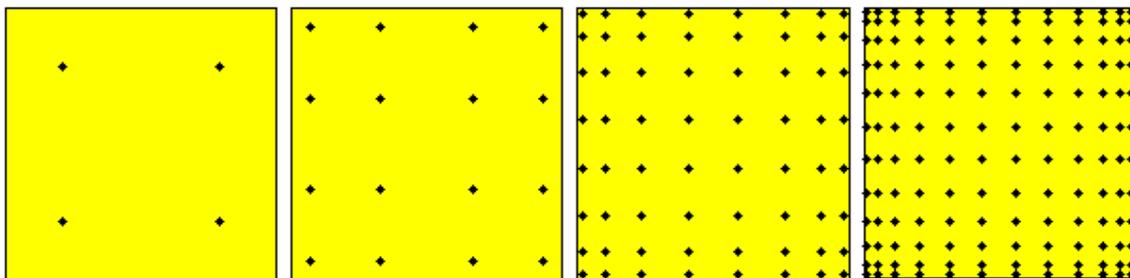


# Techniques d'intégration

## 1 Calcul numérique des intégrales $\iint 1/r.dS$ et $\iint \mathbf{n.r}/r^3.dS$ avec points de Gauss

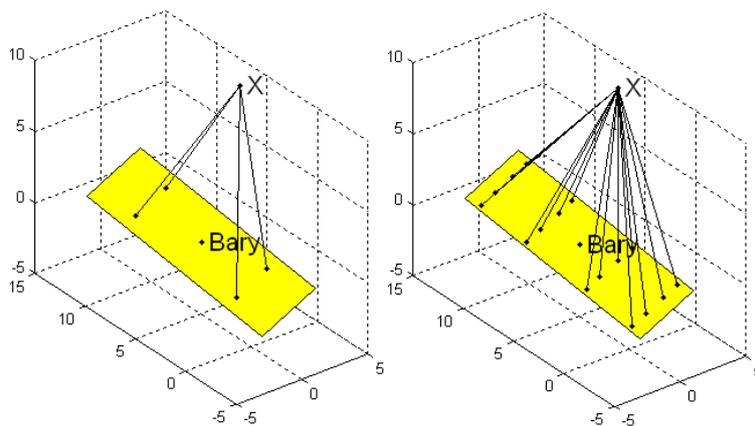
Pour les calculs d'intégrales, on peut utiliser la méthode de collocation avec points de Gauss (ou la méthode de quadrature de Gauss). Cette technique issue de l'analyse numérique en mathématique permet de calculer la valeur numérique d'une intégrale par une somme pondérée prise dans un certain nombre de points du domaine d'intégration. La figure A.1 montre des exemple de répartition de ces points appelés points de Gauss sur des surfaces rectangulaires.



**Figure A.1** – Répartition des points de Gauss sur un carré de référence en 2D de côté 2 et de centre  $[0;0]$  pour 4, 16, 64 ou 144 points

L'emplacement des nœuds est déterminé par les  $n$  racines du  $n$ ième polynôme orthogonal associé à la formule de quadrature. Cette méthode de quadrature est exacte pour un polynôme de degré  $2N_g - 1$  si  $N_g$  est le nombre de points de Gauss.

Dans notre cas, le calcul de l'intégrale  $\iint 1/r.dS$  avec  $r$ , la distance entre  $X$ , un point quelconque de l'espace, et la surface rectangulaire  $S$  de barycentre  $Bary$  est illustré à la figure A.2. Cette technique d'intégration avec  $N_g$  points de Gauss fait intervenir plusieurs coefficients :  $X_g$  les coordonnées des points des points de Gauss,  $w$  appelé poids de Gauss,  $\Delta$  le déterminant du jacobien de la transformation géométriques qui transforme les coordonnées des points de Gauss



**Figure A.2** – Calcul de  $\iint 1/r.dS$  en un point X de l'espace avec 4 ou 16 points de Gauss

du carré de référence à ceux du rectangle en trois dimensions. Avec ces notations, le calcul intégral peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{dS}{r} &= \sum_{i=1}^{N_g} \frac{w(i) \cdot \Delta(i)}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_g(i)\|} \\ \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} / r^3 \cdot dS &= \sum_{i=1}^{N_g} \frac{w(i) \cdot \Delta(i) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_g(i))}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_g(i)\|^3} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

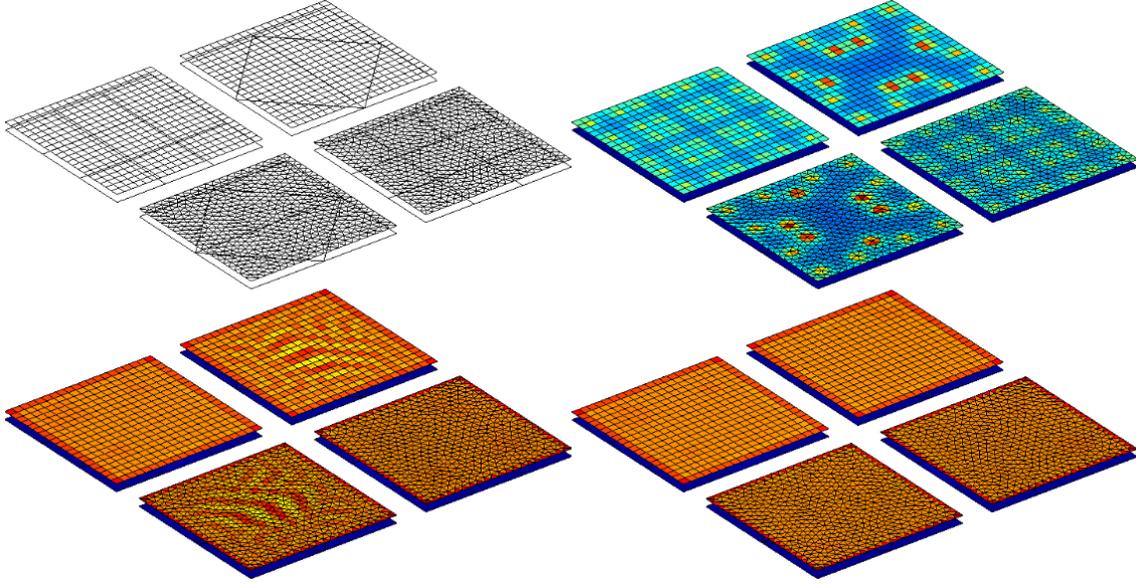
Plus le nombre de points de Gauss est élevé, plus la précision du calcul de l'intégrale est grande. Les avantages de cette technique sont la rapidité du temps de calcul, la bonne précision des résultats et la vectorisation facile (en vue de la construction d'une matrice d'interaction).

En ce qui concerne les triangles, on procède exactement de la même façon.

## 2 Calcul analytique des intégrales $\iint 1/r.dS$ et $\iint \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} / r^3 \cdot dS$

Dans le cas de « mauvais » maillages (par exemple, des grands éléments en vis-à-vis très proches), il se peut que les calculs numériques des intégrales soient peu précis. Par exemple, comme le montre la figure A.3, dans le cas particulier où un petit élément (triangulaire ou rectangulaire) est situé à proximité du point de Gauss d'un gros élément, la précision du coefficient d'interaction calculé numériquement peut être très faible car la distance  $r = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_g(i)\|$  est très petite par rapport à la taille du gros élément. Et par conséquent, la précision de la résolution de ce problème (ie : la répartition des charges) se trouve également perturbée. Comme le montre la figure A.3, on retrouve la signature des points de Gauss des gros éléments sur la répartition des charges. Avec un grand nombre de points de Gauss par élément triangulaire ou rectangulaire (144), les erreurs numériques sont évitées. On comprend que l'utilisation de formules analytiques peut améliorer dans certains cas la précision des calculs des coefficients d'interaction.

Les mêmes phénomènes sont observés concernant l'intégration des coefficients en champ normal



**Figure A.3** – Comparaison de la répartition des charges sur 8 plaques conductrices parallèles très proches 2 à 2 (de potentiels +1 V en haut et -1 V en bas), obtenues par intégrations numériques ou analytiques. En haut à gauche : maillages des plaques ; en haut à droite : intégration numérique avec 3 ou 4 points de Gauss (triangle ou rectangle) ; en bas à gauche : intégration numérique avec 144 points de Gauss ; en bas à droite : intégration analytique

pour des interfaces diélectriques-diélectriques.

Dans les sections suivantes, on détaillera les différentes formulations analytiques pour calculer les intégrales  $\iint 1/r.dS$  et  $\iint \mathbf{n.r}/r^3.dS$  pour plusieurs géométries uniformément chargées.

## 2.1 Calcul analytique de $\iint 1/r.dS$ sur un polygone

Pour le cas général d'un polygone uniformément chargé, on peut utiliser la formule développée par Wilton et al. [34]. Cette intégrale est calculée à partir de sommes de potentiels créés par chacune des  $N_a$  arêtes définissant le contour du polygone avec les notations décrites dans la figure A.4. Voici la formule utilisée pour calculer le potentiel d'un polygone de charge surfacique uniforme  $q/S$  composé de  $N_a$  arêtes :

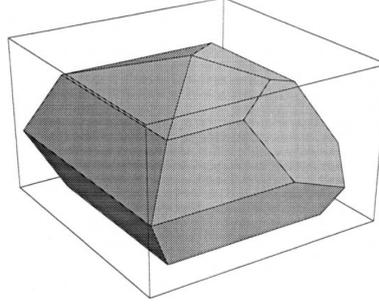
$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{S} \sum_{i=1}^{N_a} \hat{\mathbf{P}}_i^0 \cdot \hat{\mathbf{u}}_i \left[ P_i^0 \log \frac{R_i^+ + l_i^+}{R_i^- + l_i^-} - |d| \right. \\ \left. \times \left( \tan^{-1} \frac{P_i^0 l_i^+}{(R_i^0)^2 + |d| R_i^+} - \tan^{-1} \frac{P_i^0 l_i^-}{(R_i^0)^2 + |d| R_i^-} \right) \right] \quad (\text{A.2})$$

On ne détaillera pas ici les calculs des différentes grandeurs utilisées dans l'équation A.2 (détaillés dans [34]). On peut utiliser cette formule dans les cas particuliers des rectangles ou des triangles. En pratique, on utilise cette formule uniquement pour les triangles car on dispose d'une formule plus adaptée et plus rapide à calculer pour les rectangles.



éventuellement des coefficients d'aire valant +1 ou -1 dans le cas où l'un des projetés se situe à l'extérieur du rectangle comme dans la figure A.9 (méthode décrite un peu plus loin au 4).

### 2.3 Calcul analytique de $\iint \mathbf{n.r}/r^3.dS$ sur un polyèdre



**Figure A.6** – Polyèdre quelconque

Pour les coefficients en champ normal, on dispose d'une formulation très générale pour calculer le champ (ou le champ normal) créé par un polyèdre quelconque présenté figure A.6 [35]. Comme pour l'équation A.2, cette formule somme les influences de chacune des  $N_a$  arêtes des  $N_f$  faces du polyèdre :

$$En(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{f=1}^{N_f} \mathbf{T}_f \mathbf{Q}_f \cdot \mathbf{n}_f \quad (\text{A.4})$$

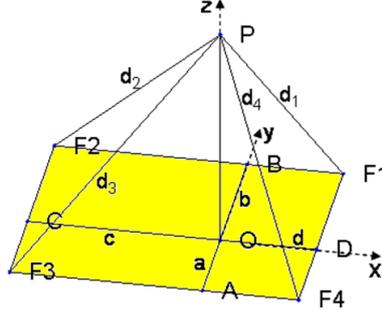
$$\mathbf{Q}_f = \sum_{\substack{p=1, \\ x_{a,p+1} \neq x_{a,p}}}^{N_a} \mathbf{q} [x_{a,p}, (y_{a,p+1} - y_{a,p}) / (x_{a,p+1} - x_{a,p}), \\ (x_{a,p+1} y_{a,p} - x_{a,p} y_{a,p+1}) / (x_{a,p+1} - x_{a,p}), z_a] \quad (\text{A.5})$$

avec  $\mathbf{T}_a$  une matrice de rotation de passage pour passer dans un repère local lié à la face d'indice  $f$ ,  $\mathbf{Q}_a$  est l'influence totale de la face  $a$ . On explicitera pas ici le calcul de la grandeur  $\mathbf{q}$  dans la formule précédente (détaillé dans [35]).

On utilisera cette formule pour le calcul des coefficients en champ normal entre triangles quelconques, et pour les rectangles, on dispose d'une formule plus adaptée et plus rapide.

### 2.4 Calcul analytique de $\iint \mathbf{n.r}/r^3.dS$ sur un rectangle

Cette fois-ci, on se place dans le cas général d'un point de calcul quelconque de l'espace (figure A.7). Durand a développé la formule suivante pour obtenir le champ créé par un rectangle de



**Figure A.7** – Configuration pour le calcul du champ en un point  $P$  créé par un rectangle  $F1F2F3F4$  uniformément chargé avec l'utilisation du projeté orthogonal  $O$  de  $P$  sur le rectangle définissant 4 rectangles

charge surfacique uniforme  $q/S$  [36] :

$$\begin{cases} E_x(P) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \log \left[ \frac{(d_4 + \overline{AO})(d_2 + \overline{BO})}{(d_3 + \overline{AO})(d_1 + \overline{BO})} \right] \\ E_y(P) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \log \left[ \frac{(d_2 + \overline{CO})(d_4 + \overline{BO})}{(d_3 + \overline{CO})(d_1 + \overline{BO})} \right] \\ E_z(P) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{db}{zd_1} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{bc}{zd_2} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{ca}{zd_3} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{ad}{zd_4} \right) \right] \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

On dispose désormais de toutes les formulations intégrales pour calculer numériquement ou analytiquement les coefficients d'interaction en potentiel et en champ normal des surfaces planes triangulaires, rectangulaires et même quelconques.

### 3 Calcul numérique des intégrales $\iint(\iint 1/r.dS)dS'$ et $\iint(\iint \mathbf{n.r}/r^3.dS)dS'$ avec points de Gauss

Pour le calcul numérique des intégrales  $\iint(\iint 1/r.dS)dS'$  et  $\iint(\iint \mathbf{n.r}/r^3.dS)dS'$  (utilisée avec la méthode de Galerkin), on procède comme à la section 1 en remplaçant la distance  $r$  par celle entre les points de Gauss de la surface  $S'$  où l'on calcule le coefficient d'interaction et les points de Gauss de la surface chargée  $S$ . Ainsi, ces intégrales doubles sont calculées à l'aide d'une double somme de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \iint_{S'} \left( \iint_S \frac{dS}{r} \right) dS' &= \sum_{i=1}^{N_g} w(i) \cdot \Delta(i) \sum_{j=1}^{N'_g} \frac{w(j) \cdot \Delta(j)}{\|\mathbf{X}_g(i) - \mathbf{X}_g(j)\|} \\ \iint_{S'} \left( \iint_S \frac{\mathbf{n.r}}{r^3} . dS \right) dS' &= \sum_{i=1}^{N_g} w(i) \cdot \Delta(i) \sum_{j=1}^{N'_g} \frac{w(j) \cdot \Delta(j) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_g(i))}{\|\mathbf{X}_g(i) - \mathbf{X}_g(j)\|} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

L'intégration analytique de ces intégrales n'a pas été développée.

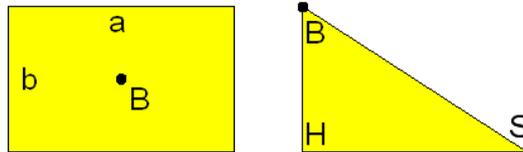
## 4 Correction analytique du potentiel de la diagonale pour l'ordre 0

L'utilisation de méthodes numériques pour calculer la matrice d'interaction permet de calculer rapidement cette matrice. Aussi, il est possible d'améliorer la précision des calculs des coefficients présents sur la diagonale en les réintégrant de façon analytique. Ces coefficients représentent le potentiel ou le champ normal créé par l'élément sur lui-même. Et les calculs numériques avec points de Gauss de ces coefficients sont les moins précis de tous car les distances en jeu sont très petites. Ainsi, la correction analytique de la diagonale permet de gagner environ 15% de précision sur les coefficients.

### 4.1 Méthode de collocation

Comme on l'a vu précédemment, lorsque l'on calcule l'influence en potentiel d'un élément sur lui-même, l'intégration numérique peut diverger si les points de Gauss sont très près du barycentre de l'élément : si  $\|\mathbf{X}_{\mathbf{g}_i} - \mathbf{X}_{\mathbf{bary}}\| \rightarrow 0$ . Dans ce cas particulier, on utilise une formule analytique pour des éléments rectangulaires et triangulaires.

Le calcul du potentiel au barycentre  $B$  d'un rectangle de côtés  $a$  et  $b$ , de charge surfacique  $q/S$ , est défini par [36] (Fig. A.8) :



**Figure A.8** – Rectangle de côtés  $a$  et  $b$  et de barycentre  $B$  et triangle  $BHS$  rectangle en  $H$

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{S} \left[ a \cdot \log \left( \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \right) + b \cdot \log \left( \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right) \right] \quad (\text{A.8})$$

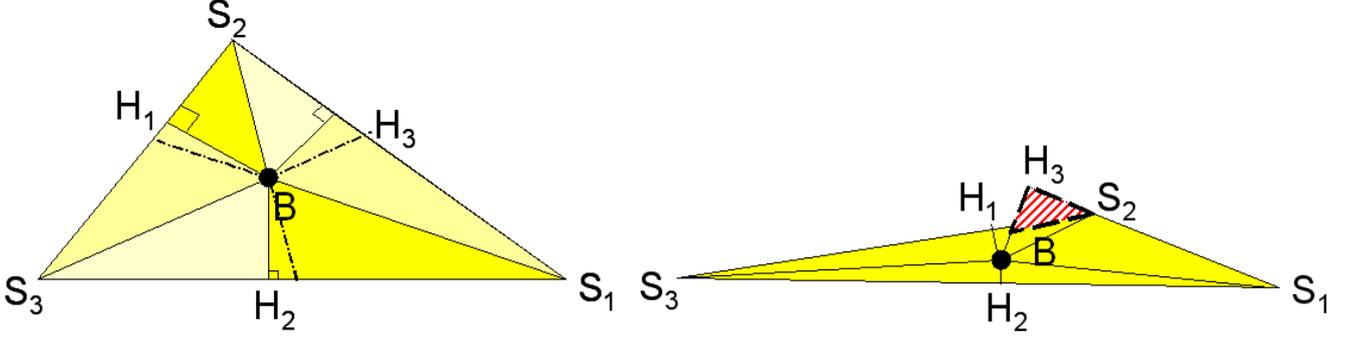
Cette formule est obtenue en utilisant quatre fois la formule A.3 décrite précédemment.

Et le calcul du potentiel au sommet  $B$  d'un triangle  $BHS$  rectangle en  $H$ , de charge  $q$  et de surface  $S$  vaut [39] (Fig. A.8) :

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{S} \left[ BH \cdot \log \left( \frac{SH + \sqrt{SH^2 + BH^2}}{SH} \right) \right] \quad (\text{A.9})$$

On utilise l'expression ci-dessus six fois pour un triangle quelconque  $S_1S_2S_3$ . Effectivement, on peut projeter orthogonalement le barycentre  $B$  sur les trois côtés du triangle et former six triangles

rectangles (Fig. A.9).



**Figure A.9** – Triangles quelconques  $S_1S_2S_3$  de barycentre  $B$  avec  $H_i$ , le projeté orthogonal de  $B$  sur le côté opposé du sommet  $S_i$

Dans le cas particulier où l'un des projetés orthogonaux  $H_i$  se retrouve en dehors du triangle  $S_1S_2S_3$ , la somme des aires des six triangles rectangles devient supérieure à l'aire du triangle initial (aire hachurée en rouge dans la figure A.9). Par exemple pour le triangle de droite dans la figure A.9, il faudra soustraire l'aire du triangle  $BH_3S_2$  à l'aire  $BH_3S_1$ . On utilise alors des coefficients valant  $\pm 1$  noté  $\alpha_i$  afin de corriger ces éventuels problèmes d'aires. Ainsi le potentiel au barycentre  $B$  d'un triangle quelconque  $S_1S_2S_3$  de surface  $S$  et de charge  $q$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
 V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{S} \{ & BH_1 \left[ \alpha_1 \cdot \log \left( \frac{S_2H_1 + \sqrt{S_2H_1^2 + BH_1^2}}{S_2H_1} \right) + \right. \\
 & \left. \alpha_2 \cdot \log \left( \frac{S_3H_1 + \sqrt{S_3H_1^2 + BH_1^2}}{S_3H_1} \right) \right] + \\
 & BH_2 [\alpha_3 \cdot \log(\dots) + \alpha_4 \cdot \log(\dots)] + \\
 & BH_3 [\alpha_5 \cdot \log(\dots) + \alpha_6 \cdot \log(\dots)] \}
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

## 4.2 Méthode de Galerkin

Comme à la section 4, on peut corriger analytiquement la diagonale de la matrice  $[P/En]$ . Une première méthode permet simplement de réintégrer ces coefficients sur leur surface, ie. on multiplie ces coefficients par la surface de l'élément. Concernant l'influence en potentiel des triangles quelconques de barycentre  $B$ , de côtés  $a$ ,  $b$  et  $c$ , une formule relativement simple peut être utilisée [40] :

$$\begin{aligned}
 \iint V_B \cdot dS = \frac{q \cdot S}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{a} \cdot \log \left( 1 - \frac{2a}{a+b+c} \right) + \frac{1}{b} \cdot \log \left( 1 - \frac{2b}{a+b+c} \right) \right. \\
 \left. + \frac{1}{c} \cdot \log \left( 1 - \frac{2c}{a+b+c} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{A.11}$$