Propagation non linéaire des ondes acoustiques

Ce chapitre présente les équations fondamentales menant à la définition du paramètre non linéaire $\frac{B}{A}$ et à l'interprétation physique du comportement non linéaire. Ensuite ces équations sont appliquées au cas des fluides et des solides et permettent de définir une analogie entre le coefficient non linéaire β d'un solide isotrope et celui d'un fluide. Pour finir, un algorithme numérique pseudo-spectral permettant la simulation d'une propagation dans un milieu non linéaire est développé.

1.1 Équations fondamentales de l'acoustique non linéaire

Les équations fondamentales de l'acoustique non linéaire sont introduites. Le développement de Taylor de l'équation d'état permet de définir le paramètre non linéaire $\frac{B}{A}$.

1.1.1 Définition du paramètre non linéaire B/A

Le paramètre de nonlinéarité acoustique $\frac{B}{A}$ est le rapport des termes quadratiques et des termes linéaires dans le développement en séries de Taylor de l'équation d'état liant les variations de pression aux variations de masse volumique et décrivant la réponse d'un milieu aux sollicitations d'une onde acoustique. Ce rapport caractérise la variation de la vitesse du son du milieu induite par un changement de pression dans un liquide et de masse volumique dans un solide.
Le processus de propagation d'une onde haute fréquence (pression p, masse volumique ρ ou vitesse particulaire v) pouvant être considéré comme un phénomène isentropique, le développement en séries de Taylor de l'équation d'état $P = P(\rho, s)$, à entropie s constante,

s'écrit alors :

$$p = P - P_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s,0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_{s,0} (\rho - \rho_0)^2 + \dots , \tag{I.1.1}$$

où P et ρ sont respectivement la pression et la masse volumique perturbées par l'onde ultrasonore, P_0 et ρ_0 leurs valeurs à l'équilibre. Les dérivées partielles de l'équation (I.1.1) sont évaluées pour l'état non perturbé (ρ_0, s_0). Cette équation peut être récrite plus succinctement sous la forme :

$$p = P - P_0 = A\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right) + \frac{B}{2!}\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2 + \dots , \tag{I.1.2}$$

où $\rho' = \rho - \rho_0$ est la variation de masse volumique et

$$A = \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s,0} = \rho_0 c_0^2, \tag{I.1.3}$$

$$B = \rho_0^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_{s,0} , \tag{I.1.4}$$

conduisant alors au paramètre non linéaire $\frac{B}{A}$:

$$\boxed{\boxed{\frac{B}{A} = \frac{\rho_0}{c_0^2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_{s,0}}} . \tag{I.1.5}$$

En rappelant la définition de la célérité de l'onde c comme étant :

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s , \tag{I.1.6}$$

nous obtenons alors :

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_s = \left(\frac{\partial c^2}{\partial \rho}\right)_s = \left(\frac{\partial c^2}{\partial p}\right)_s \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = c^2 \left(\frac{\partial c^2}{\partial p}\right)_s = 2c^3 \left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)_s , \tag{I.1.7}$$

d'où, à l'équilibre :

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_{s,0} = 2c_0^3 \left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)_{s,0} . \tag{I.1.8}$$

Dans ces conditions, le paramètre non linéaire peut être écrit sous la forme :

$$\frac{B}{A} = 2\rho_0 c_0 \left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)_{s,0} . \tag{I.1.9}$$

Cette expression est à l'origine des méthodes isentropiques de détermination de ce paramètre. Il est possible maintenant de récrire la rapport $\frac{B}{A}$ en fonction des variations isothermes de vitesse par rapport à la pression et en fonction de la température à pression constante. Pour cela, on a :

$$\left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)_T + \left(\frac{\partial c}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s . \tag{I.1.10}$$

En tenant compte de la relation thermodynamique suivante, découlant de la formule de Reech :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \frac{T_0 \alpha_T}{\rho_0 C_p}, \tag{I.1.11}$$

où C_p est la capacité calorifique à pression constante, T_0 est la température ambiante et α_T est le coefficient de dilatation thermique, le paramètre $\frac{B}{A}$ devient :

$$\frac{B}{A} = 2\rho_0 c_0 \left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)_{T,0} + 2\rho_0 c_0 \left(\frac{\partial c}{\partial T}\right)_{p,0} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{s,0},$$

$$\frac{B}{A} = 2\rho_0 c_0 \left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)_{T,0} + \frac{2\alpha_T T_0 c_0}{C_p} \left(\frac{\partial c}{\partial T}\right)_{p,0} . \tag{I.1.12}$$

Cette expression est à la base des méthodes thermodynamiques de détermination du paramètre non linéaire.

1.1.2 Interprétation physique du paramètre non linéaire

La signification physique du paramètre non linéaire $\frac{B}{A}$ en acoustique est donnée par son effet sur la vitesse du son comme décrit à l'équation (I.1.9). L'équation (I.1.2) donne :

$$\frac{c^2}{c_0^2} = 1 + \frac{B}{A}\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right) + \dots . \tag{I.1.13}$$

On peut écrire le rapport $\frac{c}{c_0}$ en passant à la racine carrée et en effectuant un développement limité pour $\frac{c^2}{c_0^2} \approx 1$:

$$\frac{c}{c_0} = 1 + \frac{B}{2A}\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right) + \dots . \tag{I.1.14}$$

En se servant de la relation $\rho'/\rho_0 = v/c_0$ pour une onde plane progressive ($v = \frac{p}{\rho_0 c_0}$ étant la vitesse particulaire), on obtient :

$$c = c_0 + \frac{B}{2A} v. \tag{I.1.15}$$

Ainsi la variation de célérité $\Delta c = c - c_0$ peut être reliée à la variation de pression Δp par :

$$\Delta c = \frac{1}{2\rho_0 c_0}\frac{B}{A}\Delta p, \tag{I.1.16}$$

c'est-à-dire :

$$c = c_0 + \frac{1}{2\rho_0 c_0}\frac{B}{A}\Delta p. \tag{I.1.17}$$

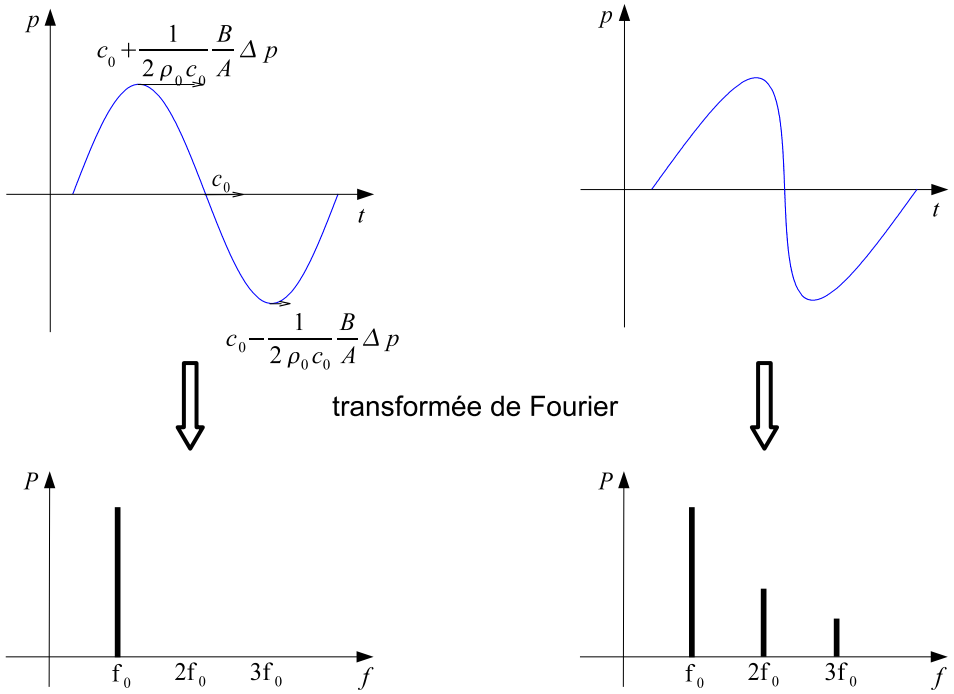


Figure 1 – *Distorsion non linéaire de l'onde ultrasonore au cours de la propagation dans le domaine temporel et enrichissement du spectre dans le domaine fréquentiel.*

L'expression (I.1.17) montre que la célérité du son c diffère de celle dans un cas linéaire c_0 par un terme qui est proportionnel à l'excès local de pression et au paramètre de nonlinéarité $\frac{B}{A}$ du milieu. Par exemple, dans une phase de compression, Δp est positif donc $c > c_0$, alors que dans une phase de raréfaction, Δp est négatif et donc $c < c_0$. Ainsi certaines parties de l'onde se propagent plus rapidement et d'autres moins rapidement que l'onde dans son ensemble. La conséquence immédiate de cette vitesse de propagation non uniforme est la déformation du front d'onde et plus particulièrement son raidissement (figure 1). La déformation d'une onde de forme sinusoïdale dans le domaine temporel se traduit directement par l'apparition de composantes fréquentielles, harmoniques multiples de la fréquence fondamentale de l'onde émise.
Cette génération d'harmoniques peut produire les effets suivants :

- la création d'harmoniques se fait au dépend de la fréquence fondamentale du fait de la conservation d'énergie. Lors de la propagation, les distorsions subies par l'onde

s'accumulent et, en conséquence, de plus en plus d'énergie est transférée de la fréquence fondamentale vers les fréquences harmoniques. Cette atténuation, supplémentaire par rapport à celle classiquement subie par une onde d'amplitude infinitésimale, est appelée extra-atténuation non linéaire.
– dans la majorité des milieux, l'atténuation augmente avec la fréquence. Ainsi, une onde, déformée par les effets non linéaires, dont le contenu spectral est plus riche en harmoniques, subit une perte d'énergie plus importante qu'une onde non déformée.

1.1.3 Équations de l'acoustique non linéaire

Dans cette section, les équations fondamentales de l'acoustique non linéaire appliquées aux fluides et aux solides vont être introduites. L'étude dans les fluides va nous permettre d'effectuer une analogie dans les deux milieux et de définir un coefficient non linéaire dans les solides isotropes.

1.1.3.1 Application aux fluides

La description du mouvement d'une onde dans un fluide repose sur deux types d'équations : les lois de conservation qui traduisent les hypothèses générales de la physique et les lois d'état caractéristiques de la nature du fluide étudié. Pour un fluide thermovisqueux, les équations sont les suivantes :

– l'hypothèse de conservation de la masse :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot v = 0, \tag{I.1.18}$$

où ρ est la masse volumique du fluide et v est la vitesse du fluide.

– le principe de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \nabla \cdot \sigma, \tag{I.1.19}$$

avec le tenseur des contraintes σ donné par :

$$\nabla \cdot \sigma = -\nabla P + \left(\frac{1}{3}\eta + \xi\right) \nabla \left(\nabla \cdot v\right) + \eta \nabla^2 v, \tag{I.1.20}$$

où η et ξ sont respectivement les coefficients de viscosité de cisaillement et de volume.

– l'hypothèse de conservation de l'énergie :

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \kappa \nabla^2 T + \xi \left(\nabla \cdot v\right)^2 + \frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right), \tag{I.1.21}$$

où s est l'entropie, κ la conductivité thermique et T la température.

– l'équation d'état :

$$P = P(\rho, s). \tag{I.1.22}$$

Si on choisit comme variables P, ρ et s au lieu de P, ρ et T, les processus ultrasonores considérés peuvent être supposés adiabatiques.
Nous cherchons maintenant une équation de propagation qui décrit les champs acoustiques d'amplitude finie à l'ordre deux pour le nombre de Mach acoustique $\mathcal{M} = |v|/c_0$. L'onde ultrasonore correspond ainsi à une petite perturbation des grandeurs caractéristiques du milieu autour des valeurs au repos (notées avec un indice 0) :

$$P = p_0 + p, \tag{I.1.23}$$

$$\rho = \rho_0 + \rho', \tag{I.1.24}$$

$$T = T_0 + T', \tag{I.1.25}$$

$$s = s_0 + s', \tag{I.1.26}$$

$$v = v'. \tag{I.1.27}$$

Les variables p,ρ',T',s' et v' représentent respectivement les fluctuations de pression, de masse volumique, de température, d'entropie et de vitesse en ayant supposé que le fluide est au repos.
En considérant de petites perturbations $o(\mathcal{M})$ et un fluide au repos, les relations (I.1.18) à (I.1.22) peuvent être reformulées en insérant les expressions (I.1.23) à (I.1.27) :

– l'équation de conservation de la masse à l'ordre deux devient :

$$\underbrace{\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot v'}_{o(\mathcal{M})} = \underbrace{-\rho' \nabla \cdot v' - v' \nabla \rho'}_{o(\mathcal{M}^2)}. \tag{I.1.28}$$

– l'équation de conservation de la quantité de mouvement à l'ordre deux devient :

$$\underbrace{\rho_0 \frac{\partial v'}{\partial t} + \nabla p}_{o(\mathcal{M})} = \tag{I.1.29}$$

$$\underbrace{\left(\frac{4}{3}\eta + \xi\right) \nabla^2 v' + \left(\frac{1}{3}\eta + \xi\right) \nabla \times \nabla \times v' - \frac{1}{2}\rho_0 \nabla^2 v' - \rho' \frac{\partial v'}{\partial t} + \rho_0 v' \times \nabla \times v'}_{o(\mathcal{M}^2)}.$$

On se place dans le fluide suffisamment loin de toute surface afin d'avoir $\nabla \times v' = 0$. Ainsi, la propagation est supposée irrotationnelle et cette expression peut se simplifier par :

$$\underbrace{\rho_0 \frac{\partial v'}{\partial t} + \nabla p}_{o(\mathcal{M})} = \underbrace{\left(\frac{4}{3}\eta\xi\right) \nabla^2 v' - \frac{1}{2}\rho_0 \nabla^2 v' - \rho' \frac{\partial v'}{\partial t}}_{o(\mathcal{M}^2)}. \tag{I.1.30}$$

– l'équation de conservation de l'énergie (I.1.21) devient à l'ordre deux :

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial s}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T'. \tag{I.1.31}$$

– finalement, en développant en séries de Taylor l'équation d'état du fluide (I.1.22) autour de l'état d'équilibre (ρ_0, s_0) et en négligeant les termes $o(\mathcal{M}^3)$, on obtient :

$$p = c_0^2 \rho' + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{B}{2A} \rho'^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_{\rho,0} s'. \tag{I.1.32}$$

Les équations (I.1.28) à (I.1.32) linéarisées sont introduites dans les termes d'ordre $o(\mathcal{M}^2)$ des équations (I.1.28) et (I.1.30). On obtient alors :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot v' = \frac{1}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial p^2}{\partial t} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \tag{I.1.33}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v'}{\partial t} + \nabla p = -\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \left(\frac{4}{3}\eta + \xi \right) \nabla \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \mathcal{L}, \tag{I.1.34}$$

où la densité Lagrangienne $\mathcal{L}$ a été introduite telle que :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho_0 v'^2 - \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}. \tag{I.1.35}$$

En soustrayant le gradient de l'équation (I.1.33) à la dérivée par rapport au temps de l'équation (I.1.34), l'expression suivante est obtenue :

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \nabla^2 p = \frac{1}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} + \left(\nabla^2 + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathcal{L} + \frac{1}{\rho_0 c_0^4} \left(\frac{4}{3}\eta + \xi \right) \frac{\partial^3 p}{\partial t^3}. \tag{I.1.36}$$

D'autre part, la combinaison des équations d'état (I.1.32) et de conservation de l'énergie (I.1.31) permet de relier la variation de masse volumique ρ' à la variation de pression p :

$$\rho' = \frac{p}{c_0^2} - \frac{1}{\rho_0 c_0^4} \frac{B}{2A} p^2 - \frac{\kappa}{\rho_0 c_0^4} \left(\frac{1}{C_v} - \frac{1}{C_p} \right) \frac{\partial p}{\partial t}, \tag{I.1.37}$$

avec C_v la capacité calorifique à volume constant.
La substitution de cette dernière équation dans l'équation (I.1.31), conduit à l'équation de propagation non linéaire à l'ordre deux sous la forme obtenue par Aanonsen *et al.* [35] :

$$\boxed{\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\vartheta}{c_0^4} \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} - \left(\nabla^2 + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathcal{L}}, \tag{I.1.38}$$

avec le coefficient non linéaire β défini par

$$\beta = 1 + \frac{B}{2A}. \tag{I.1.39}$$

et où la diffusivité du son ϑ est introduite par :

$$\vartheta = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{4}{3}\eta + \xi\right) + \frac{\kappa}{\rho_0}\left(\frac{1}{C_v} - \frac{1}{C_p}\right). \tag{I.1.40}$$

L'équation (I.1.38) décrit l'évolution tridimensionnelle du champ de pression dans un fluide thermovisqueux. L'atténuation est représentée dans cette équation par le terme $\frac{\vartheta}{c_0^4}\frac{\partial^3 p}{\partial t^3}$ tandis que les deux termes de droite décrivent les effets non linéaires cumulatifs ($-\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4}\frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2}$) ou locaux ($(\nabla^2 + \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\mathcal{L}$).

1.1.3.2 Application aux solides

Dans cette section, le milieu de propagation est supposé continu et parfaitement élastique. Soit a_i les coordonnées d'un point matériel du solide au repos correspondant à l'état initial. Lorsque le corps subit une déformation, les distances entre les points varient. Considérons deux points quelconques infiniment proches ; avant la déformation, si un élément du solide a une longueur ds_0 alors, dans le corps déformé, elle deviendra ds. On définit alors le tenseur des déformations ϵ_{ik} par la relation :

$$ds^2 - ds_0^2 = dx_j dx_j - da_j da_j = 2\epsilon_{ik} da_i da_k, \tag{I.1.41}$$

soit

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial a_k} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i}\frac{\partial u_j}{\partial a_k}\right), \tag{I.1.42}$$

où u est le vecteur déplacement de composantes u_i. Le tenseur ϵ_{ik} est appelé tenseur de déformation et de part sa définition même, ce tenseur est symétrique $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$.
Comme pour un fluide, l'étude de la propagation d'une onde élastique dans un solide est régie par des lois de conservation (masse, mouvement, énergie) et par une loi d'état caractéristique de la nature du solide.

– l'hypothèse de conservation de la masse :

$$J = \left|\frac{\partial x_j}{\partial a_i}\right| = \frac{\rho_0}{\rho}, \tag{I.1.43}$$

où J est le déterminant du Jacobien de la transformation ponctuelle permettant le passage d'un système de coordonnées dans l'état initial à celui dans l'état déformé. ρ_0 et ρ sont les masses volumiques respectivement dans l'état initial et dans l'état déformé.

– le principe de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho_0 \frac{d^2 u_i}{dt^2} = JF_i + \frac{\partial P_{ij}}{\partial a_j}, \tag{I.1.44}$$

où F_i sont les forces de volume appliquées au solide et P_{ij} est le tenseur de contrainte Piola-Kirchoff.

– l'hypothèse de conservation de l'énergie :

$$\rho_0 \frac{\partial U}{\partial t} = P_{ij} \frac{\partial}{\partial a_i} \frac{\partial u_j}{\partial t} - J \frac{\partial h_i}{\partial a_i}, \tag{I.1.45}$$

où U est l'énergie interne par unité de masse et h est le vecteur flux d'énergie non mécanique.

L'équation de conservation du mouvement (I.1.44) peut être également obtenue à partir de la densité Lagrangienne :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho_0 u^2 - \rho_0 W, \tag{I.1.46}$$

où W est l'énergie de déformation élastique du solide par unité de masse. Les équations de Euler-Lagrange pour $\mathcal{L}$ fournissent l'équation (I.1.45) avec [36] :

$$P_{ij} = \rho_0 \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} \right)}. \tag{I.1.47}$$

Les constantes matérielles du solide étudié sont introduites en développant l'énergie élastique par rapport au tenseur de déformation :

$$\rho_0 W = \frac{1}{2!} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} + \frac{1}{3!} C_{ijklmn} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \epsilon_{mn} + \dots . \tag{I.1.48}$$

Les tenseurs C_{ijkl} et C_{ijklmn} correspondent aux constantes élastiques du deuxième et du troisième ordre définies à entropie constante [37, 38].

Les équations (I.1.47) et (I.1.48) fournissent la relation entre la tension appliquée au solide et les contraintes :

$$P_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial a_l} + \frac{1}{2} M_{ijklmn} \frac{\partial u_k}{\partial a_l} \frac{\partial u_m}{\partial a_n} + \dots , \tag{I.1.49}$$

où

$$M_{ijklmn} = C_{ijklmn} + C_{ijln}\delta_{km} + C_{jnkl}\delta_{im} + C_{jlmn}\delta_{ik}. \tag{I.1.50}$$

Notons que $M_{ijklmn} \neq M_{jiklmn}$, ce qui implique que la dissymétrie du tenseur P_{ij} est un effet du second ordre. Le nombre de coefficients C_{ijkl} et C_{ijklmn} distincts est, dans le cas le plus général, respectivement de 21 et 56. Ce nombre est réduit par la présence de

symétries du matériau. Par exemple, un solide isotrope possède uniquement à l'ordre 2 cinq coefficients indépendants. Dans ce cas, il vient le développement suivant :

$$\rho_0 W = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial a_k^2} + \left(\frac{\lambda}{2}\right) \frac{\partial^2 u_l}{\partial a_l^2} + \frac{\mathcal{A}}{3} \frac{\partial u_i}{\partial a_k} \frac{\partial u_k}{\partial a_l} \frac{\partial u_l}{\partial a_i} + \mathcal{B} \frac{\partial u_l}{\partial a_l} \frac{\partial^2 u_i}{\partial a_k^2} + \frac{\mathcal{C}}{3} \frac{\partial^3 u_l}{\partial a_l^3} \tag{I.1.51}$$

où μ et λ sont les coefficients de Lamé et $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les coefficients élastiques du troisième ordre utilisés par Landau et Lifshitz [36].

1.1.3.3 Équivalence du coefficient non linéaire dans un fluide et dans un solide isotrope

Il a été montré que la propagation dans un solide isotrope peut être décrite par une équation d'évolution parabolique similaire à l'équation KZK obtenue pour un fluide [39–41] :

$$\frac{\partial p^2}{\partial z \partial \tau} = \frac{c_0}{2} \nabla_\perp^2 p + \frac{\vartheta}{2 c_0^3} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} + \frac{\beta}{2 \rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2}. \tag{I.1.52}$$

Il suffit pour cela de considérer une onde longitudinale qui se propage selon la direction Oz. On cherche une solution sous la forme

$$u_z = \zeta u_z(\tau, x', y', z'), \tag{I.1.53}$$

$$u_{x,y} = \zeta \sqrt{\zeta} u_{x,y}(\tau, x', y', z'), \tag{I.1.54}$$

avec

$$\tau = t - \frac{z'}{c_l}, \quad z' = \zeta z, \quad x' = \sqrt{\zeta} x, \quad y' = \sqrt{\zeta} y,$$

et où ζ est un petit paramètre. En substituant ce changement de variables dans l'équation de propagation (I.1.51), en ne retenant que les termes d'ordre jusqu'à ζ^2 et en considérant η, χ et ξ de l'ordre de grandeur de ζ, on obtient pour la vitesse particulaire v

$$\boxed{\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial z' \partial \tau} - \frac{c_l}{2} \nabla_\perp^2 v - \frac{\frac{4}{3}\eta + \xi + \chi}{2 \rho_0 c_l^4} \frac{\partial^3 v}{\partial \tau^3} = - \frac{F}{2 \rho_0 c_l^4} \frac{\partial^2 v^2}{\partial \tau^2}}}, \tag{I.1.55}$$

où $F = \frac{3K}{2} + 2\mu + \mathcal{A} + 3\mathcal{B} + \mathcal{C}$. On remarque ainsi que pour un solide isotrope, on obtient une équation identique à celle obtenue dans les fluides (I.1.38), si on définit le coefficient non linéaire du solide par :

$$\beta = - \frac{F}{\rho_0 c_l^2} = - \left(\frac{3}{2} + \frac{\mathcal{A} + 3\mathcal{B} + \mathcal{C}}{\rho_0 c_l^2} \right). \tag{I.1.56}$$

Celui-ci peut être réécrit en notation standard sous la forme :

$$\boxed{\boxed{\beta = - \left(\frac{3}{2} + \frac{c_{111}}{c_{11}} \right)}}. \tag{I.1.57}$$

L'équation (I.1.56) peut être réécrite dans le cas d'un fluide en prenant $\mathcal{A} = 0$, $\mathcal{B} = -A$ et $\mathcal{C} = \frac{A-B}{2}$.

En résumé, le coefficient non linéaire est défini par

$$\boxed{\beta = \begin{cases} \frac{(\gamma+1)}{2} & \text{pour un gaz} \\ 1 + \frac{B}{2A} & \text{pour un fluide} \\ -\left(\frac{3}{2} + \frac{c_{111}}{c_{11}}\right) & \text{pour un solide} \end{cases}} \tag{I.1.58}$$

1.2 Algorithme numérique pseudo-spectral pour la propagation non linéaire

Dans le but d'étudier les phénomènes acoustiques non linéaires, décrits dans la section précédente, un outil permettant de simuler la propagation d'une onde ultrasonore dans un solide ou un fluide sur une longue distance a été développé au sein du laboratoire par Olivier Bou Matar *et al.* [42, 43], en prenant en compte aussi bien l'atténuation et la dispersion que les effets non linéaires.
Les méthodes habituelles de simulations telles que les éléments finis ou les différences finies ne permettent pas d'étudier la propagation sur un domaine de grande dimension (une centaine de longueurs d'onde), avec un temps de simulation et une précision satisfaisants, ce qui nous a conduit à choisir la méthode pseudo-spectrale.
Le système d'équations modélisé dans le cas de propagation uni-dimensionnelle d'une onde acoustique dans un milieu non linéaire est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \sigma}{\partial z}, \\ \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} = K(t)\frac{\partial v}{\partial z}, \end{cases} \tag{I.1.59}$$

où ρ_0 est la masse volumique du milieu considéré, v la vitesse particulaire, $K = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}$ le module élastique avec $\epsilon = \frac{\partial u_z}{\partial z}$ la déformation suivant z et σ la contrainte longitudinale. Dans cette partie, seule la nonlinéarité classique est considérée et elle est introduite de la manière suivante :

$$\sigma(\epsilon) = E\left(\epsilon - \beta\epsilon^2 - \delta\epsilon^3\right) = E\left[\frac{\partial u_z}{\partial z} - \beta\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 - \delta\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^3\right], \tag{I.1.60}$$

où E est le module d'Young et β et δ représentent les termes quadratique et cubique dans le développement. On peut donc écrire :

$$K(t) = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} = E\left(1 - 2\beta\epsilon - 3\delta\epsilon^2\right). \tag{I.1.61}$$

1.2.1 Dérivation spatiale : méthode pseudo-spectrale

La méthode pseudo-spectrale est une méthode alternative aux éléments finis et différences finies pour certaines classes d'équations différentielles. L'idée de la méthode spectrale est de développer les fonctions du problème en séries trigonométriques dans le but de pouvoir évaluer les dérivées spatiales du problème dans le domaine fréquentiel. Les méthodes pseudo-spectrales utilisent la transformée de Fourier rapide (FFT) pour évaluer les dérivées spatiales de fonctions définies sur une grille cartésienne uniforme. Ainsi, les équations aux dérivées partielles sont réduites à des équations ordinaires dépendantes du temps, qui peuvent être résolues par un schéma du type Runge-Kutta ou Adams-Bashforth.
La dérivée spatiale s'écrit par la relation suivante :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = FFT^{-1}\left[\left(ik_x e^{\pm ik_x \frac{\Delta x}{2}}.FFT\left[f(x)\right]\right)\right], \tag{I.1.62}$$

où FFT^{-1} est la transformée de Fourier rapide inverse, k_x est le nombre d'onde dans la direction x et Δx est le pas spatial de la grille de propagation numérique dans cette même direction. Cette relation permet de diviser l'étape de calcul de dérivée spatiale en trois :

- calcul de la transformée de Fourier rapide $FFT\left[f(x)\right]$,
- multiplication par le multiplicateur de dérivée première $ik_x e^{\pm ik_x \frac{\Delta x}{2}}$,
- calcul de la transformée de Fourier rapide inverse du résultat.

Cette méthode nécessite seulement deux points par longueur d'onde, même pour des temps de propagation longs [44], ce qui en constitue son principal avantage. Dans le cas d'une simulation non linéaire, où l'harmonique cinq peut être générée, dix points par longueur d'onde sont nécessaires alors que cinquante points pour une méthode par éléments finis ou par différences finies sont indispensables.

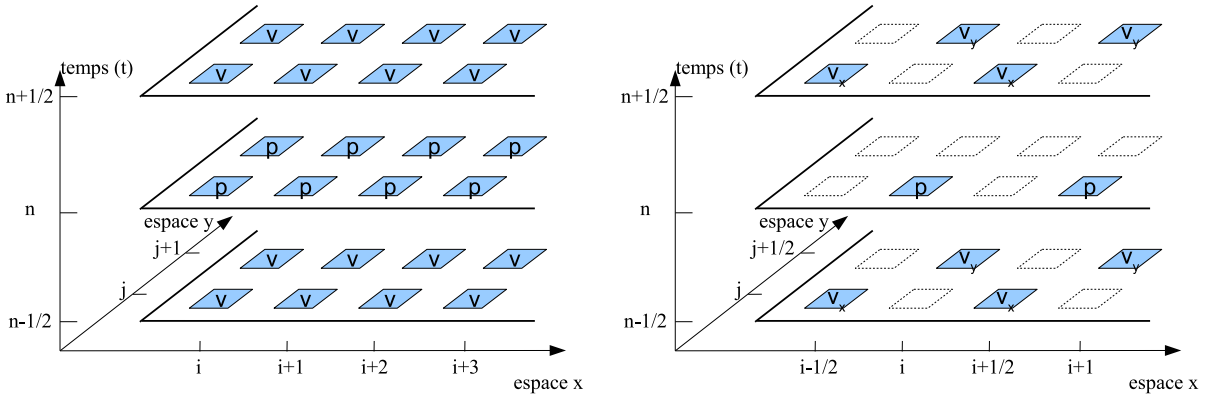
1.2.2 Dérivation temporelle : méthode d'Adams-Bashforth

Le schéma temporel utilisé dans le programme est un schéma à pas multiples d'Adams-Bashforth d'ordre 4, contrairement aux méthodes de type Runge-Kutta qui sont des schémas à un pas. De plus les schémas d'Adams-Bashforth sont explicites, c'est-à-dire que pour connaître une variable au temps t_{i+1}, il suffit de connaître ces dérivées temporelles à des temps antérieurs (pour le cas d'ordre 4, il faut connaître les dérivées au temps t_i, t_{i-1}, t_{i-2} et t_{i-3}). Les méthodes d'Adams-Bashforth sont bien adaptées aux systèmes à faibles nonlinéarités dont les paramètres ne varient pas beaucoup dans le temps.
Il est possible, dans notre cas, de réaliser un système de grilles décalées dans le temps. On évaluera alors la pression aux temps entiers $n\Delta t$ et la vitesse aux temps $(n+1/2)\Delta t$, comme l'indique la figure 2a.
On approche $\partial y/\partial t = f(t, y(t))$ avec $y = p$ ou u pour un schéma d'Adams-Bashforth

d'ordre 4 pour les grilles temporelles décalées [45] par :

$$y(t+\Delta t) = y(t)+\frac{\Delta t}{24}\left(26f\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)-5f\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right)+4f\left(t-\frac{3\Delta t}{2}\right)-f\left(t-\frac{5\Delta t}{2}\right)\right). \tag{I.1.63}$$

On choisit $\Delta t = stabf \cdot \min(\Delta x, \Delta z)/c_0$ avec le facteur de stabilité $stabf = 0,1$.
Si on couple la méthode des pas décalés avec celles des grilles enchevêtrées, la représentation des variables dans un domaine espace-temps est donnée figure 2b. Si la méthode des grilles spatiales décalées permet de réduire par quatre la taille des matrices et de limiter notamment les phénomènes de Gibbs, la méthode des pas de temps décalés permet à son tour d'obtenir une précision temporelle équivalente à celle que l'on aurait eue avec un pas $\Delta t/2$ et cela sans changer le nombre d'itérations.



(a) (b)

Figure 2 – *Agencement des variables dans le cas d'un schéma avec, (a) des pas de temps décalés uniquement, et (b) des pas de temps décalés et des grilles enchevêtrées.*

1.2.3 Principe de la méthode des couches parfaitement adaptées (PML)

La méthode des couches parfaitement adaptées, dérivant de l'anglais Perfectly Matched Layer (P.M.L.), a été introduite par Bérenger [46] dans le but de propager une onde électromagnétique dans un domaine relativement restreint tout en évitant les réflexions parasites sur les bords du domaine de simulation.
Cette méthode consiste à appliquer un masque, dit masque PML, sur le domaine de propagation dans lequel les lois d'évolution de l'onde diffèrent de celles du reste du domaine. Ces couches parfaitement adaptées ont pour rôles d'absorber les ondes lorsqu'elles atteignent les limites du domaine en évitant au maximum les réflexions dues au changement d'impédance et d'éviter que les ondes partent d'un côté du domaine et reviennent de l'autre, phénomènes de "Wrap around effect" dus principalement à l'utilisation de la FFT.

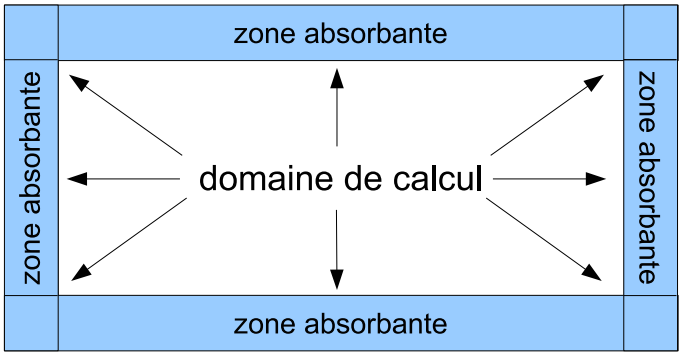


Figure 3 – *Représentation du domaine de calcul avec les couches parfaitement adaptées (couches PML).*

Nous allons appliquer cette méthode au système d'équations décrit précédemment traduisant la propagation d'une onde acoustique dans un solide non linéaire. Dans un premier temps, pour simplifier l'introduction des équations dans la zone parfaitement adaptée, ce système est passé dans le domaine fréquentiel. Le changement de variable $\tilde{x} = \int_0^x s_x(x')dx'$ et $\tilde{y} = \int_0^y s_y(y')dy'$ est ainsi effectué dans le domaine fréquentiel.
L'écriture dans le domaine temporel des équations dans la zone parfaitement adaptée dépend du choix des variables s_x et s_y. Ces variables sont choisies pour permettre de retrouver le résultat obtenu par Bérenger [46] par une autre méthode, avec x et y les coordonnées d'un point dans un espace bi-dimensionnel :

$$s_x = a_x + i\frac{\omega_x}{\omega}, \tag{I.1.64}$$

$$s_y = a_y + i\frac{\omega_y}{\omega}. \tag{I.1.65}$$

De plus, les variables physiques sont décomposées comme suit :

$$v_i = v_i^x + v_i^y \tag{I.1.66}$$

et

$$v = \left| \begin{array}{c} v_x \\ v_y \end{array} \right. . \tag{I.1.67}$$

Une transformée de Fourier inverse est ensuite effectuée pour revenir dans le domaine temporel. Un système d'équations linéaires est alors obtenu, il doit être résolu dans la zone parfaitement adaptée :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x \frac{\partial p_x}{\partial t} = -\rho_0 c_0^2 \frac{\partial v_x}{\partial \tilde{x}} - \omega_x p_x, \\ a_y \frac{\partial p_y}{\partial t} = -\rho_0 c_0^2 \frac{\partial v_y}{\partial \tilde{y}} - \omega_y p_y, \\ a_x \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}} - \omega_x v_x, \\ a_y \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \tilde{y}} - \omega_y v_y. \end{array} \right. \tag{I.1.68}$$

Les grandeurs a_x et a_y peuvent être utilisées pour absorber les ondes évanescentes. Si ce type d'onde n'apparaît pas dans le problème, on pose $a_x = a_y = 1$.

La définition du paramètre non linéaire $\frac{B}{A}$ à travers son interprétation physique a été réalisé. Les différentes méthodes d'évaluation du coefficient non linéaire β, définit par analogie aux fluides dans un solide isotrope, vont être présentées. Une attention particulière sera portée à la mesure par modulation de phase en contact.

Chapitre 2

Évaluation de la nonlinéarité classique

La détermination du coefficient de nonlinéarité β d'un solide est souvent plus délicate que celle du rapport B/A d'un fluide. En effet, les effets non linéaires sont plus faibles dans les matériaux solides, plus rigides, que dans les fluides. Il est également nécessaire de connaître la nonlinéarité introduite par le dispositif expérimental qui peut devenir non négligeable.
Deux types de méthodes sont classiquement utilisées pour mesurer le coefficient de nonlinéarité d'un solide : les méthodes d'amplitude finie [47], qui sont similaires à celles décrites pour les fluides, et les méthodes acousto-élastiques [48].

2.1 Méthodes de mesure du coefficient non linéaire

Certaines méthodes de mesure du rapport B/A découlent directement de sa définition (I.1.12). C'est le cas des méthodes thermodynamiques I.1.12 et isentropiques I.1.9. D'autres techniques, les méthodes dites d'amplitudes finies, sont basées sur la mesure des distorsions subies par une onde se propageant dans un milieu possédant un rapport B/A non nul.

2.1.1 Méthodes acousto-élastiques

Ces méthodes regroupent les méthodes thermodynamiques et les méthodes isentropiques permettant de déterminer le coefficient non linéaire $\frac{B}{A}$ par la mesure de la variation de célérité de l'onde acoustique dans le milieu de propagation.

2.1.1.1 Méthodes thermodynamiques

Le rapport B/A peut être estimé si un certain nombre de propriétés thermodynamiques du matériaux sont mesurées. Si les variations de célérité sont étudiées pour une large plage de pressions hydrostatiques (à température constante) et pour une large plage de températures (à pression constante), les dérivées partielles de l'équation peuvent être calculées. On peut ainsi déterminer le rapport B/A avec la connaissance des paramètres ρ_0, c_0, α_T et C_p du matériau. Le principal intérêt de cette méthode, introduite en 1960 par Beyer [49, 50], est qu'il n'est pas nécessaire de connaître parfaitement les caractéristiques des transducteurs utilisés pour la mesure de la célérité, contrairement aux méthodes d'amplitude finie (développées dans la partie 2.1.2). En effet, une mesure du temps de vol suffit à déterminer avec suffisamment de précision la célérité si l'on connaît parfaitement la distance séparant le transducteur d'émission de celui de réception. De plus, la pression et la température peuvent être mesurées avec une grande précision. On peut obtenir typiquement une précision d'environ $\pm 3\%$ pour les fluides et $\pm 5\%$ pour les tissus biologiques. Néanmoins, le principal inconvénient de cette méthode est le fait d'imposer au matériau de fortes variations de pression (environ 100 à 200 fois la pression atmosphérique) et de température (environ 30 $^\circ$ C). Ces fortes variations sont nécessaires à l'obtention des dérivées partielles de la célérité. De plus, de telles variations ne peuvent pas être générées *in situ* et risquent d'endommager de manière irréversible les échantillons testés. Enfin, les grandeurs thermodynamiques α_T et C_p (éq. (I.1.11)) ne sont pas toujours faciles à obtenir. Cependant certains auteurs ont montré que l'utilisation des valeurs de α_T et C_p pour l'eau n'introduisent que peu d'erreur dans la détermination du coefficient non linéaire pour certains matériaux [51]. Enfin, une méthode thermodynamique relative a été mise au point par Sarvazyan *et al.* [52]. Elle permet de mesurer les variations du coefficient non linéaire dans des solutions d'acides aminés ou de protéines en fonction de leurs concentrations avec une précision d'environ $0,3\%$.

2.1.1.2 Méthodes isentropiques

L'expression (I.1.9) montre que le rapport B/A peut être simplement déterminé en mesurant la variation de célérité induite par une variation isentropique de pression et en multipliant le résultat par le terme constant $2\rho_0 c_0$. Comme la méthode thermodynamique, elle ne nécessite pas de calibration des transducteurs utilisés pour la mesure de célérité. De plus, cette méthode isentropique ne requiert pas la connaissance d'autres grandeurs thermodynamiques du matériau testé. La mesure de variation de la célérité à une variation isentropique de la pression peut être effectuée de différentes manières. La première idée qui a été exploitée par Emery *et al.* [53] consiste à mesurer la phase d'un train d'ondes lors d'une variation rapide de la pression hydrostatique dans un système où la distance entre l'émetteur et le récepteur est constante. Dans ce cas, la variation de pression requise est seulement de 1 ou 2 atmosphères [54]. En 1984, Seghal *et al.* [55] ont introduit une méthode utilisant la mesure de la phase d'une onde continue, associée à une varia-

tion de pression rapide d'environ 67 atmosphères. Bien que plus précise, cette méthode ne peut être utilisée que pour les matériaux présentant une atténuation suffisante pour éviter l'apparition d'onde stationnaire, ce qui n'est pas le cas des matériaux fissurés. La détection doit intervenir lors de l'apparition de fissures qui ne peuvent pas augmenter significativement l'atténuation. Il a aussi été envisagé d'utiliser deux récepteurs séparés par une distance connue [56] ou une cavité résonante associée à une boucle à verrouillage de phase [57], afin de mesurer les variations de célérité avec une très grande précision.
Du fait de sa bonne précision et des faibles volumes d'échantillons nécessaires [58], la méthode isentropique a été souvent utilisée pour mesurer le coefficient non linéaire de tissus biologiques [55].

2.1.2 Méthodes d'amplitude finie

Les méthodes d'amplitude finie sont basées sur le fait que le taux de distorsion d'une onde acoustique se propageant dans un matériau est proportionnel au rapport B/A, à son amplitude et à sa fréquence. On peut donc estimer le rapport B/A en mesurant les déformations subies par une onde sinusoïdale d'amplitude finie à une certaine distance d'un émetteur. Les données expérimentales de mesure du taux de distorsion sont comparées à un modèle théorique, fournissant ainsi le coefficient non linéaire. On peut aussi comparer la perte d'énergie par la composante à la fréquence fondamentale à un modèle théorique [59]. Dans tous les cas, la précision de la mesure est liée aux approximations introduites dans le modèle en comparaison du montage expérimental utilisé.

2.1.2.1 Génération d'harmoniques

Généralement, le taux de distorsion est mesuré en suivant la croissance d'un ou plusieurs harmoniques de l'onde [60, 61]. Une expression très souvent utilisée de l'amplitude de la pression acoustique p_2 de l'harmonique 2 à une distance z d'un transducteur ultrasonore de type piston rayonnant à une fréquence f est :

$$p_2(z) = p^2(0)\frac{\left(\frac{B}{A}+2\right)\pi f z}{2\rho_0 c_0^3}\cdot D(z)e^{\left(\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2}\right)z}. \tag{I.2.1}$$

Les α_i sont les atténuations avec i correspondant à l'indice 1 ou 2 pour respectivement les fréquences du fondamental et du deuxième harmonique. Dans le cas d'une onde plane, le terme de correction de diffraction $D(z) = 1$. Les approximations effectuées pour obtenir cette expression sont les suivantes :

- l'onde est de faible amplitude de telle sorte que l'énergie nécessaire pour générer les harmoniques est négligeable devant l'énergie du fondamental $p(0)$,
- l'atténuation α_1 est linéairement proportionnelle à la fréquence.

La première approximation est facilement réalisable expérimentalement par un choix convenable de la tension fournie au transducteur d'émission. Par contre, la deuxième

approximation est parfois mise en défaut. Dans le cas où l'atténuation n'est pas proportionnelle à la fréquence, elle peut être mesurée séparément aux deux fréquences et ensuite être introduite dans le modèle théorique.
Un problème important apparaissant dans cette méthode est qu'il n'est pas possible de dissocier les harmoniques générées par la propagation à travers un échantillon et les harmoniques générés par le système d'excitation lui-même [62], que ce soit directement de la chaîne électrique (générateur, amplificateur) ou de la pastille piézoélectrique du transducteur. Une méthode alternative développée dans les années 1950 par Westervelt *et al.* [13,63] permet d'étudier l'interaction paramétrique entre deux ondes ultrasonores colinéaires.

2.1.2.2 Interaction paramétrique

Les travaux théoriques sur l'interaction non linéaire de deux ondes ultrasonores (ou en d'autre mot le *"scattering"* du son par le son) ont commencé avec les études de M.J. Lighthill sur le son induit par les turbulences [15]. Les ondes acoustiques se propageant dans un milieu ayant un comportement non linéaire interagissent les unes avec les autres provoquant l'apparition de composantes aux fréquences harmoniques ou aux fréquences issues de combinaisons des fréquences propagées [64]. Dans le cas de faibles nonlinéarités, l'échange d'énergie le plus important entre les différentes composantes spectrales est observé lorsque les conditions de synchronisation sont satisfaites, c'est-à-dire lorsque les fréquences de combinaison se propagent dans le milieu avec une vitesse d'une onde libre dans un système à la même fréquence. En considérant deux ondes planes dont le déplacement est caractérisé par $u_i(z,t) = A_i \cos\left(k_i z - \omega_i t\right)$ avec $i = 1, 2$ définissant chaque onde, d'amplitudes A_1 et A_2 et de nombre d'ondes $k_1 = \omega_1/V_L$ et $k_2 = \omega_2/V_L$. La nonlinéarité du milieu de propagation génère des ondes harmoniques aux fréquences $2\omega_1$ et $2\omega_2$ et des ondes secondaires aux fréquences $\omega_1 \pm \omega_2$ [12, 14, 63], dont l'amplitude est donnée par :

$$u_{\pm}(z,t) = \mp C \cos\left[\left(k_1 \pm k_2\right) z - \left(\omega_1 \pm \omega_2\right) t\right], \tag{I.2.2}$$

où

$$C = \frac{1}{4} k_1 k_2 A_1 A_2 \beta z. \tag{I.2.3}$$

On remarque qu'il est alors possible de déterminer le coefficient non linéaire β en mesurant l'amplitude des composantes d'interaction paramétrique. Cette méthode est utilisée au cours de ce travail de thèse dans la partie portant sur la détermination des propriétés non linéaires non classiques d'un matériau fissuré. Une autre méthode, utilisant un effet secondaire de l'interaction paramétrique de deux ondes de fréquences éloignées, la modulation de phase, a été développée un peu plus tard par Zverev *et al.* [65] et utilisée dans les années 2001 par Barrière *et al.* [30].