C H A P I T R E   I V

Les problèmes cumulatifs

La réalisation de tout projet fait appel à des moyens dont la disponibilité influence la fixation, l'objectif et l'ordonnancement du projet.

J.F. BOSS (18) écrit "... une grande partie des efforts consacrés à la gestion du projet s'appique donc à l'analyse des moyens nécessaires, afin d'assurer la compatibilité des besoins et le contrôle de l'utilisation des moyens. Cependant, l'analyse des projets par les diverses méthodes de chemin critique ne tient pas compte explicitement des ressources dans ces formes initiales". Ces ressources peuvent être évidemment constituées d'argent, de matériaux, de personnel, etc....

La présence de telles limitations de ressources introduit un aspect combinatoire lié aux conflits intervenant entre tâches utilisant une même ressource. Les notions de marges et de dates limites ne suffisent plus à caractériser l'ensemble des ordonnancements admissibles*.

On appelle problème cumulatif tout problème d'ordonnancement soumis à deux types de contraintes potentielles et de limitation de ressources. Une contrainte cumulative apparaîtra, par exemple, pour un ensemble de tâches de maçonnerie si trois maçons seulement sont disponibles : on ne pourra pas exécuter, à la fois, plus de 3 de ces tâches sans que l'on puisse savoir à l'avance laquelle sera retardée.

Nous nous intéresserons, dans ce qui suit, à une certaine classe de ces problèmes cumulatifs.

1) Définition :

Soit n le nombre de tâches. Chaque tâche i aura :

- une intensité M_i (nombre de moyens nécessaires à son exécution)
- une charge $C_i = M_i \times D_i$. Cette charge peut être assimilée à une quantité de travail (fig. 4.1)

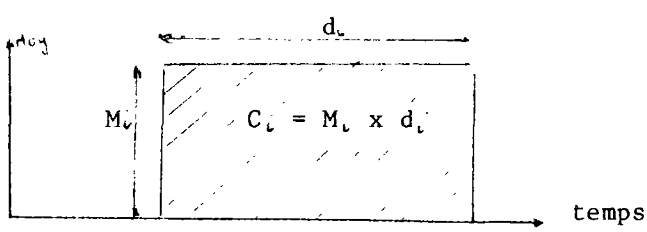


fig. 4.1

- La charge totale sera $CHT = \sum c_i$, pour i variant de 1 à n
- T_c représentera le temps critique.

* On dit d'un ordonnancement qu'il est admissible ou réalisable s'il respecte toutes les contraintes impératives.

Pour chaque ordonnancement réalisable, on définit :

- t_i : début réel d'exécution de la tâche i
- T_r : durée réelle d'exécution de l'ensemble du projet ($T_r \geqslant T_c$, temps critique ne tenant pas compte des ressources)
- La fonction de charge I(k), k variant de 1 à T_r (voir fig. 4.2)
  I(k) représente le nombre cumulé de moyens nécessaires durant la k-ième unité de temps.
- L'intensité maximale : $I_{max} = \max(I(k))$ pour $k \in (1, T_r)$
- L'intensité moyenne est : $I_m = \left\lceil \frac{CHT}{T_r} \right\rceil$

  ($\lceil\ \rceil$) : partie entière supérieure
- L'écart partiel durant la k-ième unité de temps sera : $e_k = |I(k) - I_m|$
- L'écart total est : $E = \sum e_k$ pour $k \in (1, T_r)$

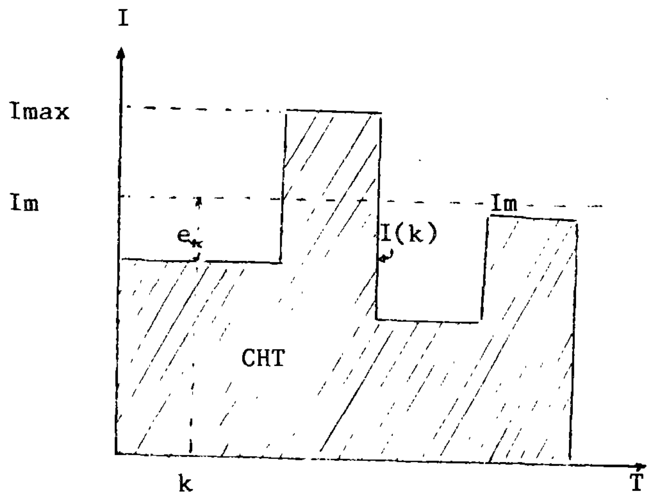


fig.4.2

2) Types de problèmes cumulatifs dans le domaine du bâtiment

Le nombre de problèmes cumulatifs est très important, on peut trouver autant de problèmes cumulatifs que de projets.

Dans le domaine du bâtiment, le délai de réalisation est en général le critère le plus important. Nous nous sommes alors intéressés aux problèmes suivants, les plus représentatifs :

- optimisation du délai total avec des ressources données,
- optimisation des ressources avec un délai donné.

Les problèmes auxquels nous nous sommes intéressé sont des problèmes à un seul moyen. Lorsqu'il y a plusieurs ressources limitées, on traitera chaque ressource, on choisira ensuite la solution (la plus contraignante) qui vérifie l'ensemble des limitations de ressources.
En pratique, on s'intéresse aux limitations de ressources importantes telles que des équipements spéciaux, des équipes spécialisées, etc..

2.1 Optimisation de ressources avec un délai donné

Le problème le plus utilisé de cette classe est connu sous le nom de "lissage".

La courbe de charge I(k) obtenue à partir des résultats des potentiels n'est généralement pas satisfaisante : elle présente trop de variations, c'est à dire que l'écart total E est important. Ces variations peuvent correspondre, suivant le moyen utilisé, à des embauches et débauches ou à des immobilisations de matériels, engendrant ainsi des frais pouvant être importants.

Ce problème a d'avantage d'importance pour les PME puisqu'elles ne disposent pas en général d'un grand nombre de projets pour rendre plus souple l'utilisation des ressources.

Ce problème peut être formulé de la manière suivante : Trouver un ordonnancement réalisable minimisant l'écart total E sous la contrainte $T_r = T_c$

Il consiste donc à tenter d'obtenir un niveau aussi constant que possible des ressources utilisées, c'est à dire une stabilité de la courbe de charge dans le temps.

2.2 Optimisation du délai avec des ressources données

Ce problème est connu également sous le nom de "Nivellement".

L'ordonnancement défini dans le problème central aboutit à une liste de ressources définie dans le temps. En BTP, les ressources les plus importantes sont constituées pour l'essentiel par des centrales à béton, des grues, des coffrages. Lorsque ces ressources sont supérieures à celles dont dispose l'entreprise, cet ordonnancement n'est plus réalisable. Le problème peut être alors formulé de la manière suivante : Trouver un ordonnancement réalisable minimisant le temps réel sous la contrainte $I_{max} \leqslant M$, M étant une constante donnée.

2.3 Exemple d'illustration des problèmes de lissage et de nivellement

Soit un ordonnancement défini par l'exemple de la fig. 4.3

Cet ordonnancement aboutit au diagramme GANTT (fig. 4.4) et à la courbe de charge (fig. 4.5). La durée de cet ordonnancement au plus tôt serait alors de 11 jours.

aspect lissage : la fig.4.5 montre qu'il est nécessaire d'utiliser aux 2ème et 3ème jours 25 unités alors qu'au 4° 12 unités suffisent. De telles fluctuations , bien que techniquement possibles, ne sont en général pas admises.

aspect nivellement : Si la ressource totale qui peut être mise à la disposition du projet est inférieure à 25, cet ordonnancement est impossible. Il convient donc de trouver un autre ordonnancement qui satisferait à la condition $I_{max} \leqslant 25$ et qui minimiserait T_{π}

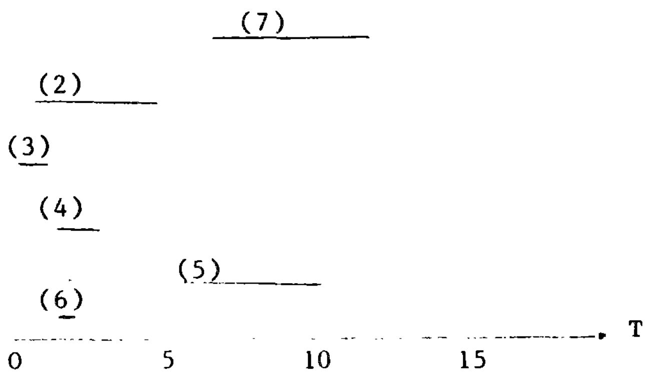


fig. 4.4 : Diagramme GANTT

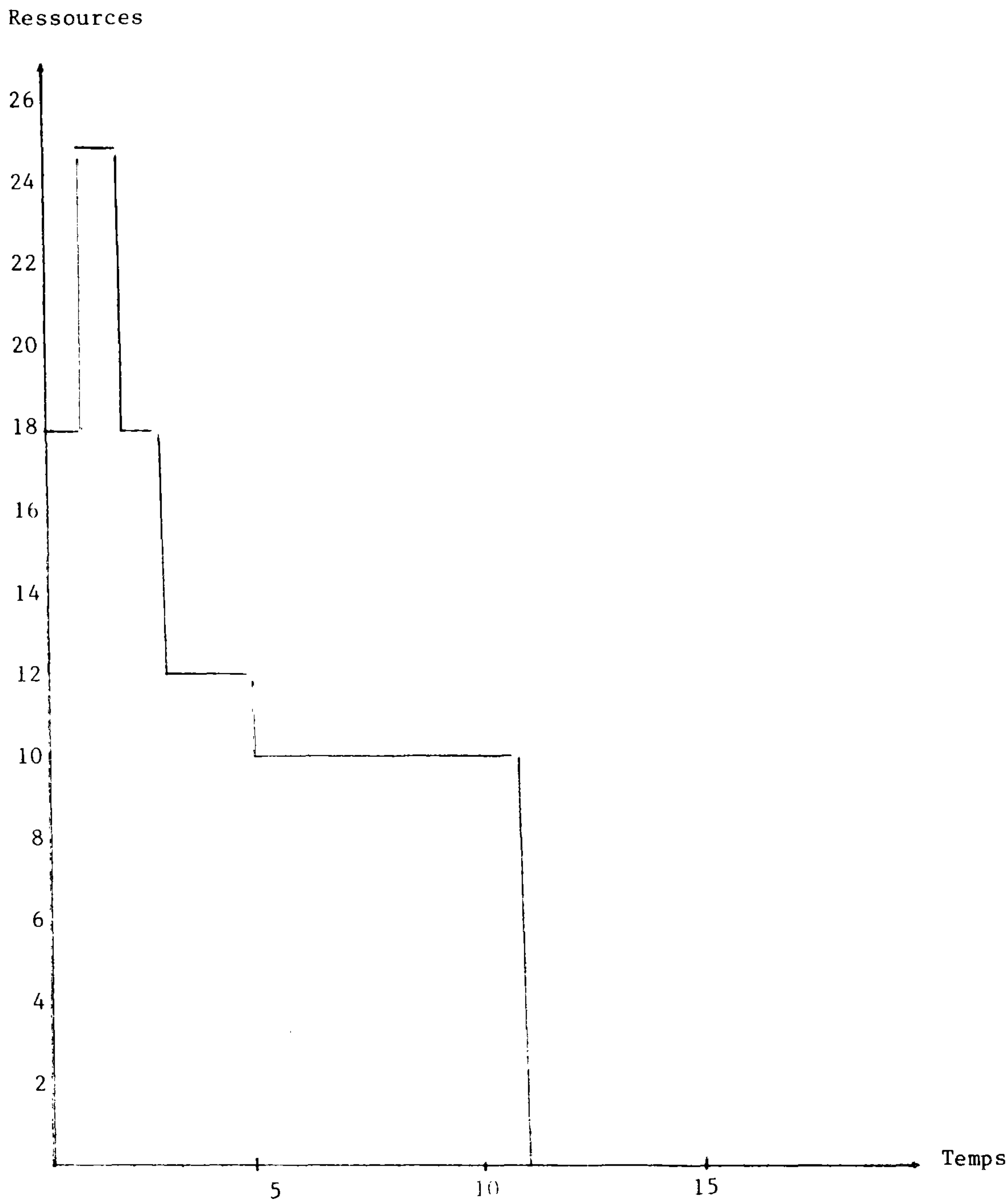


fig. 4.5 : Diagramme de charge

3. Nivellement

3.1 Modélisation des contraintes de cumul de moyens

En gardant les notations du chapitre II, soit I un ensemble de tâches dont la réalisation nécessite l'utilisation d'un moyen k tel que :

$$\sum_{i \in I} q_i^k \geqslant Q^k$$

Les tâches constituant l'ensemble I ne peuvent être exécutées simultanément, c'est à dire que deux tâches au moins parmi celles-ci doivent être exécutées sur des intervalles de temps disjoints. Pour chacune des tâches appartenant à I, on devra écrire :

$$\forall i \in I \text{ , } q_i^k \leqslant Q^k - \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} q_j^k \delta_{ji}$$

inégalité dans laquelle la variable δ_{ji} vaut 1 si le début de la tâche i est compris dans l'intervalle de temps où est exécutée la tâche j, 0 sinon. On voit qu'on est ramené à un programme linéaire mixte.

Parmi les diverses méthodes connues pour la résolution des programmes linéaires mixtes, on peut citer la méthode de BENDERS (37,38) qui semble la plus appropriée car il s'agit d'une méthode très générale de décomposition.

Cependant, si la programmation linéaire donne des résultats exactes, elle n'est pas envisageable dans le cas de problèmes de chantier où le nombre de tâches (qui constituent les variables) peut être important, la rendant aussi inopérante.

3.2 Méthodes heuristiques

Nous entendons par méthodes heuristiques toute procédure de recherche d'une bonne solution du problème par opposition à la recherche d'une solution optimale. De telles procédures sont utilisées lorsque les méthodes exactes de résolution sont d'une application trop lourde. Pour les problèmes cumulatifs, on peut classer les méthodes heuristiques en 2 catégories (15) :

- les méthodes chronologiques basées essentiellement sur un avancement dans le temps sans aucune possibilité de revenir en arrière,

- les méthodes non chronologiques s'appuyant sur la notion de succession d'une tâche dans le graphe représentatif du projet. Aucune référence au temps n'est faite, l'avancement dans le temps n'est donc pas nécessairement progressif.

3.2.1 Les méthodes chronologiques

Elles peuvent être décrites par le principe général suivant :

- une discrétisation du temps est effectuée

- à chacun des instants ainsi défini, des décisions irrévocables de commencer certaines tâches sont prises en fonction d'un critère de choix établi une fois pour toutes au départ du traitement.

Un avancement du temps par pas successifs est donc effectué, les décisions prises à l'instant t n'étant fonction que des décisions antérieures, c'est à dire de la partie d'ordonnancement déjà mise en place.

Des critères variés de lancement des tâches peuvent être utilisés. Ils donnent des résultats différents : nous reviendrons sur ces critères.

Pour l'algorithme détaillé de cette méthode, voir (15). L'organigramme de cette méthode est illustré par la fig. 5.6.

Selon la manière de prendre en compte le critère de hiérarchisation, on peut distinguer :

- Méthode sériellée : à l'instant $T_1 = 0$, on établit une liste globale de toutes les tâches classées avec le critère de choix retenu, liste dite potentielle. Cette liste reste immuable jusqu'à la fin (classement topologique).

- Méthode parallèle : Un nouvel ordre de priorité des tâches est recalculé à chaque instant t_i envisagé. Il y a, par conséquence, une actualisation des critères tenant compte des décisions prises (classement non topologique).

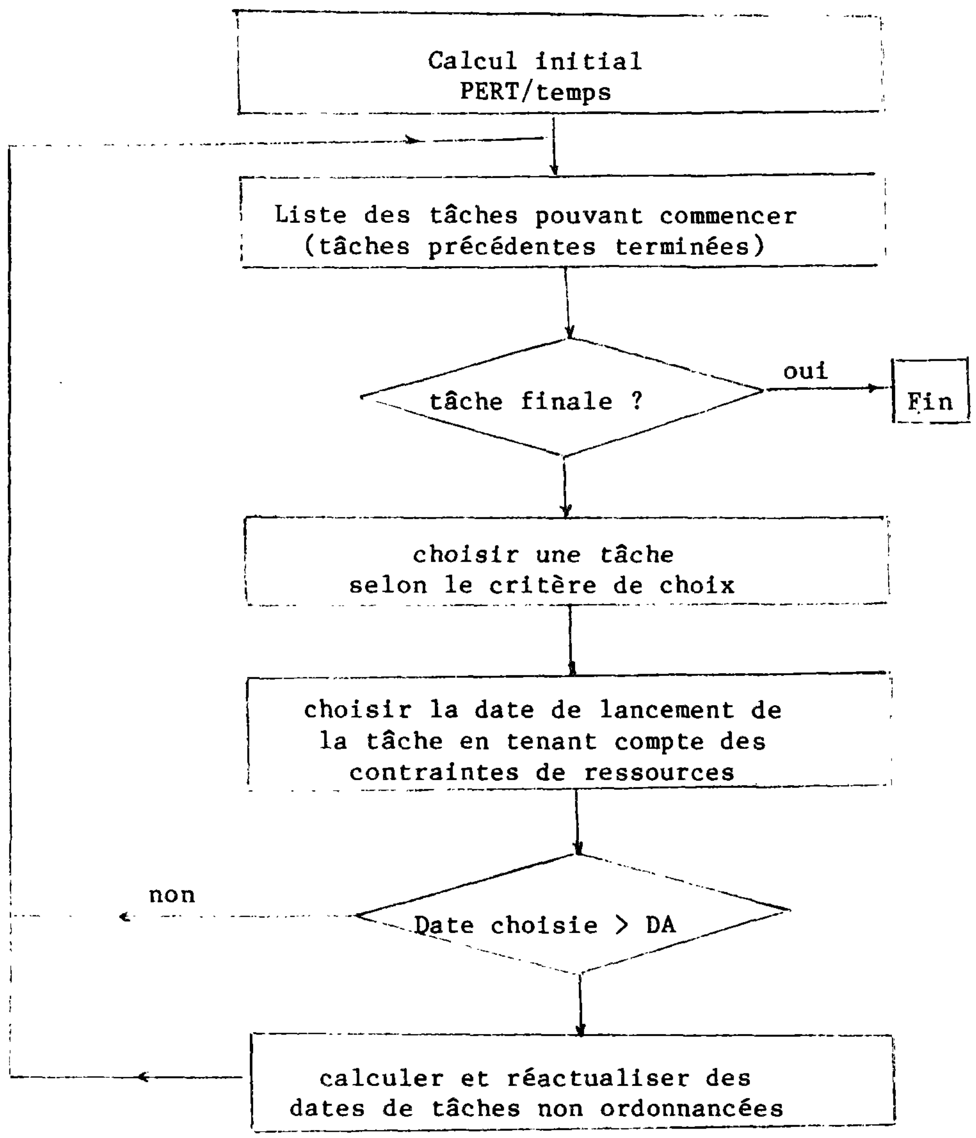


fig. 4.7 : Organigramme de la méthode non chronologique

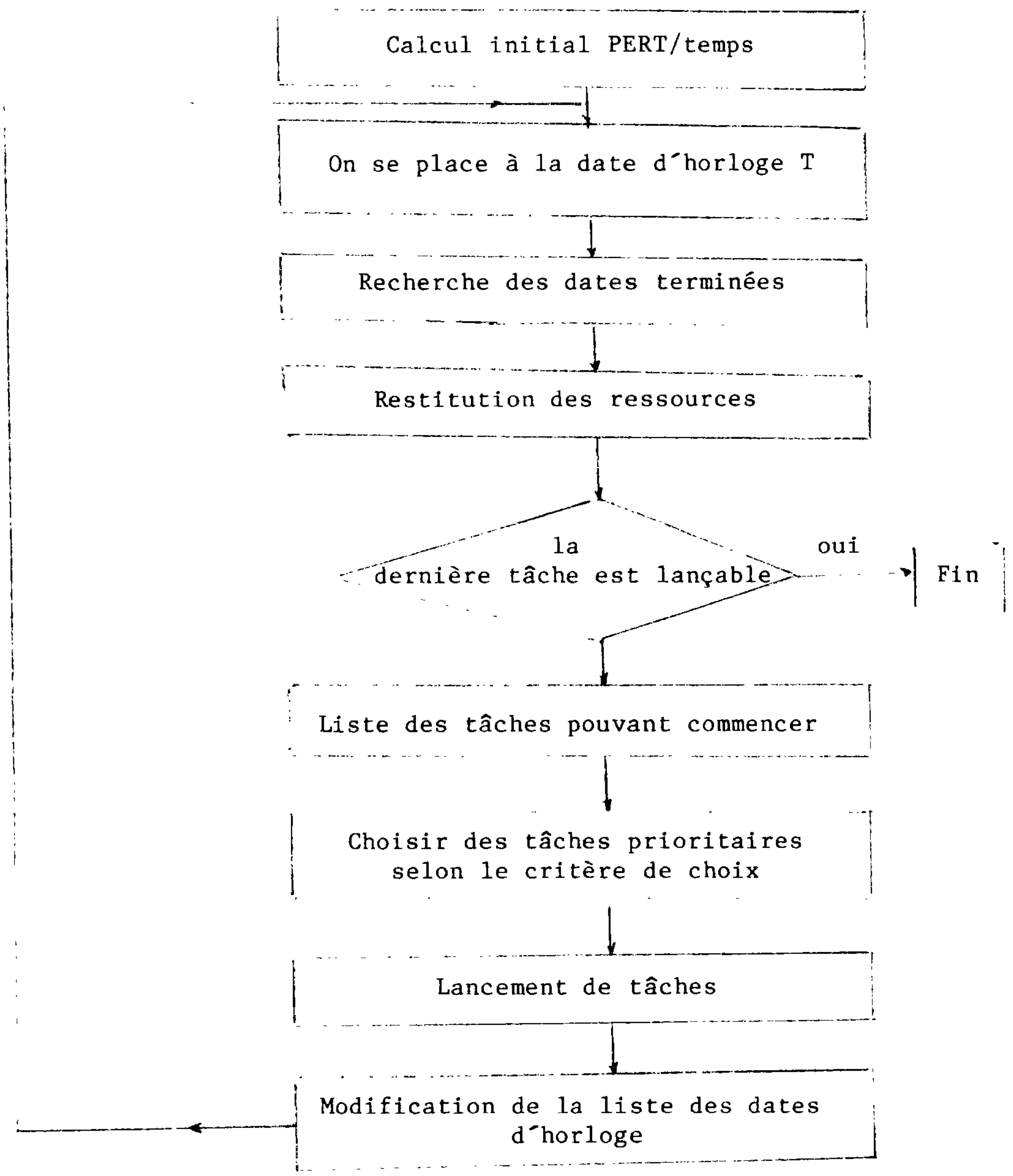


fig. 4.6 : Organigramme de la méthode chronologique

3.2.2 Les méthodes non chronologiques

Au contraire des méthodes chronologiques, l'idée principale des méthodes non chronologiques n'est pas de fixer un temps t a priori, mais à partir des tâches déjà ordonnancées, de déterminer une tâche prioritaire qui sera lancée. Sa date de lancement est calculée en fonction de l'état des courbes de charge à ce stade de l'algorithme. Dès lors, il n'existe pas nécessairement un cheminement progressif dans le temps, ce qui justifie le nom de ces méthodes.

Pour l'algorithme détaillé de cette méthode, voir (15). La fig. 4.7 donne l'organigramme de cette méthode.

3.2.2.1 Critères d'évaluation du choix des tâches dans le temps

Ces critères peuvent être pour chaque tâche j

- temporels : sa marge totale, sa durée maximale ou minimale, ses dates au plus tôt ou au plus tard, ...
- de ressources : son utilisation de ressources maximale, ...
- de structure : le nombre maximum de tâches de sa fermeture transitive, ...

3.2.2.2 Comparaison des différents critères de choix des tâches

DAVIS-PATTERSON (10) ont effectue une comparaison entre les méthodes heuristiques avec 83 projets de la taille 20-27 tâches. On trouve que les critères temporels donnent de meilleurs résultats que ceux de ressources. On précise cependant qu'aucun critère ne donne constamment de meilleurs résultats que les autres.

Le tableau de l'Annexe 3 résume les résultats de cette étude.

MANGIN (15) après avoir dégagé 3 critères :

- DO (j) (compte tenu de la limitation de ressources)
- UR (j) = durée (j) + $\underset{k \ IR(j)}{\text{durée (k)}}$
  avec IR (j) = nombre de tâches de la fermeture transitive Γ_j^+ de la tâche j
- MT (j)/ IR (j)

conclut (page 204) à propos du choix d'un critère : "Il n'est de toute façon pas évident du tout qu'un tel choix soit souhaitable pour la simple raison qu'il n'est jamais possible d'affirmer, même avec un échantillon de taille importante, qu'un critère de choix donné fournira toujours de bons résultats."

3.2.2.3 Choix de la méthode

Pour la résolution des problèmes de limitation de cumul, la plupart des auteurs, notamment GORDON (21), sont d'accord pour dire que globalement la méthode non chronologique apporte des améliorations sensibles par rapport à la méthode chronologique. Nous avons donc retenu cette méthode.

On envisagera la simulation, en utilisant plusieurs critères pour déterminer les meilleurs résultats. Nous considèrerons comme critères la marge totale, l'intensité maximale et la durée minimale des tâches.

3.3 Méthodes arborescentes

Le fait qu'il y ait peu de chance pour que les problèmes NP-complets soient résolus en un temps polynomial (ce qui est le cas des problèmes de limitation de cumuls) a incité à étudier d'autres approches pour résoudre ces problèmes : les algorithmes d'énumération. Ce sont des techniques d'énumération implicites basées sur une exploration par séparation et évaluation ("branch and bound"), séparation par évaluation séquentielle (S.E.S.), séparation par évaluation progressive (S.E.P.).

Ces méthodes consistent schématiquement à décrire l'ensemble de solutions sous la forme d'une arborescence et à parcourir cette arborescence sans oublier aucun noeud. Alors, la notion d'évaluation par défaut permet, lorsque l'on connaît déjà une bonne solution réalisable, de parcourir implicitement des branches entières de l'arborescence sans en examiner chacun des noeuds.

Ces méthodes ont été largement décrites par de nombreux auteurs : B. ROY (1), BALAS (43), GORENSTEIN (44) et MANGIN (15). Elles sont exposées en Annexe 2.

3.4 Autres méthodes

Nous citerons quelques études parmi les plus récentes concernant le nivellement, appliquées plus ou moins à des cas particuliers, qui sont surtout destinées aux problèmes d'ateliers, mais dont la démarche peut servir à l'application des ordonnancements dans le domaine du bâtiment.

P. NEPOMIASTICHY (13) propose une méthode qui consiste à "oublier" la contrainte cumulative et à résoudre un problème de programmation linéaire en minimisant un coût supplémentaire de violation de cette contrainte.

J. AGARD et G. GAMOT (16) exposent une méthode d'ordonnancement pour standardiser les visites d'avions d'Air France. cet ordonnancement doit respecter un niveau maximum d'effectif spécialisé. La liste d'appel est constituée par un classement de dates au plus tard croissant. Dans cet article l'intensité a été considérée comme pouvant varier. Il faut signaler que dans de tels cas, c'est la notion même de chemin critique qui est remise en cause. Dans le domaine du BTP, une telle hypothèse n'est, en général, pas admise pour la bonne organisation de travaux.

J. ERSHER, G. FONIA et F. ROUBELET (12) modélisent le problème par un graphe potentiels-tâches non conjonctif. Les conflits pour l'utilisation des moyens introduisent un aspect combinatoire dans le problème. Cet aspect apparaissant dans les groupes d'arcs non conjonctifs du graphe, une méthode d'analyse s'appuyant sur la transformation du graphe est proposée.

.. Lissage

4.1 Critère d'évaluation de lissage

Parmi les critères d'évaluation de lissage, on peut citer :

a) Critère E ou écart total

Ce critère est retenu par la majorité des méthodes, notamment par (3)

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left| I(k) - I_m \right|$$

b) Critère ε^2 ou somme des carrés des écarts

Ce critère est notamment utilisé par BURGESS-KILLEBREW (8)

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{DEL} (\bar{X}_i - X_i)$$

où

DEL est le délai initial, celui-ci étant découpé en tranches de temps unités

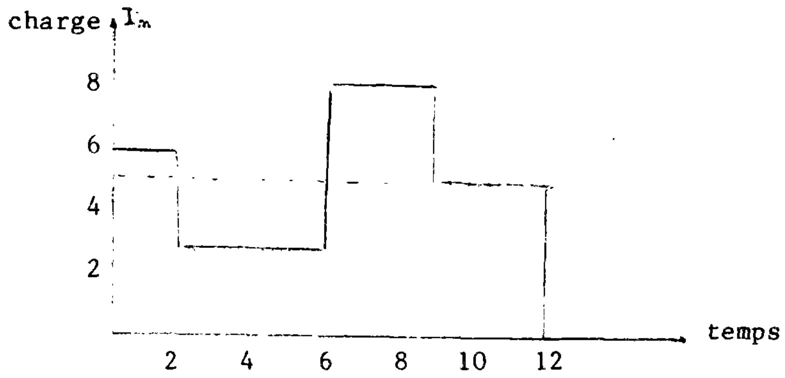
$\bar{X}_i$ est le niveau de charge désiré par la tranche de temps i

X_i est la charge obtenue dans la tranche i pour un graphe donné.

c) Critère LA ou longueur absolue

Ce critère retenu par MASON MOODIE (9) représente la somme absolue des décrochements se produisant sur la courbe de charge.

Exemple d'illustration : soit une courbe de charge donnée par la fig. 4.8



E = 19
ε^{i} = 45
LA = 22

fig. 4.8

4.2 Exemples de méthodes heuristiques de lissage

- Méthode de BURGESS-KILLEBREW (8)

  Le principe de base de cette méthode est de partir des dates au plus tôt (planning calé à gauche) et de déplacer vers la droite (c'est à dire leurs dates au plus tard) les tâches qui bloquent les autres.

- Méthode TULIP (35)

  Contrairement à la méthode précédente, cette méthode travaille sur un diagramme qui évolue.

4.3 Méthode de MOLOS (Méthode opérationnelle de lissage par optimisations successives)

4.3.1 Principe

Cette méthode débute par un vecteur charge plein : la fonction charge au plus tôt. Le principe de cette méthode est de combler les trous (créneaux) de la courbe charge au plus tôt à partir de la droite en plaçant au milieu les activités efficientes*.

L'algorithme de la méthode MOLOS tel que donné dans (3) est reproduit en page 43.

* Une activité est dite efficiente si, en jouant sur sa marge totale, il est possible de combler entièrement ou en partie un créneau.