# Une Vue Pragmatique de la Prétopologie

*La prétopologie : nous considérons que cette théorie mathématique est une adaptation réaliste de la topologie de BOURBAKI aux problèmes concrets rencontrés dans des disciplines telles que l'économie, la théorie des jeux, les sciences sociales ou la reconnaissance des formes. Elle présente des concepts, souvent considérés comme très (voire trop) abstraits en topologie, dans un langage qui nous paraît plus facile à traduire sur des exemples illustratifs simples. C'est dans cet esprit que nous avons conçu ce chapitre où nous allons réunir la présentation théorique et des éclairages souvent simples et intuitifs.*

*Il doit ressortir de ce chapitre que la prétopologie est basée initialement sur une notion de proximité ou de ressemblance qu'elle permet de traduire. L'application adhérence qui est au cœur de la topologie se voit privée en prétopologie de sa propriété d'idempotence (la fermeture d'un fermé est égale à lui même). Ceci lui confère une liberté telle qu'elle peut modéliser un processus itératif de type « de proche en proche ».*

# I - L'ADHERENCE

## I-1 Forme et adhérence.

Imaginons un ensemble d'objets disposés suivant le critère naturel suivant :

« *ce qui se ressemblent s'assemblent* »,

c'est à dire que deux objets qui se ressemblent seront dans une même région et deux objets distincts seront dans des régions différentes.

Sur la figure II.1 nous avons représenté un ensemble de formes géométriques allant du triangle jusqu'au cercle en passant par des polygones ; le nombre de côtés est ainsi de plus en plus grand. De cette manière, les polygones qui se ressemblent sont mis dans un même lieu géométrique ; l'hexagone, par exemple, est situé entre le pentagone et l'octogone.

Lorsqu'on perçoit un objet particulier dans un tel ensemble on perçoit automatiquement les objets qui l'avoisinent. Deux constatations très importants et très inter-reliés surgissent de cette remarque :

- la première est que la partie qu'on a perçue de cet ensemble forme en quelque sorte la classe des objets qui ressemblent à l'objets en question, c'est à dire que cette partie caractérise la forme de l'objet perçu dans l'ensemble.
- la seconde est que les objets de la partie perçue adhérent tous à la propriété commune de ressemblance. On dira alors que la partie perçue est l'adhérence de l'objet en question.

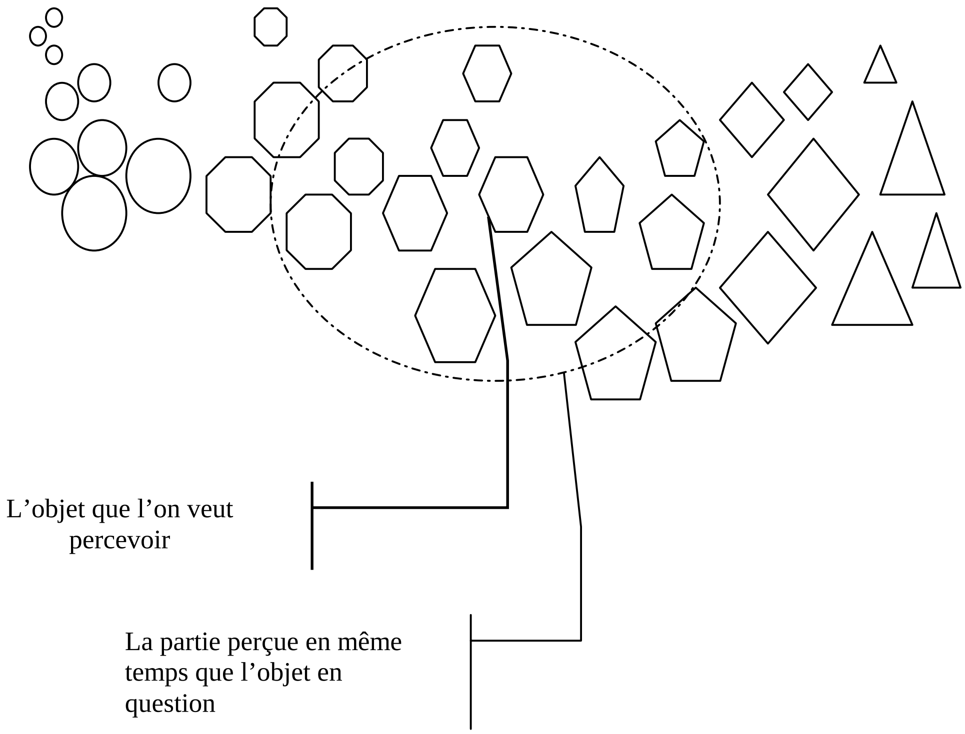


Figure II.1: Notion de forme et d'adhérence : ici on reconnaît une forme hexagonale.

On peut dire alors, d'une manière très grossière, que dans de telles conditions, la forme d'un objet peut être confondue avec l'adhérence de cet objet.

Nous remarquerons que :

- la propriété vérifiée par l'ensemble qu'on a imaginé plus haut, c'est à dire de respecter le critère de ressemblance entre objets, est généralement la propriété recherchée dans l'ensemble des représentations $R$ dans les techniques pratiques de reconnaissance des formes.
- l'adhérence d'un objet perçu dans les conditions proposées plus haut dépend de la distance qui sépare l'observateur de l'objet en question. C'est la notion du niveau de perception. La forme d'un objet est d'autant plus nette que l'observateur est proche de l'objet.
- la notion d'adhérence peut s'appliquer à un ensemble d'objets, au même titre qu'elle s'applique à un objet. Lorsqu'on veut percevoir un ensemble d'objets on perçoit toujours un ensemble plus grand.

## I.2 Les Définitions.

Soient E un ensemble quelconque (qui peut être par exemple l'ensemble R en RF), et P(E) l'ensemble de toutes les parties de E.

### *Adhérence et espace prétopologique*

- On appelle *adhérence* tout processus d'extension défini sur P(E) qui laisse invariant l'ensemble vide, c'est à dire : toute application *ad* de P(E) dans P(E) telle que :

  . $ad\,(\emptyset) = \emptyset$ ;

  . $\forall\, A \in P(E),\ A \subseteq ad(A)$.

Alors le couple (E,*ad*) est appelé *espace prétopologique*

- Les structures prétopologiques *d* et *g* définies par :

  $\forall\, A \in P(E),\ d(A) = A$ et $g(A) = E$

  sont appelées respectivement prétopologie discrète et prétopologie grossière sur E.

**Commentaires :**

L'application adhérence n'est pas nécessairement idempotente, c'est-à-dire qu'en général $ad(ad(A)) \neq ad(A)$ . Cette propriété est très importante dans la mesure où elle permet de construire des processus itératifs de traitement, ce qui est le cas de la majorité des techniques de reconnaissance des formes. Ceci conduit aussi à poser la définition suivante, celle de l'adhérence $n^{ième}$

Soient (E,*ad*) un espace prétopologique et n un entier naturel,

On appellera *adhérence n-ième* d'une partie A de E, et on notera $ad^n(A)$ la composition n fois de l'application *ad* comme suit : $ad^n(A) = ad(ad(ad(.......ad(A)...)))$. Sur la figure II.2 nous donnons une illustration de cette définition qui génère un processus itératif.

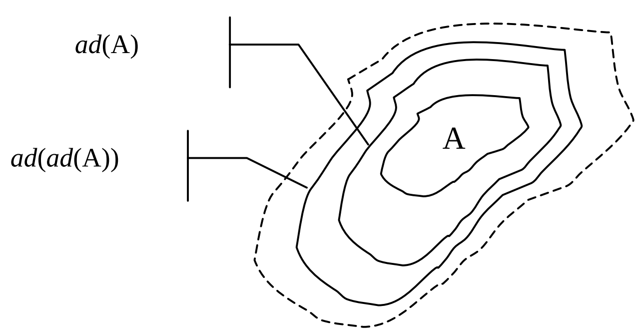


Figure II.2 : Notion de processus itératif : $A \subset ad(A) \subset ad(ad(A))$ ...

l'adhérence de l'ensemble vide est vide puisqu'il est absurde de considérer le voisinage de quelque chose qui n'existe pas

***Espaces prétopologiques***

Dans la suite l'application adhérence sera notée a. On peut qualifier les espaces prétopologiques comme suit :

(i) un espace prétopologique (E,a) est dit de type V si et seulement si a vérifie l'axiome d'isotonie suivant :

$\forall$ A,B $\in$ $P$(E ), ( A $\subseteq$ B ) $\Rightarrow$ ( a(A) $\Rightarrow$ a(B) )

(ii) un espace prétopologique (E,a) est dit de type $V_S$ si et seulement si a vérifie la propriété suivante :

. $\forall$ A $\in$ $P$(E ), $\quad a(A) = \bigcup_{x \in A} a(\{x\})$

Les espaces prétopologiques de type $V_S$ sont intéressants pour l'implémentation d'algorithmes dans la mesure où ils permettent de calculer l'adhérence d'une partie à partir de celle de ces éléments (voir les exemples ci-après).

## I.3 Exemples d'adhérence

Deux adhérences très remarquables sont à mettre en évidence ici, car elles ont fait l'objet de nombreux algorithmes de reconnaissance des formes. Il s'agit des adhérences des k-plus-proches voisins et des ε-voisins.

1- Soit E un ensemble quelconque dans lequel on peut définir une distance ou une dissimilarité $d$ entre deux éléments. Alors pour une valeur réelle strictement positive ε, pour tout élément x de E on pose :

   $ad_\varepsilon(\{x\}) = \{y \in E, d(x,y) < \varepsilon\}$

   et pour chaque partie A de E on pose : $ad_\varepsilon(A) = \cup\, ad_\varepsilon(\{x\})$ pour tous les x de A.

2- Soit E un ensemble discret quelconque dans lequel on peut décider la proximité ou non de deux éléments. Alors pour un entier k fixé, pour chaque élément x de E on pose :

   $ad_k(\{x\})$ = {y $\in$ E, y est l'un des k plus proches voisins de x dans E ou y=x}

   et pour chaque partie A de E on pose : $ad_k(A) = \cup\, ad_k(\{x\})$ pour tous les x de A

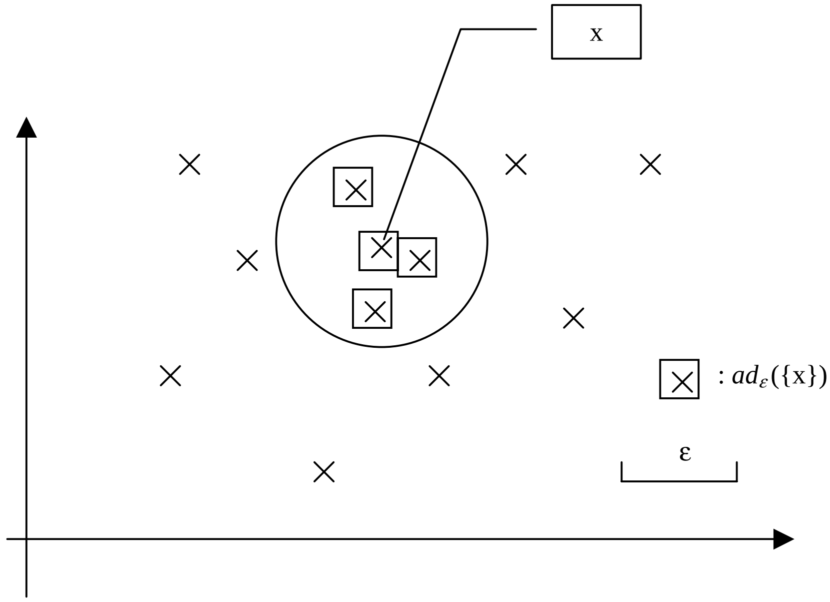


Figure II.3 : L'adhérence des ε- voisins, ici E est plongé dans un ensemble à deux dimensions

Les deux prétopologies précédemment définies sont des prétopologies de type $V_S$ par construction. Elles peuvent être utilisées par exemple dans un problème de reconnaissance de formes de la manière suivante : connaissant la forme ω d'un élément x de l'ensemble d'apprentissage T, alors on peut décider que la forme de y est aussi ω si $y \in ad_k(\{x\})$

(ou $y \in ad_\varepsilon(\{x\})$ ).

3- Dans le domaine de l'analyse d'image, l'image que l'on veut traiter est souvent représentée par une matrice de pixels. Dans ce cadre on peut s'intéresser aux quatre voisins ou aux huit voisins d'un pixel et on peut alors construire les deux adhérences $ad_4$ et $ad_8$ illustrées par la figure suivante ; elles sont de type $V_S$

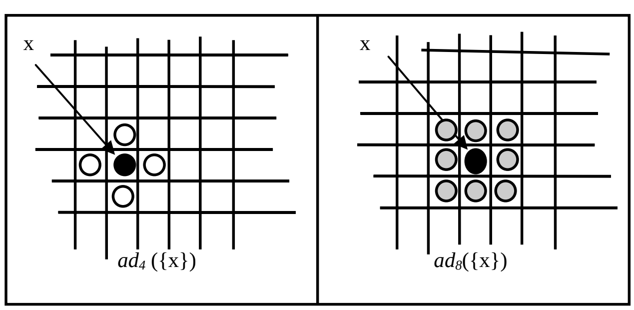


Figure II.4 : Les adhérences des 4 et 8 voisins

### I.4 Approche duale : l'intérieur

On peut définir la notion d'espace prétopologique par une approche duale à celle définie plus haut. Cette approche est basée sur la notion d'intérieur.

On définit alors l'application *int* : P(E) → P(E) telle que :

$$\forall\ A \subset E,\ int\ (A) = (ad(A^C))^C,$$

où $A^C$ est le complémentaire de A dans E.

*int* est appelée *intérieur*. Il est clair que l'application *int* vérifie :

- $int\ (\varnothing) = \varnothing$
- $\forall\ A \in P(E),\ int(A) \subseteq A.$

le couple (E, *int*) est aussi appelé *espace prétopologique.*

### I.5 Ouvert, fermé, frontière prétopologique

Soit (E, *ad* ) un espace prétopologique.

On appelle ouvert de E, toute partie A de E qui est telle que *int*(A) = A.

On appelle fermé de E, toute partie A de E qui est elle que *ad*(A) = A.

On appelle fonction frontière de (E, *ad*) l'application de P(E) dans P(E) désignée par *fr* est définie par :

$$\forall A,\ A \in P(E) \qquad fr(A) = ad(A) - int(A)$$

Remarque : dans un espace prétopologique (E, *ad*) le complémentaire de toute partie A ouverte est un fermé et, inversement, le complémentaire de toute partie A fermée est un ouvert.

Notons qu'une partie peut être ouverte et fermée.

## II COMPARAISON ET COMPOSITION DE PRETOPOLOGIES

Reprenons l’exemple de la figure II.1, nous pouvons remarquer que la partie perçue en même temps que la forme désirée dépend de la distance qui sépare l’observateur de l’ensemble des formes géométriques (voir la figure II.5). Il est donc naturel de pouvoir définir plusieurs adhérences d’un même objet imbriquées les unes dans les autres.

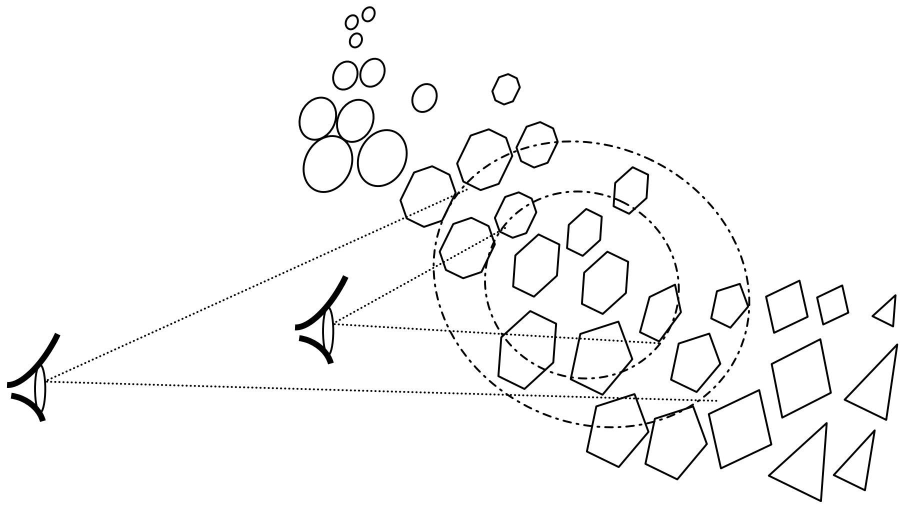

Figure II.5 : Notion de degré de perception : relation de finesse prétopologique

Plus on est proche de l'objet et plus on va voir finement

## II - 1 Comparaison et Ordre.

Soit E un ensemble non vide

Nous désignons par $P_E$ l'ensemble des prétopologies définies sur E

***Définition***

Nous définissons sur $P_E$ la relation d'ordre, noté <<, par :

$$ad_2 << ad_1 \Leftrightarrow \forall A,\ A \subset E, \quad ad_1(A) \subset ad_2(A)$$

Nous disons alors que $ad_2$ est moins fine que $ad_1$

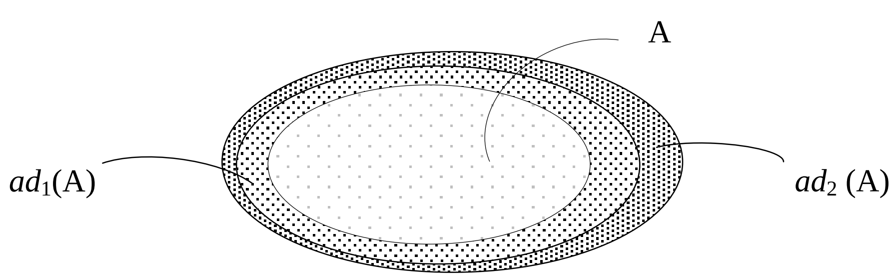


Figure II.6 : relation de finesse entre structures prétopologiques

Remarque

En terme de fonction d'intérieur, la relation << peut être définie par :

$$ad_2 << ad_1 \Leftrightarrow \forall A,\ A \subset E, \quad \operatorname{int}_2(A) \subset \operatorname{int}_1(A)$$

Nous avons généralisé les relations de finesse en relations de (m,n)-finesse. Ces relations seront présentées dans le deuxième chapitre.

***Proposition***

$P_E$ est partiellement ordonné par la relation << et, de plus, c'est un treillis pour cette relation d'ordre.

<u>Preuve :</u>

Il est trivial de vérifier que << est une relation d'ordre.

Soit $ad_1 \in P_E$ et $ad_2 \in P_E$. On peut alors définir les deux prétopologies $ad_1 \vee ad_2$ et $ad_1 \wedge ad_2$ sur E par :

$$\forall A,\ A \subset E,\ (ad_1 \vee ad_2)(A) = ad_1(A) \cup ad_2(A)$$

$$\forall A,\ A \subset E,\ (ad_1 \wedge ad_2)(A) = ad_1(A) \cap ad_2(A)$$

Il est clair que, d'une part ces nouveaux éléments sont dans $P_E$ et que, d'autre part, ils sont respectivement le plus grand minorant et le plus petit majorant commun à $ad_1$ et $ad_2$

***Proposition***

$P_E$ possède pour la relation << un plus petit et un plus grand élément que nous appelons respectivement la topologie grossière (notée $ad_g$) et la topologie discrète (notée $ad_d$).

<u>Preuve</u>

$ad_g$ et $ad_d$ sont définies par :

$$\forall A,\ A \subset E,\ ad_g(A) = E$$

$$\forall A,\ A \subset E,\ ad_d(A) = A$$

Il est clair alors que :

$$\forall\, ad_E,\ ad_E \in P(E),\ ad_g << ad_E << ad_d$$

La relation d'ordre que nous venons de voir sera l'élément fondamental pour définir les fonctions structurantes.

## II - 2 Composition des prétopologies

***Proposition***

Soit E un ensemble.

L'ensemble $P_E$ des prétopologies sur E, muni du produit * qui à tout couple $\left(ad_{1,}\ ad_2\right)$ de $P_E^2$ associe $ad_1 * ad_2 = ad_{12}$, application de $P_E$ dans lui-même définie par :

$$\forall A,\ A \subset E, \quad ad_{12}(A) = ad_1\left(ad_2(A)\right)$$

est un monoïde.

<u>Preuve</u>

- $ad_{12}(\varnothing) = ad_1\left(ad_2(\varnothing)\right) = ad_1(\varnothing) = \varnothing$
- $\forall A,\ A \subset E, \quad A \subset ad_2(A) \subset ad_1\left(ad_2(A)\right)$

Cette définition généralise celle de l'adhérence n<sup>ième</sup> donnée plus haut

***Remarques***

On peut vérifier les propriétés suivantes qui ont toutes une interprétation simple en Reconnaissance de Formes :

- le produit * possède un élément neutre : la topologie discrète
- il possède un élément absorbant : la topologie grossière
- il est associatif mais, en général, il n'est pas commutatif
- il a un seul élément inversible à la fois à gauche et à droite : l'élément neutre
- on conviendra, pour tout élément $ad_E$ de $P_E$, de désigner par $ad_E^n$ la composition de $ad_E$ n fois par elle-même ; en d'autres termes :

$$\forall n,\ n \in N^*,\ \forall A,\ A \in P(E) \qquad ad_E^n(A) = ad_E\left(\underbrace{ad_E(\ldots(ad_E}_{n\ fois}(A)\ldots)\right)$$

Par convention, on pourra noter $ad_E^0 = ad_0$ la topologie discrète.

Notons encore que l'ensemble $P_E(V)$ des prétopologies de type V et l'ensemble $P_E(V_S)$ des prétopologies de type $V_S$ sont des sous-monoïdes des prétopologies sur E.

# III - PRETOPOLOGIE ET RELATIONS BINAIRES

Dans un processus de reconnaissance de forme, en phase de décision, la reconnaissance d'un élément repose généralement sur une idée de ressemblance. Si y est un élément non encore reconnu de l'ensemble des représentations, on pourra décider de lui attribuer la forme de l'élément d'apprentissage x qui lui est le plus semblable. C'est le cas par exemple si y est l'un des k plus proche voisins de x. Pour désigner cette relation binaire on peut noter y $\mathsf{R}_k$ x, et $ad_k(\{x\})$ devient alors : $ad_k(\{x\}) = \{x\} \cup \{ y \in E, y \mathsf{R}_k x \}$.

De même, si y est ε voisin de x, on peut noter y $\mathsf{R}_\varepsilon$ x et $ad_\varepsilon(\{x\}) = \{ y \in E, y \mathsf{R}_\varepsilon x\}$.

***Généralisation***

Soit R une relation binaire sur un ensemble E, on peut, par exemple, définir une prétopologie sur E de l'une des manières suivantes :

1- $\forall x \in E$, on pose $ad_R(\{x\}) = \{x\} \cup \{y \in E, y R x\}$

et $\forall A \subset E$, $ad_R(A) = \cup\, ad_R(\{x\})$ pour tous les x de A.

On peut illustrer cette construction par le graphe orienté suivant dans lequel les nœuds sont les éléments de E et les arcs orientés sont les relations qui existent entre les éléments de E.

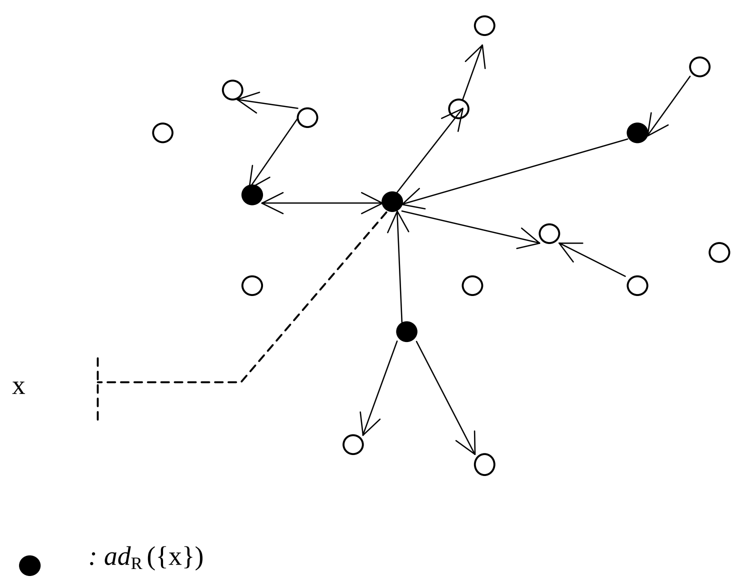


Figure II.7 : Exemple de prétopologie définie à partir d'une relation binaire R .

2. $\forall x \in E$, on pose $ad_{R^{-1}}(\{x\}) = \{x\} \cup \{y \in E, x R y\}$

et $\forall A \subset E$, $ad_{R^{-1}}(A) = \cup\, ad_{R^{-1}}(\{x\})$ pour tous les x de A.

Le graphe orienté de la figure II.7 illustre cette adhérence.

Ici l'adhérence est notée $ad_{R^{-1}}$ car elle est associée à la relation binaire $R^{-1}$ définie par :

$$x\ R^{-1}\ y \Leftrightarrow y\ R\ x$$

Les adhérences $ad_R$ et $ad_{R^{-1}}$ sont respectivement dites *prétopologie des descendants d'ordre 1* et *prétopologie des ascendants d'ordre 1*.

Si R est une relation symétrique ces deux structures prétopologiques sont identiques. C'est le cas par exemple de la prétopologie des ε-voisins qui est basée sur la notion de distance, de dissimilarité ou d'écart qui définissent des relations symétriques.

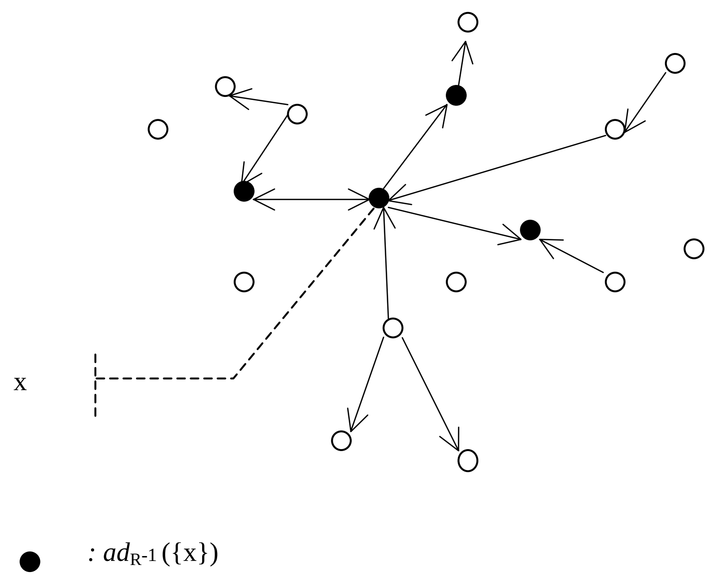


Figure II.8: Adhérence basée sur la relation binaire $R^{-1}$

# IV - CONNEXITE ET CHEMIN

Lorsque dans un algorithme de reconnaissance de formes on veut classer un élément de l'ensemble des représentations non encore appris, on cherche généralement un élément d'apprentissage qui lui est le plus semblable et le classement sera établi par référence à cet élément. Souvent, il n'est pas évident de trouver un tel élément. On procède alors par traitement, de proche en proche, à partir de l'élément à reconnaître jusqu'à l'élément d'apprentissage souhaité, en passant par des éléments tests intermédiaires. C'est le cas par exemple dans des algorithmes basés sur la théorie des graphes où on établit un chemin dans le graphe constitué de nœuds, ou dans des algorithmes basés sur la décision par k plus proches voisins où on construit un chemin dont chaque élément est k plus proche voisin du suivant.

Cette notion de chemin, souvent nécessaire à la généralisation de la reconnaissance, ne peut être utilisée que si l'espace des représentations vérifie la propriété de *connexité* suivante : « chaque élément test peut être connecté à au moins un élément d'apprentissage grâce à une relation de ressemblance ». Cette propriété est pratiquement la même que celle citée au chapitre I concernant la représentativité de l'ensemble d'apprentissage. Nous allons revenir à cette notion plus loin dans cette thèse.

Un autre aspect de la reconnaissance est à mettre en valeur ici, il s'agit de la notion de *coût de la reconnaissance* d'un élément test. Dans un processus de reconnaissance il ne s'agit pas simplement d'arriver à reconnaître l'élément test, mais il faut le faire au moindre coût pour des raisons de gains en place mémoire et en temps de calcul. Il est donc intéressant de pouvoir suivre le « chemin de production de la décision » pour en évaluer le coût.

En analyse d'image, nous pouvons renvoyer le lecteur aux algorithmes utilisés par exemple pour la recherche des bassins versants, tels que : *la distance géodésique* dans [Lantuejoul-84] et *le coût de connexion* dans [Prêteux-92].

En terme de prétopologie, nous pouvons traduire ces notions de chemin entre points et de coût de reconnaissance dans le formalisme suivant :

***Définitions***

Soit (E,a) un espace prétopologique,

- une suite $c = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E est dite chemin prétopologique de x vers y si et seulement si :
  - $x = x_0$ et $y = x_n$.
  - $\forall i \in \{0,1,\ldots,n-1\}\ x_{i+1} \in a(\{x_i\})$.
- l'entier l = n-1 sera appelé *longueur du chemin c*.

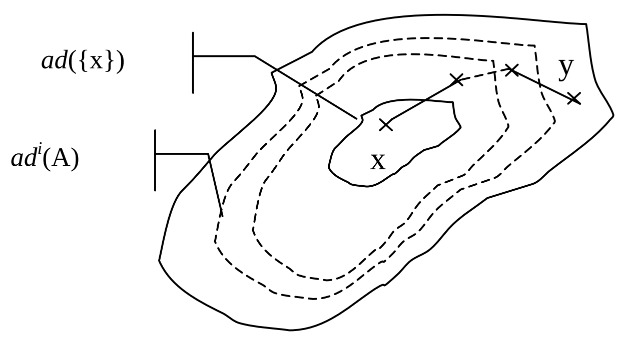


Figure II.9: Notion de chemin prétopologique

- une partie A de E sera dite *fortement connexe* si et seulement si pour chaque couple (x,y) d'éléments de A, il existe au moins un chemin prétopologique de x vers y.
- une partie A de E sera dite *relativement connexe par rapport à $x \in A$* si et seulement si pour chaque élément y de A, il existe au moins un chemin prétopologique de x vers y.

***Commentaires***

- Cette notion de partie relativement connexe par rapport à l'un de ses éléments est à mettre en parallèle avec la notion d'ensemble étoilé existant en topologie.
- L'utilisation des parties relativement connexes ou fortement connexes dans des algorithmes de classification automatique est très importante, dans la mesure où elle garantit la possibilité de formation des classes, comme en témoigne l'algorithme du groupement par propagation de EMPTOZ [Emptoz-83] qui sera présenté plus loin.

# V - LES FONCTIONS STRUCTURANTES.

## V-1 Introduction

Généralement la densité locale autour des éléments de l'espace de représentation n'est pas uniforme. On peut trouver autour d'un point de représentation x une agglomération de points avec une densité plus forte que celle existant autour d'un autre point y par exemple.

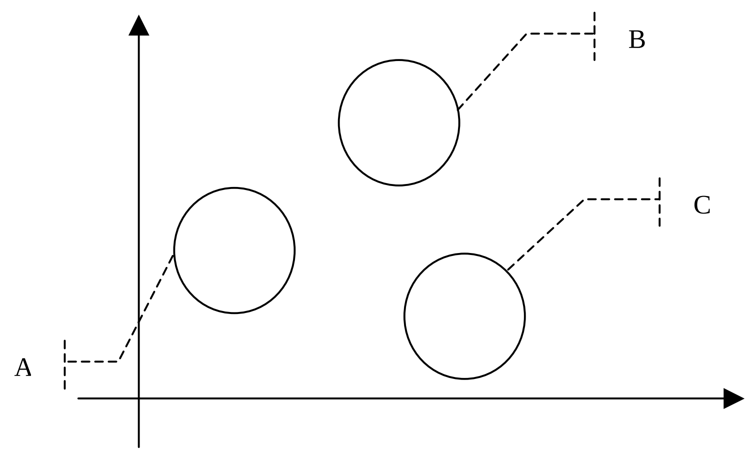


Figure II.10 : Exemple d'ensemble des représentations avec des densités différentes : densité(A) > densité(B), densité(A) ≈ densité(C) mais les deux densités n'ont pas la même uniformité.

De plus, même si dans certains cas autour des deux points x et y on peut avoir des densités sensiblement égales, cette densité peut ne pas être uniforme dans la mesure où les points voisins de x peuvent avoir une forme « géométrique » différente de celle des points voisins de y comme le montre la figure II.9.

Dans ce cadre les chercheurs en reconnaissance des formes et en particulier en classification définissent des notions pouvant mesurer cette concentration locale des points. Ainsi :

- dans [Trémolières-79] l'auteur définit une fonction densité basée sur les $\varepsilon$ voisins de la manière suivante : $F(x) = \sum (\varepsilon - d(x,y))$ pour tous les y $\varepsilon$-voisins de x ,
- dans [Mizoguchi-80] les auteurs calculent, pour chaque individu x, une fonction potentielle P basée sur les k plus proches voisins : $P(x) = (1/k) * \sum d(x,y)$ pour tous les y k-plus proches voisins de x
- dans [Emptoz-79] les auteurs proposent un algorithme (dit N.H.D.) qui détermine une suite de partitions non hiérarchique descendante basée sur une mesure de dispersion des nuages. Une fonction dispersion n'est pas une fonction spécifique mais c'est une fonction assez générale qui vérifie certains critères (continuité, sur-additivité et nullité sur une partie contenant au plus un élément). Par exemple la fonction $D(A) = \sum (d(x,y))^2$ pour tous les x,y dans A est une dispersion.

EMPTOZ [Emptoz-83] formalise le calcul de densité locale en introduisant la notion de *fonction structurante* qui associe à chaque individu x de l'ensemble des représentations une valeur réelle S(x) qui dépend de l'adhérence prétopologique *ad*({x}).

### V-2 Définition des fonctions structurantes

- On appelle *fonction d'ensemble* toute application de P(E) dans $R^+$.
- Soit (E,*ad*) un espace prétopologique et soit $\Psi$ une fonction d'ensemble croissante pour l'inclusion, c'est à dire telle que :

$$\forall\ A,B \subset E\ ,\ A \subset B \Rightarrow \Psi(A) \leq \Psi(B)$$

on *appelle fonction structurante* associée à *ad* et à $\Psi$ l'application S de E dans $R^+$ définie par :

$$\forall\ x \in E\ ,\ S(x) = \Psi(ad(\{x\}))$$

***Exemples***

- Lorsque $ad = ad_\varepsilon$ on peut choisir comme fonction d'ensemble $\Psi(A) = \text{card}(A)$ et on construit ainsi la fonction structurante : $S_1(x) = \Psi(ad_\varepsilon(\{x\})) = \text{card}(ad_\varepsilon(\{x\}))$ qui représente en quelque sorte la concentration des points dans la boule de centre x et de rayons $\varepsilon$.
- Quand $ad = ad_k$ on choisit pour x fixé comme fonction d'ensemble $\Psi(A) = \sum d(x,y)$ pour tous les y de A et on construit ainsi la fonction structurante : $S_1(x) = \Psi(x, ad_k(\{x\})) = k \times P(x)$ où P(x) est la fonction potentielle de Mizoguchi présentée plus haut.

- Dans [Selmaoui-92] nous trouvons une conception différente de la notion de fonction structurante, cette fois utilisée dans le domaine du traitement d'image. L'auteur insiste sur la prédomination de la notion de structuration sur le concept d'adhérence, et propose alors une définition plus générale des fonctions structurantes, ce qui lui permet de considérer la fonction de niveaux de gris comme une fonction structurante.

### V-3 Fonctions structurantes et niveau de perception

Dans la seconde remarque qui a succédé à la figue II.1 où nous donnions un exemple intuitif de la notion d'adhérence, nous avons souligné que cela dépend essentiellement de la distance séparant l'observateur de l'image perçue. Cette notion qui est connue sous le nom de niveau de perception occupe une place importante en reconnaissance des formes.

Dans la figure II.9, par exemple, dans laquelle les parties A et B n'ont pas la même concentration de points, un observateur peut aisément distinguer les points de la partie B, mais pour la partie A il doit fournir plus d'efforts en se rapprochant d'avantage du dessin.

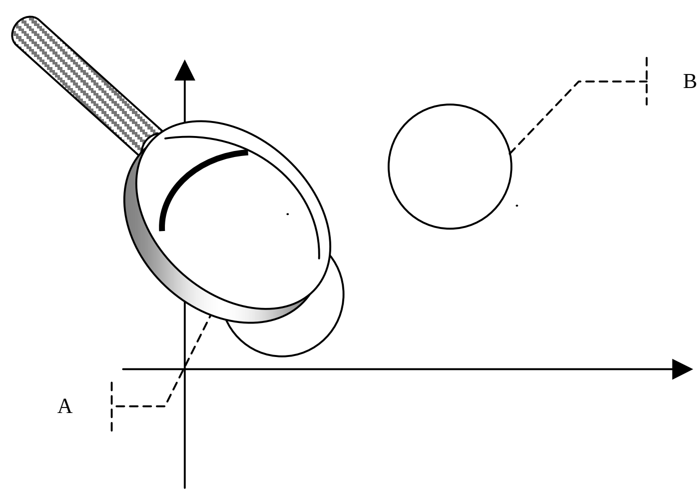


Figure II.11 : Notion de niveau de perception

Dans [Trémolières-94] et [Emptoz-83] les auteurs proposent de faire varier la taille du voisinage des éléments de l'ensemble étudié afin de pouvoir observer cet ensemble à différents niveaux de perception (voir la figure II.2).

Pratiquement, dans un voisinage de type ε-voisins lorsque ε est petit on perçoit moins de points autour d'un élément x auquel on s'intéresse mais on est plus précis. Par contre quand ε est grand les détails sont éliminées, on perçoit plus de points autour de x qui est alors « noyé » dans la masse de points qui l'entourent.

La notion de perception ainsi présentée est à mettre en parallèle avec la notion de multirésolution utilisée en traitement d'image. Les deux notions permettent d'avoir des représentations de l'ensemble à traiter à différents degrés d'approximation. En terme de structure de données la multirésolution utilise souvent une structure pyramidale qui est schématiquement une pyramide de plusieurs niveaux. Chaque niveau est constitué de cellules qui représentent les différentes portions de l'image traitée.

Dans le deuxième chapitre de ce mémoire nous présenterons une formalisation prétopologique de cette notion de structure pyramidale.

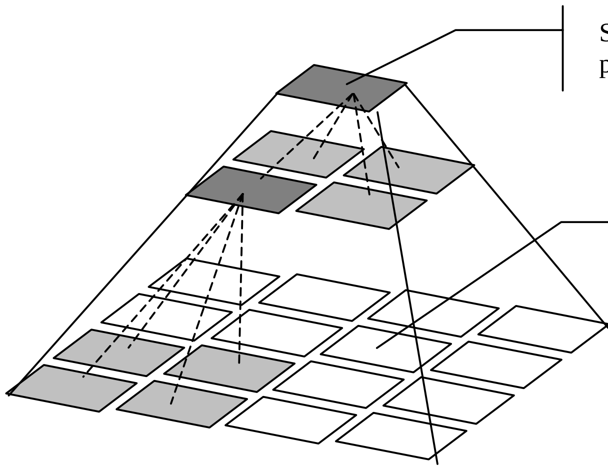


Figure II.12 : Structure pyramidale avec trois niveaux de perception

Un formalisme général pour toutes ces notions de degrés d'approximation et de niveau de perception peut être celui proposé par EMPTOZ dans [Emptoz-83] lorsqu'il parle de *niveau de perception d'organisation* d'un ensemble E. Il formalise ces niveaux par une famille de fonctions structurantes $(S_i)_{i \in I}$ $(I=\{0,1,...,n\})$ basées sur une même fonction d'ensemble $\Psi$ et sur une famille croissante au sens de l'inclusion d'adhérences prétopologiques$(ad_i)_{i \in I}$ :

- $\forall x \in E, \forall i \in I, S_i(x) = \Psi(ad_i(\{x\}))$
- $\forall x \in E, \{x\} = ad_0(\{x\}) \subset ad_1(\{x\}) \subset ad_2(\{x\}) \subset ..... \subset ad_n(\{x\})$

pour des i assez petits dans I, $S_i(x)$ permet d'avoir des connaissances sur l'organisation locale de E en x, tandis que pour des i assez grands dans I, $S_i(x)$ permet d'avoir des connaissances sur l'organisation globale de E en x.

# VI LA GERMINATION PRETOPOLOGIQUE

L'algorithme de groupement par propagation [Emptoz-83] est basé sur une idée de capacité d'attraction des éléments de E. Chaque élément ayant servi à la naissance d'une nouvelle classe est appelé par EMPTOZ *classifiant*.

L'auteur a aussi défini la notion de *germe de propagation* d'une partie A de E par :

$$G(A) = ad(A) - A.$$

Ce nouveau concept permet de traduire la capacité d'attraction de la partie A relativement à la prétopologie *ad*.

Dans l'algorithme de SELMAOUI [Selmaoui-92] les éléments qui ont servi pour construire les régions dont les frontières formeront par la suite les lignes de crête ou les talwegs sont appelés des *attracteurs*.

Et dans la méthode de PIEGAY [Piegay-97] les classes (pour la classification) ou les bassins versants (pour le traitement d'image) ne sont pas initialisées obligatoirement à partir d'un seul point mais à partir d'une région de points dite *région noyau*. L'auteur précise que la région noyau d'une classe représente en quelque sorte le *germe* de la classe.

D'autres références bibliographiques (non prétopologiques) peuvent être citées ici car utilisent des régions assez représentatives des classes recherchées et peuvent très bien être modélisées prétopologiquement par cette notion de germination, il s'agit de [Trémolières-79], [Meyer-91] et [Vincent-91].

***Définitions***

Un formalisme prétopologique pouvant aider à modéliser ces notions de régions noyau des classes peut être la notion de *germination* définie ponctuellement [Duru-80] par :

- $\forall x \in E$, $g(x) = ad(\{x\}) - \{x\}$
- $\forall A \subset E$, $g(A) = \bigcup_{x \in A} g(x)$

Les éléments de g(x) sont appelés alors *germes* de x.

# VII - LA CONTINUITE

Dans notre présentation, les notions de ressemblance et de voisinage qui forment des présupposés fondamentaux en reconnaissance des formes, ont été jusqu'à maintenant restreints à l'espace des représentations, alors que ces concepts occupent une place importante lorsqu'on se place dans l'espace des formes.

- Dans [Simon-80] nous trouvons une analyse assez remarquable qui met en valeur les notions de ressemblance (objet-objet), (objet-concept) et (concept-concept) (ici le mot concept sert pour désigner une classe d'objets ou une forme).

- EMPTOZ dans [Emptoz-83] fait référence aussi à cette notion de ressemblance entre formes lorsqu'il présente les différentes positions relatives d'une partie A par rapport à une partie B dans un ensemble E. Il définit par exemple la notion de disjonction prétopologique ((a,b)-forte ou (a,b)-faible) et la notion de quasi-disjonction prétopologique. Avec ces considérations l'auteur peut différencier entre une partition de l'ensemble E ou un recouvrement.
- D'une manière plus pratique, nous pouvons donner ici l'exemple des nuées dynamiques de DIDAY [Diday-79]. Dans cette méthode l'algorithme de nature itérative est initialisé par une partition aléatoire de l'ensemble d'apprentissage. Chacun des nuages disjoints de points ainsi donnés sera caractérisé par des noyaux qui sont des ensembles de points considérés comme les plus représentatifs au sein du nuage. Les noyaux donneront naissance, à l'étape suivante, à une nouvelle partition mieux adaptée à leurs structures. Cette suite d'itérations s'arrête lorsque le couple (partition - noyau) vérifiera un critère d'optimisation donné : lorsque deux itérations successives sont les mêmes ou encore lorsque le nombre d'itération dépasse un seuil préalablement fixé.

L'essentiel à retenir ici pour cette méthode, est le caractère d'adaptation que doit vérifier le couple (partition-noyau) ce qui représente aussi un caractère de ressemblance entre deux concepts construits par abstraction à partir des informations contenues dans l'ensemble d'apprentissage.

D'après ce qui vient d'être dit, la reconnaissance n'est pas seulement basée sur la notion de ressemblance entre objets mais aussi entre objet et concept et entre concept et concept. Si l'on voit la reconnaissance alors comme une application entre l'ensemble des représentation et l'ensemble des formes, cette application doit pouvoir permettre la transmission du caractère de ressemblance lorsqu'on passe d'un ensemble à l'autre [Emptoz-83]. Cette transmissibilité est traduite par SIMON par le mot « homomorphisme » et par EMPTOZ en terme de continuité prétopologique.

***Définition* : *Continuité***

Soient (E, $a$) et (F, $b$) deux espaces prétopologiques et $f$ une application de E dans F . On dira que l'application $f$ est continue de (E,$a$) vers (F,$b$) si et seulement si :

$\forall A \subset E,\ f(a(A)) \subset b(f(A))$.

La notion de continuité ainsi présentée n'utilise pas la propriété de non idempotence de la fonction d'adhérence, qui est la propriété principale qui marque la différence avec la topologie. C'est la raison pour laquelle on trouve en prétopologie une généralisation de la continuité en (m,n)-continuité de la manière suivante :

***Définition : (m,n)-continuité***

Soient (E, $a$) et (F, $b$) deux espaces prétopologiques, m et n deux entiers naturels et $f$ une application de E dans F . On dira que l'application $f$ est (m,n)-continue de (E,$a$) vers (F,$b$) si et seulement si : $\forall A \subset E,\ f(a^m(A)) \subset b^n(f(A))$.

***Caractérisation par l'application duale***

Lorsque les espaces prétopologiques (E,$a$) et (F,$b$) sont de type V et lorsque l'application $f$ de (E,$a$) vers (F,$b$) est surjective, on peut caractériser la notion de continuité prétopologique de $f$ grâce aux applications intérieurs de la façon suivante :

> Soient $i_a$ et $i_b$ les deux applications intérieurs duales associées respectivement aux adhérences $a$ et $b$. Alors :
>
> $f$ est une application (m,n)-continue de (E,$a$) vers (F,$b$) si et seulement si :
>
> $$\forall\ A \subset E,\ i_b^{\,n}\,(f(A)) \subset f(\,i_a^{\,m}\,(A))$$

**Preuve :** par simple passage aux complémentaires.

La notion de continuité prétopologique sera discutée dans l'avant dernier chapitre lorsque nous présenterons le transfert continu des structures, et sera généralisée pour prendre en compte les situations de l'indécision dans la reconnaissance.

## VIII Conclusion

Dans ce chapitre nous avons tenté de donner une présentation de la prétopologie comme outil naturel bien adapté à la reconnaissance des formes. Nous avons choisi d'introduire d'une manière progressive les définitions de la prétopologie selon les besoins de la reconnaissance des formes pour mettre en valeur les liens entre les deux disciplines. Ces liens sont établis aussi bien sur les modèles (tels que les notions d'adhérence et de voisinage) que sur les processus de traitement (les algorithmes), comme nous le verrons dans les chapitres suivants.