

La Représentation diffusive

Les opérateurs linéaires intégraux c'est à dire les opérateurs $\mathcal{H}$ de la forme :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{h}(t, s)u(s)ds \quad (1)$$

sont très fréquents dans les modèles de la physique. L'étude de tels opérateurs est donc primordiale et d'autant plus délicate que la classe d'opérateurs considérée est très vaste : elle englobe en particulier les opérateurs rationnels et, si le noyau $\mathbf{h}$ est étendu aux distributions, les opérateurs différentiels. Tant pour l'analyse que pour la mise en œuvre numérique, il peut paraître judicieux d'en chercher une formulation plus intéressante que la formulation intégrale (1), par nature de manipulation délicate. En effet la formulation (1) est *héréditaire* : la détermination de la valeur de $\mathcal{H}u$ à un temps t fait intervenir tout le passé de u , ce qui, du point de vue numérique par exemple, n'est pas économique.

L'approche dénommée *représentation diffusive*, présentée dans [6], s'inscrit dans cette problématique : elle permet la formulation de $\mathcal{H}$ au moyen de réalisations d'état, c'est-à-dire, dans le cas où l'opérateur $\mathcal{H}$ est *causal* et u à support dans $\mathbb{R}_+$:

$$\dot{X} = Bu, \quad (2)$$

$$\mathcal{H}u = CX, \quad (3)$$

où B et C sont des opérateurs *locaux en temps*. Du fait de la localité des opérateurs et de l'équation, cette formulation n'est pas héréditaire, une intégration de "proche en proche" de (2) pouvant être réalisée, ne nécessitant aucunement la mémorisation du passé de u . La disparition de la nature héréditaire dans la formulation d'état (2,3) est en fait due à l'introduction de la variable intermédiaire X dans laquelle est "résumé" le passé de u d'une manière suffisante pour la synthèse de $\mathcal{H}$ définie par l'opérateur C . Au delà des opérateurs $\mathcal{H}$ causaux, on pourra trouver dans [6] des formulations d'état généralisées de la forme :

$$DX = Bu,$$

$$\mathcal{H}u = CX,$$

où D est un opérateur local plus général que ∂_t , éventuellement spatial.

Via la représentation diffusive on a accès à des réalisations d'état variées d'opérateurs intégraux, ce qui, sur le plan numérique notamment, permettra la simulation de systèmes complexes. Mais cette approche est bien plus qu'une méthode dédiée aux seules approximations numériques : c'est une méthodologie générale qui fournit un cadre mathématiques unifié pour l'analyse, la manipulation et la réalisation concrète d'une grande classe d'opérateurs intégraux. Ainsi, un opérateur rationnel simple et un opérateur non convolutif très complexe sont selon cette approche appréhendés et traités de manière identique et relativement simple, le passage aux réalisations numériques utilisables étant possible à tout moment.

L'essentiel de la représentation diffusive (dans le cas causal) est présenté dans les paragraphes qui suivent.

1.1 Principe général

On considère un opérateur linéaire intégral causal $\mathcal{H}$ de noyaux $\mathbf{h}$ (cf. (1)) et de "réponse impulsionnelle" h définie par $h(t, s) := \mathbf{h}(t, t - s)$, avec $h(t, \cdot)$ supposée, dans un premier temps, localement intégrable pour tout t . Par simple réécriture de (1), on déduit :

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}u)(t) &= (h(t, \cdot) * u)(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(t, s)u(t - s)ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(t, s)\mathbf{u}(t, s)ds, \end{aligned}$$

où $\mathbf{u}(t, s) = u(t - s)$ est appelée *histoire* de u (à l'instant t). Avec la notation $\langle f, g \rangle := \int f(s)g(s) ds$, on obtient alors la propriété fondamentale pour la suite :

$$\forall t, \quad (\mathcal{H}u)(t) = \langle h(t, \cdot), \mathbf{u}(t, \cdot) \rangle,$$

c'est-à-dire : le résultat de l'opérateur $\mathcal{H}$ sur une fonction u s'exprime par le *produit* (au sens du crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle$) de la *réponse impulsionnelle* de $\mathcal{H}$ et de l'*histoire* de u .

On notera d'une part que le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est indépendant de t (au sens où le domaine parcouru par s l'est), d'autre part qu'à chaque t (fixé), $h(t, \cdot)$ et $\mathbf{u}(t, \cdot)$ sont des fonctions d'une variable temps $s \in \mathbb{R}$. Ces deux propriétés, qui ne sont pas vérifiées sous la formulation initiale (1), vont permettre d'une part des transformations simples et riches en propriétés intéressantes, d'autre part de définir un cadre topologique clair basé sur les espaces fonctionnels en dualité par le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On considère une transformation linéaire inversible $\mathcal{A}$ (indépendante de t et portant sur $\mathbf{u}(t, \cdot)$) telle que, de manière pour l'instant *formelle*, on ait :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle h(t, \cdot), \mathcal{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u}(t, \cdot) \rangle.$$

En transposant $\mathcal{A}^{-1}$ sur $h(t, \cdot)$ via son adjoint formel, on a :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle (\mathcal{A}^{-1})^*h(t, \cdot), \mathbf{A}\mathbf{u}(t, \cdot) \rangle,$$

soit encore :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle$$

avec $\psi(t, \cdot) = (\mathbf{A}\mathbf{u}(t, \cdot))$ et $\mu(t, \cdot) = (\mathcal{A}^*)^{-1}h(t, \cdot)$. On a ainsi accès à de nouvelles formulations de l'opérateur $u \mapsto \mathcal{H}u$ qui toutes ont l'avantage de "séparer ce qui se rapporte à $\mathcal{H}$ de ce qui se rapporte à u ", et dont certaines pourraient être particulièrement intéressantes. Ainsi par exemple, le cas où ψ serait solution d'une équation différentielle de "résolution aisée", du type :

$$\partial_t \psi = f(\psi, u)$$

pourrait présenter de gros avantages sur le plan numérique.

Considérons maintenant l'opérateur linéaire $(\partial_t - pI)$. On peut montrer que cet opérateur admet un inverse dans $\mathcal{L}_+(L^2(\mathbb{R}))$, algèbre des opérateurs linéaires continus et causaux dans $L^2(\mathbb{R})$, si et seulement si $\text{Re}(p) < 0$. On introduit alors la définition abstraite (dont la justification apparaîtra plus loin) :

Définition 1 On appelle *opérateur de représentation diffusive*, noté $\mathfrak{Rd}$, la fonction opératorielle :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Rd} : \quad \mathbb{R}_- + i\mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{L}_+(L^2(\mathbb{R})) \\ p &\longmapsto \mathfrak{Rd}_p = (\partial_t - pI)^{-1} \end{aligned}$$

On note $\Psi(t, \cdot)$ la *représentation diffusive* de u , c'est à dire $\Psi(t, p) = \mathfrak{Rd}_p u(t)$. Il découle de la définition précédente que Ψ est l'unique solution de la famille d'équations différentielles dans $L^2(\mathbb{R}_t)$:

$$\partial_t \Psi(t, p) = p\Psi(t, p) + u(t). \quad (4)$$

La fonction Ψ étant solution d'une équation différentielle, elle pourra, dans le cas où u est à support dans $[t_0, +\infty[$, être obtenue (éventuellement numériquement) par intégration de cette

équation à partir d'une condition initiale $\Psi(t_0, p) = 0$. On cherche donc à définir un opérateur $\mathcal{A}$ adapté, c'est-à-dire par exemple tel que :

$$(\mathcal{A}u(t, \cdot))(\xi) = (\partial_t - \gamma(\xi)I)^{-1}u(t), \quad \gamma(\xi) \in \mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R},$$

où γ est une fonction de $\xi \in \mathbb{R}$.

Pour cela, on considère un contour $\gamma \subset \mathbb{R}_- + i\mathbb{R}$ défini par un arc simple fermé (éventuellement à l'infini) qui sépare $\mathbb{C}$ en deux sous-espaces connexes disjoints notés Ω_γ^+ et Ω_γ^- . Pour des raisons techniques qui apparaîtront plus loin, on suppose en outre vérifiées les hypothèses suivantes :

$$\exists \alpha_\gamma \in]\frac{\pi}{2}, \pi[, \exists a \in \mathbb{R} \text{ tels que :}$$

$$\bullet e^{i[-\alpha_\gamma, \alpha_\gamma]} \mathbb{R}_+ + a \subset \Omega_\gamma^+, \quad (5)$$

$$\bullet \mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R} \subset \Omega_\gamma^+, \quad (6)$$

$$\bullet \gamma \cap i\mathbb{R} \text{ de mesure nulle.} \quad (7)$$

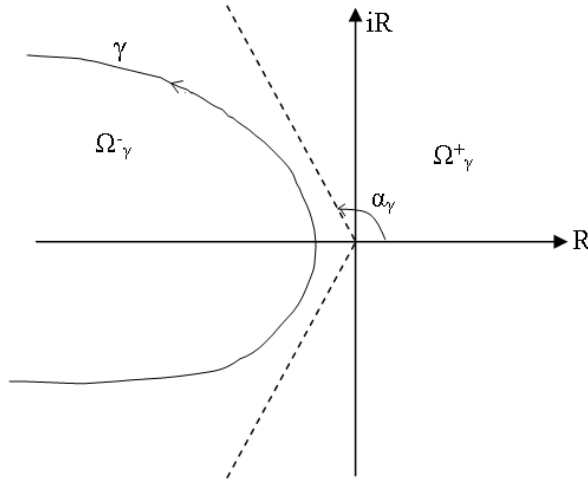


FIG. 1 – Exemple de contour γ .

On suppose enfin que l'arc γ est paramétré au moyen d'une fonction encore notée $\gamma : \xi \in J_\gamma \subset \mathbb{R} \mapsto \gamma(\xi) \in \mathbb{R}_- + i\mathbb{R}$ lipschitzienne, et qu'il existe $b, c > 0$ tels que

$$b \leq |\gamma'(\xi)| \leq c \quad \xi\text{-pp.} \quad (8)$$

De ce qui précède, on déduit aisément que $\Re d_{\gamma(\xi)} u(t)$ est l'unique solution de l'équation différentielle dans $L^2(\mathbb{R}_t)$:

$$\partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi(t, \xi) + u(t), \quad \xi \in J_\gamma. \quad (9)$$

Remarque 2 Du fait de la condition sectorielle (5) imposée au contour γ , cette équation est de nature diffusive [10]. Grâce à cette propriété, des approximations relativement peu coûteuses de l'équation d'état (9) pourront être construites. En effet, la discrétisation en ξ de γ sera d'autant moins fine que le contour s'éloignera de l'axe imaginaire pur : quelques dizaines de points de discrétisation en ξ seront en pratique suffisants.

Lorsque u est à support dans $[t_0, +\infty[$, on a nécessairement $\psi(t_0, \xi) = 0$; d'après la formule de Duhamel pour (9) et en notant $\mathcal{L}$ la transformation de Laplace causale :

$$\mathfrak{Rd}_{\gamma(\xi)}u(t) = \int_{t_0}^t e^{\gamma(\xi)(t-s)}u(s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma(\xi)(t-s)}u(s)1_{\mathbb{R}_+}(t-s)ds \quad \xi\text{-pp},$$

d'où :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Rd}_{\gamma(\xi)}u(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s}u(t-s)1_{\mathbb{R}_+}(s)ds \\ &= \int_0^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s}\mathbf{u}(t,s)ds = (\mathcal{L}_+\mathbf{u}(t, \cdot))(-\gamma(\xi)) \quad \xi\text{-pp}. \end{aligned}$$

On peut alors exprimer l'opérateur $\mathcal{A}$ précédemment évoqué de la manière suivante :

Définition 3 On note $\mathcal{L}_\gamma$ l'opérateur défini par :

$$(\mathcal{L}_\gamma g)(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s}g(s)ds = (\mathcal{L}_+g)(-\gamma(\xi))$$

On a en effet :

$$\mathfrak{Rd}_{\gamma(\xi)}u(t) = (\mathcal{L}_\gamma \mathbf{u}(t, \cdot))(\xi) \quad \xi\text{-pp},$$

d'où, toujours formellement :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle_\xi,$$

avec $\psi(t, \xi) = (\mathcal{L}_\gamma \mathbf{u}(t, \cdot))(\xi)$ et $\mu(t, \xi) = ((\mathcal{L}_\gamma^*)^{-1}h(t, \cdot))(\xi)$.

Proposition 4 L'adjoint $\mathcal{L}_\gamma^*$ de l'opérateur $\mathcal{L}_\gamma$ est défini par :

$$(\mathcal{L}_\gamma^* f)(s) = \begin{cases} \int_{J_\gamma} e^{\gamma(\xi)s} f(\xi) d\xi & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s \leq 0 \end{cases}$$

Preuve. Par définition, on a :

$$\langle \mathcal{L}_\gamma^* f, g \rangle_s = \langle f, \mathcal{L}_\gamma g \rangle_\xi.$$

Donc, sous réserve d'applicabilité du théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_\gamma^* f, g \rangle_s &= \int_{J_\gamma} f(\xi) \int_0^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s} g(s) ds d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) 1_{\mathbb{R}_+}(s) \int_{J_\gamma} e^{\gamma(\xi)s} f(\xi) d\xi ds \\ &= \langle 1_{\mathbb{R}_+}(\cdot) \int_{J_\gamma} e^{\gamma(\xi)\cdot} f(\xi) d\xi, g \rangle_s. \end{aligned}$$

■

Remarque 5 On a $(\mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot))(s) = h(t, s)$. Or, par définition de $\mathcal{L}_\gamma^*$, $\text{supp}(\mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot)) \subset]0, +\infty[$. Donc les opérateurs considérés sont nécessairement causaux.

De manière formelle on a donc bien :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle_{\xi}$$

avec $\psi(t, \xi) = (\mathcal{L}_{\gamma} \mathbf{u}(t, \cdot))(\xi)$ et $(\mathcal{L}_{\gamma}^* \mu(t, \cdot))(s) = h(t, s)$.

Au-delà du cadre formel, cette égalité n'est cependant légitime que sous certaines hypothèses. En effet, on a :

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}u)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, s) \mathbf{u}(t, s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{L}_{\gamma}^* \mu(t, \cdot))(s) \mathbf{u}(t, s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{\mathbb{R}_+}(s) \int_{J_{\gamma}} e^{\gamma(\xi)s} \mu(t, \xi) d\xi \mathbf{u}(t, s) ds, \end{aligned}$$

expression égale à :

$$\int_{J_{\gamma}} \int_0^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s} \mathbf{u}(t, s) ds \mu(t, \xi) d\xi = \int_{J_{\gamma}} (\mathcal{L}_{\gamma} \mathbf{u}(t, \cdot))(\xi) \mu(t, \xi) d\xi = \int_{J_{\gamma}} \psi(t, \xi) \mu(t, \xi) d\xi.$$

si et seulement si le théorème de Fubini est applicable. Ce point, essentiel pour l'applicabilité de la méthode, fait l'objet des paragraphes suivants qui permettent de donner un sens rigoureux aux développements formels précédents. On notera que les hypothèses requises imposent certaines restrictions significatives qui devront être soigneusement prises en compte en pratique, faute de quoi des résultats absurdes seraient à craindre.

1.2 Cas particulier $\mu(t, \cdot) \in L_{loc}^1$: théorème fondamental

On rappelle tout d'abord les hypothèses suivantes concernant γ :

$$\exists \alpha_{\gamma} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[, \exists a \in \mathbb{R} \text{ tels que :}$$

$$\bullet e^{i[-\alpha_{\gamma}, \alpha_{\gamma}]\mathbb{R}_+ + a} \subset \Omega_{\gamma}^+ \quad (10)$$

$$\bullet \mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R} \subset \Omega_{\gamma}^+ \quad (11)$$

$$\bullet \gamma \cap i\mathbb{R} \text{ de mesure nulle} \quad (12)$$

$$\bullet \text{ il existe } b \text{ et } c \text{ tels que } 0 < b \leq |\gamma'(\xi)| \leq c \quad \xi\text{-pp.} \quad (13)$$

Soit $H(t, \cdot) := \mathcal{L}h(t, \cdot)$ le symbole Laplace d'un opérateur intégral causal $\mathcal{H}$ de réponse impulsionnelle h telle que $h(t, \cdot)$ soit localement intégrable pour tout t . Soit γ un contour vérifiant les hypothèses rappelées ci-dessus. Sous ces hypothèses, on a le résultat :

Théorème 6 Si :

► (i) $H(t, \cdot)$ est holomorphe dans Ω_{γ}^+ avec un nombre fini de points de branchement sur γ notés p_k , tels que :

$$\forall k, \forall t, \forall s > 0, \int_{c_r^k} e^{ps} H(t, p) dp \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0,$$

où c_r^k est le cercle de centre p_k et de rayon r ,

► (ii) la trace de $H(t, \cdot)$ sur γ est localement Lebesgue intégrable sur γ ,

► (iii) et il existe une suite $(\rho_n)_n$ telle que $\rho_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $H(t, \rho_n e^{i\theta}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ uniformément par rapport à $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$,

alors $\forall u$ à support minoré par t_0 , $(\mathcal{H}u)(t)$ s'exprime par :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_{J_\gamma} \mu(t, \xi) \psi(t, \xi) d\xi = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle_\xi,$$

où

$$\mu(t, \cdot) \text{ solution de } \mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot) = h(t, \cdot),$$

et

$$\psi(t, \xi) \text{ solution de } \begin{cases} \partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi(t, \xi) + u(t), & \forall \xi \in \mathbb{R} \\ \psi(t_0, \cdot) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Preuve. Par simplicité, on considère seulement le cas γ borné ; le cas non borné se traite de manière identique aux adaptations techniques près. Sans perdre de généralités, on suppose que $t_0 = 0$.

On a :

$$\forall t > 0, \forall s > 0, h(t, s) = (\mathcal{L}^{-1} H(t, \cdot))(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{ps} H(t, p) dp = \frac{1}{2i\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{a-iR}^{a+iR} e^{ps} H(t, p) dp,$$

avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ dans le domaine de convergence de l'intégrale.

Le contour γ étant fermé, il existe un $R > 0$ à partir duquel on peut définir un contour Γ de la forme donnée en figure (2).

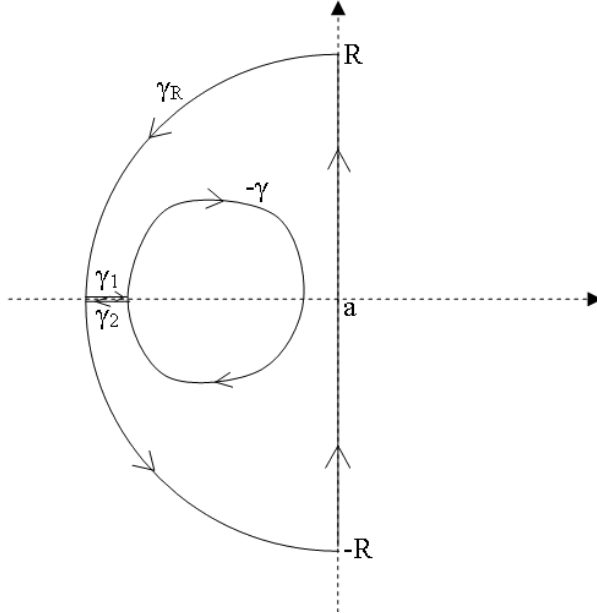


FIG. 2 – contour Γ

On a :

$$\Gamma = (a + i[-R, R]) + \gamma_R + \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma,$$

avec $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} / |z| = R, \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ et $\gamma_1 = -\gamma_2$. Or, d'après l'hypothèse (i), on a :

$$\int_{\Gamma} e^{ps} H(t, p) dp = 0,$$

d'où :

$$\int_{a-iR}^{a+iR} e^{ps} H(t, p) dp + \int_{\gamma_R} e^{ps} H(t, p) dp - \int_{\gamma} e^{ps} H(t, p) dp = 0.$$

D'après le lemme de Jordan, et du fait des hypothèses (i) et (iii), on peut alors montrer que :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} e^{ps} H(t, p) dp = 0,$$

d'où :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{a-iR}^{a+iR} e^{ps} H(t, p) dp = \int_{\gamma} e^{ps} H(t, p) dp \quad \forall s > 0.$$

On a donc, $\forall t > 0, \forall s > 0$:

$$h(t, s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} e^{ps} H(t, p) dp = \frac{1}{2i\pi} \int_{J_{\gamma}} e^{\gamma(\xi)s} H(t, \gamma(\xi)) \gamma'(\xi) d\xi,$$

où l'intégrale sur J_{γ} s'entend au sens de Lebesgue du fait de l'hypothèse (ii). En posant $\mu(t, \xi) = \frac{\gamma'(\xi)}{2i\pi} H(t, \gamma(\xi))$ on a alors :

$$\forall t > 0, h(t, s) = \begin{cases} \int_{J_{\gamma}} e^{\gamma(\xi)s} \mu(t, \xi) d\xi & \forall s > 0 \\ 0 & \forall s \leq 0, \end{cases}$$

soit encore :

$$h(t, s) = (\mathcal{L}_{\gamma}^* \mu(t, .))(s).$$

On a ainsi, pour toute u causale et régulière, et $\forall t > 0, \forall \tau > 0$:

$$(h(\tau, .) * u)(t) = \int_0^t h(\tau, s) u(t-s) ds = \int_0^t \int_{J_{\gamma}} e^{\gamma(\xi)s} \mu(\tau, \xi) d\xi u(t-s) ds.$$

Or, par hypothèse, $h(\tau, .)$ est supposée Lebesgue-intégrable. Donc, pour toute u causale et régulière, $(h(\tau, .) * u)(t) < +\infty$ pour tout $t > 0$ et on peut alors appliquer le théorème de Fubini sur l'espace $L^1(0, t) \otimes L^1(\mathbb{R}_{\xi})$, d'où :

$$\begin{aligned} (h(\tau, .) * u)(t) &= \int_{J_{\gamma}} \mu(\tau, \xi) \int_0^t e^{\gamma(\xi)s} u(t-s) ds d\xi \\ &= \int_{J_{\gamma}} \mu(\tau, \xi) \int_0^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s} \mathbf{u}(t, s) ds d\xi \\ &= \int_{J_{\gamma}} \mu(\tau, \xi) \psi(t, \xi) d\xi, \end{aligned}$$

où $\psi(t, \xi) = (\mathcal{L}_{\gamma} \mathbf{u}(t, .))(\xi)$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi(t, \xi) + u(t) \\ \psi(t_0, .) = 0. \end{cases}$$

■

Remarque 7 ► Par définition, la transformée de Laplace d'une fonction f n'est définie que sur le demi plan ouvert $\{s \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(s) > \sigma_0(f)\}$ où $\sigma_0(f) = \inf\{\sigma > 0 / \exists M_{\sigma} > 0 \text{ tq } |f(t)| \leq M_{\sigma} e^{\sigma t}, \forall t \in \mathbb{R}\}$. Or, si f est à support dans $\mathbb{R}_+$ on peut montrer que $\mathcal{L}f$ se prolonge analytiquement dans un domaine $\Sigma \supset \mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R}$. C'est donc en ce sens que $H(t, .)$ peut être holomorphe dans Ω_{γ}^+ .

► Les opérateurs de symbole-Laplace de la forme suivante :

$$H(p) = \frac{1}{p^{\alpha}}$$

avec $\alpha \in [0, 1[$ vérifient les hypothèses de ce théorème (NB : l'arc γ est dans ce cas nécessairement fermé à l'infini du fait que la fonction $\frac{1}{p^\alpha}$ nécessite une coupure entre 0 et l'infini). En effet, on a en particulier :

$$\int_{C_r} \frac{1}{p^\alpha} dp = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^\alpha e^{i\alpha\theta}} r i e^{i\theta} d\theta = r^{1-\alpha} \int_0^{2\pi} i e^{i(1-\alpha)\theta} d\theta < c^{te} r^{1-\alpha} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

car $\alpha \in [0, 1[$.

► Avec ce théorème, on obtient une réalisation d'état utilisable de l'opérateur considéré. Cette réalisation d'état est de dimension infinie puisque à chaque ξ fixé, on a une équation différentielle en $\psi(\cdot, \xi)$.

► On a montré (cf. preuve) que sous les hypothèses du théorème,

$$\mu(t, \xi) = \frac{\gamma'(\xi)}{2i\pi} H(t, \gamma(\xi)) \quad (15)$$

est solution de l'équation :

$$h(t, s) = (\mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot))(s).$$

Cependant cette équation admet plusieurs solutions : le μ de la réalisation d'état de l'opérateur $\mathcal{H}$ n'est donc pas unique. Dans la suite, on définira des classes d'équivalence de μ correspondant tous à un même opérateur.

Terminologie

- un opérateur $\mathcal{H}$ tel que, pour tout u à support minoré, on ait

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle h(t, \cdot), \mathbf{u}(t, \cdot) \rangle_s = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle_\xi,$$

sera dit γ -réalisable ou réalisable sur γ ,

- la fonction $\psi = \mathcal{L}_\gamma \mathbf{u} = \Re d_\gamma u$ ξ -pp sera appelée γ -représentation de u ,
- toute solution μ de l'équation $h = \mathcal{L}_\gamma^* \mu$ sera appelée γ -symbole de $H(t, \partial_t)$, la solution particulière donnée par (15) étant dénommée γ -symbole canonique,
- l'expression $\langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle_\xi$ sera appelée γ -synthèse de $\mathcal{H}u$,
- un opérateur $\mathcal{H}$ sera dit *diffusif au sens strict* si il admet un γ -symbole avec γ vérifiant (10), (11) et (12),
- enfin, un opérateur $\mathcal{H}$ sera dit *diffusif au sens large* si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\partial_t^{-n} \circ \mathcal{H}$ est diffusif au sens strict.

1.3 Questions de topologie et d'algèbre : le cas général

Le théorème fondamental précédent permet d'obtenir une réalisation diffusive de $\mathcal{H}$ via son γ -symbole, ce pour de nombreux opérateurs intégraux. Cependant les hypothèses de ce théorème s'avèrent dans bien des cas inutilement trop restrictives. En effet la première hypothèse sur $H(t, \cdot)$ interdit par exemple l'utilisation du théorème pour l'opérateur d'intégration ∂_t^{-1} pourtant essentiel en pratique. Ce théorème exclut également tous les opérateurs dont le symbole-Laplace H a des pôles sur le contour γ . Or, de tels opérateurs admettent une réalisation diffusive, à condition d'admettre des γ -symboles de nature *distributionnelle*, ce qu'interdit, précisément, le théorème précédent.

D'autres raisons d'ordre numérique suggèrent également de "passer aux distributions". En effet, la complétude de l'espace des γ -symboles, propriété mathématique indispensable notamment

pour une gestion correcte des approximations, ne peut avoir lieu que pour un espace de distributions. En outre, les approximations du γ -symbole conduisant à des réalisations d'état de dimension finie sont nécessairement de la forme $\sum a_k \delta_{\xi_k}$ (où δ_{ξ_k} est la distribution de Dirac en ξ_k). Enfin, tout problème d'optimisation portant sur le γ -symbole nécessite la fermeture de l'espace des μ , qui est donc nécessairement, là encore, un espace des distributions. Toutes ces raisons imposent donc d'étendre le résultat du paragraphe précédent à une classe plus large d'opérateurs à γ -symboles distributionnel.

Pour cela, on cherche un espace de γ -symboles Δ'_γ , dual topologique d'un espace Δ_γ tel que, $\forall \mu(t, \cdot) \in \Delta'_\gamma, \forall \psi(t, \cdot) \in \Delta_\gamma$, on ait :

$$\langle h, \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{L}^*_\gamma(\Delta'_\gamma), \mathcal{L}^{-1}_\gamma(\Delta_\gamma)} = \langle \mu, \psi \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma},$$

avec $h = L^*_\gamma \mu$ et $\psi = L_\gamma u$; il faut entre autres pour cela garantir l'applicabilité du théorème de Fubini dans le cadre de la dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}$. L'espace Δ'_γ doit en outre être suffisamment grand pour englober les γ -symboles de certains opérateurs essentiels et doit donc sortir du cadre des fonctions. On le choisira en outre de telle manière que le produit $\#_\gamma$ défini par :

$$\left. \begin{array}{l} \mu \text{ } \gamma\text{-symbole de } H(t, \partial_t) \\ \nu \text{ } \gamma\text{-symbole de } K(t, \partial_t) \end{array} \right\} \implies \mu \#_\gamma \nu \text{ } \gamma\text{-symbole de } H(t, \partial_t) \circ K(t, \partial_t)$$

soit interne et continu dans Δ'_γ : ainsi la composition de deux opérateurs (γ -réalisables), opération très fréquemment utilisée, pourra être utilisée sans aucun problème en restant dans le cadre de la représentation diffuse. On s'assurera de plus que $\forall u \in D(R_s), \psi = L_\gamma u \in \Delta_\gamma$: par densité de $D(R_s)$ on pourra alors étendre ce résultat à de nombreux espaces. La classe d'entrées u admissibles doit en effet être suffisamment grande pour satisfaire aux besoins pratiques.

1.3.1 Le produit $\#_\gamma$

La composition d'opérateurs étant une opération essentielle, on s'intéresse à l'opération qui lui est associée dans l'espace des γ -symboles.

Définition 8 On appelle produit $\#_\gamma$ l'opération sur les γ -symboles définie comme suit :

$$\left. \begin{array}{l} \mu \text{ } \gamma\text{-symbole de } H(t, \partial_t) \\ \nu \text{ } \gamma\text{-symbole de } K(t, \partial_t) \end{array} \right\} \implies \mu \#_\gamma \nu \text{ } \gamma\text{-symbole de } H(t, \partial_t) \circ K(t, \partial_t).$$

On a notamment la formulation suivante sous forme de réalisation d'état :

$$\langle \mu \#_\gamma \nu, \mathfrak{Rd}_\gamma(\cdot) \rangle = \langle \mu, \mathfrak{Rd}_\gamma \langle \nu, \mathfrak{Rd}_\gamma(\cdot) \rangle \rangle,$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \psi = \gamma(\xi) \psi + u \\ y = \langle \mu \#_\gamma \nu, \psi \rangle \end{array} \right\} \xLeftrightarrow{E/S} \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \psi_1 = \gamma(\xi) \psi_1 + u \\ \partial_t \psi_2 = \gamma(\eta) \psi_2 + \langle \nu, \psi_1 \rangle \\ y = \langle \mu, \psi_2 \rangle \end{array} \right.$$

1.3.2 Espaces Δ_γ et Δ'_γ

Dans ce paragraphe, on suppose la fonction $\gamma : J_\gamma \rightarrow C$ régulière, non bornée de R dans C (c'est à dire $J_\gamma = R$), lipschitzienne et vérifiant la condition sectorielle (10). On suppose de plus, sans perdre de généralité, qu'il existe ξ_0 et $\lambda > 0$ tels que :

$$\begin{aligned} & \bullet \operatorname{Re} \gamma(\xi) \leq -\lambda |\xi| \quad \forall |\xi| \geq \xi_0, \\ & \bullet \forall n > 0, \partial_\xi^n \gamma \text{ bornée,} \end{aligned} \tag{16}$$

et qu'il existe $a, b > 0$ tels que

$$a \leq |\gamma'(\xi)| \leq b \quad \xi\text{-pp.} \quad (17)$$

On considère alors l'espace $D_{L_P^\infty}(R) = \{\varphi \in C^\infty(R), \forall n \in \mathbb{N}, \partial_\xi^n \varphi \in L_P^\infty(R)\}$ où $L_P^\infty(R)$ est l'espace de Lebesgue défini par la norme :

$$\|\varphi\|_{L_P^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} P(x) |\varphi(x)|, \text{ où } P(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

L'espace $D_{L_P^\infty}(R)$ est de Fréchet pour la famille de semi-normes :

$$\|\varphi\|_n = \|\partial_\xi^n \varphi\|_{L_P^\infty}.$$

Remarque 9 *Du fait de la présence du poids P , les fonctions de $D_{L_P^\infty}(R)$ sont décroissantes à l'infini.*

On cherche un espace que l'on notera Δ_γ tel que $\forall u \in D(R_s), \psi = L_\gamma u \in \Delta_\gamma$. Cependant, comme $D(R_s)$ n'est pas stable par convolution avec une fonction à support dans R_+ et que l'on a besoin de cette propriété pour démontrer quelques résultats particuliers dans la suite, on se placera dans l'espace $S_d(R_s)$, sous espace (dense dans $S(R_s)$) des fonctions de $S(R_s)$ à support majoré.

On a alors le résultat suivant :

$$\forall \mathbf{u} \in S_d(\mathbb{R}_s), \psi \in \mathcal{D}_{L_P^\infty}(\mathbb{R}).$$

L'espace Δ_γ recherché sera donc tel que $\Delta_\gamma \subset D_{L_P^\infty}(R)$. Comme la complétude de Δ_γ est une propriété nécessaire, on définit Δ_γ de la manière suivante :

Définition 10 Δ_γ est le complété de $L_\gamma(S_d(R_s))$ dans $D_{L_P^\infty}(R)$.

Cet espace est muni de la topologie induite par celle de $D_{L_P^\infty}(R)$.

Caractérisation des éléments de Δ_γ On a le résultat (preuve non développée ici) :

Proposition 11

$$\psi \in \Delta_\gamma \iff \begin{cases} \psi \in \mathcal{D}_{L_P^\infty}(\mathbb{R}) \\ \psi = \Psi|_\gamma \text{ avec } \Psi \text{ holomorphe sur } \Omega_\gamma^-, \end{cases}$$

où $\Psi|_\gamma$ est la trace de Ψ sur γ .

Classe d'entrées u associée à Δ_γ On peut montrer que pour tout $u \in D'(0, T)$ (cadre très général), on a

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_\gamma \mathbf{u}(t, \cdot) \text{ analytique dans } \mathbb{C} \\ & \text{et } \mathcal{L}_\gamma \mathbf{u}(t, \cdot) \rightarrow 0 \text{ quand } p \rightarrow +\infty \text{ dans } \mathbb{C}^- \end{aligned}$$

d'où :

$$\psi \in \Delta_\gamma \text{ et ce pour tout } \gamma.$$

La fonction L_γ est en fait très régularisante : l'espace Δ_γ permet donc de considérer une très large classe d'entrées u , classe suffisamment large pour les besoins pratiques.

On considère ensuite l'espace Δ'_γ de γ -symboles, défini comme suit :

Définition 12 Δ'_γ est le dual topologique de Δ_γ .

On a :

$$\Delta'_\gamma = \mathcal{D}'_{L_p^\infty} / \ker \mathcal{L}_\gamma^*.$$

Pour un opérateur H donné, il n'y a donc pas unicité du γ -symbole. A un opérateur est associé une classe d'équivalence de γ -symboles liés par la relation d'équivalence :

$$\mu_1 \sim \mu_2 \iff \mathcal{L}_\gamma^*(\mu_1 - \mu_2) = 0.$$

Un représentant particulier de cette classe d'équivalence est appelé γ -symbole canonique ; il est défini par :

$$\mu(t, \cdot) = \frac{\gamma'(\cdot)}{2i\pi} H(t, \cdot)|_{\gamma^+},$$

où $H(t, \cdot)|_{\gamma^+}$ est la trace à droite de $H(t, \cdot)$ sur γ au sens des distributions. Dans la suite, on notera Δ'_{γ_c} le sous ensemble de Δ'_γ des γ -symboles canoniques.

Caractérisation des éléments de Δ_γ On a tout d'abord le résultat suivant concernant les γ -symboles canoniques :

Proposition 13

$$\mu \in \Delta'_{\gamma_c} \iff \begin{cases} \mu \in \mathcal{D}'_{L_p^\infty}(\mathbb{R}) \\ \mu(t, \cdot) = \frac{\gamma'(\cdot)}{2i\pi} H(t, \cdot)|_{\gamma(\cdot)^+} \text{ avec } H \text{ holomorphe sur } \Omega_\gamma^+, \end{cases}$$

où $H(t, \cdot)|_{\gamma^+}$ est la trace à droite de H sur γ (au sens des distributions).

En pratique on utilisera également les résultats suivants, suffisants dans un grand nombre de cas.

Proposition 14 ► Si μ est une mesure,

$$\mu \in \Delta'_\gamma \iff \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + |\xi|} |\mu(\xi)| d\xi < +\infty,$$

► Si $\mu \in D'(R)$,

$$\mu \in \Delta'_\gamma \iff \exists a, b \in R, \text{ tels que } \frac{1}{\xi} \mu_{\mathbb{R} \setminus]a, b[} \in L^1.$$

Classe d'opérateurs H associée à Δ'_γ On souhaite à présent caractériser la classe d'opérateurs ayant un γ -symbole dans Δ'_γ . On a pour cela le résultat :

Proposition 15 Soit $\mu \in \Delta'_\gamma$. L'opérateur $u \mapsto \langle \mu, Rd_\gamma u \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}$ est l'opérateur de réponse impulsionnelle :

$$h(t, s) = \langle \mu(t, \cdot), e^{\gamma(\cdot)s} \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} = \mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot),$$

et de symbole-Laplace :

$$H(t, p) = \langle \mu(t, \cdot), \frac{1}{p - \gamma(\cdot)} \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} = \mathcal{L} \mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \cdot).$$

H vérifie les propriétés suivantes :

- $H(t, \cdot)$ holomorphe dans Ω_γ^+ ,
- $H(t, i\omega) \rightarrow 0$ quand $|\omega| \rightarrow +\infty$.

On constate que les conditions d'analyticité dans Ω_γ^+ , et de décroissance à l'infini de $H(t, \cdot)$ sont à présent nécessaires alors qu'elles étaient suffisantes dans le cadre particulier du paragraphe (1.2). Ces conditions sont particulièrement importantes car "quasiment" caractéristiques des opérateurs γ -réalisables. Il n'y a en fait pas isomorphisme entre Δ'_{γ_c} et l'espace des opérateurs linéaires intégraux de symboles-Laplace analytiques dans Ω_γ^+ et décroissants à l'infini ; cependant les opérateurs de ce type non γ -réalisables sont souvent "pathologiques". En pratique, un opérateur linéaire intégral vérifiant les deux conditions précédemment énoncées sera donc en général γ -réalisable.

Sur la continuité du produit $\#_\gamma$ dans Δ'_γ Si γ est régulière, on montre que le produit $\#_\gamma$ est séparément continu dans Δ'_γ pour la topologie faible $\sigma(\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma)$, c'est à dire que $\forall \mu, \nu_n \in \Delta'_\gamma$:

$$\left(\langle \nu_n, \psi \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \psi \in \Delta_\gamma \right) \implies \left(\langle \mu \#_\gamma \nu_n, \psi \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \psi \in \Delta_\gamma \right).$$

Cette continuité n'étant parfois pas suffisante, on cherche un espace $\Delta'_\gamma \supset \Delta'_\gamma$ tel que l'on ait la continuité globale du produit sur Δ'_γ .

1.3.3 Espaces Δ_γ et Δ'_γ

Le défaut de continuité du produit $\#_\gamma$ n'est pas la seule raison pour laquelle on est amené à construire un espace de γ -symboles Δ'_γ plus gros. En effet, les espaces Δ_γ ne sont définis que pour des contours γ réguliers, alors qu'en pratique les contours non réguliers sont souvent utiles sinon nécessaires. Par rapport à un contour régulier, un contour non régulier peut par exemple permettre de s'éloigner plus rapidement de l'axe imaginaire, zone dans laquelle une discrétisation en ξ devra être plus fine (composantes dynamiques peu amorties).

En fait, l'espace Δ_γ est trop gros parcequ'il contient les fonctions $\psi = \Psi|_\gamma$ de régularité C^∞ mais non nécessairement analytiques du fait que l'analyticité de Ψ n'est requise que sur Ω_γ^- . L'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma H(t, p) \Psi(t, p) dp = \mathcal{H}u(t)$$

n'a alors en général aucun sens si $H(t, \cdot)$ et $\Psi(t, \cdot)$ n'ont pas de domaine d'analyticité commun (l'analyticité de $H(t, \cdot)$ n'est quant à elle requise que dans Ω_γ^+).

Pour un contour γ non nécessairement régulier fixé, on est donc amené à considérer un espace $\Delta'_\gamma \supset \Delta_\gamma$ tel que :

- $\forall \mu \in \Delta'_\gamma, H_\mu(t, \cdot)$ holomorphe dans Ω_γ^+ ,
- $\forall \psi \in \Delta_\gamma, \Psi_\psi(t, \cdot)$ holomorphe dans Ω_γ^- ,

avec $\tilde{\gamma} \subset \Omega_\gamma^+$.

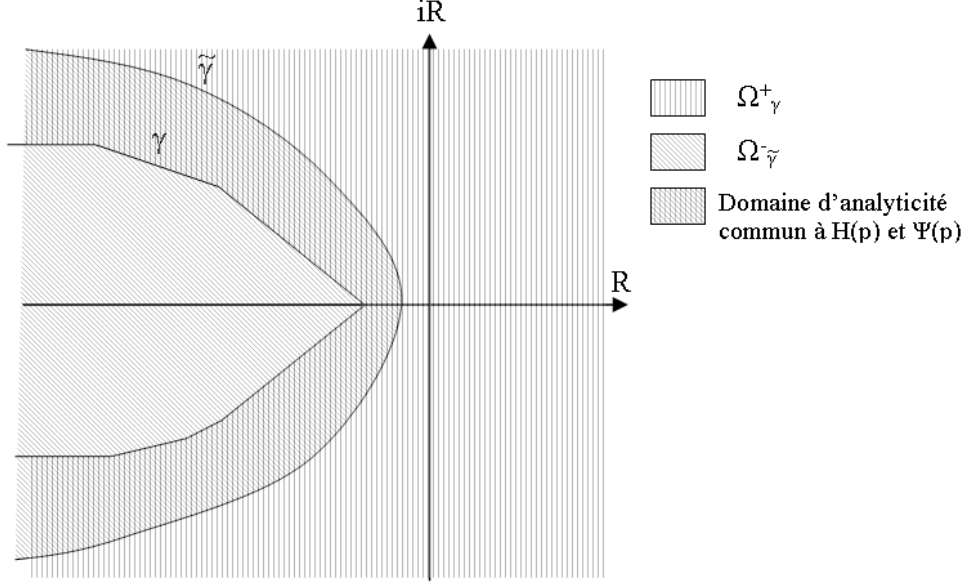


FIG. 3 – Domaines d'analyticité de H et de Ψ .

Ainsi, l'intégrale

$$\int_{\bar{\gamma}} H(t, p) \Psi(t, p) dp$$

sera définie sur tout contour $\bar{\gamma}$ inclus dans le domaine d'analyticité commun à $H_\mu(t, \cdot)$ et à $\Psi_u(t, \cdot)$ et prendra la même valeur quel que soit le contour $\bar{\gamma}$ considéré. Par "adhérence", on pourra ainsi donner un sens parfaitement clair à l'intégral sur γ qui n'était jusqu'alors pas définie, H étant en général non localement intégrable sur γ . On aura plus précisément, par le théorème de Cauchy :

$$\int_{\gamma} H(t, p) \Psi(t, p) dp = \int_{\bar{\gamma}} H(t, p) \Psi(t, p) dp$$

pour tout $\bar{\gamma}$ dans le domaine d'analyticité commun à $H_\mu(t, \cdot)$ et à $\Psi_u(t, \cdot)$.

Dans la suite, on considère deux contours γ et $\tilde{\gamma}$ vérifiant les hypothèses du paragraphe précédent avec cependant pour γ un affaiblissement des hypothèses de régularité à $\gamma \in W_{loc}^{1, \infty}(R)$: le contour γ pourra ainsi être non régulier et présenter des points anguleux par exemple.

On définit alors les relations suivantes entre les contours :

- $\tilde{\gamma} \succ \gamma \iff \begin{cases} \tilde{\gamma} \subset \Omega_{\gamma}^{+} \\ \exists A > 0, \exists \eta_0 > 0, \forall |\eta| \geq \eta_0, \min_{\xi} |\tilde{\gamma}(\eta) - \gamma(\xi)| \geq A |\tilde{\gamma}(\eta)|, \end{cases}$
- $\tilde{\gamma} \succeq \gamma \iff \tilde{\gamma} \subset \overline{\Omega_{\gamma}^{+}}.$

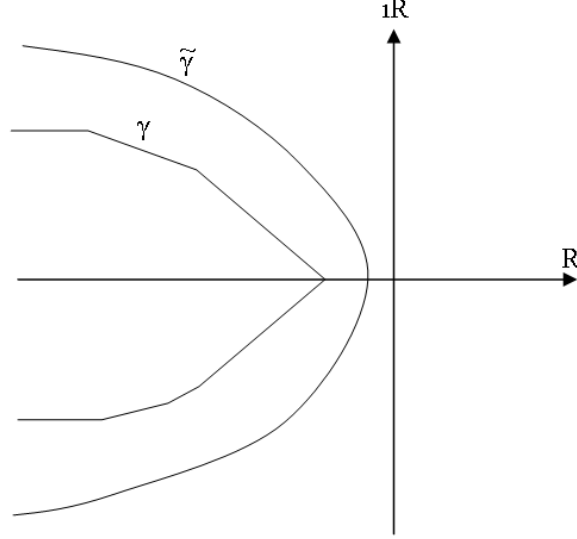


FIG. 4 – Exemple de contours γ et $\tilde{\gamma}$ tels que $\tilde{\gamma} \succ \gamma$.

Remarque 16 Si $\tilde{\gamma} \succ \gamma$, alors, par définition de la relation $\succ$, $\tilde{\gamma}$ s'écarte de γ à l'infini, car du fait de l'hypothèse (17) sur $\tilde{\gamma}$ on a $\tilde{\gamma}(\eta) \rightarrow +\infty$ quand $|\eta| \rightarrow +\infty$.

Pour toute $u \in S_d(R_s)$, on notera dans la suite Ψ la fonction analytique dans C définie par :

$$\Psi(p) = \int_0^{+\infty} e^{ps} \mathbf{u}(s) ds.$$

On pose :

$$\psi = \Psi|_{\gamma} \text{ et } \tilde{\psi} = \Psi|_{\tilde{\gamma}},$$

et, pour $\tilde{\gamma} \succ \gamma$, on définit les applications suivantes.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\tilde{\gamma}} &: \tilde{\psi} \in L_{\tilde{\gamma}}(\mathcal{S}_d(\mathbb{R}_s)) \mapsto \Psi \text{ (prolongement analytique de } \tilde{\psi} \text{ dans } \Omega_{\tilde{\gamma}}^-), \\ \text{et } \mathcal{I}_{\tilde{\gamma}, \gamma} &: \tilde{\psi} \in L_{\tilde{\gamma}}(\mathcal{S}_d(\mathbb{R}_s)) \mapsto \psi = (\mathcal{I}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\psi})) \circ \gamma \text{ (trace sur } \gamma \text{ de } \Psi). \end{aligned}$$

On définit alors l'espace Δ_{γ} de la manière suivante.

Soit $\Gamma = (\tilde{\gamma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante (au sens de la relation $\succ$) d'arcs réguliers telle que $\tilde{\gamma}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \gamma$ dans $W_{loc}^{1,\infty}(R)$.

Définition 17 L'espace Δ_{γ} est défini par :

$$\Delta_{\gamma} = \bigcup_{\tilde{\gamma} \in \Gamma} \mathcal{I}_{\tilde{\gamma}, \gamma}(\Delta_{\tilde{\gamma}});$$

il est muni de la topologie (dite de limite inductive) définie par la convergence :

$$\psi_n \longrightarrow 0 \text{ dans } \Delta_{\gamma} \Leftrightarrow \exists \tilde{\gamma} \in \Gamma, \quad \psi_n \longrightarrow 0 \text{ dans } \Delta_{\tilde{\gamma}}.$$

On définit ensuite :

Définition 18 Δ'_{γ} est le dual topologique de Δ_{γ} .

Remarque 19 ► On a bien $\Delta_\gamma \subset \Delta_\gamma$: en effet les éléments de Δ_γ sont la trace sur γ de fonctions analytiques sur $\Omega_{\tilde{\gamma}}^-$ avec $\tilde{\gamma} \succ \gamma$, alors que les fonctions dont les éléments de Δ_γ sont la trace sur γ ne sont analytiques que sur $\Omega_{\tilde{\gamma}}^- \subset \Omega_{\tilde{\gamma}}^-$. Dans le domaine dual, on a en revanche : $\Delta'_\gamma \supset \Delta'_\gamma$.

► De la même manière, on peut montrer que si $\tilde{\gamma} \succ \tilde{\gamma}$ avec $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}$ réguliers, alors $I_{\tilde{\gamma},\gamma}(\Delta_{\tilde{\gamma}}) \subset I_{\tilde{\gamma},\gamma}(\Delta_{\tilde{\gamma}})$. Par conséquent, Δ_γ est la réunion d'une suite d'espaces croissante au sens de l'inclusion.

De la définition des espaces Δ'_γ et Δ_γ , on déduit :

$\forall \mu \in \Delta'_\gamma, \forall \psi \in \Delta_\gamma, \exists \tilde{\gamma}_0 \succ \gamma$ tel que $\forall \tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}_0 \succ \tilde{\gamma} \succ \gamma$, on ait

$$\begin{aligned} \langle \mu, \psi \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma} &= \langle \mu, \psi \rangle_{(\mathcal{I}_{\tilde{\gamma},\gamma}(\Delta_{\tilde{\gamma}}))', \mathcal{I}_{\tilde{\gamma},\gamma}(\Delta_{\tilde{\gamma}})} \\ &= \langle \tilde{\mu}, \tilde{\psi} \rangle_{\Delta'_{\tilde{\gamma}}, \Delta_{\tilde{\gamma}}} \\ &= \int_{J_{\tilde{\gamma}}} \tilde{\mu}(\xi) \tilde{\psi}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}} H(p) \Psi(p) dp, \end{aligned}$$

avec $\tilde{\gamma}$ dans le domaine d'analyticité commun à $H(p)$ et à $\Psi(p)$. Par continuité on peut alors définir l'intégrale suivante :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} H(p) \Psi(p) dp = \int_{\mathbb{R}} \mu(\xi) \psi(\xi) d\xi,$$

c'est à dire la γ -synthèse de l'opérateur linéaire intégral de symbole-Laplace $H(p)$.

Sur la continuité du produit $\#_\gamma$ dans Δ'_γ En ce qui concerne le produit $\#_\gamma$ on peut montrer d'une part qu'il est interne dans Δ'_γ , d'autre part qu'il est continu pour la topologie forte de Δ'_γ (convergence uniforme sur tout borné de Δ_γ), c'est-à-dire :

$$\left(\nu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \nu, \mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu \text{ dans } \Delta'_\gamma \text{ fort} \right) \implies \left(\mu_n \#_\gamma \nu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu \#_\gamma \nu \text{ dans } \Delta'_\gamma \text{ fort} \right).$$

L'espace Δ'_γ est bien adapté à l'analyse ; il assurera le bon comportement notamment des approximations numériques dès lors qu'elles auront été construites et analysées dans le contexte topologique décrit dans ce paragraphe.

1.4 Conclusion et extensions

Dans cette présentation assez concise du principe de la représentation diffusive, on a vu qu'un opérateur $H = H(t, \partial_t)$ diffusif au sens strict admettait la représentation suivante, appelée γ -réalisation :

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\psi) \psi(t, \xi) + u(t), & \psi(-\infty, \cdot) = 0 \\ H(t, \partial_t) u(t) = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}, \end{cases}$$

où $\gamma \in W_{loc}^{1,\infty}(R)$ définit un contour fermé (éventuellement à l'infini) non nécessairement régulier vérifiant les hypothèses mentionnées au paragraphe précédent, et où $\mu(t, \cdot) \in \Delta'_\gamma$ est solution de $L_\gamma^* \mu(t, \cdot) = h(t, \cdot)$ avec h réponse impulsionnelle de H .

Les conditions essentielles à satisfaire pour qu'un opérateur H admette une telle représentation sont :

- l'analyticité de $H(t, \cdot)$ dans Ω_γ^+ ,
- la décroissance à l'infini de $H(t, \cdot)$.

La condition sectorielle imposée à γ garantit en outre la nature diffusive des réalisations d'état. Par voie de conséquence, les opérateurs γ -réalisables sont de type pseudo-différentiel [9], ce qui implique en particulier une réponse impulsionnelle $h(t, \cdot)$ régulière (en fait analytique) sur $t > 0$.

Notons par ailleurs que la réalisation d'état qu'est la γ -réalisation est de dimension infinie. Pour des opérateurs rationnels notamment, elle n'est donc pas minimale, ce qui a première vue peut apparaître comme un inconvénient majeur. En réalité, les avantages sont nombreux :

- une même équation d'état permet la réalisation d'une vaste classe d'opérateurs (rationnels ou non, convolutifs ou non),
- l'opérateur est caractérisé par son γ -symbole qui apparaît linéairement dans la γ -réalisation,
- la somme et le produit de deux opérateurs γ -réalisables sont des opérateurs de même nature, propriété essentielle pour les applications (cf. les paragraphes qui suivent) et intrinsèquement impossible dans le cadre standard rationnel (la somme ou le produit de deux opérateurs rationnels d'ordre n est en général un opérateur d'ordre $2n$),
- les opérateurs et leurs approximations sont dans un même cadre mathématique,
- l'extension aux opérateurs non causaux voire multidimensionnels est naturelle,
- de nombreuses autres extensions sont possibles,
- il existe des réalisations diffuses aux propriétés particulières (principe du maximum) pouvant être utiles notamment en non linéaire,
- etc.

Un des avantages sur lequel il convient de revenir est la possibilité d'extension à divers problèmes. Dans les paragraphes précédents, plusieurs hypothèses ont été faites, en particulier sur le contour γ et sur les opérateurs considérés. La représentation diffusive se prête en fait à diverses extensions et peut s'adapter à de nombreuses situations où ne sont pas nécessairement vérifiées ces hypothèses. De nombreux compléments et extensions des concepts précédents ont été étudiés et sont présentés dans [6].

On mentionnera en particulier le fait que les opérateurs instables peuvent également avoir une représentation diffusive (ce qui sous-entend en fait que le contour γ puisse "sortir" du demi-plan complexe gauche).

L'extension aux opérateurs γ -diffusifs au sens large (cf. § 1.2) est enfin une des extensions les plus naturelles et de ce fait la plus utilisée. On notera simplement qu'un opérateur H γ -diffusif au sens large d'ordre m est tel que $\partial_t^{-m-1} \circ H$ est γ -réalisable au sens strict ; il admet donc la γ -réalisation :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma \psi + \partial_t^{m+1} u \\ \mathcal{H}u = \langle \delta^{m+1} \#_{\gamma} \mu, \psi \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}, \end{cases}$$

où $\mu \notin \Delta'_\gamma$ est un γ -symbole au sens large de H , défini, au sens canonique, par $\mu(t, \cdot) = \frac{\gamma'}{2i\pi} H(t, \gamma)$.

La question de l'approximation numérique des γ -réalisations n'est pas traitée dans ce rapport. Les méthodes utilisées ainsi que les particularités techniques propres à ce problème sont données dans [6].