
Un Modèle Pragmatique Pour la Reconnaissance des Formes

Dans les chapitres précédents nous avons vu que la prétopologie pouvait être un outil bien adapté pour le développement et la modélisation des concepts utilisés en Reconnaissance des Formes, dans un cas de figure que l'on pourrait remettre en cause, celui où l'espace de représentation est partitionné en n classes distinctes. Nous allons maintenant utiliser cet outil, la prétopologie, pour présenter un modèle plus général pour toute la reconnaissance de formes.

Le support de nos travaux dans ce chapitre reste le modèle ensembliste proposé dans [Emptoz-83]. Ce modèle est particulièrement adapté à des processus de reconnaissance de formes "guidés par les données", et il repose (comme nous l'avons rappelé au chapitre I sur trois ensembles et deux applications : une application appelée "représentation" définie entre l'ensemble des objets et l'ensemble des représentations, et une application dite "d'interprétation" définie entre l'ensemble des représentations et l'ensemble des formes ; il formalise des situations de décision déterministes, c'est-à-dire celles où un objet est vulgairement interprété par une seule forme (étiquette ou classe) qui est distincte de toutes les autres.

Toutefois, la reconnaissance d'une forme s'établit dans une dualité entre deux approches : l'approche guidée par les données (ascendante) et l'approche guidée par les formes (descendante).

En nous appuyant sur la notion de correspondance évaluée, vue dans le chapitre précédent, nous proposons une définition formelle de la notion de concept en le considérant comme une collection de formes. Nous définissons une nouvelle application d'interprétation sur l'ensemble d'apprentissage que nous généraliserons sur l'espace des représentations tout entier.

Nous généralisons la notion de proximité, développée sur l'ensemble des représentations, à l'ensemble des formes, en construisant sur ce dernier une structure prétopologique non triviale et nous définissons la notion de champ sémantique d'une forme.

Nous donnons une formalisation de la notion de continuité prétopologique évaluée ce qui nous permet de représenter le transport continu de la structure prétopologique de l'espace de représentation à l'espace des formes.

Enfin, nous illustrons notre modèle pragmatique par une application sur la reconnaissance des caractères imprimés multiformes.

I. LE MODELE ENSEMBLISTE POUR LA RECONNAISSANCE DES FORMES

Le principe qui sous-tend le modèle est que tout processus de reconnaissance met en jeu trois ensembles et deux applications que nous représentons suivant le schéma suivant :

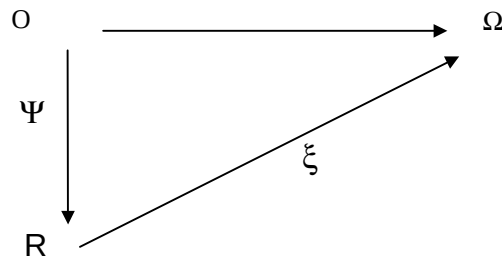


Figure VII.1 : Le modèle ensembliste de la Reconnaissance des Formes

O : ensemble des objets à reconnaître

R : ensemble des représentations de ces objets

Ω : ensemble des formes (ou des étiquettes)

ψ : fonction de représentation : c'est une application qui, à chaque objet de O , associe un nombre de descripteurs (ou de caractéristiques) dont la nature dépendra de la structure de l'ensemble des représentations R . Dans la suite nous supposons que cette application est surjective pour ne pas restreindre à chaque fois l'ensemble R à $\psi(O)$.

ξ : fonction d'identification ou d'interprétation : une forme ω sera dite significative (ou signifiante) pour un objet o , (o sera dit signifié par ω) si o admet au moins une représentation x telle que $\xi(x) = \omega$.

La construction d'une structure sur les ensembles utilisés dans le modèle de reconnaissance doit passer par une «transmissibilité du caractère de *voisin* quand on va d'un espace à un autre... Voisinages et continuité (nous) incitent naturellement à la recherche d'un modèle de nature topologique » [Emptoz-83].

Ce modèle respecte les principes généraux de la Reconnaissance des Formes, à savoir :

- 1- l'ensemble d'apprentissage T est assez représentatif de l'ensemble des représentations, c'est-à-dire il est possible de définir des ressemblances (ou des similarités) entre les représentations n'appartenant pas à T et celles appartenant à T , de telle sorte que la généralisation de ξ à R tout entier soit possible,
- 2- toutes les formes de Ω sont utilisées au moins une fois dans l'interprétation des éléments de T , c'est-à-dire que la fonction $\xi|_T$ doit être surjective, et dans le cas contraire l'ensemble Ω sera réduit à $\xi|_T(T)$.

De plus, les hypothèses suivantes sont faites tant sur les objets que sur les formes :

- H1** Les éléments de Ω sont tous bien distincts.
- H2** Tout objet de O a une étiquette unique...
- H3** Tout objet de O fait partie d'une collection de parties de O .
- H4** Il existe au moins une structure prétopologique sur O , celle définie par la relation qui associe à chaque objet ceux qui ont le même nom que lui.

Le cœur du problème de la Reconnaissance de Formes consiste en la construction de l'application d'interprétation ξ , elle se déroule en deux phases :

- la phase d'apprentissage : lors de cette phase il s'agit de déterminer la fonction ξ sur un sous-ensemble T de R (appelé ensemble d'apprentissage) de deux manières différentes :
 - soit par une démarche supervisée qui consiste à construire explicitement avec l'aide d'un ou de plusieurs experts l'application ξ de T dans R ,
 - soit par une démarche non supervisée, qui consiste à déterminer implicitement la fonction ξ en essayant de partitionner, d'une manière adéquate, l'ensemble T en des sous-ensembles appelés classes et à affecter à chaque classe ainsi obtenue une (ou plusieurs) forme(s) dans Ω ,
- la phase de classement (ou de reconnaissance) : lors de cette phase il s'agit de généraliser cette construction à l'ensemble R des représentations tout entier.

Pour caractériser d'une manière prétopologique le modèle proposé, l'espace des représentations R est supposé muni d'une structure prétopologique ad_R et ψ est continue de O vers Ω .

La fonction d'interprétation ξ étant parfaitement connue sur l'ensemble d'apprentissage T , les parties $T_i = \xi|_T^{-1}(\omega_i)$ sont deux à deux disjointes et forment une partition de T .

La généralisation de l'application ξ à R tout entier se fait grâce à l'hypothèse supplémentaire suivante :

- H5** les ensembles $R_i = ad_R(T_i)$ forment une partition de R

car elle est nécessaire et suffisante pour donner un sens au principe de généralisation de ξ suivant :

$$\forall \omega_i \in \Omega, \xi^{-1}(\omega_i) = R_i$$

ce qui signifie que pour tout élément x de R non encore reconnu, d'après l'hypothèse H5, il existe un T_i tel que $x \in ad_R(T_i)$ et $\xi(x) = \omega_i$.

Pour traduire la continuité de ξ l'auteur munit l'espace des formes Ω de la structure prétopologique discrète ad_d et justifie cela par le fait que toutes les étiquettes de Ω sont supposées bien distinctes. En ce qui concerne les cas où les R_i ne forment pas une partition de l'ensemble R , l'auteur propose soit, lorsqu'il y a recouvrement, d'introduire un principe d'identification floue défini sur l'ensemble des représentations, soit, lorsque les R_i sont deux à deux disjoints mais ne recouvrent pas entièrement R , d'introduire une étiquette rejet.

II LES LIMITES DU MODELE ENSEMBLISTE

Ce modèle est particulièrement adapté à des processus de reconnaissance de formes "guidés par les données", et formalise des situations de décision déterministes. Il correspond à l'approche classique de la classification automatique. Dans ce cadre, les processus aboutissent à l'établissement d'une connaissance catégorielle unidimensionnelle de type « juxtaposition » de classes disjointes. Ceci ne permet qu'une approche réduite des liens entre objets et formes, via une interprétation unique, et n'offre pas la possibilité d'explicitation des liens entre les formes.

Ces constations sont des conséquences des deux hypothèses H1 et H2. En effet, la première hypothèse assujettit le modèle à ne prendre en compte qu'une classification partitionnée sans recouvrement possible. La seconde hypothèse renforce ce résultat en interdisant toute relation entre formes. Une autre conséquence directe de ces deux hypothèses est l'interprétation de la notion de continuité du processus d'identification. La seule interprétation possible de deux objets très proches ne pouvaient être qu'une étiquette commune. De plus, le fait de considérer les formes comme de simples éléments d'un ensemble quelconque, au sens mathématique, c'est à dire sans structure empêche toute notion de structure interne pour la forme.

Tous ces résultats sont toutefois en oppositions avec certaines démarches utilisées en Reconnaissance des Formes résumées dans les sous paragraphes suivants.

II. 1 L'ensemble des formes est structuré

L'un des principes centraux de la classification artificielle est que les formes manipulées (ou les classes) bien qu'apparaissent diversifiées en nature partagent la propriété d'être intrinsèquement catégorisables. Alors, une préoccupation cruciale des chercheurs en Reconnaissance des Formes est de "bien" représenter l'ensemble de ces formes. On est alors confronté au problème de trouver un juste équilibre entre la réduction de la variabilité intra-classe et l'accentuation de la variabilité inter-classes. Ce qui nous intéresse ici est le fait de pouvoir calculer la variabilité inter-classes qui fait référence à une structuration de l'ensemble des formes.

Nous trouvons aussi dans les méthodes de classement proprement dites l'idée de structure de l'espace des formes. Ainsi, dans les méthodes de classification hiérarchiques cette idée est clairement relatée à travers le calcul de proximité entre classes à un niveau donné en vue de les fusionner pour passer au niveau supérieur [Faure-90].

De même, ce concept est présent dans les méthodes utilisant des distances entre nuages de points telles que la méthode des nuées dynamiques de Diday [Diday-79]. Dans cette démarche on procède à la comparaison entre classes obtenues lors d'une première phase de coalescence pour améliorer la classification.

D'autre part, dans les méthodes structurelles utilisant les systèmes à base de connaissances ou les frames, les formes sont structurées entre elles grâce à des relations et des propriétés telles que, par exemple, les propriétés d'héritage [Haton-88].

II.2 La structure d'une forme

Dans l'approche statistique de la reconnaissance la représentation d'une forme se résume, en général, à un vecteur dans un espace structuré de dimension n . Cette représentation occulte certains aspects structurés de la forme, en particulier, tout ce qui est position relative interne de certains composants de la forme vis-à-vis des autres composants. C'est à la fin des années 60 nous avons assisté à l'avènement des méthodes syntaxiques et structurelles qui proposent une représentation structurée de la forme.

Une première utilisation d'une telle représentation de la forme a été celle faite par M. PAVEL pour l'élaboration de son modèle de Reconnaissance des Formes en 1969 [Pavel-69]. De même, dans le modèle de G. PERENNOU [Perennou-73] nous trouvons proposer une représentation d'une forme composée de formes simples ou partielles, ce qui reflète aussi l'idée d'une structuration interne de la forme.

Rappelons aussi que dans le traitement des formes complexes telles que les scènes ou les documents, la considération de la structuration interne de la forme s'impose d'une manière naturelle.

II.3 La dualité : processus ascendant – processus descendant

L'avènement des démarches syntaxiques et structurelles en reconnaissance a en quelque sorte changé les mentalités des chercheurs dans la conception des représentations des exemplaires et des formes et aussi des processus. Avec les formes structurées les processus de la reconnaissance tiennent automatiquement compte des connaissances structurelles et contextuelles des formes. Ce sont des connaissances qui ne proviennent pas nécessairement des données acquises, mais qui sont liées à la structure des formes apprises (segment de droite, forme circulaire, ...). On réalise ainsi une sorte de couplage entre l'aspect *percept* matérialisé par les données et l'aspect *concept* représenté par la forme, c'est la notion de dualité entre les processus guidés par les données et les processus guidés par les formes.

Cette importance donnée aux processus descendants pour ainsi avantager en quelque sorte la connaissance humaine est plus évidente dans les systèmes de Reconnaissance des Formes entièrement dédiés à une seule tâche, par exemple, la lecture automatique des codes postaux des lettres. Ici le contexte de la reconnaissance est limité à l'ensemble des chiffres. Dans ce genre de système tous les mots reconnus sont automatiquement corrigés grâce à un dictionnaire spécifique. C'est un processus de reconnaissance de type descendant. Ici aussi la reconnaissance s'effectue grâce à la dualité processus ascendant – processus descendant.

II.4 L'indétermination

Les formes en général ne sont reconnues qu'à un « degré de ressemblance » près ; il y a toujours un taux d'erreur possible dans la reconnaissance d'une forme. Ce taux est prévu dans la plupart des méthodes en Reconnaissance des Formes. Il est généralement utilisé en parallèle avec des seuils de décision. Dans les démarches déterministes, si l'erreur est inférieure à un certain seuil alors la reconnaissance est considérée comme acceptable, sinon l'objet, dans certain cas, fait partie d'une classe rejet. Par contre, dans les démarches non déterministes comme dans les méthodes probabilistes l'évaluation de l'erreur de reconnaissance est une partie essentielle dans la formation de la réponse du système [Gustafson-79], [Pal-91].

II.5 Le miroir structurel de la reconnaissance ou la continuité de ξ

Par miroir structurel de la reconnaissance nous voulons exprimer l'interaction structurelle entre l'ensemble des représentations et l'ensemble des formes. Cette interaction est souvent imposée par la résolution même du problème de reconnaissance [Simon-83]. Le choix d'un ensemble de représentation induit automatiquement des contraintes sur le choix des opérateurs d'interprétation et vice versa.

Le miroir structurel de la reconnaissance peut être formalisé dans le modèle ensembliste par la continuité de l'application d'interprétation ξ . La manière de son utilisation par le modèle, dans son état actuel, a contraint la structure de l'ensemble des formes à se réduire à une structure triviale, c'est à dire la prétopologie discrète.

Cette continuité est traduite par J. C. SIMON et al. par la notion mathématique d'homomorphisme qui relate une ressemblance structurelle entre l'ensemble des représentations et l'ensemble d'interprétation. Pour H. EMPTOZ, la continuité de ξ est présente à travers la notion de transmissibilité du caractère de voisin quand on passe de l'espace des représentation à l'espace des formes.

Dans les méthodes de Reconnaissance des Formes en général, la continuité de la fonction d'interprétation est exprimée à travers le choix d'un "bon" espace de représentation. Ainsi, dans le paradigme statistique, nous trouvons plusieurs méthodes d'extraction et de sélection des attributs qui essaient de donner le meilleur "rendement" de la représentation de l'espace des formes au moindre coût. De même dans le paradigme syntaxique, le "bon" choix de cet espace consiste à fixer, a priori, non seulement l'éventail des primitives pouvant caractériser les formes, mais aussi les relations existantes entre elles.

D'une manière formelle, pour nous un espace de représentation est jugé assez représentatif du problème de reconnaissance à résoudre lorsque :

- deux objets interprétés par une même forme doivent avoir des représentations assez proches dans l'espace des représentations,
- deux objets interprétés par des formes assez proches dans l'espace des formes doivent avoir des représentations relativement proches dans l'espace des représentations,
- deux objets associés à deux formes "loin" l'une de l'autre dans l'espace des formes doivent avoir des représentations nécessairement assez "loin" dans l'espace des représentations.

III DES NOTIONS PRELIMINAIRES POUR L'EXTENSION DU MODELE ENSEMBLISTE

La généralisation du modèle ensembliste vise à dépasser les limitations discutées dans le paragraphe précédent pour permettre en particulier :

- une structuration interclasse (en particulier la mise en valeur de la notion de *similarité* entre classes)
- une approximation plus naturelle de la notion de *forme*, en d'autres termes une structuration des classes qui leur donnent une certaine « épaisseur »
- une autre interprétation de la continuité de l'application d'interprétation ξ , à savoir : les représentations d'objets "assez proches " sont interprétées par des formes "assez proches".

A la prétopologique, outil mathématique principal de formalisation dans le modèle présenté par H. EMPTOZ, nous adjoignons la notion de correspondance évaluée que nous avons définie dans le chapitre précédent. L'introduction d'un tel outil dans le modèle va nous permettre dans un premier temps de définir la notion de "degré d'interprétation" d'un objet, de laquelle émergera une définition de la notion de concept en tant que "collection de formes", puis d'aboutir à la définition d'une structure prétopologique non triviale sur l'ensemble des formes, à travers la notion d'homomorphisme prétopologique.

Pour procéder à la généralisation du modèle nous aurons besoin de formuler des hypothèses suivantes :

L'espace des représentations :

L'espace de représentation que nous considérons pour le modèle est un ensemble de listes formées des caractéristiques des formes et des relations existantes entre elles. Cette notion est assez générale pour englober la plupart des représentations utilisées dans les différentes méthodes de Reconnaissance des Formes. Ainsi, dans le paradigme statistique ou connexionniste la liste sera matérialisée par le vecteur des descripteurs numériques de la forme ; dans l'approche syntaxique la liste sera une chaîne de caractères et dans le paradigme structurel elle pourra être constituée par l'ensemble des nœuds et des arcs d'un graphe et ainsi de suite.

La similarité et l'adhérence :

La notion est non seulement à l'origine de la plupart des processus de décision en Reconnaissance des Formes mais aussi à la structuration des espaces de représentation et d'interprétation. Ainsi la similarité $\langle \text{OBJET}, \text{OBJET} \rangle$ donne une structure à l'espace de représentation, la similarité $\langle \text{CONCEPT}, \text{CONCEPT} \rangle$ donne celle de l'espace d'interprétation et la similarité $\langle \text{OBJET}, \text{CONCEPT} \rangle$ participe au processus de décision. Nous serons amené à utiliser la notion de similarité dans son sens général tel qu'il est présenté ici.

La similarité dans l'ensemble des représentations :

Un ensemble de représentation doit préserver le plus fidèlement possible la structure et l'organisation du monde physique qu'il représente. Partant de là, nous pouvons supposer que les caractéristiques constituant les coordonnées d'un vecteur représentation forment les informations les plus pertinentes de l'objet qu'elles représentent et qu'il existe une structure de similarité entre ces vecteurs qui traduit le plus fidèlement possible (c'est à dire que le taux d'erreur est très faible) la similarité sémantique existantes entre ces objets.

Soit σ cette similarité définie sur l'ensemble des représentations, c'est-à-dire : pour tout x et tout y de R , $\sigma(x,y)$ est bien définie et à valeurs dans $[0,1]$.

A partir de σ on peut définir une relation binaire entre les éléments de l'espace des représentations de la manière suivante : soit δ une valeur convenablement choisie dans $[0,1]$, on construit la relation $R_{\sigma,\delta}$ suivante sur l'ensemble R : $x R_{\sigma,\delta} y \Leftrightarrow \sigma(x,y) > \delta$.

On nomme alors ad_R l'adhérence prétopologique construite à partir de cette relation binaire de la manière suivante :

$$ad_R(\{x\}) = \{x\} \cup \{y \in R, y R_{\sigma,\delta} x\}$$

$$\text{et } \forall A \subset E, ad_R(A) = \bigcup ad_R(\{x\}) \text{ pour tous les } x \text{ de } A$$

En pratique, cette adhérence peut être choisie et adaptée pour chaque application, comme nous le verrons dans la partie expérimentation.

Représentativité de l'ensemble d'apprentissage dans l'ensemble des représentations :

L'ensemble d'apprentissage T doit être très représentatif de l'ensemble des représentation R , dans le sens où on peut atteindre tous les points de R à partir des points de T et de la structure de R .

Pour formuler cette hypothèse dans notre modèle, il suffit de considérer que l'ensemble T est **relativement dense** dans R par rapport à la structure prétopologique ad_R définie plus haut.

$$\forall y \in R, \exists x \in T, \exists n \in \mathbb{N}, \text{ tels que : } y \in ad_R^n(\{x\})$$

Cette hypothèse traduit pour chaque représentation non encore reconnue l'existence au moins un élément d'apprentissage qui peut lui être connecté grâce à un chemin prétopologique associé à ad_R .

Remarque

Nous avons choisi de formuler modéliser cette représentation de T dans R à l'aide de la densité relative plutôt qu'avec la n -densité parce que la densité relative plus adaptée aux spécificités locales de la structure de l'espace des représentations (cf : la notion de fonction structurante au chapitre 1). De plus, la propriété de n -densité est plus forte que la densité relative dans le sens où elle confère à l'ensemble d'apprentissage une propriété

d'uniformité (un même n pour tous les éléments de A). Une telle propriété n'est pratiquement jamais vérifiée dans les méthodes de Reconnaissance des Formes.

IV L'EXTENSION DU MODELE ENSEMBLISTE

IV.1 Prise en compte de l'indétermination dans la reconnaissance

Nous proposons de formaliser la prise en compte de l'indétermination en définissant un taux d'interprétation d'un objet par une forme à l'aide à une *correspondance évaluée* que nous initialisons comme suit.

Notons $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ l'espace des formes (que nous supposons fini), soient R l'ensemble des représentations des objets et T un sous ensemble relativement dense de R , supposé muni d'une structure prétopologique.

On suppose connue pour chaque x de T la fonction suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mu_x : \Omega & \longrightarrow & [0,1] \\ \omega_i & \longmapsto & \mu_x(\omega_i) \end{array}$$

où $\mu_x(\omega_i)$ représente la possibilité qu'à la forme ω_i de reconnaître l'objet dont la représentation est x ; le **degré d'interprétation** de la représentation x par la forme ω_i .

Cette fonction traduit la situation d'un apprentissage non déterministe qui peut être supervisé ou non (ce qui nous intéresse ici ce sont les $\mu_x(\omega_i)$ qui peuvent être soit donnés par un expert soit calculés automatiquement). Elle généralise aussi la situation déterministe, il suffit pour le voir de prendre $\mu_x(\omega_i)=1$ si l'interprétation de x est ω_i et $\mu_x(\omega_i)=0$ sinon.

Dans ce cadre le schéma de l'application d'interprétation change de nature. D'une correspondance unique entre deux ensembles on passe à une multi-application selon le schéma suivant :

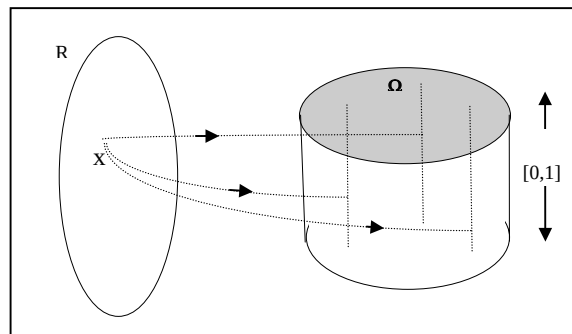


Figure VII.2 : Schéma d'une interprétation évaluée

Notion de forme significative

Soient x une représentation appartenant à T , ω une forme de Ω et δ une valeur réelle dans $[0,1]$, alors la forme ω sera dite (resp. x sera dite) :

- **significative** pour la représentation x (resp. **peut être signifiée** par la forme ω) si et seulement si $\mu_x(\omega) > 0$;
- **pleinement significative** pour la représentation x (resp. **pleinement signifiée** par la forme ω) si et seulement si $\mu_x(\omega) = 1$;
- **δ -significative** pour la représentation x (resp. **δ -signifiée** par la forme ω) si et seulement si $\mu_x(\omega) = \delta$.

Notion de "concept"

On appellera **concept** associé à la représentation x le sous-ensemble des formes significatives pour la représentation x :

$$C_x = \{ \omega \in \Omega, \mu_x(\omega) > 0 \}$$

Un concept est en fait lié à la représentation x dans le sens où x est la « matérialisation », à un certain degré, des formes contenues dans C_x .

Notion de δ -concept

La notion de concept définie plus haut est une notion figée ; dans la mesure où elle ne permet qu'un seul niveau de perception de la forme, le niveau le plus permissif possible ; il suffit à une forme d'être significative pour une représentation x , même avec une signification très faible, pour qu'elle fasse partie du concept de x . Ceci peut être pénalisant, notamment dans le cas où les formes de l'ensemble des interprétations partagent toutes un même descripteur ; elles seront alors significatives, à un certain degré, pour toutes les représentations ; dans ce cas, le seul concept possible est l'ensemble des interprétations tout entier.

C'est la raison pour laquelle nous introduisons la notion de δ -concept qui permet de modéliser plusieurs niveaux de perception de la forme.

On appellera **δ -concept** associé à la représentation x l'ensemble des formes δ -significatives pour la représentation x :

$$C_x(\delta) = \{ \omega \in \Omega, \mu_x(\omega) \geq \delta \}$$

Notion de "seuil de discernement"

Le seuil δ qui peut être choisi suivant le niveau de perception requis sera appelé "*seuil de discernement*".

Le schéma suivant illustre deux niveaux de perception différents.

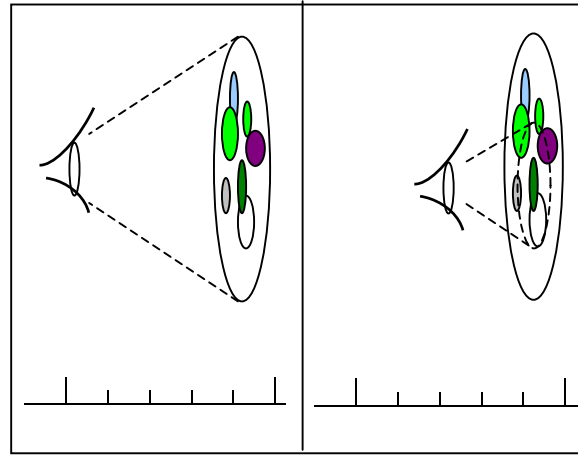


Figure VII.3 : Schématisation de deux niveaux de perception différents

En classification automatique, nous trouvons dans [Piegay-97] la notion de *seuil de significativité d'un intervalle de perception* que nous rapprochons de cette notion de seuil de discernement. Ce seuil est utilisé par PIEGAY dans son algorithme (voir Chapitre III), pour ne prendre en compte que des classifications aboutissant à des classes *humainement significatives*.

Notion de δ -classe d'apprentissage associée à une forme

Soit ω une forme de Ω ; considérons le sous ensemble T_{ω}^{δ} de T de toutes les représentations dont ω est une forme δ -significative c'est-à-dire :

$$T_{\omega}^{\delta} = \{ x \in T \text{ tel que } \omega \in C_x(\delta) \}$$

T_{ω}^{δ} sera appelé la **δ -classe d'apprentissage** de la forme ω . Lorsque δ est sensiblement égale à 0 on dira que T_{ω}^{δ} est une classe d'apprentissage de ω , on la note T_{ω} .

IV.2 Méthode de la Décision Privilégié (DP)

Dans cette méthode, la phase de reconnaissance consiste à généraliser la fonction d'interprétation ξ précédemment établie sur l'ensemble d'apprentissage à l'ensemble des représentations R tout entier.

Dans son modèle ensembliste [Emptoz-83], EMPTOZ est contraint, pour généraliser l'application ξ à R , à obliger le modèle de vérifier l'hypothèse H5

(les $R_i = \text{ad}_R[\xi^{-1}(\omega_i)]$ forment une partition de R).

Le formalisme prétopologique « valué » que nous proposons ici permet de ne pas considérer cette hypothèse et de donner un procédé de généralisation de la fonction ξ d'une manière constructive qui respecte la topologie locale de l'espace des représentations.

Généralisation de l'application d'interprétation

Le problème de généralisation devient le suivant : pour tout élément x de R et tout élément ω de Ω on cherche à définir une quantité pouvant mesurer le degré d'interprétation de x par ω .

Pour évaluer le degré d'interprétation d'un élément x non encore reconnu par une forme ω nous proposons de donner la décision aux éléments les plus représentatifs de ω dans T , de manière à ce que ce degré d'interprétation soit ressenti comme un degré d'acceptation de cet élément par les éléments les plus représentatifs de la classe. On donne alors la décision aux éléments de la δ -classe d'apprentissage T_ω^δ associée à ω . Cette décision sera égale soit à la meilleure interprétation possible pondérée par la similarité, soit à la moyenne des interprétations pondérées par les similarités respectives. Cela se traduit par l'une des formules suivantes :

$$\mu_x(\omega) = \frac{\sum_{y \in T_x^\delta} \mu_y(\omega) \times \sigma(x, y)}{\text{Card}(T_x^\delta)}$$

ou bien :

$$\mu_x(\omega) = \sup_{y \in T_x^\delta} \{ \mu_y(\omega) \times \sigma(x, y) \}$$

Ainsi, le degré d'adhésion d'un élément à une classe est d'autant plus grand qu'il est similaire aux éléments de la δ -classe d'apprentissage associée.

Dès lors que l'on a généralisé le degré d'interprétation à l'espace des représentations tout entier, la notion de δ -classe d'apprentissage peut être généralisée à l'ensemble des représentations R comme suit :

Notion de δ -classe associée à une forme

On appellera **classe** (resp. **δ -classe**) associée à la forme ω l'ensemble des représentations x pour lesquels ω est significative (resp. δ -significative):

$$R_\omega = \{ x \in R, \mu_x(\omega) > 0 \} \text{ (resp. } R_\omega^\delta = \{ x \in R, \mu_x(\omega) \geq \delta \} \text{)}$$

Remarques

Les notions de classe et δ -classe définies ici sont les traces "physiques" de la forme sur l'espace des représentations. Ce sont des sous ensembles de R , elles sont à mettre en parallèle avec les T_i et R_i du modèle initial.

La notion de α -spectre d'une partie B , définie au chapitre précédent, peut être définie dans ce cas par la réunion des α -classes associées aux éléments de B .

$$S_B(\alpha) = \bigcup_{\omega \in B} R_\omega^\alpha$$

IV.3 Structuration prétopologique non triviale de l'espace des formes

Pour construire une nouvelle structure prétopologique sur l'ensemble des formes, autre que la structure discrète, nous allons, dans un premier temps, nous appuyer sur la notion de concept associée à la représentation d'un objet définie plus haut. Dans un deuxième temps nous munirons cet espace d'une autre structure prétopologique obtenue d'une manière théorique mais qui aura l'avantage de mettre en valeur la continuité prétopologique de la fonction d'interprétation.

Nous allons fixer un seuil de discernement δ (dans le cas où il n'y a pas beaucoup de confusion entre formes ce seuil peut éventuellement être nul). Nous définissons comme fonction adhérence l'application CS_δ qui, à chaque forme ω , associe « l'ensemble de toutes les formes δ -significatives pour toutes les représentations signifiées par ω », c'est donc l'application suivante :

$$CS_\delta : P(\Omega) \rightarrow P(\Omega)$$

$$\{\omega\} \mapsto CS_\delta(\{\omega\}) = \bigcup_{x \in T_\omega^\delta} C_x(\delta)$$

$$A \mapsto CS_\delta(A) = \bigcup_{\omega \in A} CS_\delta(\{\omega\})$$

Dans la pratique, δ pourra être un seuil fixé a priori par un expert du domaine étudié, il pourra appartenir à un intervalle $I \subset [0,1]$ jugé significatif pour ce dernier.

On peut vérifier aisément que cette application munit l'ensemble Ω d'une structure

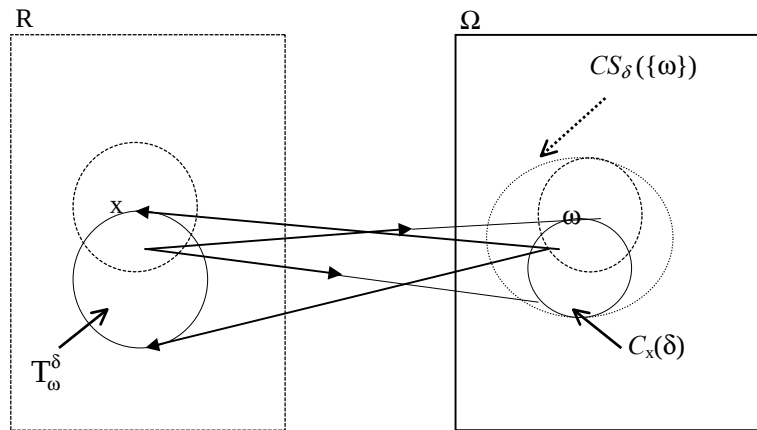


Figure VII.4 : notion de champs sémantique d'une forme

prétopologique de type V_S .

Définition du champ sémantique d'une forme

Pour toute forme ω de Ω l'ensemble $CS_\delta(\{\omega\})$ sera appelé *champ sémantique* de ω de rayon $(1-\delta)$.

La proximité entre formes

On dira que deux formes ω et ω' de Ω sont "v-proches" si et seulement si l'une appartient au champ sémantique de l'autre de rayon $(1-v)$.

Remarques

Dans cette dernière définition nous avons considéré le rayon du champ sémantique égal à $1-\delta$ car plus δ est grand moins il y aura de "flou" autour de ω (δ s'approche de 1, $1-\delta$ s'approche de 0 et la signification est de plus en plus précise). Et inversement : plus δ est petit plus il y aura de "flou" autour de ω (δ s'approche de 0, $1-\delta$ s'approche de 1 et la signification est de plus en plus imprécise).

La définition de cette adhérence sur l'espace des formes peut très bien donner une structure non triviale à cet ensemble et on pourrait définir une similarité entre les formes à partir de cette adhérence. Le seul inconvénient est que cette structure ne reflète pas formellement la continuité de l'application d'interprétation. C'est la raison pour laquelle nous définissons dans le paragraphe suivant une autre adhérence prétopologique sur l'espace des formes.

V LE TRANSPORT CONTINU DE STRUCTURE ENTRE L'ESPACE DES REPRESENTATIONS ET L'ESPACE DES FORMES

Dans cette section nous construisons une structure prétopologique sur l'espace des formes issue de la notion de continuité de la fonction d'interprétation.

Le schéma du modèle initial se présentait comme trois ensembles reliés par deux applications. Dans une telle situation, la continuité de l'application d'interprétation est évidente puisqu'à chaque x de l'ensemble des représentations correspond une seule forme et il suffit alors de considérer la $(1,1)$ -continuité prétopologique de cette application.

Lorsque nous passons en interprétation évaluée, le schéma conceptuel n'est plus le même puisqu'à chaque représentation x va correspondre soit un ensemble de couples (ω, μ) , soit une application μ_x allant de Ω vers $[0,1]$. Dans les deux cas, le problème de continuité change de nature (voir la figure VII.2).

Pour étendre la notion de continuité prétopologique à la situation d'une interprétation évaluée, nous utilisons l'outil que nous avons défini et appelé : *continuité prétopologique évaluée* (la formule (FVI.3)) puisqu'on est exactement dans le cas de la figure (VI.11) du chapitre précédent.

Soit alors δ un seuil de discernement convenablement choisi, la nouvelle structure prétopologique b_δ définie sur Ω est donnée par la formule suivante :

$$ad_{\Omega} (B) = Proj_{\Omega} \left(\mu^{-1}([\delta, 1]) \cap \{ad_R (S_B(\delta)) \times \Omega\} \right)$$

où :

- $Proj_{\Omega}$ est la projection ensembliste sur Ω ,
- μ est la fonction d'interprétation ($\mu(x, \omega) = \mu_x(\omega)$),
- ad_R est l'adhérence prétopologique définie sur l'espace des représentations R
- $S_B(\delta)$ est le δ -spectre de la partie B de Ω dont on définit l'adhérence, c'est à dire l'ensemble des δ -classes associées aux éléments de B .

Analyse de cette nouvelle prétopologie

Cette nouvelle structure prétopologique définie sur l'espace des formes traduit d'une manière formelle la continuité prétopologique de l'application d'interprétation. Nous donnons une illustration dans la figure VII.5 du procédé de construction d'une telle adhérence dans le cas d'une seule forme ω .

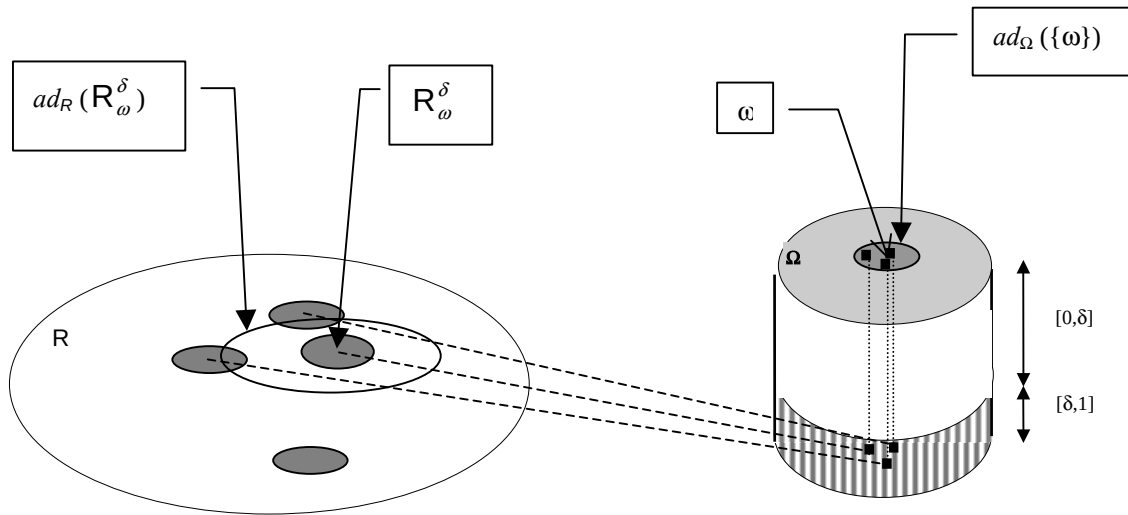


Figure VII.5 : structure prétopologique de l'espace des formes

Dans ce cas le δ -spectre $S_B(\delta)$ est réduit à la δ -classe R_{ω}^{δ} . La continuité de l'application d'interprétation fait de sorte que la construction de l'adhérence se fait pratiquement dans l'espace des représentations et le résultat est récupéré dans l'espace des formes. On part de la δ -classe associée à ω et on cherche toutes les δ -classes qui intersectent son adhérence, et ce sont toutes les formes dont les δ -classes associées vérifient cette propriété qui formeront l'adhérence de $\{\omega\}$.

Cette construction démontre bien le transport continu de la structure prétopologique de l'espace des représentations vers l'espace des formes.

Définition d'une similarité entre formes

Pour définir la notion de similarité entre deux formes ω et ω' nous allons nous baser sur la structure de l'espace des représentations. Mais avant cela nous allons définir la notion d'interprétation conjointe d'une représentation x par ω et ω' .

Notion d'interprétation conjointe :

Soit x une représentation quelconque de R , on appelle *interprétation conjointe* de x par ω et ω' la quantité :

$$\mu_x(\omega \wedge \omega') = \mu_x(\omega) \cdot \mu_x(\omega')$$

Et on définit alors la similarité de ω avec ω' comme le maximum d'interprétations conjointes des deux formes pour toutes les représentations x de : $R_\omega^\delta \cap ad_R(R_{\omega'}^\delta)$,

On pose :

$$\sigma_\Omega(\omega, \omega') = \sup_{x \in R_\omega^\delta \cap ad_R(R_{\omega'}^\delta)} (\mu_x(\omega \wedge \omega'))$$

$$\text{et si } R_\omega^\delta \cap ad_R(R_{\omega'}^\delta) = \emptyset \text{ alors } \sigma_\Omega(\omega, \omega') = 0.$$

Cette similarité est liée à la structure prétopologique de l'espace des formes définie plus haut de la manière suivante :

- si $\omega \in ad_\Omega(\{\omega'\})$ alors ω est similaire à ω' à $\sigma_\Omega(\omega, \omega')$ près,
- et si $\omega \notin ad_\Omega(\{\omega'\})$ alors ω n'est pas similaire à ω' ($\sigma_\Omega(\omega, \omega') = 0$).

La similarité σ_Ω n'est pas symétrique comme nous allons le vérifier dans la partie expérimentation suivante.

VI EXPERIMENTATION

VI. 1. LE CONTEXTE EXPERIMENTAL

Nous allons illustrer le mécanisme du transport continu de la structure prétopologique de l'espace de représentation R vers l'espace des objets Ω par un exemple sur les caractères.

Nous allons utiliser une base de 10560 (=N) caractères imprimés à partir 160 fontes différentes. La base est formée d'exemplaires des caractères usuels latins de 'a' à 'z' minuscule et majuscule, des chiffres arabes de '0' à '9' et des caractères spéciaux ?, !, &, \$. L'ensemble Ω est alors composé de 66 formes :

$$\Omega = \{ 'a', \dots, 'z', 'A', \dots, 'Z', '0', \dots, '9', '?', '!', '&', '$' \}$$

Nous sommes conscients que le nombre de caractères est insuffisant pour une bonne représentation puisque l'on n'a que 160 exemplaires de caractères par classe. Il faudrait donc utiliser un espace de représentation de dimension relativement faible. Mais notre objectif dans cet exemple est d'une part, illustrer le transport continu de la structure prétopologique à l'ensemble des formes Ω et d'autre part démontrer l'avantage que l'on a à utiliser la prétopologie comme outil de description des structures dans des espaces de grandes dimensions. C'est la raison pour laquelle nous utiliserons un espace de grande dimension pour représenter les N caractères de R . De plus, nous allons démontrer que la structure prétopologique construite sur Ω ne change sensiblement pas en fonction des caractéristiques choisies de façon pertinente pour décrire les formes. Cela revient à dire que la

dimension de l'espace de représentation n'a pas beaucoup d'influence sur la structure prétopologique de l'espace des formes.

VI.2 DES CONTRAINTES POUR L'EXPERIMENTATION

Pour notre application nous avons été amené à faire quelques modifications mineures par rapport au modèle présenté plus haut. Ces modifications qui n'ont strictement aucune influence sur l'esprit général de la méthode sont précisées dans les trois points suivants :

Nous partons d'un ensemble d'exemplaires étiquetés selon le modèle initial (dans le sens où chaque exemplaire a une et une seule étiquette, μ est égale à 0 ou 1), puis nous modifions les valeurs de la fonction μ selon les positions respectives des exemplaires dans leurs nuages de points. Nous obtenons ainsi une fonction d'interprétation évaluée dans $[0,1]$.

Nous considérons dans cet exemple que l'espace d'interprétation R est réduit à la base d'apprentissage T . Cette restriction est due au seul fait que nous ne disposons pas de nombre suffisant d'exemplaires qui nous permettraient de considérer un ensemble test supplémentaire à l'ensemble d'apprentissage. Ainsi, nous ne testons pas notre méthode de décision privilégiée (DP) pour la reconnaissance. Cette contrainte n'est pas trop gênante puisqu'on considère que l'ensemble d'apprentissage est relativement dense dans l'espace de représentation.

Nous travaillerons donc dans les classes d'apprentissage.

L'adhérence que nous considérons sur l'espace des représentations R sera adaptative. Elle s'adaptera naturellement à la structure locale avoisinant chaque point (la similarité). Elle dépendra naturellement aussi de l'étiquette du point. Cela illustre bien la notion de dualité : processus ascendant/ processus descendant. Elle sera plus riche que l'adhérence proposée plus haut et participera mieux au transport continu de la structure prétopologique à l'espace des formes.

La Représentation

La description que nous allons utiliser consiste à considérer la représentation matricielle des caractères (en tant qu'image binaire), normalisée en hauteur et largeur à une matrice 12×8 dont les valeurs sont comprises dans l'intervalle $[0,1]$. Dans ce cas l'espace de représentation vérifie : $R \subset [0,1]^{96}$.

Cette représentation permet d'illustrer visuellement la nouvelle structure prétopologique de Ω et montre la fiabilité des outils prétopologiques dans la description des formes dans les espaces de très grandes dimensions malgré le manque d'observations.

La base de caractères est constituée d'images binaires de taille différente.

Le calcul de la représentation d'une forme de caractère s'effectue par le calcul d'un changement de résolution avec un recouvrement par convolution avec une fonction Gaussienne de taille appropriée à la normalisation spatiale de l'image (figure VII.6).

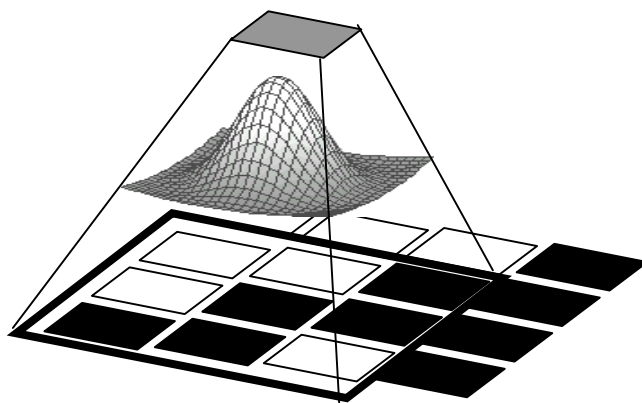


Figure VII.6 : Normalisation spatiale d'une image binaire par recouvrement de Gaussienne

Comparée à un changement de résolution binaire, notre méthode de changement de résolution spatiale multivaluée, permet de conserver, en chaque point de la matrice de caractéristiques, l'information locale de l'image originale. La figure VII.7 donne quelques exemplaires de W imprimés avec des polices de caractères et des styles différents ainsi que leurs représentations normalisées en haut à droite de chaque caractère.



Figure VII.7 : Des exemplaires de W et leurs représentations normalisées 12x8 d'éléments de [0,1]

Choix de l'adhérence sur R

Soit k un ordre fixé au préalable (que nous prendrons dans la suite égal à 2), et soit pour toute représentation x et pour toute forme ω , $p(k, x, \omega)$ le $k^{\text{ième}}$ élément le plus proche de x dont l'étiquette est égale à ω .

On définit ponctuellement l'adhérence par :

$$\text{ad}_{\omega, k}(\{x\}) = \{ y \in R / x \text{ est plus proche de } y \text{ que de } p(k, x, \omega) \}$$

La construction de cette adhérence, dépendante de ω , consiste à regrouper successivement les éléments de R les plus proches de x jusqu'à ce que l'on trouve le $k^{\text{ième}}$ élément d'étiquette ω .

Implémentation

En pseudocode la fonction qui retourne l'adhérence d'un élément de R s'écrit:

```

Fonction ad( $x \in R$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ):ensemble;
Nbvoisin  $\leftarrow 0$ ;
E : Ensemble = { $x$ };
Y : élément;
Début
Répéter
    Trouver l'élément  $y$  le plus proche de  $x$ ;
    Si Etiquette( $y$ ) =  $\omega$  alors nbvoisin=nbvoisin+1;
    E = E  $\cup$  { $y$ };
Jusqu'à ce que nbvoisin= $k$ ;
Ad=E;
fin
  
```

En pratique pour éviter de chercher exhaustivement à chaque fois les plus proches voisins d'un élément x de R , on précalcule pour tout x de R les 200 plus proches éléments et on conserve leurs distances par rapport à x et leurs identités (200 dépasse nettement le nombre d'exemplaires de formes de caractères par classe de caractères). Pour notre application nous avons obtenu de bons résultats avec $k=2$ cela permet d'avoir de nombreuses intersections non vides entre les classes et une bonne modélisation des éléments frontières ainsi que les éléments de la δ -classe.

On obtient la fonction adhérence d'un ensemble A d'exemplaires par la réunion des adhérences de chaque point élémentaire contenu dans l'ensemble A . L'adhérence est supposée donc de type V_S . Le pseudocode donne immédiatement :

```

Fonction adhérence(A:ensemble,  $\omega \in \Omega$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ):ensemble;
E : Ensemble =  $\emptyset$ ;
Y : élément;
Début
Pour tous les éléments  $y$  de A
    faire E = E  $\cup$  ad( $y$ ,  $\omega$ ,  $k$ );
Fin_Pour
adhérence=E;
Fin;
  
```

Cette adhérence permet de calculer une dissimilarité $D(x, \omega)$ d'un élément x avec une forme ω quelconque. On prendra comme mesure de dissimilarité entre x et ω , la plus grande dissimilarité mesurée entre x et un élément quelconque de $\text{ad}_{\omega, k}(\{x\})$ qui ne soit pas de la classe de ω .

$$D(x, \omega) = \text{Max}\{d_R(x, y) / y \in \text{ad}_{\omega, k}(\{x\}) \text{ et } \text{Etiquette}(y) \neq \omega\}$$

Calcul de la fonction d'interprétation évaluée $\mu(x, \omega)$

Au départ notre base d'apprentissage est étiquetée par les 66 formes de Ω . A partir de cet étiquetage nous allons construire la fonction d'interprétation évaluée.

On estime la fonction d'interprétation évaluée $\mu(x, \omega)$ de deux manières différentes.

La première μ_1 est obtenue grâce à la fonction de dissimilarité D définie plus haut. Nous évitons dans cet exemple d'utiliser la notion de distance, certes très utile grâce aux bonnes propriétés qui permettent de produire une norme, mais qui demeure malheureusement trop rare et contraignante dans la pratique de la Reconnaissance de Formes. Puisque D est normalisée dans $[0,1]$ on peut poser :

$$\mu_1(x, \omega) = 1 - D(x, \omega)$$

Le pseudocode de la fonction μ_1 est donné par l'algorithme suivant :

```

Fonction mu1(x ∈ R, ω ∈ Ω) : reel;
Y : élément
dmax ∈ IR = 0
  Début
Pour tous les éléments y / y ∈ ad(x, ω, 2) et y ∉ Rω
    Si d(x, y) > dmax
      alors dmax = d(x, y)
    Fin_Si
  Fin_Pour
  mu1 = 1 - dmax
Fin

```

La seconde manière est basée sur la notion de fonction structurante. La fonction que nous choisissons consiste à mesurer le nombre d'éléments de l'adhérence de x qui ne sont pas de la classe de ω . Nous notons cette fonction Ψ , nous avons donc :

$$\Psi(x) = \text{Card}\{y \in \text{ad}_{\omega,k}(\{x\}) \text{ et } \text{Etiquette}(y) \neq \omega\}$$

Plus l'adhérence de x possède d'éléments qui n'ont pas pour étiquette ω , moins bonne est l'interprétation de x par la classe ω . On définit alors la fonction d'interprétation μ_2 suivante :

$$\mu_2(x, \omega) = 1 - \text{Norme}(\Psi(x))$$

La fonction *Norme* normalise les valeurs des cardinaux entre $[0,1]$ de façon à préserver la définition précédemment décrite d'une fonction d'interprétation évaluée. Nous avons testé plusieurs normalisations possibles¹ dont la plus simple consiste à borner les valeurs trop élevées par rapport à un cardinal maximum et à retourner les valeurs inférieures divisées par cette valeur maximale. Connaissant le nombre d'éléments moyens (160) par classe nous avons utilisé une valeur heuristique comprise entre $[20..40]$.

```

Fonction norme(card ∈ IN) : reel;
Début
Si card > Card_maximum
Alors
  norme = 1
Sinon
  norme = card / card_maximum;
Fin_Si
Fin

```

Nous voulons que cette fonction d'interprétation μ_2 retourne une valeur proche de 1 si x est étiqueté initialement par ω . Il ne faut donc pas faire intervenir dans le calcul de $\mu_2(x, \omega)$ les éléments d'étiquettes ω . Ainsi si l'adhérence ne contient pas d'éléments de classe différente, la fonction structurante qui aurait retourné la valeur 3 (l'élément central x , et ses 2 plus proches voisins de même classe) sera forcée à la valeur 0.

```

Fonction mu2(x ∈ R, ω ∈ Ω) : reel;
card ∈ IN = 0;
Y : élément
Début
Pour tous les éléments y / y ∈ ad(x, ω, 2) et y ∉ Rω
  faire
    card = card + 1;
  Fin_Pour
  mu2 = 1 - normalise(card);

```

¹ Les normalisations testées sont basées sur l'idée de bijections continues entre intervalles de R.

fin

Calcul des δ -classes R_ω^δ

On calcule les éléments δ -signifiés par la classe ω (δ -classes). Ces sous-ensembles regroupent les exemplaires les plus représentatifs des classes de caractères.

$$R_\omega^\delta = \{ x \in R, \mu(x, \omega) > \delta \}.$$

En pseudocode la fonction s'écrit :

```

Fonction  $\delta\_classe(\delta \in [0,1], \omega \in \Omega) : Ensemble;$ 
 $x$  : élément;
 $E$  : Ensemble =  $\emptyset$ ;
Début
Pour tous les éléments  $x$  de  $R$ 
Faire
    Si  $\mu(x, \omega) > \delta$ 
    Alors  $E = E \cup \{x\}$ ;
Fin_Pour
 $\delta\_classe = E$ ;
fin

```

Calcul de $\mu^{-1}([\delta, 1])$

Pour calculer $\mu^{-1}([\delta, 1])$, on cherche les éléments x de R , quelque soit la classe de caractère ω , qui ont une fonction d'interprétation supérieure à δ , (dans la théorie on devrait retenir les couples (x, ω) ce qui n'est pas utile lors de l'implémentation). En fait, on calcul tout simplement la réunion de toutes les δ -classes déterminées précédemment.

```

Fonction  $\mu\_inverse(\delta \in [0,1]) : Ensemble;$ 
 $E$  : Ensemble =  $\emptyset$ ;
Début
    Pour toutes les classes  $\omega$  de  $\Omega$ 
    Faire
         $E = E \cup \delta\_classe(\delta, \omega)$ ;
    Fin_Pour
 $\mu\_inverse = E$ ;
fin

```

Le transport continu de la structure prétopologique

Enfin, nous donnons l'algorithme général pour décrire le transport continu de la structure prétopologique de l'espace des représentation R vers l'espace des formes Ω afin de construire ad_Ω à partir de ad_R .

Nous rappelons que l'adhérence d'une forme ω de Ω consiste à regrouper les formes ω' correspondantes à l'intersection non vide entre chacune des δ -classes avec l'adhérence de la δ -classes de ω .

Soit l'intersection de $\{ad_R(S_B(\delta)) \times \Omega\}$ avec l'ensemble des éléments δ -signifiés par toute classe confondue : $\mu^{-1}([\delta, 1])$. Pour une partie B de Ω , on a

$$ad_\Omega(B) = \text{Proj}_\Omega \left(\mu^{-1}([\delta, 1]) \cap \{ad_R(S_B(\delta)) \times \Omega\} \right)$$

Nous allons implémenter une fonction **adherence $\Omega(\omega, \delta)$** qui retourne l'adhérence précédemment appelée de la forme ω .

Le pseudocode de cette fonction est le suivant :

```

fonction adherence $\Omega$  ( $\omega \in \Omega, \delta \in [0,1]$ ) : ensemble $\Omega$ ;
 $\mu\_1, S_b, adherence\_Sb$  : Ensemble =  $\emptyset$ ;
intersection : Ensemble  $\times$  ensemble $\Omega$  =  $(\emptyset, \emptyset)$ ;
Début

```

```

Mu_1=mu_inverse( $\delta$ );
Sb =  $\delta$ _classe( $\delta, \omega$ );
Adhérence_Sb = adherence(Sb,  $\omega, 2$ );
Pour tous les x communs à Adhérence_Sb et mu_1
Faire
    Intersection = intersection  $\cup \{(x, \omega)\}$ 
Fin_Pour ;
adherence $\Omega$  =  $\emptyset$ ;
Pour tous les elements (x,  $\omega$ ) de intersection
Faire
    adherence $\Omega$ = adherence $\Omega \cup \{\omega\}$ 
Fin_Pour
Fin

```


Résultats

$\text{ad}\{!\}=\{!\}$	$\text{ad}\{\$ \}=\{\$ \}$	$\text{ad}\{\& \}=\{\& \}$
$\text{ad}\{0\}=\{0, C, D, O, Q, a, c, e, o\}$	$\text{ad}\{1\}=\{1, I, J, f, i, j, l, t\}$	$\text{ad}\{2\}=\{2, z\}$
$\text{ad}\{3\}=\{3\}$	$\text{ad}\{4\}=\{4\}$	$\text{ad}\{5\}=\{5\}$
$\text{ad}\{6\}=\{6, 8\}$	$\text{ad}\{7\}=\{7, T, Z\}$	$\text{ad}\{8\}=\{5, 8, B, a\}$
$\text{ad}\{9\}=\{9\}$	$\text{ad}\{?\}=\{?\}$	$\text{ad}\{A\}=\{A\}$
$\text{ad}\{B\}=\{5, 8, B\}$	$\text{ad}\{C\}=\{C, G, c, e\}$	$\text{ad}\{D\}=\{D, o\}$
$\text{ad}\{E\}=\{E, F\}$	$\text{ad}\{F\}=\{E, F\}$	$\text{ad}\{G\}=\{C, G\}$
$\text{ad}\{H\}=\{H, K, U\}$	$\text{ad}\{I\}=\{1, I, J, i, l, t\}$	$\text{ad}\{J\}=\{I, J, j\}$
$\text{ad}\{K\}=\{K\}$	$\text{ad}\{L\}=\{L\}$	$\text{ad}\{M\}=\{M\}$
$\text{ad}\{N\}=\{N\}$	$\text{ad}\{O\}=\{0, O, Q, a, e, o\}$	$\text{ad}\{P\}=\{P, p\}$
$\text{ad}\{Q\}=\{Q\}$	$\text{ad}\{R\}=\{R\}$	$\text{ad}\{S\}=\{S, s\}$
$\text{ad}\{T\}=\{7, T\}$	$\text{ad}\{U\}=\{U, u\}$	$\text{ad}\{V\}=\{V, v\}$
$\text{ad}\{W\}=\{W, w\}$	$\text{ad}\{X\}=\{X, x\}$	$\text{ad}\{Y\}=\{Y, v, y\}$
$\text{ad}\{Z\}=\{Z, z\}$	$\text{ad}\{a\}=\{O, a, o\}$	$\text{ad}\{b\}=\{b, h\}$
$\text{ad}\{c\}=\{C, c\}$	$\text{ad}\{d\}=\{a, d\}$	$\text{ad}\{e\}=\{8, e, o\}$
$\text{ad}\{f\}=\{f, l, r\}$	$\text{ad}\{g\}=\{g\}$	$\text{ad}\{h\}=\{b, h\}$
$\text{ad}\{i\}=\{I, i, j, l\}$	$\text{ad}\{j\}=\{1, I, J, i, j, l\}$	$\text{ad}\{k\}=\{k\}$
$\text{ad}\{l\}=\{1, I, J, X, f, i, j, l, t, x, z\}$	$\text{ad}\{m\}=\{M, m\}$	$\text{ad}\{n\}=\{N, n\}$
$\text{ad}\{o\}=\{0, C, O, a, o\}$	$\text{ad}\{p\}=\{P, p\}$	$\text{ad}\{q\}=\{q\}$
$\text{ad}\{r\}=\{f, r, t\}$	$\text{ad}\{s\}=\{\$, S, s\}$	$\text{ad}\{t\}=\{1, f, l, r, t\}$
$\text{ad}\{u\}=\{H, U, n, u\}$	$\text{ad}\{v\}=\{V, Y, v, y\}$	$\text{ad}\{w\}=\{W, w\}$
$\text{ad}\{x\}=\{I, X, l, x, z\}$	$\text{ad}\{y\}=\{V, Y, v, y\}$	$\text{ad}\{z\}=\{2, Z, l, z\}$

Commentaires

La nouvelle structure d'adhérence dans Ω illustre la notion de "proximité" des formes relativement à celle des représentations observées dans R . Ainsi on trouve naturellement que la classe 'Z' est "proche" de celle de 'z' et celle de '2'. Le fait que $\text{ad}\{\&\}=\{\&\}$ signifie que seul la classe des '&' est proche d'elle-même, en d'autres termes que cette classe est isolée par rapport aux autres classes car elle a une forme très spécifique que n'ont pas les autres formes de caractères.

Dans cet exemple nous avons simplifié le codage en prenant tous les éléments de la base d'apprentissage T comme des éléments de l'espace de représentation R ; nous avons implicitement calculé des δ -spectres $S_B(\delta)$ et non des δ -classes R_ω^δ car nous avons plusieurs représentations différentes donc plusieurs classes dans l'espace R pour la même forme de caractère. Par exemple 'g' et 'g' sont deux représentations différentes du même caractère G minuscule donnant lieu à des classes multiples dans R .

On constate enfin que les adhérences ne sont pas symétriques puisque on a par exemple :

'e' $\in \text{ad}(\{ 'C' \})$ car $\text{ad}(\{ 'C' \})=\{ 'C', 'G', 'c', 'e' \}$,
et 'C' $\notin \text{ad}(\{ 'e' \})$ car $\text{ad}(\{ 'e' \})=\{ '8', 'e', 'o' \}$.

Cela signifie que les formes de la lettre 'e' minuscule sont plus similaires de celles représentant la lettre 'C' majuscule que l'inverse.

La structure prétopologique trouvée dans Ω est le reflet de la structure des classes dans l'espace de représentation R . Donc les adhérences trouvées dans Ω sont plus significatives que celles que l'on pourrait trouver statistiquement. En effet on pourrait mesurer un taux de confusion entre les classes prises deux à deux avec une simple règle de décision comme celle des k-ppv. Chaque élément de cette table de confusion $C[\omega_i, \omega_j]$ représente le nombre d'éléments d'une base de test de la classe ω_i qui ont été reconnus ω_j et réciproquement. Les valeurs diagonales sont généralement proches de 1 ($C[\omega_k, \omega_k] \cong 1$). Si on seuillait cette table de confusion, nous obtiendrions une relation de proximité entre les classes au sens classique des k-ppv qui pourrait ressembler à celles que nous avons trouvées par construction mathématique. On pourrait construire dans Ω l'adhérence suivante :

$\omega_i \in \text{ad}(\omega_j)$ et
si $C[\omega_i, \omega_j] > \varepsilon$ alors $\omega_j \in \text{ad}(\omega_i)$

Figure VII.10 :Des adhérences difficiles à expliquer visuellement

Notre nouvelle structure prétopologique sur Ω qui traduit en fait les relations de voisinages entre les classes, est un outil qui permet de comprendre d'une manière plus simple la topologie des classes dans un espace de représentation de grande dimension.

Choix d'une fonction d'interprétation valuée d'un élément x de R par une classe ω de Ω

qui ne s'explique pas visuellement.

Quand on regarde les formes (fig VII.10) obtenues lors du calcul des adhérences, on s'aperçoit que c'est le choix de la représentation matricielle des caractères qui est en cause. L'erreur vient surtout de la normalisation spatiale qui tend à rendre identique la représentation matricielle de caractères très différents. Nous aurions pu utiliser une représentation plus efficace pour la reconnaissance des caractères. Par exemple celle étudiée successivement par F. LEBOURGEOIS puis par J.L. HENRY dans [LeBourgeois-91], [Henry-96].

Dans ce chapitre nous avons présenté un modèle prétopologique pour la Reconnaissance des Formes qui tente d'approcher les principes généraux d'un processus de reconnaissance, dans le sens où il permet de modéliser des situations non déterministe. Il permet aussi de donner une structure prétopologique non triviale de l'espace des formes. Une telle structure reflète d'une manière plus significative, donc plus naturelle, les relations inter-classes qui sont difficilement interprétables lorsqu'on se place dans l'espace de représentation. Cette structure est obtenue mathématiquement grâce à la notion de transport continu de la structure prétopologique de l'espace de représentation vers l'espace des formes. Ceci montre en même temps la souplesse et la force de la Prétopologie : les résultats obtenus théoriquement sont calculables et se traduisent par des algorithmes qui donnent des résultats pratiques satisfaisants.

D'autres applications sont bien sûr envisageables pour notre modèle, en particulier dans les domaines où la reconnaissance ne peut pas donner des classes nettement séparées ; nous pensons notamment au traitement automatique des documents. Dans ce domaine nous ne savons encore pas déterminer exactement les structures logiques ; nous savons bien sûr qu'elles sont corrélées avec les structures physiques (qui sont elles à peu près identifiables) ...

Conclusion

Les travaux de recherche que nous avons présenté dans ce mémoire s'articulent autour du couple " Prétopologie et Reconnaissance des Formes". Ces deux disciplines peuvent paraître bien différentes, la première est une théorie mathématique abstraite et la seconde fait aujourd'hui référence à de nombreuses applications issues du domaine des sciences de l'ingénieur.

Les motivations de notre démarche sont orientées, dans un premier temps, vers la mise en évidence des liens théoriques et pratiques entre la reconnaissance de formes et la prétopologie ; dans un second temps, vers l'utilisation de la continuité prétopologique, assez peu étudiée jusqu'à présent, pour proposer un modèle prétopologique réaliste pour la reconnaissance des formes.

La reconnaissance des formes est omniprésente dans notre vie quotidienne : chaque jour de nouveaux services nous sont rendus grâce à des " machines " à reconnaître. Les chercheurs doivent faire face d'une manière continue à des problèmes toujours nouveaux car la demande évolue, et les techniques de cette discipline sont de plus en plus nombreuses et diversifiées.

Le souci de modéliser demeure plus que jamais légitime, devant cette tour de Babel qu'est devenue la reconnaissance des formes.

Modéliser, mettre à jour des cadres méthodologiques de référence, trouver des familles de méthodes sont des actions qui sont toujours d'actualité même si le rêve du cadre unique n'existe plus. La prétopologie a donc toujours sa place en reconnaissance de formes, c'est le postulat que nous avons tenté d'éclairer dans cette thèse.

Un problème de reconnaissance des formes est un problème de recherche d'information dans l'espace de représentation et l'espace d'interprétation, et nous croyons, à la suite de ceux qui nous ont précédé que certains outils provenant des mathématiques (dont la prétopologie !) sont nécessaires pour formaliser les structures de ces espaces.

Les liens entre la reconnaissance de formes et la prétopologie s'avèrent être nombreux mais nous pouvons les regrouper en deux familles principales :

Liens fondamentaux : ils sont représentés par les relations qui existent entre la notion de forme et l'application d'adhérence, la représentativité de l'ensemble d'apprentissage et la notion de densité prétopologique, la perception multi-échelle et les relations de finesse entre structures prétopologiques, la transmissibilité de la proximité dans l'interprétation et la continuité prétopologique d'une application, ...