude des dilatations diminue, la vitesse moyenne du système ne vérifie plus cette estimation. Dans ce cas, l'hypothèse consistant à supposer qu'il y a au moins un réarrangement à chaque perturbation thermique n'est plus satisfaite.



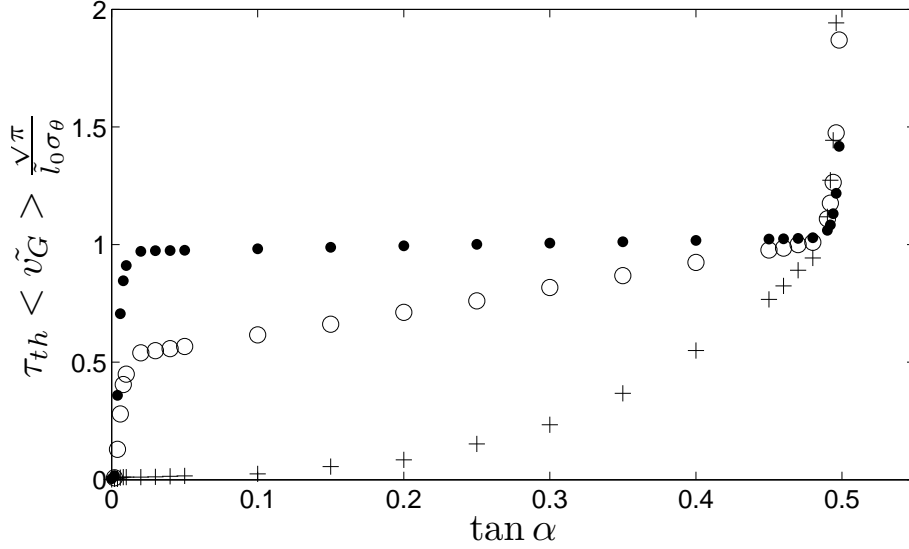


FIGURE 3.9 – Vitesse du centre de masse du système constitué de 2 blocs en fonction de l'angle d'inclinaison pour différentes valeurs de l'amplitude typique des fluctuations de température  $\sigma_\theta = 0.01$ (disques),  $\sigma_\theta = 0.001$ (cercles),  $\sigma_\theta = 0.01$ (croix) ( $\tilde{l}_0 = 10^3$ ,  $\mu_d = 0.5$ ,  $\bar{\mu}_s = 0.6$ ,  $\sigma_\mu = 0.01$ )

Outre le comportement en température, on peut regarder l'influence de la distribution du coefficient de friction statique sur la dynamique du système. On observe sur la figure 3.7 qu'aux angles petits proches de zéro et aux angles proches de l'angle d'avalanche, la vitesse n'est pas égale à la valeur précédemment prédite. En reprenant le raisonnement du paragraphe précédent, on peut montrer qu'en présence d'une distribution de coefficient de friction statique, au cours d'une dilatation (resp. contraction), le bloc 2 (resp. bloc 1) peut entraîner dans sa chute le bloc 1 (resp. bloc 2) pour un angle  $\alpha$  inférieur à l'angle d'avalanche. Cela a lieu lorsque  $\alpha$  vérifie la relation :

$$\begin{aligned} \tan \alpha &< \mu_d + (\mu_{s,1} - \mu_{s,2})/2 \\ \text{(resp. } \tan \alpha &< \mu_d + (\mu_{s,2} - \mu_{s,1})/2) \end{aligned}$$

Pour une distribution gaussienne du coefficient de friction statique de valeur moyenne  $\mu_s$  et d'écart type  $\sigma_\mu$ , la distribution de la différence des deux coefficients de friction statique est une gaussienne de valeur moyenne nulle et d'écart type  $\sqrt{2}\sigma_\mu$ .

Par exemple, lorsque  $\tan \alpha_c^+ = \mu_d - \frac{\sigma_\mu}{\sqrt{2}}$ , il y a glissement quand

$(\mu_{s,2} - \mu_{s,1})/2 > \frac{\sigma_\mu}{\sqrt{2}}$ . Ainsi pour cette valeur de l'angle, dans seulement 16% des cas, les deux blocs glissent ensemble. Le centre de masse bouge sur une distance plus grande que  $2(\mu_s - \mu_d) \cos \alpha$ . Dans les 84% restants, un seul des 2 blocs glisse sur une distance typique de  $2(\mu_s - \mu_d) \cos \alpha$ . En s'approchant de l'angle d'avalanche  $\arctan(\mu_d)$ , la proportion des avalanches augmente, ainsi que la distance typique sur laquelle glisse le système lors de cet événement (la déccélération du centre de masse du système est de plus en plus faible). Par une analyse similaire, on comprend également pourquoi la vitesse du système aux petits angles dépend de l'angle. Dans ce cas, le biais introduit par la gravité n'est plus suffisant pour faire systématiquement glisser en premier le bloc vers le bas. En effet, lors d'une dilatation par exemple, le bloc 2 glisse vers le bas si  $f_{1 \rightarrow 2} + mg \sin \alpha > \mu_{s,2} mg \cos \alpha$  tandis que le bloc 1 reste au repos si  $f_{2 \rightarrow 1} + mg \sin \alpha > -\mu_{s,1} mg \cos \alpha$ . La condition de départ du bloc 2 s'écrit donc  $\tan \alpha > \frac{1}{2}(\mu_{s,2} - \mu_{s,1})$ . C'est encore la distribution de la différence des deux coefficients de friction statique qui gère le ratio d'événement impliquant le bloc 2. Lorsque le bloc 1 est déstabilisé, il glisse contre la gravité sur une distance  $2(\mu_s - \mu_d) \cos \alpha$  (il est à priori surprenant que cette valeur soit la même que le bloc glisse contre ou avec la gravité. Il ne faut cependant pas oublier que pour glisser contre la gravité, la force élastique nécessaire pour initier le mouvement est plus grande). A chaque temps thermique les blocs se sont déplacés relativement l'un de l'autre de  $\tilde{l}_0 \Delta \theta$ . Les réarrangements du bloc glissant vers le haut réduisent donc le déplacement vers le bas du centre de masse. L'angle  $\alpha_c^-$  donné par  $\tan(\alpha_c^-) = \frac{\sigma_\mu}{\sqrt{2}}$  donne un ordre de grandeur de l'angle au-delà duquel les glissements vers le haut sont négligeables.

Cette analyse montre donc que la distribution du coefficient de friction statique a une influence négligeable sur la vitesse de reptation du système sur une large plage d'angle d'inclinaison  $\alpha$ .

En conclusion, un système constitué de deux blocs glisse, à l'échelle du temps thermique, à vitesse constante. Cette vitesse est proportionnelle à l'amplitude des variations de température au-delà d'une valeur critique minimale et ne dépend pas de l'angle d'inclinaison sur une grande plage d'angle. Une distribution du coefficient de friction statique modélisant l'hétérogénéité des surfaces de contact n'affecte que très peu les propriétés de reptation du système obtenues lorsque le coefficient de friction statique est constant. Nous souhaitons maintenant voir comment évoluent les propriétés de ce système lorsque le nombre de patins augmente.

## 3.4 Augmentation de la taille du système

### 3.4.1 Etude du cas à 3 blocs

On soumet le système constitué de 3 blocs à des variations gaussiennes de température de grandes amplitudes. On regarde le déplacement moyen  $\langle x_g = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i \rangle$  en fonction de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  (Fig.3.10). On observe alors que le déplacement du centre de masse est nul jusqu'à un angle critique  $\alpha_{2,3}$ . A partir de cet angle, le déplacement du centre de masse prend une valeur constante jusqu'à un angle légèrement inférieur à l'angle d'avalanche  $\arctan(\mu_d)$ . En regardant la dynamique interne du système (Fig.3.11),

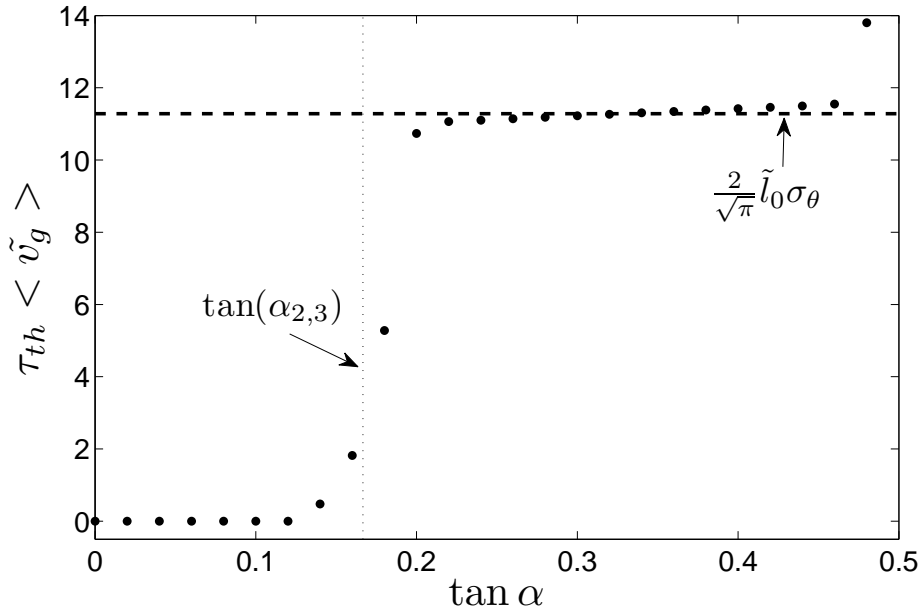


FIGURE 3.10 – Vitesse du centre de masse du système constitué de 3 blocs en fonction de l'angle  $\alpha$  ( $\tilde{l}_0 = 10^3$ ,  $\mu_d = 0.5$ ,  $\bar{\mu}_s = 0.6$ ,  $\sigma_\mu = 0.01$ ,  $\sigma_\theta = 0.01$ )

on observe qu'à petit angle, le bloc 1 et 3 oscillent autour du bloc 2 qui reste stable. Si le biais introduit par le poids devient plus grand (dans ce cas,  $\alpha > \alpha_{2,3}$ ), lors d'une dilatation le bloc 2 et 3 glissent vers le bas alors que le bloc 1 est stable. Symétriquement lors d'une contraction le bloc 1 et 2 glissent vers le bas alors que le bloc 3 reste stable. Dans les 2 cas, le centre de masse du système se déplace vers le bas. On peut estimer la valeur de l'angle critique  $\alpha_{2,3}$  et la valeur de la vitesse du plateau correspondant. Pour cela, on fait l'hypothèse que le coefficient de friction statique est égal au coefficient de

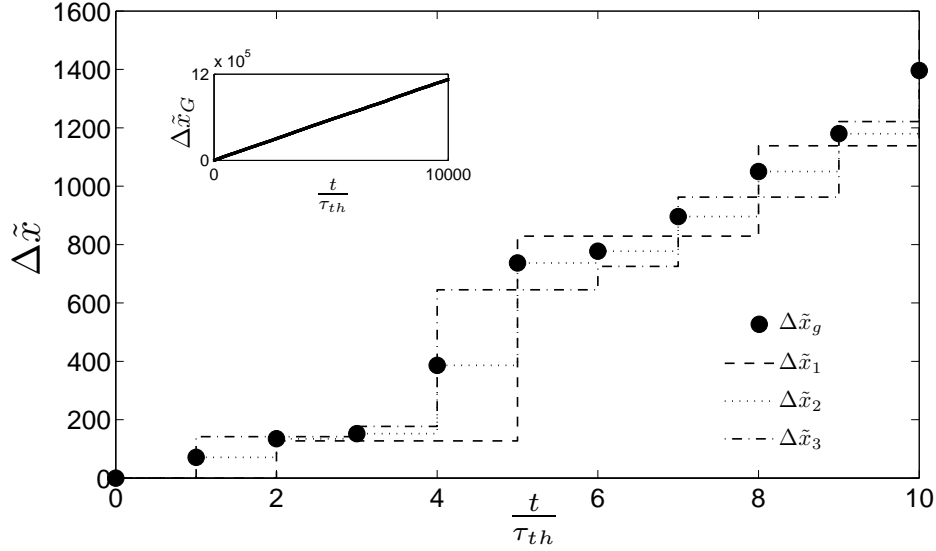


FIGURE 3.11 – Mouvement de reptation du système constitué de 3 blocs. Les déplacements des blocs 1,2 et 3 et du centre de masse sont représentés en fonction du temps. Dans l'encadré est tracé le déplacement du centre de masse en fonction du temps aux temps longs ( $\tilde{l}_0 = 10^3$ ,  $\mu_d = 0.5$ ,  $\bar{\mu}_s = 0.6$ ,  $\sigma_\mu = 0.01$ ,  $\sigma_\theta = 0.1$  et  $\tan \alpha = 0.25$ ).

friction dynamique ( $\mu_s = \mu_d$ ). On considère une dilatation de la longueur à vide des ressorts. Lors de la contraction précédente, on suppose que les blocs 1 et 2 glissent vers le bas alors que le bloc 3 est stable. On peut donc estimer les forces élastiques à la fin de la contraction :

- $f_{2 \rightarrow 1} = \mu_d \cos \alpha - \sin \alpha$
- $-f_{2 \rightarrow 1} + f_{3 \rightarrow 2} = \mu_d \cos \alpha - \sin \alpha$

d'où  $f_{3 \rightarrow 2} = 2(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$

Lors de la dilatation suivante :

- le bloc 3 se met en mouvement lorsque  $f_{2 \rightarrow 3} = \mu_d \cos \alpha - \sin \alpha$
- le bloc 2 se met en mouvement vers le bas lorsque  $f_{1 \rightarrow 2} = 2(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$
- le bloc 1 glisse vers le haut lorsque  $f_{2 \rightarrow 1} = \mu_d \cos \alpha + \sin \alpha$ .

Ainsi le bloc 2 glisse vers le bas si

$$3(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha) < -2 \sin \alpha$$

$$\tan \alpha > \frac{\mu_d}{3}$$

Le raisonnement doit être autocohérent. En supposant qu'à la fin d'une dilatation les blocs 1 et 2 aient glissé vers le bas, on doit vérifier qu'à la contraction suivante, les blocs 2 et 3 glissent vers le bas, alors que le bloc 1 est stable pour un angle  $\alpha$  tel que  $\tan \alpha > \frac{\mu_d}{3}$ .

A la fin de la dilatation,

- $f_{2 \rightarrow 3} = (\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$
- $f_{1 \rightarrow 2} = 2(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$ .

Lors de la contraction suivante,

- le bloc 1 se met en mouvement vers le bas lorsque  $f_{2 \rightarrow 1} = \mu_d \cos \alpha - \sin \alpha$
- le bloc 2 se met en mouvement vers le bas lorsque  $f_{3 \rightarrow 2} = 2(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$
- le bloc 3 glisse vers le haut quand  $f_{2 \rightarrow 3} = \mu_d \cos \alpha + \sin \alpha$ .

On en déduit que le bloc 2 glisse vers le bas lors d'une contraction si  $\tan \alpha > \frac{\mu_d}{3}$ . Ainsi, lorsque qu'on applique des contractions et dilatations successives au système, l'angle  $\alpha_{2,3}$  au-delà duquel le déplacement n'est pas nul est  $\arctan(\frac{1}{3}\mu_d)$ .

De plus, on peut déduire de cette analyse une valeur approximative du plateau de vitesse du centre de masse. En effet lors d'une dilatation, le bloc 1 est stable. Les longueurs à vide des deux ressorts ainsi que le déplacement relatif de deux blocs voisins augmentent de  $\tilde{l}_0 \Delta \theta$ . Le bloc 3 se déplace donc en absolu de  $2 \tilde{l}_0 \Delta \theta$ , le bloc 2 de  $\tilde{l}_0 \Delta \theta$ , le déplacement du centre de masse étant égal à  $\tilde{l}_0 \Delta \theta$ . Pour des variations de température gaussiennes d'écart type  $\sigma_\theta$ , à chaque temps thermique, le centre de masse se déplace de  $2 \frac{\tilde{l}_0 \sigma_\theta}{\sqrt{\pi}}$ .

Nous observons, sur la figure 3.10, que les prédictions analytiques de l'angle  $\alpha_{2,3}$  et de la vitesse des plateaux sont en accord avec les résultats numériques. On note cependant que lorsqu'on s'approche par valeur inférieure de l'angle d'avalanche  $\arctan(\mu_d)$ , la vitesse du centre de masse du système est plus grande que la valeur précédemment prédite. Cette augmentation de la vitesse est due au mouvement simultané des 3 blocs vers le bas. Lorsque la différence entre les coefficients de friction statique et dynamique diminue, la plage d'angle sur lequel le système global glisse est réduite. Par conséquent, la cause du déplacement global du système est le mouvement saccadé de "stick slip" des blocs, qui n'est pas prise en compte dans le calcul analytique. Ce résultat montre donc que, contrairement au système constitué de 2 blocs, cette transition n'est pas contrôlée par l'écart type de la distribution du coefficient de friction statique mais par sa valeur moyenne.

En conclusion, mis à part le comportement du système proche de l'angle d'avalanche, la prédiction analytique que nous effectuons, en supposant les coefficients de friction statique et dynamique égaux, permet de rendre compte de la dynamique du système. Cette analyse menée sur 3 blocs nous a permis d'entrevoir comment généraliser le résultat obtenu à 2 blocs.

Lorsque nous augmentons le nombre de blocs, passant à 5 et 6 blocs, la vitesse de reptation du système en fonction de l'angle est représentée sur la figure 3.12. On observe que le nombre de plateaux est égal à trois. Le

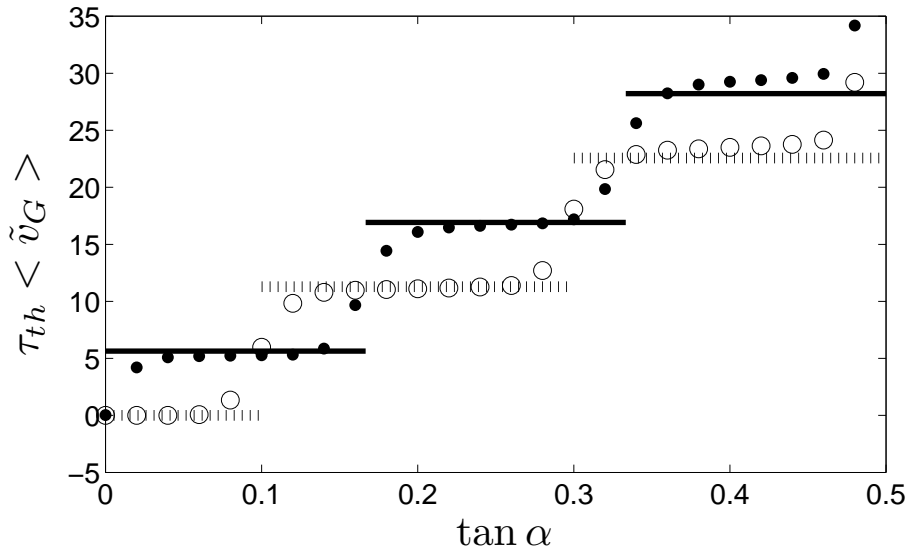


FIGURE 3.12 – Vitesse du centre de masse du système constitué de 5 et 6 blocs (respectivement les cercles et les disques pour les résultats numériques et les lignes en tiret et les lignes en trait plein pour les prédictions théoriques) en fonction de l'angle  $\alpha$  ( $\tilde{l}_0 = 10^3$ ,  $\mu_d = 0.5$ ,  $\bar{\mu}_s = 0.6$ ,  $\sigma_\mu = 0.01$ ,  $\sigma_\theta = 0.01$ ).

paragraphe suivant généralise cette étude à un nombre  $N$  de blocs et présente le raisonnement à suivre pour prédire la valeur des angles de transition et des plateaux de vitesse représentés sur la figure 3.12.

### 3.4.2 Généralisation de l'étude : le système constitué de N blocs

On cherche la vitesse de reptation d'un système constitué de N blocs. Dans un premier temps, on applique des perturbations thermiques de grande amplitude pour pouvoir négliger les effets liés à la mobilisation des forces de friction. On s'intéresse à la dynamique interne du système. Déjà, on remarque que lors d'un changement de température, la force s'appliquant sur un bloc central ne change pas. Seuls les blocs aux bords sont soumis à des efforts sensibles aux variations de température. Le déplacement du système s'initie donc toujours à ses extrémités. Au cours de leurs déplacements, la force élastique que les patins appliquent sur leurs voisins évolue. Si cette force devient telle qu'elle déstabilise leurs blocs voisins, alors les 2 blocs glissent simultanément. Ainsi de proche en proche, la perturbation thermique se propage au coeur du système. Lors d'une dilatation par exemple, à mesure que l'amplitude de la dilatation augmente, le nombre de blocs entraînés par le bloc 1 dans son mouvement vers le haut augmente. Dans le même temps, le nombre de blocs entraînés par le bloc N dans son mouvement vers le bas augmente. Ces 2 "vagues" de déplacement se croisent en un bloc  $i$ . Une augmentation supplémentaire de la dilatation accroît en valeur absolue autant les forces que lui appliquent ses voisins  $i-1$  et  $i+1$ . Le bloc  $i$  est donc stable.

En supposant que les coefficients de friction statique et dynamique ont la même valeur, on sait que lorsqu'un bloc s'arrête après avoir glissé vers le bas (resp. vers le haut), la force totale qu'il subit est égale à  $\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha$  (resp.  $\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha$ ). Lors d'une dilatation, le bloc 1 monte, donc  $f_{2 \rightarrow 1} = -(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)$ , alors que le bloc N descend, donc  $f_{N-1 \rightarrow N} = (\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$ . On obtient par récurrence l'expression des forces exercées par le bloc  $i$  sur le bloc  $i-1$  et  $i+1$  :

- $f_{i \rightarrow i-1} + (i-1)(\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha) = 0$
- $f_{i \rightarrow i+1} + (N-i)(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha) = 0$

En exprimant la condition de stabilité du bloc  $i$  (Eq. 3.10), on peut trouver la plage d'angle pour lequel le bloc  $i$  est stable. L'angle  $\alpha_{N,i}$  est l'angle limite au delà duquel le bloc  $i$  glisse vers le bas. Il est défini par la relation suivante :

$$\begin{aligned} f_{i-1 \rightarrow i} + f_{i+1 \rightarrow i} + \sin(\alpha_{N,i}) &= \mu_d \cos(\alpha_{N,i}) \\ \tan(\alpha_{N,i}) &= \mu_d \left( 1 - 2 \frac{i-1}{N} \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

L'angle  $\alpha_{N,i,+}$  est l'angle limite en dessous duquel le bloc  $i$  glisse vers le haut.

Il est défini par la relation suivante :

$$\begin{aligned} f_{i-1 \rightarrow i} + f_{i+1 \rightarrow i} + \sin(\alpha_{N,i}) &= -\mu_d \cos(\alpha_{N,i}) \\ \tan(\alpha_{N,i,+}) &= \mu_d \left(1 - 2\frac{i}{N}\right) \end{aligned}$$

On trouve, de manière cohérente, que  $\alpha_{N,i,+}$  correspond à l'angle critique au-delà duquel le bloc  $i+1$  est stable. Par la suite, on se contentera de définir l'angle  $\alpha_{N,i}$ . Le bloc  $i$  est donc stable dans l'intervalle  $\alpha_{N,i+1} < \alpha < \alpha_{N,i}$ .

Un raisonnement identique doit être mené lors d'une contraction. On cherche l'angle de stabilité du bloc  $j$ . Les blocs au dessus du bloc  $j$  se déplacent vers le bas alors que les blocs en dessous se déplacent vers le haut. Les forces qu'appliquent le bloc  $j$  sur ses voisins sont donc données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} f_{j \rightarrow j-1} + (j-1)(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha) &= 0 \\ f_{j \rightarrow j+1} + (N-j)(\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha) &= 0 \end{aligned}$$

L'angle  $\alpha_{N,j}$  est l'angle limite au-delà duquel le bloc  $j$  glisse vers le bas

$$\tan(\alpha_{N,j}) = \mu_d \left(1 - 2\frac{N-j}{N}\right)$$

On remarque que cet angle est égal à  $\alpha_{N,i}$  pour  $j = N + 1 - i$ . Cela signifie que les nombres de blocs montants et descendants sont les mêmes lors d'une dilatation ou lors d'une contraction. On retiendra donc que pour un angle compris entre  $\alpha_{N,i+1}$  et  $\alpha_{N,i}$ , le bloc  $i$  est stable lors d'une dilatation alors que le bloc  $N+1-i$  l'est lors d'une contraction. De l'expression des forces élastiques on déduit également que les blocs se déplacent relativement à leur voisin de  $\tilde{l}_0 \Delta\theta$ .

Ainsi lors d'une dilatation ( $\Delta\theta > 0$ ), le déplacement du bloc  $n$  est donné par  $\Delta\tilde{x}_n = (n-i)\tilde{l}_0\Delta\theta$ . Lors d'une contraction ( $\Delta\theta < 0$ ),  $\Delta\tilde{x}_n = [n - (N+1-i)]l_0\Delta\theta$ .

Le déplacement total du centre de masse associé à une variation  $\Delta\theta$  de la dilatation des ressorts s'écrit alors :

$$\tilde{x}_g = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Delta\tilde{x}_n = \frac{1}{2}(N+1-2i)\tilde{l}_0|\Delta\theta| \quad (3.21)$$

Par ce calcul, on montre donc que le déplacement du système devrait être



### 3.4. Généralisation de l'étude : le système constitué de N blocs 91

proportionnel au nombre de patins dont il est constitué, c'est-à-dire proportionnel à sa longueur. Par conséquent, la vitesse du système  $v_{N,i}$  pour un angle  $\alpha$  compris entre  $\alpha_{N,i+1}$  et  $\alpha_{N,i}$  et pour des cycles de température d'amplitude  $2A_\theta$  est donnée par la relation suivante :

$$\tau_{th}\tilde{v}_{N,i} = (N + 1 - 2i)\tilde{l}_0 A_\theta \quad (3.22)$$

La figure 3.13 représente le déplacement du centre de masse du système en fonction de N. A N petit, le déplacement est bien proportionnel à L, conformément à l'équation 3.22. Mais au-delà d'une taille critique, le système ralentit. Un effet de saturation apparaît.

De manière équivalente, sur la figure 3.14, on observe que pour un système constitué de 30 blocs soumis à des cycles de température, le déplacement du centre de masse est nul jusqu'à une amplitude critique  $\theta_c$ , puis devient proportionnel à l'amplitude des cycles de température.

Il est utile de rappeler ici l'origine de cette température critique dans le cas de 2 blocs. Lorsqu'une dilatation suit une contraction (par exemple), le ressort passe d'un état de compression à un état de tension. L'extension correspondante est égale à  $2(\mu_d - \sin \alpha)$ .

L'argument se transpose au cas d'un système constitué de N blocs. Suite à une dilatation les blocs montants (numérotés de 1 à i) subissent la force  $\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha$  alors que les blocs descendants (numérotés de i+1 à N) sont soumis à la force  $\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha$ . Lors de la contraction suivante, pour glisser, les blocs numérotés de 1 à i doivent être soumis à la force  $\mu_d \cos(\alpha) - \sin(\alpha)$  alors que les blocs numérotés de N-i+1 à N doivent être soumis à la force totale  $\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha$ . Quant aux blocs compris entre les éléments i+1 et N-i, ils bougent vers le bas aussi bien lors d'une dilatation que d'une contraction. La force qu'ils subissent reste donc toujours égal à  $\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha$ . Le seuil de température créant un glissement macroscopique du système correspond à la valeur de la contraction qui initie le mouvement du bloc i vers le bas. En effet, si le patin i commence à bouger, il entraînera dans sa chute les blocs situés entre i+1 et N-i, ces derniers subissant une force égale à leur seuil de glissement.

A la fin de la dilatation, la force qu'exerce le bloc i sur i+1 est donnée par :

$$f_{i \rightarrow i+1} = (N - i)(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)$$

Lors de la contraction suivante, le bloc i-1 impose une force élastique croissante au bloc i. Lorsque le bloc i-1 glisse,

$$f_{i \rightarrow i-1} = (i - 1)(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)$$

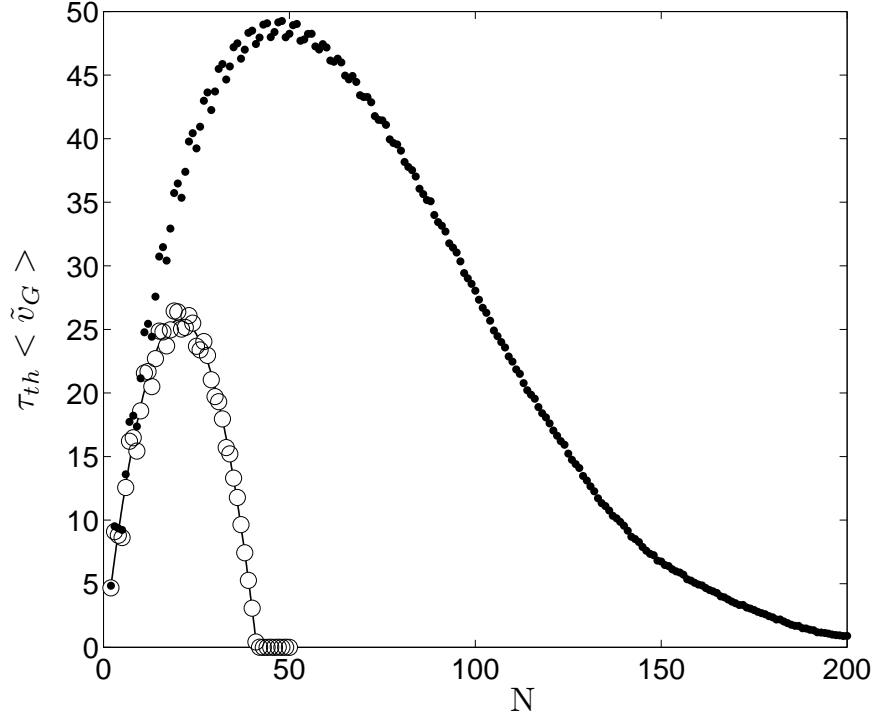


FIGURE 3.13 – Vitesse du centre de masse en fonction du nombre de blocs  $N$  dans le cas de variations gaussiennes de température (disques) et dans le cas de variations cycliques de température (cercles). L'expression analytique obtenue (Eq. 3.27) est tracée en trait plein ( $\tilde{l}_0 = 10^3$ ,  $\mu_d = 0.5$ ,  $\bar{\mu}_s = 0.6$ ,  $A_\theta = 0.005$  ou  $\sigma_\theta = 0.005\sqrt{\pi}$ ,  $\sigma_\mu = 0.01$  et  $\tan \alpha = 0.25$ )

Le bloc  $i$  glisse vers le bas lorsque la force totale qu'il subit dépasse  $\mu_d \cos \alpha$ .

$$\begin{aligned} f_{i+1 \rightarrow i} + f_{i-1 \rightarrow i} + \sin \alpha &= \mu_d \cos \alpha \\ (N - i)(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha) - \tilde{l}_0 \Delta \theta_c + (i - 1)(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha) + \sin \alpha &= \mu_d \cos \alpha \end{aligned}$$

On trouve ainsi que

$$-\tilde{l}_0 \Delta \theta_c = N(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha) \quad (3.23)$$

En dessous de cette dilatation critique  $\tilde{l}_0 \Delta \theta_c$ , le centre de masse du système

### 3.4. Généralisation de l'étude : le système constitué de N blocs 93

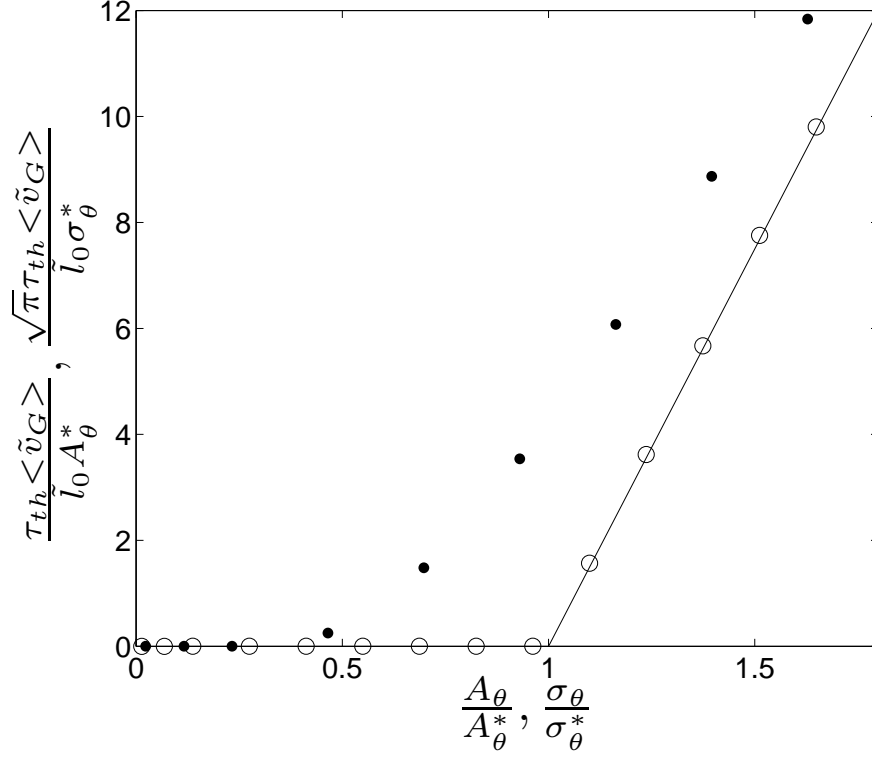


FIGURE 3.14 – Vitesse du centre de masse en fonction de l’amplitude typique des variations de température dans le cas de cycles de température (cercles) et dans le cas de variations gaussiennes de température (disques) ( $\tilde{l}_0 = 10^3$ ,  $\mu_d = 0.5$ ,  $\bar{\mu}_s = 0.6$ ,  $\sigma_\mu = 0.01$  et  $\tan \alpha = 0.25$ )

ne se déplace pas, bien que les blocs aux extrémités bougent. En effet à toute valeur de la dilatation, le déplacement total des blocs se déplaçant vers le bas est égal au déplacement total des blocs se déplaçant vers le haut. La cause du glissement global du système vers le bas est le glissement des blocs compris entre  $i+1$  et  $N-i$  s’effectuant dans le sens de la pente à la dilatation comme à la contraction.

Dans le cas des cycles de température ( $\Delta\theta = -2A_\theta$ ), on trouve d’après l’équation 3.23 que l’amplitude minimale de dilatation pour engendrer un mouvement de reptation de la chaîne de blocs est égale à  $\frac{N}{2\tilde{l}_0}\mu_d \cos \alpha$ . Comme les déplacements des blocs sont compensés pour une amplitude plus petite que cette amplitude critique, la vitesse du système  $v_{N,i}$  pour un angle  $\alpha$

compris entre  $\alpha_{N,i+1}$  et  $\alpha_{N,i}$  est donc égale à :

$$\tau_{th}\tilde{v}_{N,i} = (N + 1 - 2i)\tilde{l}_0[A_\theta - \frac{N}{2\tilde{l}_0}(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)] \quad (3.24)$$

Dans le cas de variations de température gaussiennes, on peut estimer le déplacement du centre de masse  $v_{N,i}$  pour un angle  $\alpha$  compris entre  $\alpha_{N,i+1}$  et  $\alpha_{N,i}$  en tenant compte de la distribution des dilatations et en calculant la probabilité qu'une dilatation (resp. contraction) soit suivie d'une contraction (resp. dilatation). On trouve alors que :

$$\tau_{th}\tilde{v}_{N,i} = (N + 1 - 2i)\tilde{l}_0[\frac{\sigma_\theta}{\sqrt{\pi}} - \frac{N}{3\tilde{l}_0}(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)] \quad (3.25)$$

Comme le nombre de plateaux de vitesse prédit est de l'ordre de  $\frac{N}{2}$ , pour un nombre de blocs  $N$  grand, la courbe de reptation du système en fonction de l'angle devient continue. En exprimant la relation entre le bloc stable  $i$  et l'angle  $\alpha$  à partir de la relation  $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}(\tan \alpha_{N,i} + \tan \alpha_{N,i+1})$ , les expressions (3.24) et (3.25) deviennent respectivement :

$$\tau_{th}\tilde{v}_G = N \frac{\tan \alpha}{\mu_d} \tilde{l}_0[A_\theta - \frac{N}{2\tilde{l}_0}(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)] \quad (3.26)$$

$$\tau_{th}\tilde{v}_G = N \frac{\tan \alpha}{\mu_d} \tilde{l}_0[\frac{\sigma_\theta}{\sqrt{(\pi)}} - \frac{N}{3\tilde{l}_0}(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)] \quad (3.27)$$

Les expressions analytiques proposées ci dessus (Eq. 3.27) ainsi que les résultats numériques sont présentées sur la figure 3.14. On observe un très bon accord entre ces 2 quantités.

En définitive, cette étude montre que la vitesse de reptation n'est pas proportionnelle à la longueur du système lorsqu'on prend en compte l'élasticité du matériau dont il est constitué. En effet, nous trouvons qu'un système de taille donnée commence à bouger dans le sens de la pente pour une amplitude de dilatation supérieure à une amplitude critique.

Lorsque pour un système de taille donnée  $L$ , le nombre de points de contact devient très grand, nous pouvons considérer que nous modélisons la reptation d'un solide frictionnel de longueur  $L$ . C'est ce que nous explorons dans le paragraphe suivant.

## 3.5 Discussion

### 3.5.1 Reptation d'un solide frictionnel

On considère que la chaîne de blocs étudiée est un modèle pour un solide frictionnel de masse  $M$ , de longueur  $L$ , de section perpendiculaire à la surface de contact et à la direction de glissement  $S$ , de masse volumique  $\rho$  et de module d'Young  $Y$ . On suppose que le nombre de zones de contact  $N$  tend vers l'infini, impliquant que la longueur à vide  $l_0$  varie en  $\frac{L}{N}$ . Dans ce cas, par définition la constante de raideur du ressort  $k$  est donnée par  $k = \frac{YS}{l_0} = \frac{YSN}{L}$ . Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , la plage d'angle pour lequel le bloc  $i$  est stable se réduit à un angle  $\alpha$  et la vitesse de reptation  $v_g$  du solide frictionnel est donnée par :

$$\tau_{th} v_g = L \frac{\tan \alpha}{\mu_d} [A_\theta - \frac{gL\rho}{2Y} (\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)] \quad (3.28)$$

D'après ce raisonnement, on s'attend donc à observer un solide glisser dans le sens de la pente sous l'effet de grandes variations de sa température. Moseley, il y a près de 150 déjà, a vu que les tuiles de l'église de Bristol exposées au cycle jour nuit descendaient lentement le long de la pente [58]. Il a expliqué, grâce à un raisonnement de mécanique continue, que des changements de température peuvent induire le fluage de solides obéissant aux lois de Amontons Coulomb. Il prétend aussi que ces variations de température peuvent être la cause du mouvement des glaciers. Rappelons ici le raisonnement de Moseley lorsque la température augmente par exemple.

Au cours d'un accroissement de la température, la contrainte élastique interne au système augmente de manière homogène si bien qu'elle est compensée dans le volume du matériau. Ce sont aux extrémités de ce dernier que cette force n'est pas compensée et est donc capable de déplacer le système. Le bloc situé en haut est poussé dans le sens opposé à la pente se déplaçant alors vers le haut, alors que le bloc situé en bas, est poussé dans le sens de la pente se déplaçant donc vers le bas. Au cours de leurs glissements, ils entraînent leurs blocs voisins. Il en résulte qu'un point  $P$  de la chaîne est entraîné dans le sens opposé à la pente par les blocs situés au dessus de lui et dans le sens de la pente par les blocs situés en dessous de lui. Le point  $P$  est donc le point fixe du système lors d'une dilatation. On cherche la position de ce point  $P$  dont nous notons  $p$  sa distance au centre de masse. Comme les points au dessus de  $p$  montent et ceux en dessous descendent, il en résulte que le support applique sur le système une force de friction  $F$  totale de :

$$F = -(\frac{L}{2} - p) \cos \alpha \mu_d \rho S g + (\frac{L}{2} + p) \cos \alpha \mu_d \rho S g$$

$$= 2p \cos \alpha \mu_d \rho S g$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique au système solide global, les seules forces exercées sur le système étant le poids et la friction, on obtient l'équation  $2p \cos \alpha \mu_d \rho S g = \rho S g \sin \alpha$ .

$$p = L \frac{\tan \alpha}{2\mu_d} \quad (3.29)$$

Ainsi, lorsque le solide est soumis à une variation de température  $\Delta T$ , son centre de masse, qui se situe à une distance  $p$  du point de stagnation, se déplace proportionnellement à cette distance  $p$ .

$$\Delta x_g = \kappa \Delta T L \frac{\tan \alpha}{2\mu_d}$$

Il en résulte qu'en considérant des cycles de température d'amplitude  $\Delta T$  de période  $2\tau_{th}$ , le solide descend naturellement la pente avec la vitesse  $v_g$  vérifiant  $\tau_{th} v_g = \Delta x_g$ .

$$\tau_{th} v_g = \kappa \Delta T L \frac{\tan \alpha}{2\mu_d} \quad (3.30)$$

Cette vitesse est donc proportionnelle à la longueur  $L$  du solide.

Comme le remarque Bouasse [11], le raisonnement de Moseley ne prend cependant pas en compte une caractéristique importante du matériau : son élasticité. En effet, l'élasticité du solide, permettant au système de stocker une partie de l'énergie injectée par les cycles de températures sous forme élastique, peut empêcher le matériau de glisser. Plus précisément, comme le montre Croll [22], ce changement de température minimal nécessaire au déplacement du matériau est également proportionnel à la longueur du solide en contact. Son raisonnement est le suivant. Pour prendre en compte le seuil de variation de température  $\Delta T_c$  dû à l'élasticité du matériau dans le modèle continu, il suffit de dire que la force élastique qui s'exerce au point de stagnation  $p$  doit dépasser le seuil de force associé à la friction  $F_{friction}$ . La force élastique due à l'expansion thermique de l'élément de volume  $S dx$  placé en  $p$  est  $k \Delta(dx)$ ,  $k$  étant la constante de raideur du matériau donné par  $k = \frac{YS}{dx}$  et  $\Delta(dx)$  étant la variation de longueur de l'élément  $dx$  égal dans ce cas à  $\kappa \Delta T dx$ . Croll [22] suppose que l'état de contrainte initial est nul. Dans ce cas, le seuil de force associé à la friction  $F_{friction}$  s'écrit :

$$F_{friction} = \left( \frac{L}{2} - p \right) S \rho g (\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)$$

En remplaçant  $p$  par son expression (Eq. 3.29),

$$F_{friction} = \frac{L}{2} S \rho g \mu_d \cos \alpha \left( 1 - \left( \frac{\tan \alpha}{\mu_d} \right)^2 \right) \quad (3.31)$$

pour la partie du solide qui monte et donc pour la partie du solide qui descend, les deux étant égales par définition du point  $p$ . En égalant la force élastique et la force de friction, on obtient une valeur de la variation de température critique  $\Delta T_c$  donnée par :

$$\Delta T_c = \frac{\mu_d \rho \cos \alpha L}{2 \kappa Y} \left[ 1 - \left( \frac{\tan \alpha}{\mu_d} \right)^2 \right] \quad (3.32)$$

A partir de l'équation (3.28) obtenue par passage à la limite dans notre modèle discret, nous trouvons une amplitude de variation de température critique  $\Delta T_c$  égale à  $\frac{gL\rho}{2\kappa Y}(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$ . La différence entre ces deux estimations réside dans la différence des états de contraintes initiaux du solide. Croll suppose que la mobilisation de la force de friction initiale avant la perturbation thermique est nulle. Dans notre cas, des cycles de température sont successivement appliqués. Par conséquent, au début d'une dilatation ou d'une contraction, le système est déjà sous la contrainte générée par le précédent déplacement. A la suite de la précédente contraction, la force de friction appliquée à la partie supérieure est orientée vers le haut et vaut  $-(\frac{L}{2} - p)S\rho g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)$ . Lorsque cette partie se met à glisser vers le haut lors de la dilatation qui suit, la force de friction atteint la valeur  $(\frac{L}{2} - p)S\rho g(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$ . La variation de la force élastique associée est donc égale à la différence entre ces deux estimations. Elle correspond à une variation de température  $\Delta T_c$  donnée par :

$$\Delta T_c = \frac{\rho g L}{\kappa Y} (\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$$

En introduisant ce dernier résultat dans l'expression de la vitesse (3.30), nous obtenons :

$$\tau_{th} v_g = \kappa L \frac{\tan \alpha}{\mu_d} \left( \frac{\Delta T}{2} - \frac{gL\rho(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)}{2Y\kappa} \right)$$

Nous retrouvons bien le résultat de l'analyse numérique discrète. Ce raisonnement met en avant le rôle de l'état de contrainte initial du système sur sa dynamique future.

### 3.5.2 Quel est l'intérêt de notre modèle ?

Le paragraphe précédent montre que les résultats trouvés à partir de l'analyse numérique peuvent être retrouvés grâce à la mécanique des milieux continus. Il est cependant bon de rappeler ce qu'apporte l'étude de ce modèle numérique.

- D'une part, il est aisé de calculer le mouvement de reptation du système dans le cas de cycles de température. Lorsque les variations de température sont distribuées suivant une fonction plus compliquée, il est difficile de prévoir analytiquement la solution. En effet, l'état de contrainte initial de la chaîne de blocs est un paramètre crucial pour calculer le déplacement du système. Nous avons pu obtenir une expression analytique approchée de cette valeur dans le cas de variations gaussiennes de température dans la limite où l'écart type de la distribution est grand devant l'amplitude critique des variations de température. L'étude numérique permet de connaître ce déplacement quelque soit la distribution de la température.
- D'autre part, il est possible d'étudier l'écoulement d'un système en fonction du nombre de zones de contact qu'il possède avec son support. Les zones de contact entre 2 solides réels sont en nombre limité [5, 33]. Ce modèle permet de tenir compte de ce paramètre dans l'étude de la vitesse de reptation du système.
- Enfin, l'approche numérique permet de tenir compte de la différence entre le coefficient de friction statique et le coefficient de friction dynamique. On montre par notre étude que le coefficient de friction statique et par conséquent son hétérogénéité [5, 8, 21] jouent un rôle marginal dans l'écoulement moyen du système.

## 3.6 Remarques

### 3.6.1 Sur la modélisation des effets de la température

Nous avons considéré, pour prendre en compte les effets mécaniques engendrés par les variations de température de la chaîne de patins, que les longueurs de ce système se dilatent. Cependant nous aurions pu considérer que le support sur lequel repose ce système se dilate. On peut se demander dans quelle mesure les résultats que nous avons présentés ci-dessus s'appliquent à ce dernier cas. Pour ce faire, considérons les forces engendrées à l'interface



entre un substrat et une chaîne de grains frictionnels lorsque le substrat se dilate. Nous notons  $x_i$  les abscisses des points de contact entre le substrat et l'objet. Lors d'une dilatation thermique du substrat, chaque élément de longueur  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  se dilate de  $\kappa \Delta x_i \Delta T$ . L'effort appliqué sur le bloc  $i$  après ce changement de température est égal à :

$$\begin{aligned} F_{2 \rightarrow 1} &= k((1 + \kappa \Delta T)(x_2 - x_1) - l_0) \\ F_i &= k(1 + \kappa \Delta T)(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) \\ F_{N-1 \rightarrow N} &= k((1 + \kappa \Delta T)(x_{N-1,i} - x_{N,i}) - l_0) \end{aligned}$$

La force élastique induite par le changement de température est donc différente de celle proposée dans le modèle précédent. Ici, c'est la constante de raideur et la longueur à vide qui varient linéairement avec la température.

En posant initialement aléatoirement les blocs, les conditions suivantes doivent être vérifiées pour assurer la stabilité de l'ensemble :

$$\begin{aligned} |(x_2 - x_1) - l_0| &< \frac{\mu_s mg}{k} \\ |x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}| &< \frac{\mu_s mg}{k} \\ |(x_{N-1} - x_N) - l_0| &< \frac{\mu_s mg}{k} \end{aligned}$$

Dans cette configuration, la probabilité pour qu'un bloc dépasse le seuil de friction est homogène, contredisant les résultats de notre modèle, qui met en avant le rôle particulier joué par les bords. Cependant, nous avons vu que la chaîne de grains s'organise suite à l'application successive des variations thermiques. Dans ce cas, la répartition des blocs est telle que le système glisse toujours à partir de ses bords même lorsque c'est le support qui se dilate. Les résultats obtenus avec la force modèle plus simple  $f_{n+1 \rightarrow n} = -k[x_n - x_{n+1} + l(T)]$  avec  $l(T) = l_0[1 + \kappa(T - T_0)]$  permet de rendre compte du comportement du système dans les deux situations.

### 3.6.2 Sur le choix de la loi de friction

Dans les diverses études impliquant des blocs solides reliés par des ressorts, la force de friction est une fonction plus complexe dépendant de la vitesse. Par exemple, Sousa [77] et Aumaitre [4] utilise une loi de friction donnée par :

$$F_{fri} = \mu_d \frac{1}{1 + \alpha v}$$

avec  $v$  la vitesse du bloc solide et  $\alpha$  un paramètre. Amundsen *et al* [3] proposent d'ajouter une force de viscosité au bloc en mouvement. Cette viscosité peut modéliser une viscosité interne due au mouvement relatif de 2 blocs ( $F \propto \eta_a(v_2 - v_1)$ ) ou une viscosité due au milieu ambiant ( $F \propto \eta_b v_1$ ). Ces lois de friction changent la dynamique interne du système.

De la même manière, Scheibert [71] a tenu compte du fait qu'un solide en contact frictionnel entraîné par une force appliquée à une hauteur  $h$  de l'interface est soumis à un couple. En effet, la force de friction est contenue dans le plan de contact des 2 surfaces alors que la force motrice qui déplace le bloc est appliquée à une hauteur  $h$ . Un couple opposé est donc nécessaire à l'équilibre rotationnel de l'ensemble. Ce couple est imposé par un gradient de force normale. Dans le cas de sollicitations thermiques, ce couple existe également ce qui peut changer les conditions de glissement.

Il est alors légitime de se demander quelle est l'influence de telles lois de friction sur la reptation du système. La dynamique interne de reptation dépend certainement des lois de friction choisies [6, 12, 52, 71]. Cependant, pour des variations de température de grandes amplitudes, le comportement moyen du système n'est pas sensible à sa dynamique sous jacente. En effet, la condition de stabilité de la chaîne de blocs suffit à déterminer la loi de reptation du solide. Les résultats de ce modèle sont donc plus généraux qu'ils ne semblent *a priori*.