

---

## Problématique des écoulements diphasiques en régime « défavorable »

Cette thèse s'inscrit dans le contexte de la simulation dynamique de réservoir, pour laquelle IFP Energies nouvelles développe depuis de nombreuses années le logiciel PumaFlow. Il s'agit de prédire, à une échelle temporelle de quelques années et à une échelle spatiale de quelques kilomètres, l'écoulement à travers le sous-sol poreux d'un mélange composé d'hydrocarbures déjà présents et de produits artificiellement ajoutés (eau, gaz, polymères, surfactants, mousses). Outre les paramètres physiques du réservoir à connaître, la simulation prend également en compte le procédé de récupération mis en œuvre.

### 1.1.1 Procédés de récupération des hydrocarbures

Les méthodes employées pour récupérer les hydrocarbures sont relativement sophistiquées et sont regroupées en trois familles. La première, appelée *récupération primaire*, est sans doute celle qui se conforme le mieux à l'image populaire : il suffit de forer au bon endroit pour faire jaillir le pétrole. Dans cette catégorie de méthodes, l'extraction se fait par déplétion naturelle, grâce à la différence de pressions entre le réservoir et la surface. Malheureusement, le taux de récupération des procédés primaires est assez faible. Dans le cas d'un gisement d'huile, par exemple, il ne dépasse pas 25%.

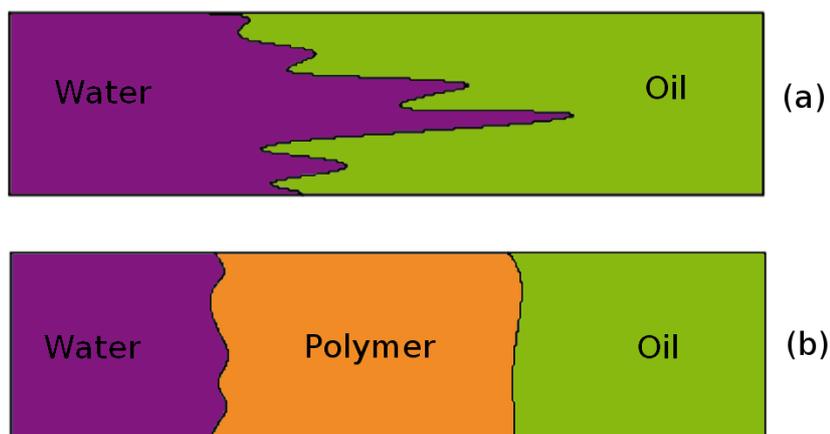


FIGURE 1.1 – (a) Digitations visqueuses lors d'un déplacement eau/huile avec un rapport de mobilités défavorable; (b) Stabilisation partielle par injection d'un bouchon de polymère.

Pour entraîner les hydrocarbures restés dans le sous-sol après la phase primaire vers la surface, une idée consiste à injecter un fluide non-miscible avec les hydrocarbures et, si possible, peu onéreux tel que de l'eau ou du gaz naturel. Cette injection permet de maintenir la pression dans le gisement et de drainer l'huile vers les puits de production. Cette catégorie de méthodes, appelée *récupération secondaire*, présente un taux de récupération de 25% à 40%. Son principal défaut réside dans la « fiabilité » de la poussée. En effet, l'eau

étant souvent moins visqueuse que l'huile, elle a tendance à être bien plus mobile<sup>1</sup>. Le fluide poussant a donc envie d'aller plus vite que le fluide poussé et peut finir par « percer » le front de propagation, engendrant ainsi des perturbations sous forme de « doigts », comme l'illustre la figure 1.1(a). Ce phénomène porte le nom de *digitations visqueuses* (en anglais : *viscous fingering*). Son apparition est désastreuse pour la production car on ne produit presque que de l'eau au niveau des puits producteurs.

Comme alternative à l'eau ou le gaz dans le rôle du fluide poussant, il peut être envisagé un gaz miscible (CO<sub>2</sub>) ou des produits chimiques (polymères, surfactants, mousses). L'avantage de ces derniers provient bien entendu de leur plus grande viscosité, ou de manière équivalente leur plus petite mobilité. Le fluide poussant ayant moins tendance à se mouvoir, le front de déplacement avec l'huile est plus stable et les digitations visqueuses n'apparaissent pas. Cette famille de méthodes, qualifiée de *récupération tertiaire* ou *récupération améliorée* (en anglais : *enhanced oil recovery*, EOR) élève notablement le taux de récupération, l'augmentation variant entre 30% à 70%. Elle coûte néanmoins cher en raison du prix des produits chimiques. Aussi, afin de rentabiliser le procédé, l'injection de polymère n'est effectuée que pendant un laps de temps limité, après quoi de l'eau de chasse est envoyée pour pousser le polymère, comme le décrit la figure 1.1(b). Mais de nouveau, il existe un rapport de mobilités défavorable entre l'eau et le front arrière du bouchon de polymère.

### 1.1.2 Modèles physiques

L'un des buts de la simulation de réservoir est de prédire la durée pendant laquelle l'huile pourra être recueillie et surtout à quel moment l'eau arrivera aux puits de production. Toute incertitude dans cette prédiction entraîne des pertes financières importantes se chiffrant en centaines de milliers de dollars.

À cette fin, il existe une grande variété de modèles physiques qui se démarquent entre eux par les processus physico-chimiques pris en compte [9, 19, 21, 22, 41]. La plupart de ces modèles sont par ailleurs formulés à une échelle macroscopique, après une étape d'homogénéisation préalable. Cela implique qu'ils ne sont pas aptes à décrire certains phénomènes intrinsèquement microscopiques comme les digitations visqueuses. Dans ces dernières, en effet, les allures des doigts dépendent des propriétés microscopiques fines telles que la forme des chenaux ou des capillaires dans le milieu poreux, lesquelles ont été « gommées » au cours de l'établissement du modèle macroscopique. Par conséquent, il convient d'être prudent quant à l'interprétation de ce qui semble être des « digitations » dans certains résultats numériques obtenus avec un modèle de ce type.

Actuellement, les modèles les plus évolués en simulation de réservoir sont multi-constituants (plusieurs espèces), polyphasiques (chaque espèce pouvant se présenter sous plusieurs phases, chaque phase pouvant disparaître ou apparaître selon les lois thermodynamiques), éventuellement réactifs (les espèces réagissent chimiquement entre elles). Ils rendent également compte des effets de capillarité (différence de pressions entre les phases), de dispersion (diffusion des espèces), de compressibilité et de gravité. À l'autre bout du spectre, il y a des modèles, qui bien qu'assez rudimentaires, contiennent déjà l'essence de la

---

1. La *mobilité* est d'ailleurs mesurée comme l'inverse de la viscosité, à une constante multiplicative adimensionnée près.

difficulté à traiter. C'est le cas du modèle considéré dans cette thèse pour l'élaboration de nouveaux schémas. Il s'écrit comme un système de trois équations aux dérivées partielles

$$\mathbf{u} = -\kappa\lambda(s)\nabla p, \quad (1.1a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = q, \quad (1.1b)$$

$$\phi \partial_t s + \operatorname{div}(f(s)\mathbf{u}) = q_w, \quad (1.1c)$$

où les trois inconnues sont : la saturation d'eau  $s \in [0, 1]$ , la pression commune aux deux phases  $p > 0$  et la vitesse totale  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ . Dans (1.1), les constantes  $\phi$  (porosité) et  $\kappa$  (perméabilité) sont connues. Les fonctions  $\lambda$  (mobilité totale) et  $f$  (flux fractionnaire) sont également spécifiées. En particulier, comme cela sera détaillé en §2.1, le flux fractionnaire

$$f(s) = \frac{Ms^{m_w}}{Ms^{m_w} + (1-s)^{m_o}} \quad (1.2)$$

fait intervenir le rapport de mobilités

$$M = \frac{\kappa_{r,w}^\# \mu_o}{\kappa_{r,o}^\# \mu_w}, \quad (1.3)$$

où  $\mu_o$  (respectivement  $\mu_w$ ) est la viscosité de l'huile (respectivement de l'eau) et  $\kappa_{r,o}^\#$  (respectivement  $\kappa_{r,w}^\#$ ) est la perméabilité relative maximale de l'huile (respectivement de l'eau). Les exposants  $m_o$  et  $m_w$  représentent les coefficients de Corey [31] associés à chacune des phases considérées ici. Le système (1.1) doit bien sûr être muni de conditions aux limites appropriées sur un domaine spatial borné, ainsi que d'une condition initiale sur  $s$ .

### 1.1.3 Difficultés mathématiques

Le système (1.1) possède une caractéristique tout à fait représentative de la plupart des autres modèles de réservoir. Il est potentiellement instable lorsque le rapport de mobilités  $M$  est trop grand. Plus précisément, il y a des éléments de preuve solides [24, 26, 50, 54, 57, 59, 61, 80, 81, 99] en faveur de l'assertion suivante :

Il existe un seuil critique  $M^\# > 0$ , dépendant de paramètres physiques autres que ceux figurant au second membre de (1.3), tel que (i) si  $M \leq M^\#$ , alors le problème (1.1) avec les conditions limites est stable (ii) si  $M > M^\#$ , alors le même problème est instable, la notion de stabilité étant celle de la non-amplification des perturbations linéarisées.

En §2.2, une analyse de stabilité rigoureuse de (1.1) sera réalisée dans deux cas particuliers où  $M^\#$  peut être explicitement déterminé. En admettant cette conjecture, il est maintenant possible de donner un sens précis aux épithètes « favorable » et « défavorable » concernant le rapport de mobilités : il s'agit simplement de  $M \leq M^\#$  et  $M > M^\#$ , à ceci près que  $M^\#$  n'est pas toujours facilement calculable et, même en général, indéterminé.

La nature instable du problème pour  $M > M^\#$  soulève une interrogation « philosophique » au regard de la résolution numérique de (1.1). En effet, l'instabilité inhérente au système amplifie n'importe quelle erreur d'approximation de la solution, à commencer par des erreurs d'arrondi. Comment garantir, dans ces conditions, que la solution calculée par

un schéma soit suffisamment proche de la solution exacte au temps final ? Le cas échéant, jusqu'à quelle tolérance faut-il considérer la prolifération des erreurs numériques liées à l'instabilité sous prétexte qu'elles sont « physiques », c'est-à-dire « innées » au sein du modèle, ou faut-il juste les retarder ou les minimiser, sachant qu'elles finiront fatalement par prédominer ?

Pour mieux éclairer ce dilemme, deux exemples élémentaires de problèmes différentiels instables sont examinés. Le premier correspond à la croissance exponentielle régie par

$$\frac{dX}{dt} = aX, \quad X(0) = 0, \quad (1.4)$$

avec  $a > 0$ . La solution exacte est  $X(t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ . C'est cette solution qui doit être simulée numériquement. Malheureusement, elle est instable puisque toute erreur  $\eta \neq 0$  sur la donnée initiale ( $X_\eta(0) = \eta$ ) conduit à  $X_\eta(t) = \exp(at)\eta$ . Il faut donc s'accorder sur ce qui est « voulu » vraiment entre les deux options suivantes :

1. Faire tout son possible au niveau numérique pour que  $X$  reste au plus proche de 0, et ce le « plus longtemps possible ». Cette option se justifie par l'attachement de l'utilisateur à la solution exacte mais fait fi de son instabilité. Pire, elle introduit la nécessité de lutter contre l'instabilité.
2. Accepter que  $X$  s'éloigne indéfiniment de 0 au niveau discret, comme c'est le cas du schéma d'Euler explicite  $X^{n+1} = (1 + a\Delta t)X^n$  qui donne  $X_\eta^n = (1 + a\Delta t)^n \eta$ . Cette option se défend en disant qu'après tout, l'instabilité est déjà contenue dans le modèle (1.4) et que le schéma ne doit pas aller contre cette tendance. Mais dans ce cas, le résultat calculé  $X_\eta^n$  a-t-il une quelconque signification, dans la mesure où il dépend de la perturbation initiale  $\eta$ , laquelle varie aléatoirement d'une machine à l'autre voire d'une exécution à l'autre ?

Toute cette discussion se transpose au second exemple

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\omega^2 \sin \vartheta, \quad \vartheta(0) = \pi, \quad \frac{d\vartheta}{dt}(0) = 0, \quad (1.5)$$

qui est non-linéaire et qui correspond à un pendule avec équilibre instable en position haute. La solution exacte est  $\vartheta(t) = \pi$  pour tout  $t \geq 0$  et c'est elle qui doit être simulée numériquement. De manière analogue au premier exemple, il faut se décider entre deux options. Dans la première option, le pendule est maintenu en haut parce que c'est la solution. Dans la seconde option, la trajectoire numériquement calculée à partir d'une position initiale légèrement erronée  $\vartheta(0) = \pi - \eta$ , avec  $\eta \neq 0$ , fait évoluer le pendule vers la position stable  $\vartheta(+\infty) = 0$ , ce qui semble conforme à la « réalité ». Mais si la trajectoire discrète  $\vartheta_\eta^n$  dépend d'un paramètre de perturbation  $\eta$  aléatoire selon la machine, de quelle trajectoire continue est-elle l'approximation ? Cet exemple est intéressant car dans la « réalité » le passage de la position instable vers la position stable se fait selon une trajectoire également imprévisible.

#### 1.1.4 Artéfacts numériques

Les deux exemples (1.4)–(1.5) sont quelque peu extrêmes, au sens où les solutions instables sont stationnaires. Dans le modèle (1.1), les solutions recherchées dépendent de l'espace  $\mathbf{x}$

et du temps  $t$ , ce qui provoque des manifestations d'instabilité plus complexes. Toujours est-il que les deux options demeurent essentiellement les mêmes.

En simulation de réservoir, les ingénieurs optent très pragmatiquement pour la première option car ils doivent s'efforcer de suivre la solution exacte, laquelle est stable en régime favorable ( $M \leq M^\sharp$ ). Ce point de vue est adopté dans cette thèse. Avant de pouvoir décrire les effets numériques gênants en régime défavorable de manière à pouvoir les combattre, il faut mieux connaître la méthode de résolution.

### Schéma de discrétisation

Sur un maillage rectangulaire uniforme dont chaque cellule a pour taille  $\Delta x \times \Delta y$  et est indexée de manière cartésienne par  $(i, j)$ , la méthode numérique sans doute la plus usuelle pour (1.1) est le *schéma à cinq points* (5P). Il se décompose en deux étapes. Dans la première étape, le système linéaire en  $p^{n+1}$  constitué par l'assemblage des bilans est résolu

$$F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j} + F_{i,j+1/2} - F_{i,j-1/2} = \Delta x \Delta y q_{i,j}^{n+1}, \quad (1.6)$$

qui correspond à la discrétisation par volumes finis de l'équation (1.1b). Dans (1.6), les flux numériques

$$F_{i+1/2,j} = \kappa \lambda_{i+1/2,j}^n \frac{\Delta y}{\Delta x} (p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}), \quad (1.7a)$$

$$F_{i,j+1/2} = \kappa \lambda_{i,j+1/2}^n \frac{\Delta x}{\Delta y} (p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}) \quad (1.7b)$$

représentent une approximation consistante du flux normal de  $\mathbf{u}$  à travers les arêtes. Dans la seconde étape, les saturations  $s^{n+1}$  sont mises à jour à l'aide des bilans

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \phi \frac{s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j}^n}{\Delta t^n} + (f(s)F)_{i+1/2,j} - (f(s)F)_{i-1/2,j} \\ + (f(s)F)_{i,j+1/2} - (f(s)F)_{i,j-1/2} = \Delta x \Delta y q_{w;i,j}^{n+1}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

qui correspondent à la discrétisation par volumes finis de l'équation (1.1c), avec les produits décentrés amonts

$$(f(s)F)_{i+1/2,j} = f(s_{i,j}^n) [F_{i+1/2,j}]^+ + f(s_{i+1,j}^n) [F_{i+1/2,j}]^-, \quad (1.9a)$$

$$(f(s)F)_{i,j+1/2} = f(s_{i,j}^n) [F_{i,j+1/2}]^+ + f(s_{i,j+1}^n) [F_{i,j+1/2}]^-, \quad (1.9b)$$

utilisant les  $F_{i+1/2,j}$  et  $F_{i,j+1/2}$  obtenus de la première étape.

Le choix d'expliciter  $s$  et d'impliciter  $p$ , surnommé IMPES (*IMPLICIT Pressure, EXPLICIT Saturation*), est avantageux dans la mesure où il découple la résolution en pression de celle en saturation. Quant à la discrétisation en espace, elle coïncide avec le schéma plus couramment appelé TPFA (*Two-Point Flux Approximation*) dans la communauté des volumes finis. Le lecteur trouvera de plus amples détails en §2.3.2 concernant le calcul de la mobilité  $\lambda_{i+1/2,j}^n$  aux arêtes, le traitement des conditions de bord et des termes sources.

### Effet d'orientation

À ce stade, une question légitime est de savoir pourquoi ce schéma est restreint à un maillage cartésien rectangulaire uniforme. Historiquement, les premières simulations numériques de réservoir ont été réalisées [51] sur un tel maillage. Pour la plupart des simulations quotidiennes, un tel maillage suffit et séduit même par sa simplicité et sa meilleure précision dans les résultats. Mais surtout, le problème étudié ici, à savoir l'*effet de l'orientation du maillage*, n'a de sens qu'en maillage rectangulaire uniforme.

Sur un maillage rectangulaire, il y a deux directions privilégiées qui sont celles des axes. Si les cellules sont de la même taille, il y a invariance par translation le long de chaque axe et seule la direction compte. Dans ces conditions, le comportement du schéma numérique en termes de vitesse de propagation ou de dissipation est assez différent le long des axes du maillage ou suivant une autre direction dans le plan. Cette différence est tout à fait normale dès qu'une discrétisation spatiale est envisagée. Cependant, le caractère instable de la solution en régime défavorable accentue et exacerbe les écarts au point de dégrader la solution de manière spectaculaire, avec en pratique des répercussions néfastes sur la prédiction de production.

Trois configurations typiques où l'effet de l'orientation du maillage peut devenir préoccupant pour l'ingénieur sont exposées en §2.4. La première d'entre elles, appelée *cas radial*, correspond à une injection d'eau en un point dans le plan infini, ce qui donne lieu à une solution exacte radiale. Sur la figure 1.2, la solution calculée avec le schéma pour  $M = 0.8$  semble satisfaisante du point de vue de cette symétrie. Par contre, celle pour  $M = 200$  n'est pas radiale : des pointes se forment dans les directions d'axes et les lignes isovaleurs en saturation ressemblent davantage à des losanges. Tous les détails mathématiques de ce cas sont fournis en §2.4.1.

Dans la deuxième configuration, appelée *cas à cinq puits* et présentée en §2.4.2, la solution exacte n'est pas radiale à cause de la présence des quatre puits de production. Le calcul est lancé sur deux maillages, l'un obtenu à partir de l'autre par rotation. Il ne faut pas s'attendre à ce que les fronts soient circulaires, mais à ce que la forme de la solution ne varie pas trop d'un maillage à l'autre. Cela est bien le cas pour  $M = 1.6$  (cf. figure 2.20) mais pas pour  $M = 100$  (cf. figure 1.3).

La troisième et dernière configuration, décrite en §2.4.3, correspond à un *écoulement piston* dont la solution exacte est en principe unidimensionnelle. Pour  $M = 200$ , les résultats de simulation représentés sur la figure 2.23 font apparaître des perturbations qui peuvent faire penser aux digitations visqueuses évoquées en §1.1.1 (cf. figure 1.1). Ici, les soi-disantes « digitations » ne sont en réalité que du bruit numérique déclenché et intensifié par l'instabilité du régime défavorable. Elles ne sont pas reproductibles ni d'une machine à l'autre, ni d'une exécution à l'autre. De plus, elles ne disparaissent pas en raffinant le maillage.

L'objectif de cette thèse est de remédier à la déformation du front de propagation en saturation qui émane de l'effet de l'orientation du maillage. Par « remédier », il faut entendre sinon supprimer, du moins atténuer ou retarder. À cette fin, le schéma est corrigé de façon à le rendre « le moins anisotrope possible » dès la conception afin qu'il résiste mieux à l'instabilité de la solution en régime défavorable.

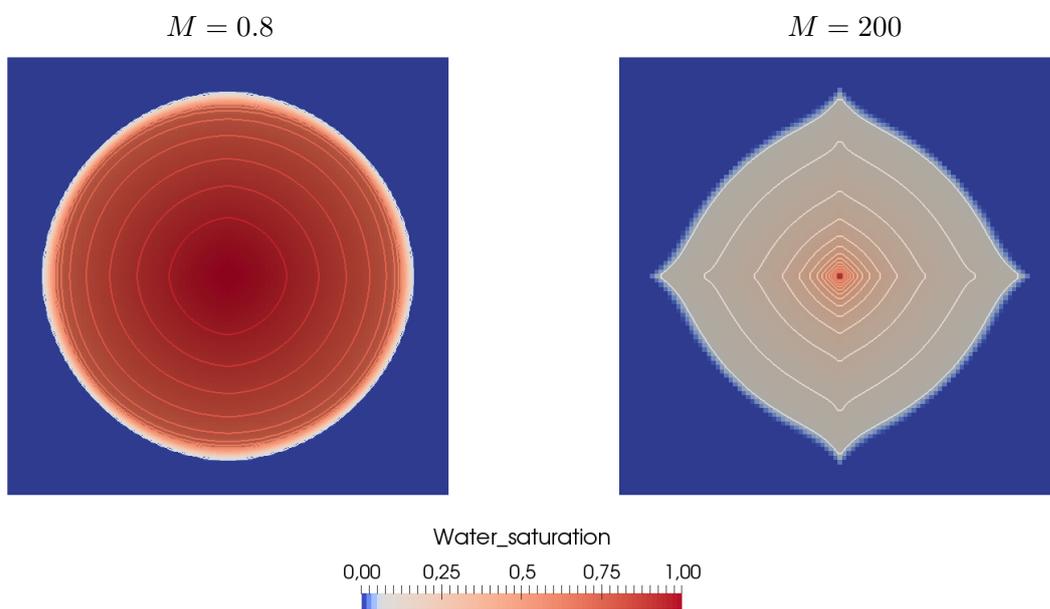


FIGURE 1.2 – Cas radial : champ de saturation calculé avec le schéma 5P pour  $M = 0.8$  (à gauche) et  $M = 200$  (à droite).

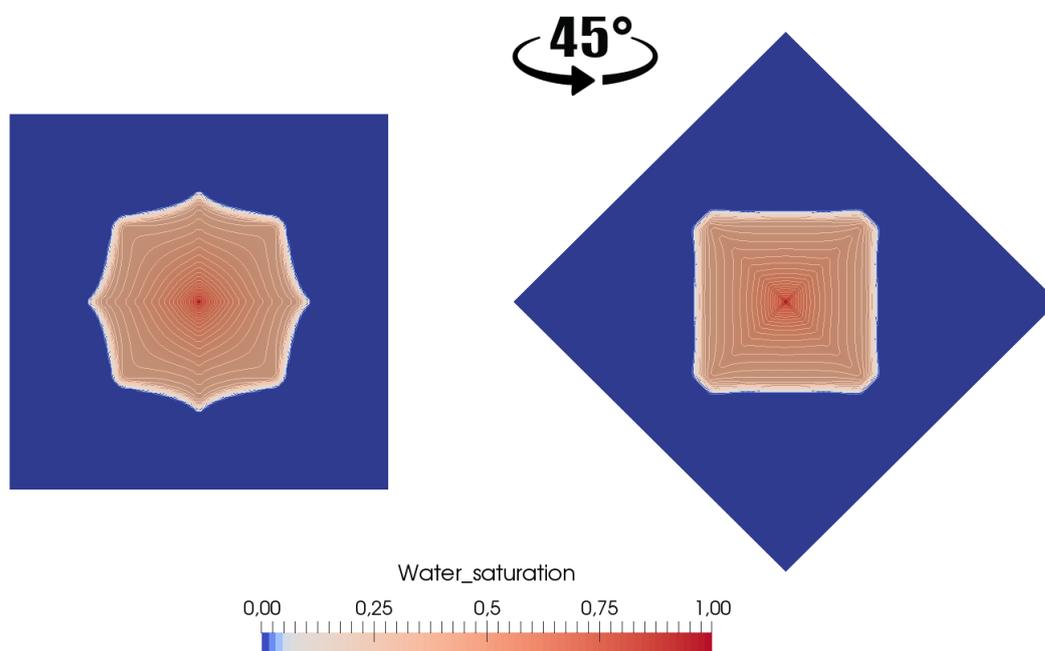


FIGURE 1.3 – Cas à cinq puits : champ de saturation calculé avec le schéma 5P pour  $M = 100$ , en maillage diagonal (à gauche) et maillage parallèle (à droite).

## 1.2 Approches classiques pour atténuer l'effet de l'orientation du maillage

Il existe une multitude de travaux en ingénierie de réservoir sur cette thématique. Ils sont passés en revue ci-après. Dans la plupart des cas, les idées proposées ne sont valides qu'en maillages carrés, c'est-à-dire pour  $\Delta x = \Delta y$ . Pour ce travail, la nouvelle amélioration trouvée devra également être efficace en maillages rectangulaires, avec des rapports  $\Delta y/\Delta x$  aussi éloignés de 1 que possible.

### 1.2.1 Schémas à neuf points pour le système couplé

Les premières études mettant en évidence l'interaction entre l'instabilité du modèle et la dissipation numérique du schéma 5P sont dues à Abou-Kassem et Aziz [1]. Todd [89] a démontré que le raffinement du maillage ne permet pas de réduire l'erreur d'orientation du maillage. Cependant, il est possible d'après Brand et al. [15] de trouver un compromis acceptable entre la taille des mailles (carrées) et le rapport de mobilités. Les travaux de Shubin et Bell [87] puis de Fanchi [44] attestent de l'importance des rotations du maillage en vue d'ajuster les axes du maillage avec la direction des flux discrétisés en 5P.

En 1979, Yanosik et McCracken [98] ont construit un nouveau schéma, dit à *neuf points*, obtenu en superposant deux schémas 5P correspondant à deux maillages carrés tournés de  $\pi/4$  l'un par rapport à l'autre. En incorporant dans son stencil les mailles en voisinage diagonal en plus des mailles en voisinage direct, le schéma qui en résulte permet de diminuer notablement l'effet d'orientation en maillages carrés et a connu un succès immédiat.

Deux généralisations du schéma de Yanosik-McCracken en maillages rectangulaires ont ensuite été proposées d'une part par Shah [85], d'autre part par Coats et Modine [29]. La différence entre ces deux versions réside dans l'heuristique de pondération des mailles diagonales. Pour cette pondération, Ding [36] propose une analyse d'erreur plus rigoureuse et aboutit à un nouveau schéma à neuf points. Depuis, le schéma à neuf points a été étendu à d'autres modèles diphasiques poreux, par exemple pour tenir compte de la dispersion [58, 86]. Ce qui semble critiquable dans tous ces travaux est que les analyses d'erreur — lorsqu'il y en a — portent uniquement sur la pression alors que la quantité d'intérêt est la saturation.

Plus récemment, Eymard et al. [43] ont proposé une variante du schéma à neuf points en maillages carrés. L'idée de base est de s'appuyer sur une analyse d'erreur de l'équation en saturation — ce qui est satisfaisant au niveau théorique — afin de demander que la matrice de diffusion de l'équation équivalente soit invariante par rotation d'angle  $\pi/4$ . Le plus remarquable avec la construction d'Eymard et al. [43] est que le schéma en pression demeure exactement 5P : il est juste « déguisé » en neuf points dans le but d'impacter le schéma en saturation.

Pour comprendre ce point, il est indispensable d'expliquer plus en détails l'interdépendance entre la discrétisation du problème en pression (1.1a)–(1.1b) et celle du transport de la saturation (1.1c) dans le cadre général des schémas à neuf points. À la première étape, au lieu du bilan à quatre flux (1.6), le schéma à neuf points utilise à présent un bilan à

huit flux de la forme

$$\begin{aligned}
 F_{i+1/2,j}^\theta - F_{i-1/2,j}^\theta + F_{i,j+1/2}^\theta - F_{i,j-1/2}^\theta \\
 + F_{i+1/2,j+1/2}^{\nearrow\theta} - F_{i-1/2,j-1/2}^{\nearrow\theta} \\
 + F_{i-1/2,j+1/2}^{\nwarrow\theta} - F_{i+1/2,j-1/2}^{\nwarrow\theta} = \Delta x \Delta y q_{i,j}^{n+1}
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

pour discrétiser (1.1a)–(1.1b). Ces flux dépendent d'un paramètre scalaire libre  $\theta$  qui mesure la contribution des pressions dans les mailles diagonales. Leurs valeurs sont à définir convenablement, sous la condition que, pour  $\theta = 0$ , le bilan à cinq points (1.6) soit retrouvé. Pour  $\theta > 0$ , le schéma (1.10) est *a priori* différent de (1.6).

À la seconde étape, au lieu du bilan à quatre flux (1.8), la saturation est mise à jour à l'aide du bilan à huit flux

$$\begin{aligned}
 \Delta x \Delta y \phi \frac{s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j}^n}{\Delta t^n} + (f(s)F)_{i+1/2,j}^\theta - (f(s)F)_{i-1/2,j}^\theta \\
 + (f(s)F)_{i,j+1/2}^\theta - (f(s)F)_{i,j-1/2}^\theta \\
 + (f(s)F)_{i+1/2,j+1/2}^{\nearrow\theta} - (f(s)F)_{i-1/2,j-1/2}^{\nearrow\theta} \\
 + (f(s)F)_{i-1/2,j+1/2}^{\nwarrow\theta} - (f(s)F)_{i+1/2,j-1/2}^{\nwarrow\theta} = \Delta x \Delta y q_{w;i,j}^{n+1},
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

avec les produits décentrés amont analogues à (1.9) pour les flux horizontaux et verticaux, ainsi que

$$(f(s)F)_{i+1/2,j+1/2}^{\nearrow\theta} = f(s_{i,j}^n) [F_{i+1/2,j+1/2}^{\nearrow\theta}]^+ + f(s_{i+1,j+1}^n) [F_{i+1/2,j+1/2}^{\nearrow\theta}]^-, \tag{1.12a}$$

$$(f(s)F)_{i-1/2,j+1/2}^{\nwarrow\theta} = f(s_{i,j}^n) [F_{i-1/2,j+1/2}^{\nwarrow\theta}]^+ + f(s_{i-1,j+1}^n) [F_{i-1/2,j+1/2}^{\nwarrow\theta}]^-, \tag{1.12b}$$

pour les flux diagonaux. Ainsi, les saturations dans certaines mailles diagonales sont susceptibles d'intervenir dans le transport (1.11), qui « voit » alors plus de directions.

Dans le cas spécifique du schéma de Eymard et al. [43], la définition des flux paramétrés est travaillée de sorte que, quel que soit  $\theta$ , le premier membre de (1.10) soit toujours égal au premier membre de (1.6). Autrement dit, le bilan à huit flux (1.10) n'est qu'une réécriture algébrique avec un paramètre libre du bilan à quatre flux (1.6), dans laquelle les pressions dans les mailles diagonales ont une contribution globalement nulle, mais localement non nulle dans chaque flux. Cette manipulation n'est finalement destinée qu'à retoucher le schéma en saturation par (1.11).

## 1.2.2 Schémas multi-dimensionnels pour le transport pur

Dans le cadre général des schémas à neuf points, la modification du schéma en saturation est toujours indirecte. Le problème en pression est d'abord considéré pour altérer la structure des flux et leurs valeurs. De ces changements découle ensuite de manière implicite un nouveau schéma de transport en saturation. Ceci est aussi critiquable en raison du décentrage amont selon la direction normale des faces. C'est pourquoi des schémas de transport plus précis sont envisagés, par exemple les schémas de type *multi-dimensionnel* qui décentrent en remontant les lignes de courant.

Cela amène vers les méthodes numériques pour le problème d'advection scalaire linéaire

$$\partial_t s + \operatorname{div}(s\mathbf{u}) = 0, \quad (1.13)$$

où  $\mathbf{u}$  est un champ de vitesse supposé donné et à divergence nulle<sup>2</sup>. Certes, la vraie équation à considérer devrait être (en dehors des puits)

$$\partial_t s + \operatorname{div}(f(s)\mathbf{u}) = 0, \quad (1.14)$$

mais le pari est qu'à partir d'un bon schéma pour (1.13), il est facile de déduire un bon schéma pour (1.14), grâce à la monotonie du flux fractionnaire,  $f' \geq 0$  sur  $[0, 1]$ . Toujours est-il que si la vitesse  $\mathbf{u}$  est connue exactement, il n'y a plus de problème d'instabilité intrinsèque au modèle, que ce soit avec (1.13) ou (1.14).

Dans cette vaste littérature, les deux références historiquement les plus marquantes sont : le schéma positif à stencil étroit de Roe et Sidilkover [82] et le schéma CTU (*Corner Transport Upwind*) de Colella [30], qui ont été élaborés à peu près simultanément au début des années 1990 en maillages carrés. À IFP Energies nouvelles, une comparaison systématique des schémas pour l'advection scalaire linéaire a été entreprise [91,92] au début des années 2000, dans laquelle la méthode CTU a été généralisée aux maillages déformés non-structurés. Le schéma finalement retenu pour implémentation dans divers logiciels maison n'est aucun de ceux-ci, mais un nouveau schéma conçu par les ingénieurs IFP Energies nouvelles [12,71] en s'inspirant d'une idée préliminaire de Després et Lagoutière [35]. Tous ces schémas sont « figés » au sens où ils ne disposent d'aucun paramètre de réglage libre, à part le choix des limiteurs de pentes [88,94].

Une série de contributions récentes, par Kozdon et ses co-auteurs [60,63,64], a semblé intéressante pour cette thèse. En effet, Kozdon parvient à unifier au sein d'un même cadre plusieurs schémas dont celui de Roe-Sidilkover, celui de Colella et aussi celui de Lamine [68]. Dans son formalisme, tout schéma pour (1.14) dépend d'une fonction arbitraire  $\psi$ . C'est en spécifiant ce degré de liberté que certains schémas existants sont retrouvés. Pour cela, il travaille avec des demi-flux à travers les demi-arêtes. En chaque sommet du maillage, les quatre demi-flux sont reliés entre eux par un système linéaire local d'ordre 4 qui traduit les relations amont-aval en fonction des directions des vitesses et qui fait intervenir le paramètre fonctionnel  $\psi$ . L'existence de celui-ci est intéressante dans la mesure où elle ouvre la voie à une minimisation selon un critère de moindre anisotropie à exprimer.

Pour terminer cette revue (non exhaustive), il est capital de répéter que la performance d'un schéma de transport multi-dimensionnel repose de manière cruciale sur la présomption que le champ de vitesse est connu exactement. Or, dans le système couplé du modèle diphasique, la vitesse discrète qui sort du problème en pression est entachée d'une erreur plus ou moins importante. Par conséquent, tout remède à l'effet de l'orientation du maillage qui consisterait à agir uniquement sur le schéma de transport en saturation sans affecter aucunement les flux normaux  $F$  du schéma 5P ne semble pas suffisante.

---

2. sachant qu'au niveau discret,  $\mathbf{u}$  n'est connu qu'à travers les flux normaux  $F$ .

### 1.3 Stratégie de minimisation de l'anisotropie numérique en maillage rectangulaire

La question centrale qui sous-tend tout effort de réduction de l'effet de l'orientation du maillage est de savoir comment mesurer cet « effet » et de s'entendre sur la signification du verbe « réduire ». La plupart des travaux antérieurs en maillages carrés se contentent d'imposer une propriété d'invariance par rotation d'angle  $\pi/4$ , ce qui rend les deux directions diagonales « équivalentes » à celles des axes du maillage. Le reproche à cette approche est double : (1) la minimisation d'une quantité (laquelle ?) a-t-elle vraiment été réalisée ; (2) la généralisation à un maillage rectangulaire est-elle possible ?

Pour traiter convenablement cette question en maillage rectangulaire, la stratégie suivante en trois étapes est recommandée.

#### 1.3.1 Quantification des erreurs angulaires

Il faut d'abord associer à chaque direction dans le plan une certaine grandeur qui quantifie l'erreur ou une partie de l'erreur commise par chaque schéma sur la saturation. Pour réaliser cette association et obtenir une notion pertinente d'erreur angulaire, deux techniques sont possibles : (i) l'analyse de Fourier [4, 10, 95] sur l'équation de transport linéarisée ; (ii) l'équation équivalente en coordonnées polaires sous l'hypothèse d'un champ de vitesse radial.

Les deux voies mènent au même résultat. La deuxième, qui est plus facile à présenter, fait intervenir l'équation équivalente

$$\phi \partial_t s + \operatorname{div}(f(s)\mathbf{u}) = (r^{-1}\partial_r(r\cdot), r^{-1}\partial_\vartheta) \left\{ f'(s)\mathbf{D}_{\Delta x, \Delta y}(\vartheta) \begin{pmatrix} \partial_r \\ r^{-1}\partial_\vartheta \end{pmatrix} s \right\},$$

dans laquelle

$$\mathbf{D}_{\Delta x, \Delta y}(\vartheta) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\Delta x, \Delta y}(\vartheta) & \tilde{B}_{\Delta x, \Delta y}(\vartheta) \\ \tilde{B}_{\Delta x, \Delta y}(\vartheta) & \tilde{C}_{\Delta x, \Delta y}(\vartheta) \end{bmatrix}$$

est la matrice de diffusion en coordonnées polaires  $(r, \vartheta)$ . Chacun de ses éléments dépend non seulement de  $\vartheta$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  mais aussi du paramètre scalaire  $\theta$  (pour le schéma à neuf points) ou du paramètre fonctionnel  $\psi$  (pour le schéma multi-dimensionnel de Kozdon). Le terme

$$\tilde{A}_{\Delta x, \Delta y}(\vartheta),$$

qui représente l'action de la diffusion radiale dans la direction radiale, est alors érigé en définition de l'erreur angulaire.

#### 1.3.2 Définition d'un comportement « idéal » de moindre anisotropie

Cette erreur angulaire a la particularité de prendre des valeurs fixées dans les directions d'axes, à savoir,

$$\tilde{A}_{\Delta x, \Delta y}(0) = \Delta x/2, \quad \tilde{A}_{\Delta x, \Delta y}(\pi/2) = \Delta y/2, \quad (1.15)$$

quelles que soient celles du paramètre  $\theta$  ou  $\psi$ .

Dans l'étape suivante, il est souhaité que  $\tilde{A}_{\Delta x, \Delta y}$  oscille le moins possible entre  $\vartheta = 0$  et  $\vartheta = \pi/2$ . Ce comportement « idéal », le moins oscillatoire possible, est décrété atteint quand la fonction  $\tilde{A}_{\Delta x, \Delta y}$  est affine par rapport à la variable

$$S = \sin^2 \vartheta.$$

Ainsi, avec un léger abus de notation (dans le passage de  $\vartheta$  à  $S$ ), la distribution d'erreur angulaire la moins anisotrope est définie comme étant

$$\tilde{A}_{\Delta x, \Delta y}^*(S) = \frac{\Delta y}{2} S + \frac{\Delta x}{2} (1 - S). \quad (1.16)$$

Une justification possible du choix (1.16) est qu'il réalise la solution du problème

$$\min_{A(\cdot)} \int_0^1 |A'(S)|^2 dS,$$

le minimum étant pris sur toutes les fonctions  $A \in C^2([0, 1]; \mathbb{R})$  soumises aux conditions de bord (1.15) et correspond à la fonctionnelle pénalisant toute variation de  $A$  par rapport à  $S$ .

### 1.3.3 Minimisation de l'écart entre les deux distributions angulaires

Enfin, le paramètre optimal  $\theta^*$  ou  $\psi^*$  est obtenu en minimisant l'écart total entre l'erreur angulaire effective du schéma et l'erreur angulaire idéale. En d'autres termes,

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} \int_0^1 |\tilde{A}_{\Delta x, \Delta y}^{\theta}(S) - \tilde{A}_{\Delta x, \Delta y}^*(S)|^2 dS, \quad (1.17a)$$

ou

$$\psi^* = \arg \min_{\psi} \int_0^1 |\tilde{A}_{\Delta x, \Delta y}^{\psi}(S) - \tilde{A}_{\Delta x, \Delta y}^*(S)|^2 dS. \quad (1.17b)$$

Cette étape est en général la plus complexe des trois.

Pour contourner la difficulté posée par le problème d'optimisation (1.17a), une valeur sous-optimale  $\theta^b$  est en pratique utilisée, définie de la façon suivante. La fonction  $S \mapsto \tilde{A}_{\Delta x, \Delta y}^{\theta}(S)$  est souvent naturellement exprimée par morceaux sur  $[0, S^*]$  et  $[S^*, 1]$ , où le point de transition  $S^*$  dépend du rapport  $\Delta y / \Delta x$ . Pour la sous-optimisation, le paramètre  $\theta^b$  est pris tel que la courbe sous-optimale  $\tilde{A}_{\Delta x, \Delta y}^{\theta^b}$  prenne la même valeur que la courbe idéale au point de transition. Autrement dit,

$$\tilde{A}_{\Delta x, \Delta y}^{\theta^b}(S^*) = \tilde{A}_{\Delta x, \Delta y}^*(S^*), \quad (1.18)$$

La condition (1.18) conduit à des formules explicites pour  $\theta^b$ .

Dans les chapitres §3–§5, cette procédure de minimisation est déclinée pour trois types de schémas différents. Que ce soit le minimum exact ou le minimum approché, il est important de garder à l'esprit que cette minimisation de l'anisotropie numérique n'est pas équivalente à la minimisation de l'erreur numérique elle-même. En fait, l'ordre théorique du schéma reste identique, c'est-à-dire égal à 1 par rapport à la saturation. Seule la distribution spatiale de l'erreur aura changé.

## 1.4 Plan détaillé du manuscrit

### Chapitre 2 : problème modèle, schéma 5P

Dans le chapitre §2, qui sert de base à tout le manuscrit, le problème modèle (1.1) est établi en §2.1. Sur celui-ci seront développées les nouvelles idées de schémas numériques aux chapitres suivants.

Même s'il repose sur plusieurs hypothèses simplificatrices par rapport à un modèle réaliste, ce modèle « jouet » retient suffisamment de difficultés dignes d'intérêt. Au premier rang de celles-ci figure le caractère instable des solutions au-delà d'un certain seuil critique du rapport des mobilités, comme l'atteste l'analyse effectuée en §2.2 pour des écoulements unidimensionnels.

La résolution numérique la plus classique du modèle combine une discrétisation IMPES (IMplicite en Pression, Explicite en Saturation) en temps et un schéma volumes finis dit à *cinq points* (5P) en espace. Sa description fait l'objet de §2.3. La dernière section §2.4 rassemble certains résultats de simulation illustrant les principaux défauts du schéma 5P auxquels cette thèse tente de remédier. Ces résultats constituent également une référence de comparaison pour les chapitres ultérieurs.

### Chapitre 3 : schéma 9P1s, résultats encourageants

Conçu dans les années 1980 par les ingénieurs du pétrole, le schéma à neuf points est un palliatif pragmatique contre l'effet d'orientation du schéma 5P en maillage rectangulaire. En §3.1, son idée de base est rappelée en mettant l'accent sur le paramètre scalaire qui confère au schéma l'acronyme 9P1s et qui sera optimalement ajusté par la suite.

La stratégie préconisée pour l'optimisation par rapport au paramètre s'appuie sur une quantification de l'anisotropie via une distribution angulaire de l'erreur. Appliquée au laplacien pur en pression en §3.2, cette démarche fournit une justification rigoureuse à la valeur heuristiquement recommandée par de nombreux auteurs [36, 98].

Appliquée à l'équation en saturation, ce qui est plus pertinent, cette démarche conduit en §3.3 à un problème de minimisation plus ardu, mais dont il est facile de déterminer une solution approchée. La valeur « sous-optimale » du paramètre coïncide alors avec celle obtenue par [43, 53] en maillage carré au moyen d'une autre méthode. Les résultats numériques de §3.4 témoignent de l'amélioration progressive des fronts pour des maillages dont le rapport des pas d'espace demeure proche de 1.

### Chapitre 4 : schéma MD1f, résultats... surprenants

Dans le schéma 9P1s du chapitre §3, la modification du schéma de transport pour la saturation découle de celle du schéma pour la pression par décentrage amont. Il est alors naturel d'envisager une alternative où la modification est directement opérée sur l'équation en saturation, laissant tel quel le schéma de la pression. C'est ce qui est mis en œuvre ici avec l'espoir qu'en déployant un schéma de transport sophistiqué, de type multi-dimensionnel par exemple, l'effet d'orientation de maillage sera davantage réduit.

En effet, au lieu de se contenter de la direction normale à chaque arête, un schéma multi-dimensionnel fait l'effort de suivre de plus près les lignes de courant. Le schéma multi-dimensionnel retenu pour l'étude est celui de Kozdon et al. [60], dont la construction est

rappelée en §4.1. Ce choix est motivé non seulement par les bons résultats que semblent obtenir les auteurs sur des simulations diphasiques mais aussi par le fait que le schéma dispose d'un degré de liberté fonctionnel ajustable, d'où d'ailleurs l'acronyme MD1f.

Comme réalisé en §4.2, le paradigme d'optimisation, introduit au chapitre précédent, se transpose assez aisément au cas présent, malgré une relative lourdeur du calcul des variations associé. Ainsi, il est possible de connaître le « meilleur » paramètre selon un critère de « moindre anisotropie ». Enfin, la section §4.4 regroupe les résultats numériques correspondant à ce schéma MD1f optimisé.

## Chapitre 5 : schéma 9P2s, résultats satisfaisants

Les schémas 9P1s et MD1f décrits dans les chapitres précédents ont notablement réduit l'effet d'orientation de maillage sur des maillages peu allongés. Toutefois, force est de constater qu'ils n'ont pas tenu leurs promesses lorsque le rapport des longueurs  $\Delta y/\Delta x$  s'éloigne de 1. En particulier, la performance peu probante du schéma MD1f semble fermer la porte à la piste d'une amélioration directe du schéma de transport en saturation.

Pour lutter plus efficacement contre l'effet d'orientation de maillage, le schéma 9P1s est repris en le faisant dépendre de deux paramètres scalaires au lieu d'un, une minimisation à deux variables étant « meilleure » qu'à une variable. Toute la difficulté réside cependant dans la recherche d'une discrétisation à deux paramètres de l'équation en pression qui puisse s'exprimer au moyen d'un bilan de flux au sens des volumes finis. Ceci est quand même possible et est réalisé en §5.1.

Une fois le nouveau schéma 9P2s défini, toute la machinerie de l'analyse d'erreur des chapitres 3 et 4 peut être relancée en §5.2 et §5.3 afin de déterminer les paramètres optimaux minimisant l'anisotropie. Comme au chapitre 3, une minimisation approchée est retenue, donnant des formules explicites. Les résultats obtenus avec ce schéma 9P2s sont les meilleurs comme le démontre la section §5.4.

## Chapitre 6 : enrichissement du modèle

L'objet de ce chapitre est de prendre en compte des phénomènes physiques plus complexes afin de rendre les simulations plus réalistes. Jusqu'à présent, le modèle étudié était simplifié avec des termes négligés, comme la gravité et la pression capillaire, et des variables étaient prises constantes sur tout le domaine (perméabilité, porosité,...).

Ce chapitre va enrichir le système d'équations de deux manières. Dans une première partie §6.1, l'effet de la gravité sera pris en considération dans le modèle et son impact sur le schéma 9P2s sera étudié d'un point de vue discrétisation mais aussi sur les résultats numériques. Ensuite, quelques cas seront exposés dans §6.2 lorsque la perméabilité n'est plus constante et homogène mais hétérogène dans tout le domaine.



## Chapitre 2

# Problème modèle et résolution classique à cinq points

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Modèle d'étude</b>	<b>18</b>
2.1.1	Équations intérieures	18
2.1.2	Conditions aux limites et initiales	21
<b>2.2</b>	<b>Analyse de stabilité en 1-D</b>	<b>22</b>
2.2.1	Coefficients de Corey égaux à 1	26
2.2.2	Coefficients de Corey égaux à 2	31
<b>2.3</b>	<b>Schéma de référence 5P</b>	<b>34</b>
2.3.1	Discrétisation en temps	34
2.3.2	Discrétisation en espace	36
<b>2.4</b>	<b>Cas tests de référence</b>	<b>43</b>
2.4.1	Cas radial	43
2.4.2	Cas à 5 puits	49
2.4.3	Cas digitations	57

---

Dans ce chapitre, qui sert de base à tout le manuscrit, le problème modèle (1.1) est établi en §2.1. Sur celui-ci seront développées les nouvelles idées de schémas numériques aux chapitres suivants.

Même s'il repose sur plusieurs hypothèses simplificatrices par rapport à un modèle réaliste, ce modèle « jouet » retient suffisamment de difficultés dignes d'intérêt. Au premier rang de celles-ci figure le caractère instable des solutions au-delà d'un certain seuil critique du rapport des mobilités, comme l'atteste l'analyse effectuée en §2.2 pour des écoulements unidimensionnels.

La résolution numérique la plus classique du modèle combine une discrétisation IMPES (IMplicite en Pression, Explicite en Saturation) en temps et un schéma volumes finis dit à cinq points (5P) en espace. Sa description fait l'objet de §2.3

La dernière section §2.4 rassemble certains résultats de simulation illustrant les principaux défauts du schéma 5P auxquels cette thèse tente de remédier. Ces résultats constituent également une référence de comparaison pour les chapitres ultérieurs.

## 2.1 Modèle d'étude

Le modèle considéré tout au long cette thèse, à l'exception du chapitre §6, est issu d'un modèle plus général appelé *Dead Oil isotherme* [47], lui-même un cas particulier d'une famille plus vaste de modèles de milieux poreux [19, 22].

### 2.1.1 Équations intérieures

Dans le réservoir d'hydrocarbures, représenté par un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ouvert borné connexe et régulier par morceaux, le milieu poreux est une roche solide dans laquelle il y a des pores permettant à un fluide de circuler. Ces pores peuvent être plus ou moins nombreux et de tailles différentes. Au lieu de les décrire au niveau microscopique, le milieu est caractérisé par un champ macroscopique appelé *porosité*  $\phi \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$ . Celle-ci exprime localement le rapport entre le volume des pores et celui du milieu. Par la suite, la porosité  $\phi \in [0, 1]$  sera supposée uniforme en espace.

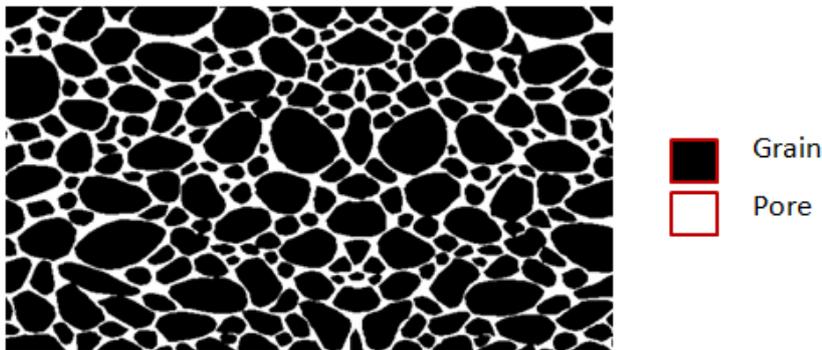


FIGURE 2.1 – Un milieu poreux à l'échelle microscopique.

Quand la roche est saturée par un fluide, elle possède une aptitude à le laisser circuler dans les pores. Cette capacité, appelée *perméabilité absolue*, est en général mesurée par un champ de tenseur symétrique  $\kappa \in L^\infty(\Omega; \text{Sym}(\mathbb{R}^2))$ . Les variations en espace de la perméabilité sont dues aux hétérogénéités et aux changements de type de roche dans le domaine. En milieu homogène et isotrope, hypothèse adaptée ici, ce champ de tenseur se réduit à un scalaire  $\kappa > 0$ . L'unité de mesure courante pour la perméabilité est le darcy (D), avec  $1 \text{ D} = 9.869233 \times 10^{-13} \text{ m}^2$ .

Le fluide diphasique est composé de l'« huile » indicée par  $o$  (oil) et représentant les hydrocarbures, ainsi que de l'« eau » indicée par  $w$  (water) et représentant le liquide injecté artificiellement pour pousser l'huile dans les procédés de récupération secondaire. L'écoulement est supposé immiscible, c'est-à-dire que les deux phases ne peuvent pas se mélanger. Pour chaque phase  $\alpha \in \{w, o\}$ , il y a en outre :

- Deux champs inconnus qui sont la saturation  $s_\alpha(\mathbf{x}, t)$  et la vitesse de filtration  $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ . La saturation  $s_\alpha$  est la proportion volumique de la phase  $\alpha$ , ce qui impose  $s_\alpha \in [0, 1]$ . Les équations régissant ces deux champs seront données plus loin.

- Deux propriétés pétrophysiques qui sont la *viscosité* dynamique  $\mu_\alpha$  et la *perméabilité relative*  $\kappa_{r,\alpha}$ . Pour un mélange immiscible,  $\mu_\alpha > 0$  est une constante. L'unité de mesure courante pour la viscosité dynamique est le poise (P) avec  $1\text{P} = 0.1\text{Pa} \cdot \text{s}$ . Quant à la perméabilité relative  $\kappa_{r,\alpha}$ , il s'agit d'une fonction croissante de la saturation de la phase concernée et traduit l'impact d'une phase sur l'autre. Plusieurs lois empiriques existent à cet égard [49, 72, 93]. Pour la thèse, la plus simple est sélectionnée, celle de Brooks-Corey [16] qui s'écrit

$$\kappa_{r,\alpha}(s_\alpha) = \kappa_{r,\alpha}^\# s_\alpha^{m_\alpha}, \quad (2.1)$$

avec a priori un exposant  $m_\alpha \geq 1$  par phase. Souvent, les deux quantités sont égales  $m_w = m_o$  mais dans certaines simulations ce n'est pas le cas.

### Formulation par phases

Si  $(0, T)$  est un intervalle temporel, avec  $T > 0$ , l'écoulement a lieu selon le système

$$\phi \partial_t s_\alpha + \operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha = q_\alpha, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{u}_\alpha = -\kappa \mu_\alpha^{-1} \kappa_{r,\alpha}(s_\alpha) \nabla p, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.2b)$$

$$s_o + s_w = 1, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.2c)$$

qui compte cinq équations pour cinq inconnues que sont les deux saturations  $s_\alpha$ , les deux vitesses  $\mathbf{u}_\alpha$  et la pression  $p$ . Le champ de pression  $p(\mathbf{x}, t)$  est supposé commun aux deux phases. Dans d'autres modèles, il convient de distinguer deux pressions, une par phase, au prix d'une relation algébrique supplémentaire fournissant la pression capillaire (différence entre les deux pressions) en fonction d'une saturation. Cela engendre d'autres difficultés numériques [18, 40].

Les deux premières équations (2.2a) expriment la conservation du volume (donc aussi de la masse, puisqu'ici les phases sont supposées incompressibles par l'absence des masses volumiques). Les deux équations suivantes (2.2b) correspondent à la loi de Darcy-Muskat [73], laquelle généralise au cas diphasique celle découverte par Darcy [33] dans le cas monophasique. La dernière équation (2.2c) stipule que tout le volume des pores est rempli par le fluide.

Les termes sources  $q_\alpha$  aux seconds membres de (2.2a) représentent les débits liés à l'injection et à la production au niveau des puits. Ils sont plus faciles à préciser dans la formulation alternative suivante, avec laquelle nous travaillons dorénavant.

### Formulation par flux fractionnaire

Les variables saturation et pression sont fortement imbriquées dans (2.2). Il est judicieux de « desserrer » un peu leur couplage au moyen d'un changement de notations et de variables [19]. Soit d'abord

$$s = s_w,$$

puis la vitesse totale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_w + \mathbf{u}_o$$

et le débit total

$$q = q_w + q_o.$$

D'autre part, la mobilité  $\lambda_\alpha$  de la phase  $\alpha \in \{w, o\}$  est définie par

$$\lambda_\alpha(s_\alpha) = \mu_\alpha^{-1} \kappa_{r,\alpha}(s_\alpha), \quad (2.3)$$

de sorte que  $\mathbf{u}_\alpha = -\kappa \lambda_\alpha(s_\alpha) \nabla p$ . En sommant les équations de conservation (2.2a) sur  $\alpha$  et en invoquant (2.2c), le système (2.2) devient équivalent au système

$$\mathbf{u} = -\kappa \lambda(s) \nabla p, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.4a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = q, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.4b)$$

$$\phi \partial_t s + \operatorname{div}(f(s)\mathbf{u}) = q_w, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.4c)$$

où

$$\lambda(s) = \lambda_w(s) + \lambda_o(1 - s)$$

est la mobilité totale et

$$f(s) = \frac{\lambda_w(s)}{\lambda(s)}$$

est le *flux fractionnaire* de la phase aqueuse. Pour les lois de perméabilité relative de Brooks-Corey (2.1), le flux fractionnaire

$$f(s) = \frac{\mu_w^{-1} \kappa_{r,w}^\# s^{m_w}}{\mu_w^{-1} \kappa_{r,w}^\# s^{m_w} + \mu_o^{-1} \kappa_{r,o}^\# (1 - s)^{m_o}} \quad (2.5)$$

s'écrit aussi

$$f(s) = \frac{M s^{m_w}}{M s^{m_w} + (1 - s)^{m_o}} \quad (2.6)$$

avec le *rapport de mobilités*

$$M = \frac{\mu_w^{-1} \kappa_{r,w}^\#}{\mu_o^{-1} \kappa_{r,o}^\#} = \frac{\lambda(1)}{\lambda(0)}. \quad (2.7)$$

Il est facile de montrer que  $f$  est une fonction croissante en  $s$ , paramétrée par  $M$ , et que

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

Lorsque  $q \equiv 0$ , la vitesse  $\mathbf{u}$  est à divergence nulle et l'équation (2.4c) à  $\mathbf{u}$  fixé reflète un transport pur. Si  $m_w = m_o = 2$ , elle est appelée l'équation de Buckley-Leverett [17].

Les termes sources  $q$  et  $q_w$  dans (2.4) dépendent du nombre et du type de puits présents dans le domaine. Un cas typique est de considérer un puits injecteur (d'eau) situé en  $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \Omega$  et  $P$  puits producteurs (d'huile et d'eau) situés respectivement en  $(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_P) \in \Omega^P$ . Alors,

$$q = Q(t) \delta_{\mathbf{0}}(\mathbf{x}) - \sum_{L=1}^P Q_L(t) \delta_{\mathbf{X}_L}(\mathbf{x}), \quad (2.8a)$$

$$q_w = Q(t) \delta_{\mathbf{0}}(\mathbf{x}) - \sum_{L=1}^P Q_L(t) f(s(\mathbf{X}_L, t)) \delta_{\mathbf{X}_L}(\mathbf{x}), \quad (2.8b)$$

où  $Q(t) \geq 0$  est le débit d'eau imposé en entrée à  $\mathbf{0}$ ,  $Q_L(t) \geq 0$  est le débit total imposé en sortie à  $\mathbf{X}_L$ , et  $\delta_{\mathbf{X}}$  désigne la masse de Dirac concentrée en  $\mathbf{X}$ . Les formules (2.8) idéalisent chaque puits comme une source ponctuelle en débit imposé. Il existe d'autres modèles de puits à source répartie sur petit rayon équivalent et fonctionnant en pression imposée [23, 74]. Un exemple sera étudié en §2.4.2.

L'avantage de la formulation par flux fractionnaire (2.4) réside dans ce qui semble être une quasi-parfaite décomposition elliptique-hyperbolique de ses équations. En effet, la deuxième équation (2.4b) combinée à la première (2.4a) donne lieu à l'équation elliptique linéaire en pression

$$-\operatorname{div}(\kappa\lambda(s)\nabla p) = q$$

pourvu que la saturation  $s$  soit connue, tandis que la seconde équation (2.4c) correspond à une équation hyperbolique non-linéaire en saturation pourvu que la vitesse  $\mathbf{u}$  soit fixée. C'est d'ailleurs en exploitant la nature présumée de chacune des équations que les ingénieurs ont mis au point la plupart des schémas numériques.

Cette apparence « vertueuse » est pourtant trompeuse. Elle pourrait faire conclure hâtivement à la stabilité de la solution (si celle-ci existe), puisqu'une équation elliptique est stable et qu'il en va de même pour une équation hyperbolique. En réalité, à cause du couplage entre  $s$  et  $p$ , le système (2.4) est susceptible de développer des instabilités lorsque le rapport de mobilités  $M$  est suffisamment grand, appelé alors rapport de mobilités *défavorable*. Deux exemples concrets seront traités en §2.2.

### 2.1.2 Conditions aux limites et initiales

Au système intérieur (2.4), des conditions aux limites et initiales sont ajoutées pour avoir un système bien posé. La frontière  $\partial\Omega$  est décomposée en deux parties vérifiant

$$\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N, \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset.$$

Sur la partie Dirichlet  $\Gamma_D$ , une pression est donnée. Sur la partie Neumann  $\Gamma_N$ , un flux est spécifié. Autrement dit,

$$p = p^D, \quad \text{sur } \Gamma_D \times (0, T), \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u^N, \quad \text{sur } \Gamma_N \times (0, T), \quad (2.9b)$$

$$s = s^E, \quad \text{si } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.9c)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne la normale unitaire sortante au bord. La condition (2.9c), qui correspond à une entrée (E) de matière, est nécessaire compte tenu du caractère hyperbolique de l'équation en saturation. Bien entendu, dans le cas où  $|\Gamma_D| = 0$ , une condition de compatibilité doit être exigée [79]

$$\int_{\Omega} q + \oint_{\partial\Omega} u^N = 0, \quad (2.10)$$

et la pression  $p$  n'est alors déterminée qu'à une constante additive près.

À l'instant initial, le réservoir est supposé saturé d'huile. Cela signifie que la condition initiale est la suivante :

$$s(\cdot, t = 0) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.11)$$

Le système (2.4), (2.9), (2.11) est le premier modèle diphasique en milieu poreux à avoir été simulé numériquement [51]. En l'absence des termes sources, l'existence d'une solution faible (en un sens propre à chaque auteur) peut être établie sous des hypothèses convenables sur les données (également variables selon les auteurs) [3, 6, 66]. L'unicité a aussi été démontrée sous certaines conditions [5, 20, 67].

## 2.2 Analyse de stabilité en 1-D

Comme mentionné à la fin de §2.1.1, le système (2.4), (2.9), (2.11) peut contenir des instabilités intrinsèquement dues au couplage entre  $p$  et  $s$ . Ces instabilités se produisent lorsque le rapport de mobilités  $M$  dépasse un certain seuil critique. Ainsi,  $M$  apparaît comme une mesure de la raideur du problème.

La littérature regorge d'analyses théoriques corroborant cette assertion sur des modèles diphasiques voisins, y compris en 2-D voire 3-D axisymétrique [24, 26, 50, 54, 57, 59, 61, 80, 81, 99]. Néanmoins, quelques calculs vraiment rigoureux seront mis en avant relatifs au modèle (2.4), (2.9), (2.11). Ces calculs sont inspirés de ceux de Chavent et Jaffré [19, §I.V.2, 39–41] pour les modèles miscibles<sup>1</sup> 1-D. Leur transposition au cas immiscible semble n'avoir jamais été entreprise.

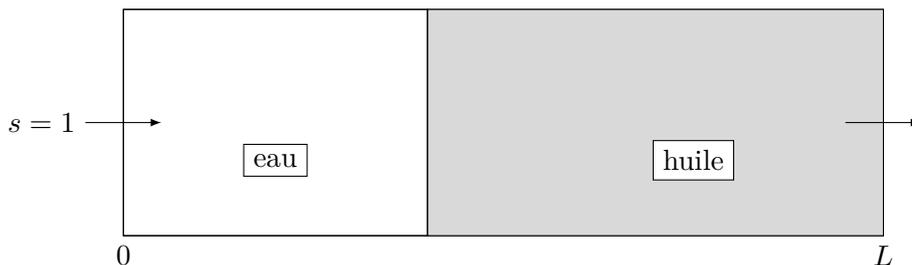


FIGURE 2.2 – Expérience d'injection en 1-D considérée dans l'analyse de stabilité.

Sur le domaine unidimensionnel  $\Omega = (0, L)$ , avec  $L > 0$ , la vitesse  $\mathbf{u}$  se réduit à sa seule composante  $u$ . En l'absence des termes sources, le système (2.4), (2.9), (2.11) dégénère en

- équations intérieures :

$$u = -\kappa\lambda(s)\partial_x p, \quad (2.12a)$$

$$\partial_x u = 0, \quad (2.12b)$$

$$\phi \partial_t s + \partial_x(f(s)u) = 0, \quad (2.12c)$$

pour tout  $(x, t) \in (0, L) \times (0, T)$ .

- Conditions aux limites :

$$p(0, t) = p_e, \quad (2.13a)$$

$$p(L, t) = p_s, \quad (2.13b)$$

$$s(0, t) = 1, \quad (2.13c)$$

1. Dans un modèle miscible, la saturation  $s$  est remplacée par une concentration  $c$ ; les perméabilités relatives  $\kappa_{r,\alpha}$  sont constantes mais les viscosités  $\mu_\alpha$  dépendent de  $c$ .