



Résolution du problème de Wagner tridimensionnel

2.1 Théorie de Wagner

Le but de ce premier paragraphe est de présenter les hypothèses du modèle de Wagner. Le lecteur peut se référer à [Faltinsen \(2005\)](#) pour une introduction particulièrement pédagogique à ce modèle et à [Oliver \(2002\)](#) pour une étude plus approfondie sur ses bases théoriques. La formulation du problème aux limites non linéaire vérifié par l'écoulement est tout d'abord rappelée. Le problème de Wagner bidimensionnel (2D) et axisymétrique (axi) est ensuite présenté et quelques aspects du problème sont abordés. Enfin la formulation du problème de Wagner tridimensionnel (3D) en potentiel des déplacements est présentée.

2.1.1 Ecoulement potentiel non linéarisé au cours d'un impact

En négligeant les phénomènes physiques autres que l'inertie du fluide, il est possible de décrire l'écoulement autour d'un corps impactant une surface de fluide à une vitesse $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ à l'aide de la théorie du potentiel des vitesses. Les hypothèses les plus importantes sont les suivantes :

- 1) il existe une zone du solide en contact avec l'eau dont la taille augmente au cours du temps,
- 2) le fluide est non visqueux et incompressible,
- 3) l'écoulement est irrotationnel,
- 4) la gravité est négligée.

A partir de ces hypothèses, on peut établir le problème aux limites régissant le potentiel des vitesses φ défini ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\varphi = 0 & , \text{ dans le domaine fluide} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 = 0 & , (x, y, z) \in SL \\ \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} & , (x, y, z) \in SM \\ \varphi \rightarrow 0 & , x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty \end{array} \right. , \quad (2.1)$$

où SL désigne la surface libre et SM la surface mouillée du corps, \mathbf{n} est la normale à la surface du solide. La déformation de la surface libre est régie par l'équation suivante :

$$\frac{D\mathbf{X}}{Dt} = \nabla\varphi, \quad (2.2)$$

où \mathbf{X} est un vecteur décrivant la position d'un point de la surface libre et $\frac{D}{Dt}$ désigne la dérivée particulaire. Ce problème est très complexe à résoudre. [Zhao et Falinsen \(1993\)](#) proposent toutefois un modèle éléments de frontière non linéaire dédié aux problèmes 2D. Cette approche a été améliorée et étendue aux problèmes axisymétriques par [Battistin et Iafrati \(2003\)](#). A notre connaissance, aucune méthode 3D n'a été développée pour traiter le problème aux limites non linéaire complet.

2.1.2 Problèmes de Wagner bidimensionnel et axisymétrique

Dans le cas 2D (et axi), la surface mouillée est définie par sa demi-largeur (et son rayon) $c(t)$. L'hypothèse majeure de Wagner consiste à considérer que, pour des corps aplatis, la géométrie de la surface du fluide demeure proche de sa position initiale ($z = 0$). De ce fait, il est possible d'appliquer les conditions aux limites de la surface du fluide au niveau de la surface libre initiale (voir figure 2.1). On parle également de « projection » des conditions aux limites sur la surface initiale du liquide.

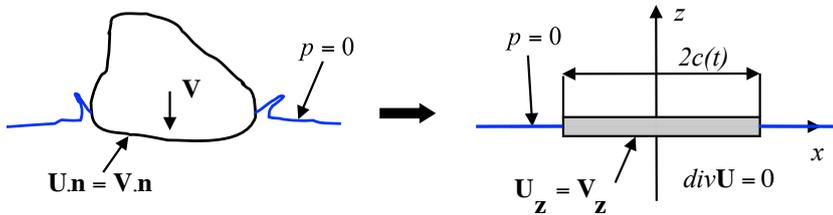


FIGURE 2.1 – Simplification du corps impactant en plaque plane. \mathbf{U} représente la vitesse au sein du domaine fluide

L'écoulement instantané peut être résolu en termes de potentiel des vitesses. De plus, la condition aux limites dynamique au niveau de la surface libre est linéarisée, ce qui conduit à l'écoulement instantané idéalisé décrit par la figure 2.2.

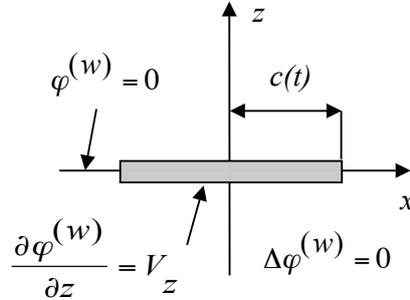


FIGURE 2.2 – Écoulement instantané idéalisé selon la théorie de Wagner

Le potentiel des vitesses $\varphi^{(w)}$ est solution du système suivant :

$$\begin{cases} \Delta\varphi^{(w)} = 0 & , z < 0 \\ \frac{\partial\varphi^{(w)}}{\partial z} = V_z & , (|x| \leq c(t), z = 0) \\ \varphi^{(w)} = 0 & , (|x| \geq c(t), z = 0) \\ \varphi^{(w)} \rightarrow 0 & , x^2 + z^2 \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.3)$$

On peut remarquer que cet écoulement est identique à celui autour d'une plaque (2D) ou d'un disque (axi) de demi-largeur $c(t)$ ou de rayon $c(t)$.

Il est important de noter que la demi-largeur mouillée $c(t)$ est également une inconnue du problème. L'évolution de cette grandeur est régie par une équation dans laquelle interviennent la forme du corps, la profondeur de pénétration et l'élévation de la surface libre appelée condition de Wagner. Cette équation traduit la coïncidence géométrique entre la surface libre et le corps impactant au point de contact (voir figure 2.3) et s'écrit :

$$f(c(t)) - h(t) = \eta(c(t), t) = \int_0^t U_z(c(t), 0, \tau) d\tau, \quad (2.4)$$

où $f(x)$ et $\eta(x, t)$ sont respectivement les fonctions décrivant la forme du corps et l'élévation de la surface libre. Ces fonctions vérifient les conditions suivantes : $f(0) = 0$ et $\eta(x, 0) = 0$.

La profondeur de pénétration $h(t)$ s'obtient en intégrant la vitesse d'impact au cours du temps ($h(t) = \int_0^t |V_z| dt$) et l'élévation de la surface libre $\eta(x, t)$ s'obtient en intégrant la vitesse instantanée au niveau de la surface libre au cours du temps. Cette vitesse $\mathbf{U} = \nabla\varphi^{(w)}$ s'obtient à partir de la solution analytique du problème

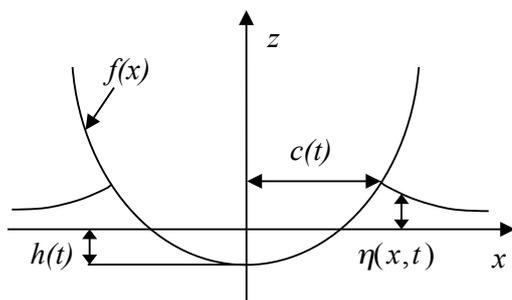


FIGURE 2.3 – Géométrie de la surface du fluide idéalisée selon la théorie de Wagner

2.3 en fonction de la largeur mouillée instantanée :

$$U_z(x, 0, t) = \frac{\partial \varphi^{(w)}}{\partial z}(x, 0, t). \quad (2.5)$$

Il faut donc résoudre le problème suivant :

$$f(c(t)) - h(t) = \eta(c(t), t) = \int_0^t \frac{\partial \varphi^{(w)}}{\partial z}(c(t), 0, \tau) d\tau. \quad (2.6)$$

Ce problème peut également être formulé en introduisant le potentiel des déplacements ψ qui est défini comme l'intégrale du potentiel des vitesses $\varphi^{(w)}$ au cours du temps (Korobkin (1982), Howison *et al.* (1991)) :

$$\psi(x, z, t) = \int_0^t \varphi^{(w)}(x, z, \tau) d\tau. \quad (2.7)$$

De la même manière que le gradient du potentiel des vitesses représente le vecteur vitesse, le gradient du potentiel des déplacements représente le vecteur déplacement. Le potentiel des déplacements est alors solution du système suivant :

$$\begin{cases} \Delta \psi = 0 & , z < 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} = f(x) - h(t) & , (|x| \leq c(t), z = 0) \\ \psi = 0 & , (|x| \geq c(t), z = 0) \\ \psi \rightarrow 0 & , x^2 + z^2 \rightarrow \infty \end{cases}. \quad (2.8)$$

Ainsi, le problème de Wagner 2D ou axi consiste à trouver $c(t)$ tel que le déplacement vérifiant 2.8 soit continu entre la surface libre et la surface mouillée :

$$\lim_{|x| \rightarrow c(t)^+} \frac{\partial \psi}{\partial z}(x, 0) = f(c(t)) - h(t). \quad (2.9)$$

Notons que l'introduction du potentiel des déplacements est possible du fait que la géométrie du domaine fluide dans le cadre de la théorie de Wagner ne change pas

au cours du temps.

La formulation du problème de Wagner en termes de potentiel des déplacements présente plusieurs avantages. D'une part, elle permet de déterminer la surface mouillée à chaque instant indépendamment des instants précédents. D'autre part, le potentiel des déplacements (solution de 2.8) présente de meilleures propriétés de régularité que le potentiel des vitesses (solution de 2.3) lorsque la surface mouillée est exacte. Le déplacement vertical est continu en $c(t)$ alors que la vitesse verticale est infinie en $|x| = c(t)^+$.

Remarque : Discontinuité du déplacement induite par une « erreur » sur la géométrie de la surface mouillée.

Le système 2.8 peut être résolu pour une valeur $c(t)$ ne vérifiant pas la condition de Wagner (2.9). Dans ce cas, la solution obtenue est discontinue. Ce phénomène est illustré par la figure 2.4. Les différentes déformées de la surface libre, obtenues pour différentes valeurs du rayon de la surface mouillée, montrent que le déplacement de la surface libre est bien continu lorsque le rayon $c(t)$ considéré est égal à la valeur théorique $c_{th}(t)$ (courbe rouge). En revanche, lorsque la valeur du rayon est différente de la valeur théorique (courbes bleues), le déplacement de la surface libre est discontinu au niveau de $c(t)$. Nous observons de plus que cette discontinuité est d'autant plus importante que la différence entre la valeur de $c(t)$ utilisée pour le calcul et sa valeur théorique (pour laquelle la condition de Wagner est vérifiée) est grande. Ainsi, cette discontinuité apparaît comme une mesure de l'erreur effectuée sur l'estimation du rayon de la surface mouillée. Cette propriété est à la base du fonctionnement de l'algorithme que nous avons développé pour résoudre le problème de Wagner 3D et qui est présenté plus loin dans ce chapitre.

Il est également important de noter que si les profils de surface libre tracés sur la figure 2.4 présentent une élévation finie en $|x| = c(t)$, cela vient du fait que le problème aux limites 2.8 a été résolu numériquement (voir modèle éléments de frontière présenté au paragraphe 2.2.2). En effet, la solution exacte du problème aux limites 2.8 présente en réalité un déplacement infini en $|x| = c(t)$ lorsque $c(t) \neq c_{th}(t)$. Cette singularité est une conséquence de la singularité de la vitesse en $|x| = c(t)$.

Dans le cas d'un cône ou d'une surface axisymétrique, nous allons examiner l'effet d'une sous-estimation du rayon de la surface mouillée sur le déplacement. Soient $c(t)$ le rayon considéré de la surface mouillée à l'instant t et $c_{th}(t)$ la solution théorique à ce même instant. Dans le cas où la surface mouillée est sous-estimée ($c(t) < c_{th}(t)$), du fait que la fonction $c(t)$ est strictement croissante, on peut trouver un instant t_0 antérieur à t ($t_0 < t$), tel que $c(t) = c_{th}(t_0)$. D'après la définition du potentiel des déplacements, on peut décomposer le déplacement issu de la résolution du problème

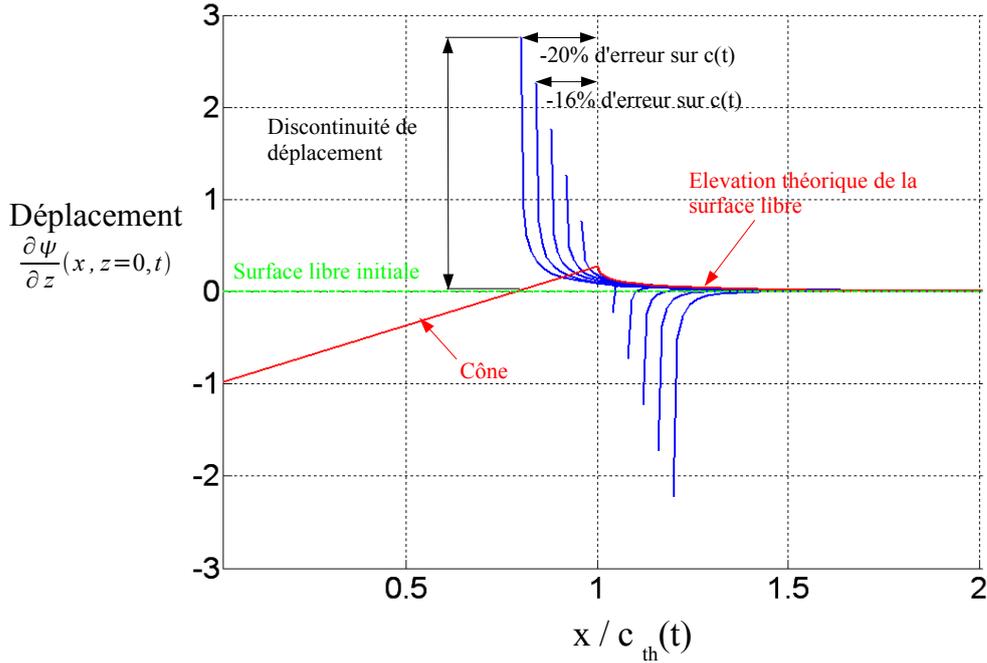


FIGURE 2.4 – Discontinuité de déplacement engendrée par une erreur sur le rayon de la surface mouillée pour un cône. Le déplacement est calculé par la méthode des éléments de frontière.

2.13 de la façon suivante :

$$\eta(x, t) = \int_0^{t_0} \frac{\partial \varphi^{(w)}}{\partial z}(x, 0, \tau) d\tau + \int_{t_0}^t \frac{\partial \varphi^{(w)}}{\partial z}(x, 0, \tau) d\tau, \quad (2.10)$$

avec $\varphi^{(w)}(x, z, t)$ le potentiel des vitesses solution du système 2.3. La première partie du membre de droite de l'équation 2.10 représente le déplacement au point $(x, 0)$ pour la solution du problème de Wagner théorique au temps t_0 ($c(\tau) = c_{th}(\tau)$ pour $\tau \leq t_0$). La deuxième partie du membre de droite traduit une intégration de la vitesse pour une largeur mouillée de rayon $c_{th}(t_0)$ fixe par rapport à la variable d'intégration.

Dans le cas axisymétrique, la vitesse verticale au niveau de la surface libre est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{\partial \varphi^{(w)}}{\partial z}(x, 0, t_0) = -\frac{2|V_z|}{\pi} \left[\arcsin \left(\frac{c_{th}(t_0)}{x} \right) - \frac{c_{th}(t_0)}{\sqrt{x^2 - c_{th}(t_0)^2}} \right]. \quad (2.11)$$

On remarque facilement que la vitesse est singulière au niveau de la ligne de contact ($x = c_{th}(t_0)$). Par conséquent, le déplacement est infini au niveau de la ligne de contact :

$$\lim_{x \rightarrow c_{th}(t_0)^+} \frac{\partial \varphi^{(w)}}{\partial z}(x, 0, t_0) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c_{th}(t_0)^+} \int_{t_0}^t \frac{\partial \varphi^{(w)}}{\partial z}(x, 0, \tau) d\tau = +\infty. \quad (2.12)$$

2.1.3 Problème de Wagner tridimensionnel

Dans le cas tridimensionnel (3D) illustré par la figure 2.5, le potentiel des déplacements est solution du système suivant :

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & , z < 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial z} = f(x, y) - h(t) & , SM^{(w)} \\ \psi = 0 & , SL^{(w)} \\ \psi \rightarrow 0 & , x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty \end{cases} . \quad (2.13)$$

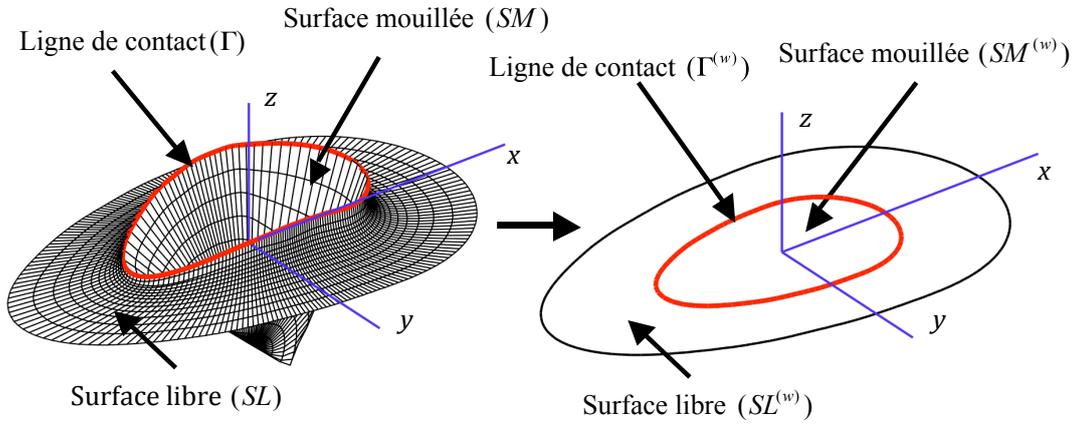


FIGURE 2.5 – Problème d’impact hydrodynamique 3D et son approximation dans la théorie de Wagner.

La difficulté du problème de Wagner 3D par rapport aux cas 2D et axi réside dans le fait que la géométrie de la surface de contact entre le fluide et le solide est maintenant définie, non plus par un seul paramètre, mais par la courbe $\Gamma^{(w)}$ (figure 2.5) que nous appellerons la ligne de contact. La position de $\Gamma^{(w)}$ est définie par la condition de Wagner, qui en 3D s’écrit :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow \Gamma^{(w)} \\ (x,y) \in SL^{(w)}}} \frac{\partial\psi}{\partial z}(x, y, 0, t) = f(x, y) - h(t). \quad (2.14)$$

2.2 Méthode de résolution du problème de Wagner tridimensionnel

Le problème de Wagner tridimensionnel consiste à déterminer la ligne de contact notée $\Gamma^{(w)}$ de façon à ce que la condition de Wagner (2.14) soit respectée. A notre connaissance, une solution analytique exacte de ce problème n’existe que pour le cas où la ligne de contact est elliptique. C’est pourquoi nous proposons une méthode numérique permettant de calculer une solution approchée de $\Gamma^{(w)}$.

2.2.1 Principe de la méthode

Supposons que la position de la ligne de contact $\Gamma^{(w)}$ admette une représentation paramétrique de la forme :

$$\Gamma^{(w)} : \begin{cases} x_0 = a(\theta, t) \cos(\theta) + x_c(t) \\ y_0 = a(\theta, t) \sin(\theta) \end{cases}, \quad (2.15)$$

avec $\theta \in [0; 2\pi]$. Comme on peut le voir sur la figure 2.6, $x_c(t)$ représente l'abscisse d'un point de référence \mathbf{C} et la fonction $a(\theta, t)$ la distance entre la ligne de contact et ce point de référence, dans la direction définie par l'angle θ . Nous proposons d'approximer la fonction $a(\theta, t)$ par une série de Fourier tronquée $\hat{a}(\theta, t)$:

$$\hat{a}(\theta, t) = \sum_{i=0}^{N_a-1} a_i(t) \cos(i\theta), \quad (2.16)$$

où N_a est le nombre de termes de cette série. Cette approximation réduit donc le champ d'application de la méthode. En effet, elle suppose entre autres que la surface de contact soit connexe et que $\Gamma^{(w)}$ soit une courbe régulière. Il est par contre possible de généraliser cette approche à des formes non symétriques en introduisant des termes en $\sin(i\theta)$ dans l'expression 2.16.

Le choix du point de référence \mathbf{C} est important car il conditionne le nombre d'harmoniques nécessaires pour une description précise de $\Gamma^{(w)}$. Certains tests nous amènent à penser que la position idéale de \mathbf{C} serait le centre de la surface mouillée. Malheureusement, il n'est évidemment pas possible de déterminer cette position avant d'avoir déterminé la surface elle-même. Pour cette raison, \mathbf{C} est choisi comme le centre de la surface de von Karman. Cette dernière est délimitée par la ligne d'intersection $\Gamma^{(vk)}$, intersection entre le corps et le plan $z = 0$ ($(x_0, y_0) \in \Gamma^{(vk)} \Leftrightarrow f(x_0, y_0) - h(t) = 0$). Avec ce choix, il n'y a pas de risque que \mathbf{C} soit hors de la surface mouillée. L'abscisse $x_c(t)$ du centre de la surface délimitée par $\Gamma^{(vk)}$ a pour expression :

$$x_c(t) = \frac{2 \int_0^{2\pi} [a^{(vk)}(\theta_0, t)]^3 \cos(\theta_0) d\theta_0}{3 \int_0^{2\pi} [a^{(vk)}(\theta_0, t)]^2 d\theta_0}, \quad (2.17)$$

$a^{(vk)}(\theta_0, t)$ désigne la fonction décrivant le rayon de la courbe $\Gamma^{(vk)}$ par rapport au point $(0, 0)$, figure 2.6.

L'approximation de la ligne de contact proposée présente l'avantage d'une description continue de la ligne de contact tout en réduisant le nombre de degrés de liberté. Il reste cependant difficile de déterminer de façon directe les coefficients $a_i(t)$ de telle sorte que la condition de Wagner soit respectée (2.14), ce qui nous oblige à utiliser un schéma itératif. Ne connaissant pas a priori la ligne de contact, nous sommes contraints de faire une première hypothèse sur la forme de la surface

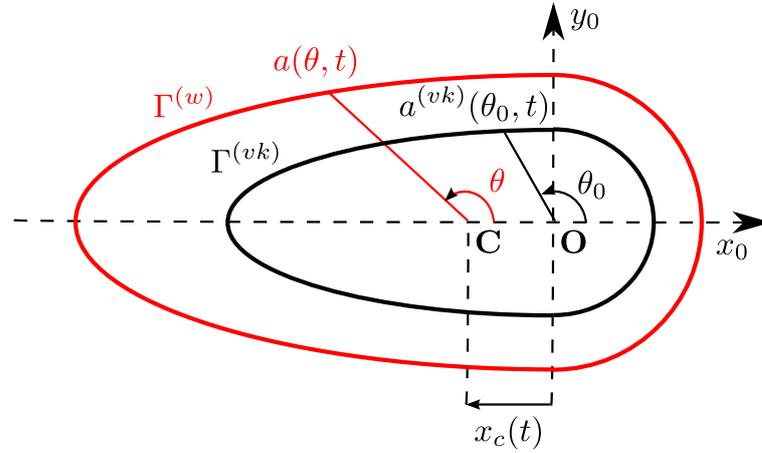


FIGURE 2.6 – Description de la ligne de contact.

mouillée. Par conséquent, la résolution du système d'équations 2.13 conduira à une discontinuité du déplacement de part et d'autre de $\Gamma^{(w)}$, représentée par la fonction E_T définie ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 E_T(\theta, t) = & \frac{\partial \psi}{\partial z}(\underbrace{\hat{a}(\theta, t) \cos(\theta), \hat{a}(\theta, t) \sin(\theta), 0}_{\text{Déplacement du côté de la surface libre}}) \\
 & - \underbrace{[f(\hat{a}(\theta, t) \cos(\theta) + x_c(t), \hat{a}(\theta, t) \sin(\theta), 0) - h(t)]}_{\text{Hauteur du corps sur } \Gamma}.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Etant donnée l'approximation de la ligne de contact introduite, on ne pourra annuler E_T pour tout θ . Une démarche possible consisterait à déterminer la ligne de contact vérifiant au mieux la condition de Wagner en introduisant un critère à minimiser tel que la moyenne de la valeur absolue de l'erreur locale :

$$e_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |E_T(\theta, t)| d\theta. \tag{2.19}$$

Bien qu'il soit possible de résoudre ce problème par différents algorithmes d'optimisation, il nous semble plus efficace en termes de temps de calcul d'utiliser une autre méthodologie. Nous proposons d'introduire une mesure de l'erreur $e_i(t)$ sur chaque coefficient de Fourier $a_i(t)$ décrivant la ligne de contact en décomposant l'erreur en une série de Fourier tronquée :

$$e_i(t) = \int_0^{2\pi} E_T(\theta, t) \cos(i\theta) d\theta. \tag{2.20}$$

Ainsi, la condition de Wagner est remplacée par le système d'équations non linéaires défini ci-dessous :

$$\mathbf{E}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}, \quad (2.21)$$

avec $\mathbf{A} = {}^t(a_0(t), a_1(t), \dots, a_{N_a-1}(t))$ et $\mathbf{E} = {}^t(e_0(t), e_1(t), \dots, e_{N_a-1}(t))$. Ce système est résolu par la méthode itérative présentée au paragraphe 2.2.3.

Afin de mieux justifier cette approche, nous allons observer son comportement sur un cas simple. Pour cela, nous allons considérer la solution approchée d'un cône avec $Na = 5$ et calculer le déplacement de la surface libre pour différentes erreurs $\Delta a_i(t)$ sur les coefficients de Fourier décrivant la ligne de contact.

Exemple : Impact d'un cône avec un angle de relèvement de 15° .

Le problème de Wagner admet une solution analytique dans le cas d'un cône. Le rayon de la surface mouillée $c(t)$ est donné par :

$$c(t) = \frac{4h(t)}{\pi \tan(\beta)}, \quad (2.22)$$

où β désigne l'angle de relèvement du cône (angle entre la tangente du corps dans la direction radiale et le plan horizontal). La solution convergée du problème de Wagner obtenue à l'aide de l'équation 2.21 pour $Na = 5$ et pour un enfoncement unitaire ($h(t) = 1$) est présentée au tableau 2.1.

Solution	$a_0(t)$	$a_1(t)$	$a_2(t)$	$a_3(t)$	$a_4(t)$
Analytique	4,7518	0	0	0	0
Numérique	4,7485	$1,9 \times 10^{-3}$	$-8,1 \times 10^{-4}$	$1,0 \times 10^{-5}$	$1,8 \times 10^{-3}$

TABLE 2.1 – Coefficients de Fourier de la ligne de contact d'un cône

Afin d'illustrer le principe d'analyse de l'erreur de continuité du champ de déplacement, nous allons observer l'effet d'une perturbation Δa_i autour de la solution numérique convergée $a_i(t)$ indiquée dans le tableau 2.1.

Considérons tout d'abord une perturbation $\Delta a_1 = 0,1$, soit une perturbation de l'ordre de $\Delta a_1/|a_0(t), a_1(t), \dots, a_4(t)| \approx 2\%$. La résolution du problème aux limites 2.8 pour cette ligne de contact incorrecte conduit à l'élévation de la surface libre présentée sur la figure 2.7. L'élévation de la surface libre le long de la ligne de contact est tracée à la figure 2.8. Il apparaît clairement que l'erreur Δa_1 affecte principalement la composante $e_1(t)$ de l'erreur.

Considérons à présent une erreur $\Delta a_2/|a_0(t), a_1(t), \dots, a_4(t)| \approx 2\%$ sur le coefficient $a_2(t)$. De la même manière, on observe sur les figures 2.9 et 2.10 qu'une erreur

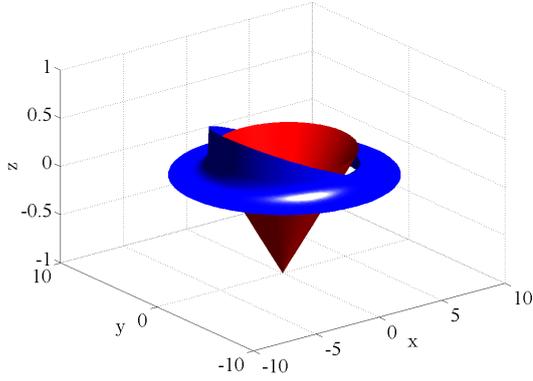


FIGURE 2.7 – Effet d’une perturbation Δa_1 sur le déplacement de la surface libre dans le cas d’un cône.

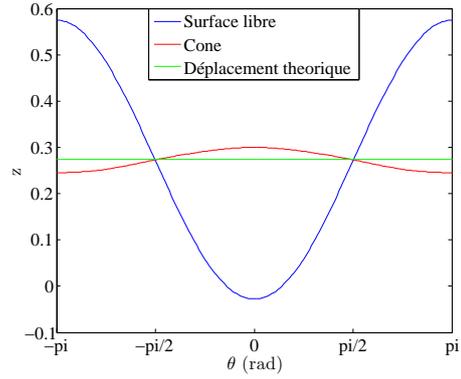


FIGURE 2.8 – Déplacement z au niveau de la ligne de contact pour une erreur Δa_1 .

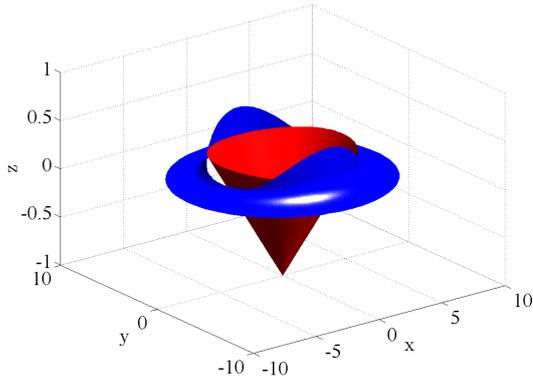


FIGURE 2.9 – Effet de Δa_2 sur le déplacement de la surface libre.

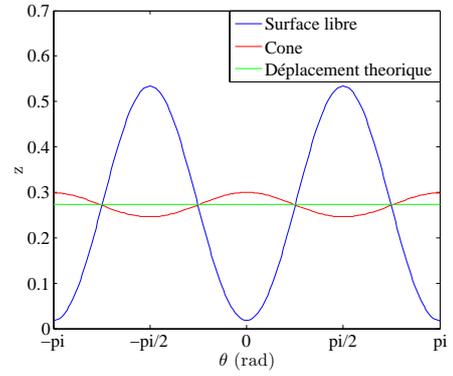


FIGURE 2.10 – Déplacement z au niveau de la ligne de contact pour une erreur Δa_2 .

$\Delta a_2 = 0, 1$ affecte essentiellement la composante e_2 de l’erreur.

Les deux cas considérés ci-dessus montrent qu’il y a un faible couplage entre les différentes composantes de la série de Fourier (une valeur importante de e_i indique principalement une erreur sur a_i). Cela semble indiquer que les composantes de la discontinuité de déplacement qui ne sont pas prises en compte du fait de la troncature ne pourraient pas être annulées en jouant sur les N_a premières valeurs de a_i . Cela justifie le fait de calculer les coefficients a_i (pour i de 0 à $N_a - 1$) en résolvant le système 2.21. La convergence de la méthode proposée en fonction du nombre d’harmoniques sera étudiée dans la suite du chapitre.

La mise en oeuvre de la méthode proposée nécessite de calculer le déplacement au niveau de la surface libre, solution du système 2.13, pour une ligne de contact

donnée. Le paragraphe 2.2.2 présente un modèle éléments de frontière dédié à ce problème. Le système d'équations 2.21 est ensuite résolu par la méthode présentée au paragraphe 2.2.3.

2.2.2 Modèle éléments de frontière pour le calcul de l'élévation de la surface libre

Transformation du problème fluide en équations intégrales

Le potentiel des déplacements vérifie l'équation de Laplace rappelée ci-dessous :

$$\Delta\psi(x, y, z) = 0, \quad z < 0 \quad (2.23)$$

Les solutions de l'équation de Laplace sont entièrement déterminées par les conditions aux limites. Cette propriété est exploitée par la méthode des éléments de frontière (voir Bonnet (1995)). Le potentiel au sein du domaine fluide peut être exprimé par la représentation intégrale suivante :

$$\kappa(\mathbf{p})\psi(\mathbf{p}) = \iint_S \{\psi_{,n}(\mathbf{q})G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \psi(\mathbf{q})H(\mathbf{p}, \mathbf{q})\} dS_{\mathbf{q}}, \quad (2.24)$$

où $\psi_{,n} = \nabla\psi \cdot \mathbf{n}$ avec \mathbf{n} la normale extérieure à la surface S , la frontière du domaine fluide Ω . L'équation 2.24 est valable pour tout point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ où ψ est régulier.

La fonction de Green G la plus courante correspond à une source ponctuelle unitaire en milieu infini placée en \mathbf{p} et a pour expression :

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi r} \quad \text{et} \quad H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{4\pi r^2} r_{,n}, \quad (2.25)$$

avec $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{q} - \mathbf{p}|$ la distance euclidienne entre \mathbf{p} et \mathbf{q} et $r_{,n}$ la dérivée de r dans la direction \mathbf{n} :

$$r_{,n} = r_{,i}n_i = \frac{q_i - p_i}{r} n_i. \quad (2.26)$$

$\kappa(\mathbf{p})$ dépend de la fonction de Green utilisée. Pour une source ponctuelle unitaire en milieu infini :

$$\begin{cases} \kappa = 0 & \text{si } \mathbf{p} \notin \Omega \\ \kappa = 1 & \text{si } \mathbf{p} \in \Omega - \partial\Omega \\ \kappa = 1/2 & \text{si } \mathbf{p} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.27)$$

Dans notre cas, le domaine d'étude Ω correspond au demi-espace infini $z \leq 0$ de \mathbb{R}^3 (voir la figure 2.11). Sous l'hypothèse que le potentiel et le flux décroissent suffisamment rapidement à l'infini : $\psi = O(r^{-1})$ et $\psi_{,n} = O(r^{-2})$ (hypothèse vérifiée

si $\Delta\psi = 0$; Bonnet (1995)), l'intégrale sur les faces inférieures ($z < 0$) est nulle. L'équation 2.24 se réduit donc à l'équation 2.28 ci-dessous :

$$\kappa(\mathbf{p})\psi(\mathbf{p}) = \iint_{SL^{(w)}+SM^{(w)}} \{\psi_{,n}(\mathbf{q})G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \psi(\mathbf{q})H(\mathbf{p}, \mathbf{q})\} dS_q \quad (2.28)$$

En prenant $\mathbf{p} \in SL^{(w)}$, on remarque que $\psi(\mathbf{p}) = 0$ et $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$. Par conséquent, le flux $\psi_{,z}$ (le déplacement vertical dans notre cas) est régi par l'équation suivante :

$$\iint_{SL^{(w)}+SM^{(w)}} \psi_{,z}G(\mathbf{p}, \mathbf{q})dS_q = 0. \quad (2.29)$$

On en conclut que l'élévation de la surface libre est uniquement régie par le déplacement imposé sur la surface mouillée. Cette équation nous servira à résoudre numériquement le problème 2.13 par la méthode de *collocation* en introduisant la discrétisation du champ de déplacement proposée au paragraphe 2.2.2.

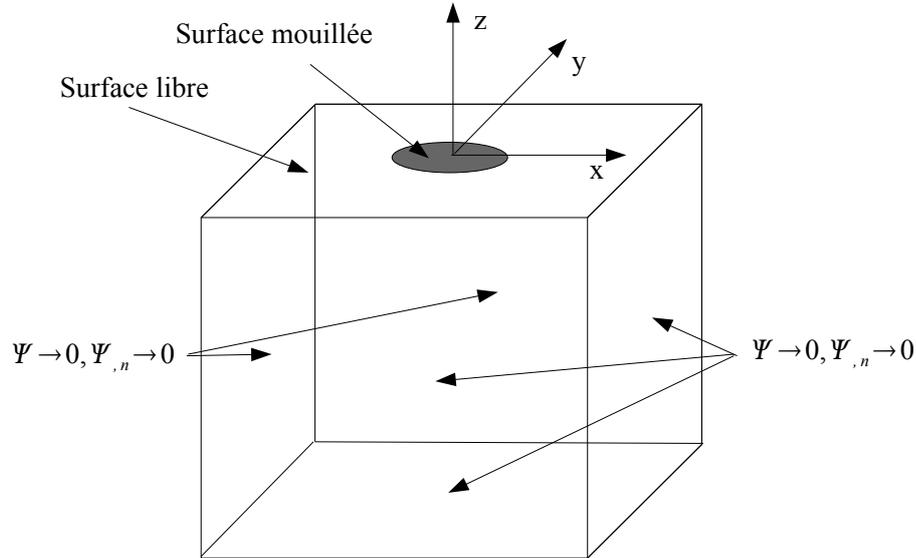


FIGURE 2.11 – Domaine fluide d'étude.

Discrétisation du champ de déplacement

On peut observer dans les différents cas 3D traités dans la littérature que le champ de déplacement présente une bonne régularité dans la direction angulaire. De ce fait, comme pour la ligne de contact, afin de réduire le nombre d'inconnues,

le champ de déplacement est approximé par des séries de Fourier dans la direction orthoradiale du système de coordonnées polaires (ξ, θ) :

$$\hat{\eta}(\xi, \theta) = \sum_{i=0}^{Nq-1} \eta_i(\xi) \cos(i\theta), \quad (2.30)$$

où $\xi \in [1; +\infty]$ et $\theta \in [0; 2\pi]$ sont issus du changement de variables : $(x, y) = (\xi \hat{a}(\theta, t) \cos(\theta), \xi \hat{a}(\theta, t) \sin(\theta))$ et $\eta = \frac{\partial \psi}{\partial z}$ représente l'élévation de la surface libre. Nous supposons que η est nul à partir d'une certaine valeur de ξ que nous noterons ξ_{max} . L'intervalle $[1; \xi_{max}]$ est ensuite subdivisé en un certain nombre de sous-intervalles $[\xi_k; \xi_{k+1}]$. Au sein de chacun d'eux, le déplacement est interpolé linéairement à partir des valeurs nodales $\eta_i(\xi_k)$:

$$\eta_i(\xi) = \frac{\eta_i(\xi_{k+1}) - \eta_i(\xi_k)}{\xi_{k+1} - \xi_k} (\xi - \xi_k) + \eta_i(\xi_k), \quad \xi \in [\xi_k; \xi_{k+1}]. \quad (2.31)$$

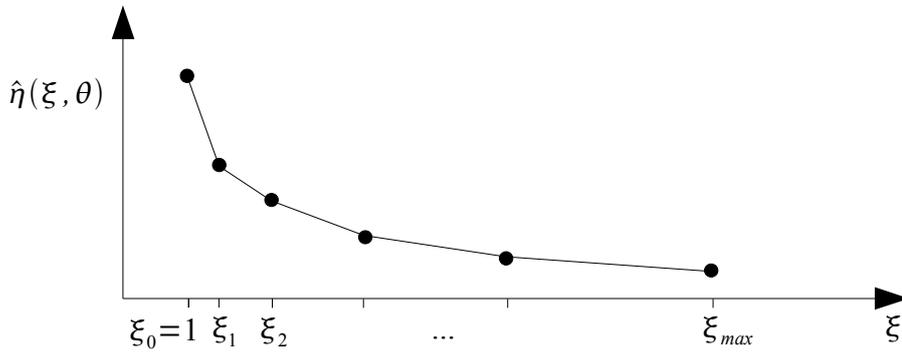


FIGURE 2.12 – Interpolation linéaire du déplacement dans la direction radiale normalisée.

Ainsi, les éléments s'apparentent à des couronnes dans le repère polaire $(\mathbf{C}, \xi, \theta)$ et les noeuds à des cercles. Afin de décrire correctement le déplacement au voisinage de la ligne de contact, un maillage fin est nécessaire dans cette région. Le déplacement présentant par contre des gradients moins importants loin de la surface mouillée, le maillage peut être plus grossier dans cette région. Pour ces raisons, nous utilisons un maillage dont la finesse évolue progressivement. La taille des éléments est définie par une suite géométrique de raison α :

$$\xi_{k+2} - \xi_{k+1} = \alpha(\xi_{k+1} - \xi_k). \quad (2.32)$$

Différentes caractéristiques du maillage peuvent ainsi être maîtrisées par les paramètres suivants :

- 1) $b = \frac{\xi_{N_r} - \xi_{N_r-1}}{\xi_1 - \xi_0}$: ratio entre le plus grand et le plus petit élément,
- 2) N_r : nombre d'éléments dans la direction radiale,
- 3) ξ_{max} : taille du domaine fluide suivant la direction ξ (notons que $\xi_{N_r} = \xi_{max}$).

Ainsi :

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{(\xi_{N_r} - 1)(1 - \alpha)}{1 - \alpha^{N_r}} + 1 \\ \alpha = b^{\frac{1}{N_r-1}} \end{cases} \quad (2.33)$$

Grâce à l'utilisation des variables ξ et α , le maillage s'adapte automatiquement à la forme de la surface mouillée et garantit une bonne répartition des noeuds. Les éléments couronnés dans le repère polaire $(\mathbf{C}, \xi, \theta)$ de la figure 2.13 sont déformés par le changement de variable $(x, y) = (\xi \hat{a}(\theta, t) \cos(\theta), \xi \hat{a}(\theta, t) \sin(\theta))$. Le cas d'une surface mouillée de forme elliptique conduit au maillage représenté sur la figure 2.14 ci-dessous :

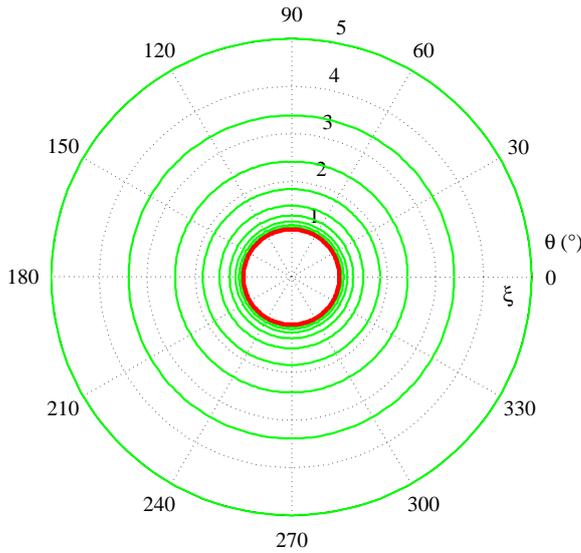


FIGURE 2.13 – Maillage normalisé de la surface libre dans le repère $(\mathbf{C}, \xi, \theta)$.

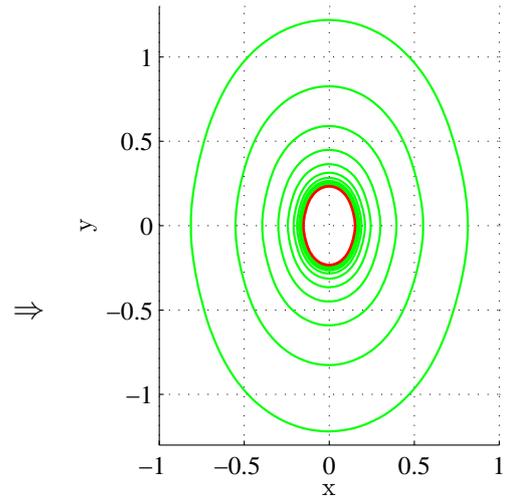


FIGURE 2.14 – Maillage de la surface libre autour d'une surface mouillée de forme elliptique.

Construction du problème discrétisé

En introduisant la forme discrétisée du déplacement, l'équation intégrale 2.29 devient :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\hat{\eta}(\xi, \theta) \hat{a}^2(\theta, t) \xi}{r} d\xi d\theta = - \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \frac{[f(\xi, \theta) - h(t)] \hat{a}^2(\theta, t) \xi}{r} d\xi d\theta, \quad (2.34)$$

avec $r = \sqrt{(\xi \hat{a}(\theta, t) \cos(\theta) - x_p + x_c(t))^2 + (\xi \hat{a}(\theta, t) \sin(\theta) - y_p)^2}$ la distance du point \mathbf{p} de coordonnées cartésiennes (x_p, y_p) et $x_c(t)$ la position du point de référence \mathbf{C} sur l'axe x_0 .

L'approximation du champ de déplacement $\eta(\xi, \theta)$ implique $N_q \times (N_r + 1)$ inconnues à déterminer. Pour cela, nous utilisons une méthode de *collocation* qui consiste à écrire $N_q \times (N_r + 1)$ fois l'équation 2.29 pour différents points \mathbf{p} . Le choix de ces points de *collocation* est important car il agit directement sur le conditionnement du système discret obtenu. D'après Bonnet (1995), il est conseillé de placer les points de *collocation* au niveau des noeuds afin de maximiser les termes diagonaux du système à résoudre¹. Dans notre cas particulier, il est possible de placer les points de *collocation* aux bords des éléments. L'équation intégrale 2.29 requiert cependant que le potentiel et son flux normal vérifient certaines hypothèses de régularité au niveau du point \mathbf{p} (Bonnet (1995)). En particulier, il n'est pas correct de placer un point de *collocation* à un endroit où la solution peut présenter une discontinuité. Ainsi, il ne faut pas placer de point de *collocation* au niveau de la ligne de contact (voir paragraphe 2.1.2). Par conséquent, les points de *collocation* sont placés en $\xi = \xi_k$ pour $k = 1$ à N_r mais les points les plus proches de la ligne de contact sont placés en $\xi = (\xi_0 + \xi_1)/2$. Il n'y a par contre pas de noeuds, au sens classique du terme, dans la direction angulaire. Il est néanmoins possible de maximiser l'influence des coefficients ξ_i en plaçant les points de *collocation* en θ_i tels que $|\cos(i\theta_i)| = 1$. Du fait de la symétrie du corps considéré et de la ligne de contact par rapport au plan $x - z$, il faut veiller à ce qu'il n'y ait pas de points de *collocation* symétriques par rapport au plan $x - z$ (car deux points symétriques génèrent la même équation), ce qui se traduit par la condition suivante : $\cos(\theta_i) \neq \cos(\theta_j), \forall i \neq j$. Nous pensons qu'il est également souhaitable de répartir les points de *collocation* de façon homogène. On s'attachera donc à maximiser la distance minimale entre 2 points de *collocation*.

La stratégie proposée conduit à la répartition illustrée sur la figure 2.15 pour $N_q = 7$, $N_r = 5$, $b = 10$ et $\xi_{N_r} = 5$.

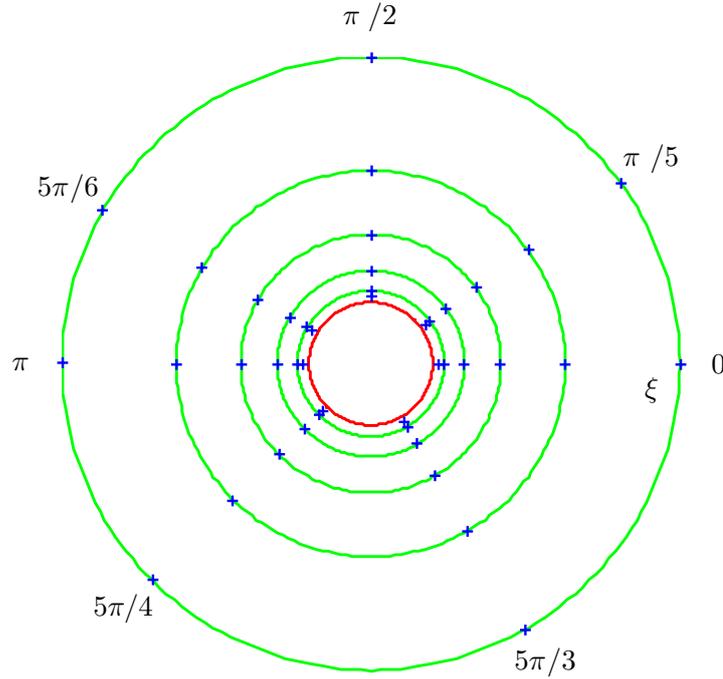
La méthode de *collocation* permet d'obtenir un système d'équations linéaires de la forme :

$$\mathbf{G} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}(\xi_0) \\ \boldsymbol{\eta}(\xi_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}(\xi_{N_r}) \end{Bmatrix} = \mathbf{B}, \quad (2.35)$$

avec $\boldsymbol{\eta}(\xi_k) = {}^t(\eta_0(\xi_k), \eta_1(\xi_k), \dots, \eta_{N_q-1}(\xi_k))$. Chaque ligne de la matrice \mathbf{G} et du second membre \mathbf{B} correspond à un point de *collocation*. Ainsi, le coefficient G_{ij} est le coefficient d'influence de l'inconnue $\eta_l(\xi_k)$ pour le point de collocation numéro i , avec $j = k \times N_q + l + 1$.

Ce système d'équations linéaires est résolu par une méthode classique de type factorisation QR.

1. Notons que pour cela, il est également nécessaire que les inconnues soient numérotées dans un ordre bien précis.


 FIGURE 2.15 – Répartition des points de *collocation* dans le repère $(\mathbf{C}, \xi, \theta)$.

2.2.3 Algorithme de résolution du système non linéaire

2.21

Afin de trouver une solution approchée de la surface mouillée $\Gamma^{(w)}$, nous avons proposé de chercher une solution approchée $\hat{a}(\theta, t)$ sous forme d'une série de Fourier dont les coefficients sont solution du système $\mathbf{E}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ (voir paragraphe 2.2.1). En introduisant la fonction \mathbf{F} définie par :

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \mathbf{E}(\mathbf{A}) + \mathbf{A}, \quad (2.36)$$

le système 2.21 est équivalent à :

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}. \quad (2.37)$$

Ce dernier peut être résolu par différentes méthodes itératives. La méthode du point fixe, par exemple, consiste à résoudre l'équation 2.37 en utilisant le schéma itératif suivant :

$$\mathbf{A}^{(n+1)} = \mathbf{F}(\mathbf{A}^{(n)}), \quad (2.38)$$

où n est le numéro de l'itération.

La contractance sur \mathbb{R}^{N_a} de la fonction \mathbf{F} assure la convergence et l'unicité du point fixe. Cette propriété reste difficile à démontrer dans notre cas. Quoi qu'il en

soit, la convergence d'un schéma de point fixe peut être améliorée en remplaçant la fonction $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ par une autre fonction $\mathbf{G}(\mathbf{A})$ conduisant à la même solution. Par exemple, $\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \alpha\mathbf{F}(\mathbf{A}) + (1 - \alpha)\mathbf{A}$. Le paramètre α est généralement appelé coefficient de relaxation. Reste le problème de choisir une valeur de α maximisant la vitesse de convergence.

Küttler et Wall (2008) proposent une méthode du point fixe avec relaxation dynamique basée sur la méthode d'Aitken dans laquelle α est mis à jour à chaque itération. L'application de cette méthode à notre problème conduit au schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{A}^{(n+1)} = \mathbf{A}^{(n)} + \alpha^{(n)}\mathbf{E}^{(n)} \\ \alpha^{(n+1)} = -\alpha^{(n)} \frac{{}^t\mathbf{E}^{(n)} \times (\mathbf{E}^{(n+1)} - \mathbf{E}^{(n)})}{|\mathbf{E}^{(n+1)} - \mathbf{E}^{(n)}|^2} \end{cases}, \quad (2.39)$$

en notant $\mathbf{E}^{(n)} = \mathbf{E}(\mathbf{A}^{(n)})$ le vecteur erreur associé à la ligne de contact définie par $\mathbf{A}^{(n)}$ à l'itération n . La valeur de $\alpha^{(0)}$ doit être initialisé de façon à garantir la convergence, $\alpha^{(0)}$ doit donc être proche de 0. Du fait de la mise à jour de α , une faible valeur de $\alpha^{(0)}$ n'est pas très pénalisante en termes de vitesse de convergence car la valeur optimale de α est généralement obtenue dès la seconde itération. On peut donc imposer par sécurité une valeur de $\alpha^{(0)}$ de l'ordre de 10^{-4} .

Il est nécessaire de définir un critère de convergence pour déterminer quand arrêter les itérations. Le déplacement augmentant avec la profondeur de pénétration, un critère de convergence ϵ inversement proportionnel à la profondeur de pénétration $h(t)$ garantit une précision relative sur \mathbf{A} indépendante de la profondeur de pénétration. Le critère choisi est le suivant :

$$|e_i^{(n)}(t)|/h(t) < \epsilon. \quad (2.40)$$

Pour la plupart des calculs réalisés, nous avons utilisé $\epsilon = 4 \times 10^{-4}$, les paramètres de maillage étant : $N_r = 20$, $N_q = 4$, $b = 100$ et $\xi_{N_r} = 5$. L'exemple présenté au paragraphe 2.2.1 montre qu'avec ce maillage et ce critère de convergence l'erreur relative sur la première composante $a_0(t)$ est inférieure à 0,07%. Il convient néanmoins de noter que la précision que l'on peut atteindre concernant la surface mouillée dépend du maillage utilisé et notamment de sa finesse au voisinage de la zone de contact. Pour des maillages trop grossiers, il est possible de ne pas pouvoir atteindre $\epsilon = 4 \times 10^{-4}$.

2.2.4 Conditions initiales : $\mathbf{A}^{(0)}$

La bon fonctionnement et le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir la convergence dépendent des conditions initiales. Il faut en particulier que $\mathbf{A}^{(0)}$ soit tel que les contraintes suivantes soient vérifiées :

$$\hat{a}(\theta)^{(0)}(t) > 0, \theta \in [0, 2\pi] \quad (2.41)$$

En l'absence de connaissance a priori de la ligne de contact, nous suggérons d'initialiser la ligne de contact à l'aide de la solution de von Karman $\Gamma^{(vk)}$, c'est-à-dire la ligne de contact entre le corps et la surface initiale du fluide au repos définie par :

$$(x_0, y_0) \in \Gamma^{(vk)} \Leftrightarrow f(x_0, y_0) = h(t) \quad (2.42)$$

De cette façon, les termes $a_i^{(0)}(t)$ correspondront à la série de Fourier tronquée décrivant la courbe $\Gamma^{(vk)}$. Le terme $a_0^{(0)}(t)$ étant le plus important, il est possible de se contenter d'initialiser ce seul terme et de laisser les autres à 0. Dans le cas où la ligne de contact doit être déterminée à plusieurs instants, la solution initiale à un instant donné (autre que le premier) est extrapolée à l'aide des solutions convergées aux instants précédents. Cela permet de réduire le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre le critère de convergence.

2.2.5 Validation de la méthode de résolution du problème de Wagner 3D

Différents cas d'étude sont présentés dans ce paragraphe afin de valider la méthode de calcul de la ligne de contact. Les résultats sont comparés avec des résultats analytiques et numériques de référence.

Cas d'un cône d'angle 15°

Les résultats présentés au paragraphe 2.2.1 dans le cas de l'impact d'un cône constituent une première validation simple de la méthode. On peut observer sur le tableau 2.1 que, d'une part, la composante $a_0(t)$ est calculée précisément, et d'autre part, les harmoniques supérieures sont bien négligeables devant la composante $a_0(t)$.

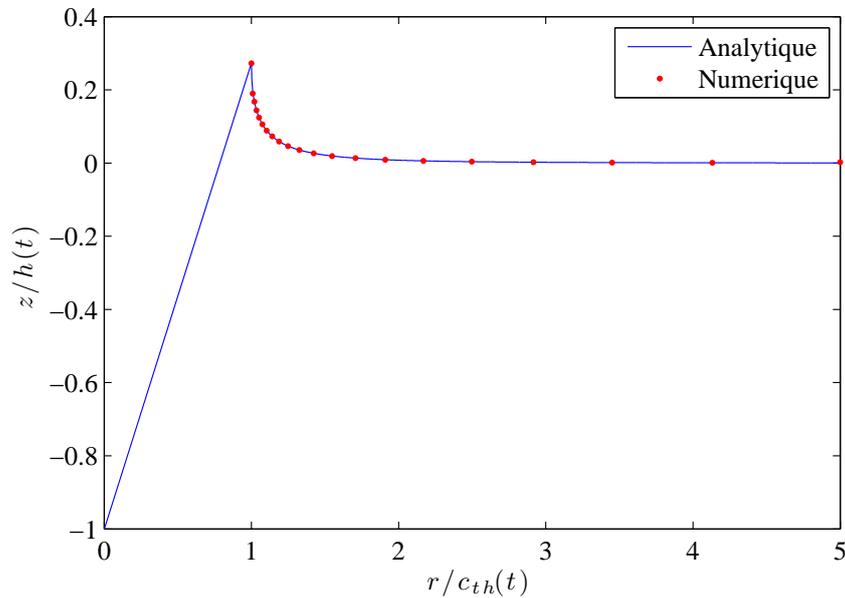
Dans le cas d'un cône, l'élévation théorique de la surface libre s'obtient facilement en intégrant la vitesse au niveau de la surface libre au cours du temps. On utilisera pour cela l'équation 2.22, donnant l'évolution du rayon de la surface mouillée, et la formule ci-dessous donnant la vitesse autour d'un disque circulaire de rayon c (voir Scolan et Korobkin (2001)) :

$$U_z(r, c) = \frac{-2|V_z|}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{c}{r}\right) - \frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} \right], \quad (2.43)$$

ce qui conduit à :

$$\eta(r, t) = \frac{-2h(t)}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{c(t)}{r}\right) + \frac{2}{c(t)} \sqrt{r^2 - c(t)^2} - \frac{2r}{c(t)} \right]. \quad (2.44)$$

La figure 2.16 montre que l'élévation de la surface libre calculée numériquement est en bonne adéquation avec la solution analytique.


 FIGURE 2.16 – Elévation de la surface libre lors de l’impact d’un cône d’angle 15°

Cas d’un parabolöide elliptique

Le parabolöide elliptique est un cas d’étude intéressant pour lequel [Scolan et Korobkin \(2001\)](#) présentent une solution analytique. Cette solution est construite par une méthode inverse. Dans cette méthode, l’évolution temporelle de la ligne de contact est supposée connue et l’on détermine la forme du corps impactant qui conduit à cette évolution de la surface mouillée à partir de la condition de Wagner. Le champ d’application de la solution proposée par [Scolan et Korobkin \(2001\)](#) est restreint aux corps ayant une ligne de contact elliptique définie par exemple par la courbe paramétrée suivante pour $\theta \in [0 ; 2\pi]$:

$$\begin{cases} x = d_1(t) \cos \theta \\ y = d_2(t) \sin \theta \end{cases} . \quad (2.45)$$

Une évolution de la ligne de contact telle que $d_1(t) = \delta_1 \sqrt{h(t)}$ et $d_2(t) = \delta_2 \sqrt{h(t)}$ conduit à une géométrie $f(x, y)$ de la forme suivante :

$$f(x, y) = D_1 x^2 + D_2 y^2, \quad (2.46)$$

dont les coefficients D_1 et D_2 sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \frac{1}{\delta_1^2 k^2} \left[2 - k^2 \frac{D(e)}{E(e)} \right], & k &= \delta_1 / \delta_2, & E(e) &= \int_0^{\pi/2} (1 - e^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta, \\
 D_2 &= \frac{1}{\delta_2^2} \left[1 + k^2 \frac{D(e)}{E(e)} \right], & e &= \sqrt{1 - k^2}, & K(e) &= \int_0^{\pi/2} (1 - e^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta, \\
 D(e) &= [K(e) - E(e)] / e^2.
 \end{aligned}$$

Considérons le paraboloid elliptique pour lequel la surface de contact a un élanement $k = 2/3$ défini par les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} d_1(t) = 0,160 \text{ m} \\ d_2(t) = 0,240 \text{ m} \\ h(t) = 2,40 \times 10^{-2} \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1 \approx 1,5447780 \text{ m}^{-1} \\ D_2 \approx 0,56634313 \text{ m}^{-1} \end{cases} \quad (2.47)$$

La figure 2.17 ci-dessous présente les résultats obtenus par la méthode numérique pour différents nombres d'harmoniques. On peut observer une rapide convergence de la solution approchée vers la solution analytique lorsque N_a augmente, ce malgré le fait que la forme de la ligne de contact théorique présente un nombre infini d'harmoniques. Cinq harmoniques semblent suffisantes pour décrire correctement la surface mouillée. Ceci est confirmé par les données présentées dans le tableau 2.2.

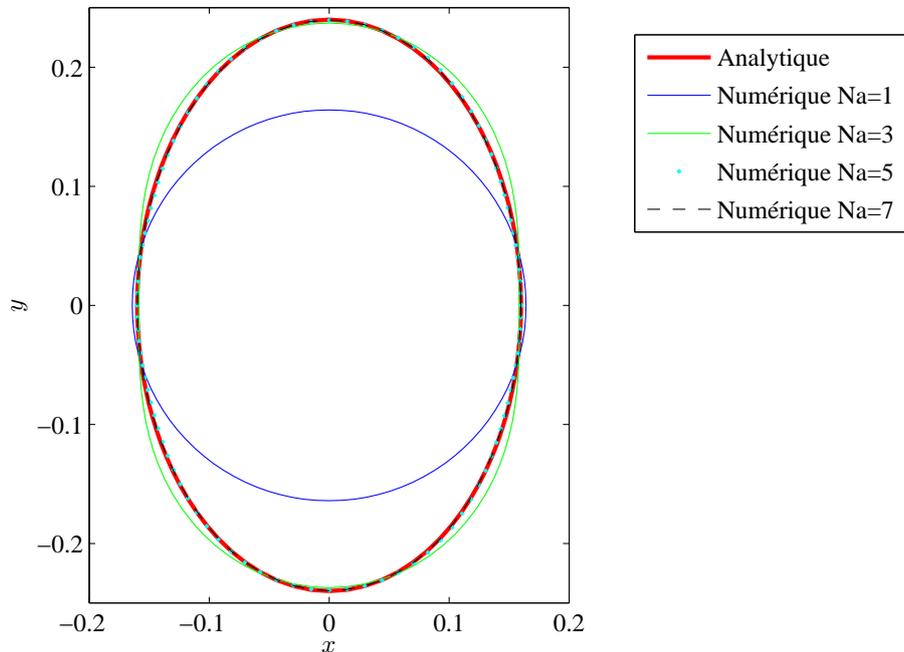


FIGURE 2.17 – Ligne de contact d'un paraboloid elliptique ($k = 2/3$)

N_a	1	3	5	7	Analytique
$a_0(t)$	$1,642.10^{-1}$	$1,978.10^{-1}$	$1,936.10^{-1}$	$1,938.10^{-1}$	$1,940.10^{-1}$
$a_1(t)$	0	$-1,094.10^{-14}$	$-3,798.10^{-4}$	$-1,915.10^{-6}$	0
$a_2(t)$	0	$-3,933.10^{-2}$	$-3,973.10^{-2}$	$-3,910.10^{-2}$	$-3.899.10^{-2}$
$a_3(t)$	0	0	$4,837.10^{-4}$	$7,892.10^{-5}$	0
$a_4(t)$	0	0	$6,245.10^{-3}$	$5,954.10^{-3}$	$5,858.10^{-3}$
$a_5(t)$	0	0	0	$-3,942.10^{-5}$	0
$a_6(t)$	0	0	0	$-9,272.10^{-4}$	$-9,773.10^{-4}$
Nb. d'it.	7	8	11	10	0
$e_T/h(t)$	35,1%	8,4%	1,2%	0,2%	0

TABLE 2.2 – Comparaison des calculs de surface mouillée pour le paraboloïde elliptique avec $k = 2/3$.

Considérons à présent un paraboloïde plus élancé avec $k = 1/3$ défini par les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} d_1(t) = 0,160 \text{ m} \\ d_2(t) = 0,480 \text{ m} \\ h(t) = 2,40 \times 10^{-2} \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1 \approx 1,726 \text{ m}^{-1} \\ D_2 \approx 0,121 \text{ m}^{-1} \end{cases} . \quad (2.48)$$

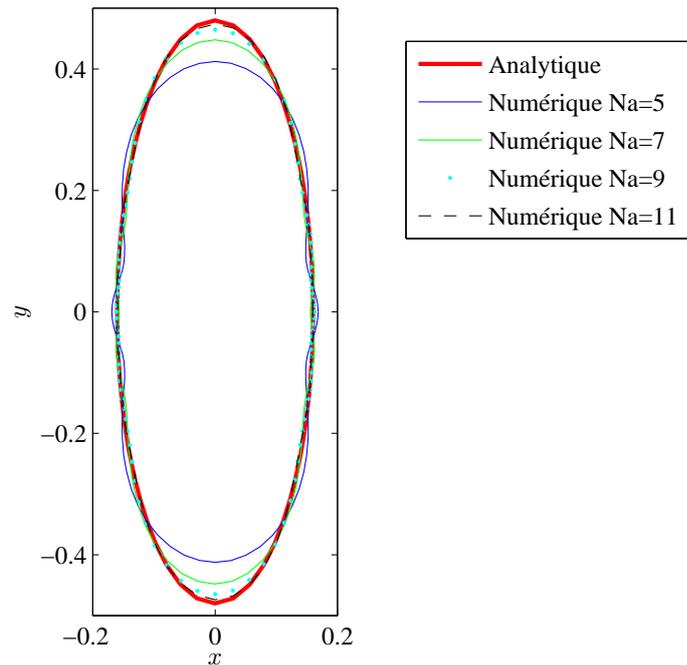
Les résultats de calcul de la ligne de contact pour différents nombres d'harmoniques sont présentés par la figure 2.18. On remarque clairement qu'une surface de contact élancée nécessite un plus grand nombre d'harmoniques qu'une ligne de contact peu élancée. Avec $k = 1/3$, nous pouvons considérer que la géométrie de la ligne de contact est correctement décrite en utilisant 9 harmoniques.

Afin d'évaluer la précision des différentes solutions numériques obtenues en termes d'effort, il est intéressant de calculer la « masse ajoutée » de la surface mouillée. Dans le cadre de la théorie de Wagner, cette dernière est donnée par :

$$M_a = -\frac{\rho}{|V_z|} \iint_{SM^{(w)}(t)} \varphi^{(w)}(x, y, 0, t) dx dy, \quad (2.49)$$

où $\varphi^{(w)}$ est le potentiel des vitesses solution du système d'équations 3.8. La méthode utilisée pour le calcul de $\varphi^{(w)}$ est présentée au chapitre suivant.

Les masses ajoutées correspondant aux différentes estimations de la surface mouillée pour les deux élancements considérés sont présentées au tableau 2.3. Les


 FIGURE 2.18 – Ligne de contact d'un parabolôide elliptique ($k = 1/3$)

masses ajoutées sont évaluées à titre indicatif avec une masse volumique unitaire ($\rho = 1 \text{ kg.m}^{-3}$). Comme attendu, on observe la convergence vers la solution analytique lorsque N_a augmente. Nous observons également qu'il n'est pas nécessaire de déterminer la surface mouillée avec une précision extrême pour obtenir une bonne évaluation de la masse ajoutée. Par exemple, dans le cas où $k = 1/3$, la géométrie de la surface mouillée obtenue pour $N_a = 7$ présente des différences assez marquées par rapport à la solution analytique mais la masse ajoutée obtenue est proche de sa valeur exacte (la différence relative est inférieure à 4%).

$k = 2/3$		$k = 1/3$	
N_a	$M_a(\text{kg})$	N_a	$M_a(\text{kg})$
1	$5,90 \times 10^{-3}$	5	$2,14 \times 10^{-2}$
3	$1,03 \times 10^{-2}$	7	$2,23 \times 10^{-2}$
5	$9,69 \times 10^{-3}$	9	$2,27 \times 10^{-2}$
7	$9,70 \times 10^{-3}$	11	$2,29 \times 10^{-2}$
Théorique	$9,73 \times 10^{-3}$	Théorique	$2,31 \times 10^{-2}$

TABLE 2.3 – Calculs de la masse ajoutée pour un parabolôide elliptique.

Paraboloïde elliptique décentré

Afin de valider l'aptitude de la méthode à traiter des formes non-symétriques, il est possible d'étudier le cas d'un paraboloïde elliptique symétrique en imposant un point de référence \mathbf{C} différent du centre de la surface mouillée. Considérons la forme définie par $f(x, y) \approx 1,418(x - \Delta x)^2 + 0,517y^2$, avec $\Delta x = 0,05$ m, pour un enfoncement $h(t) = 22,8$ mm. Le décalage Δx représente environ un tiers du demi-axe de la ligne de contact. La figure 2.19 présente différentes solutions numériques ainsi qu'une solution de référence obtenue par décalage de la solution du même paraboloïde elliptique centré en $x = 0$ pour $Na = 5$. Bien sûr, à cause du décalage introduit, des harmoniques impaires apparaissent (voir tableau 2.4). En comparant ces données avec celles du tableau 2.2, on observe également qu'à nombre d'harmoniques égal l'erreur globale est plus importante pour une forme asymétrique que pour une forme équivalente symétrique, ce qui confirme l'importance de la position du point de référence.

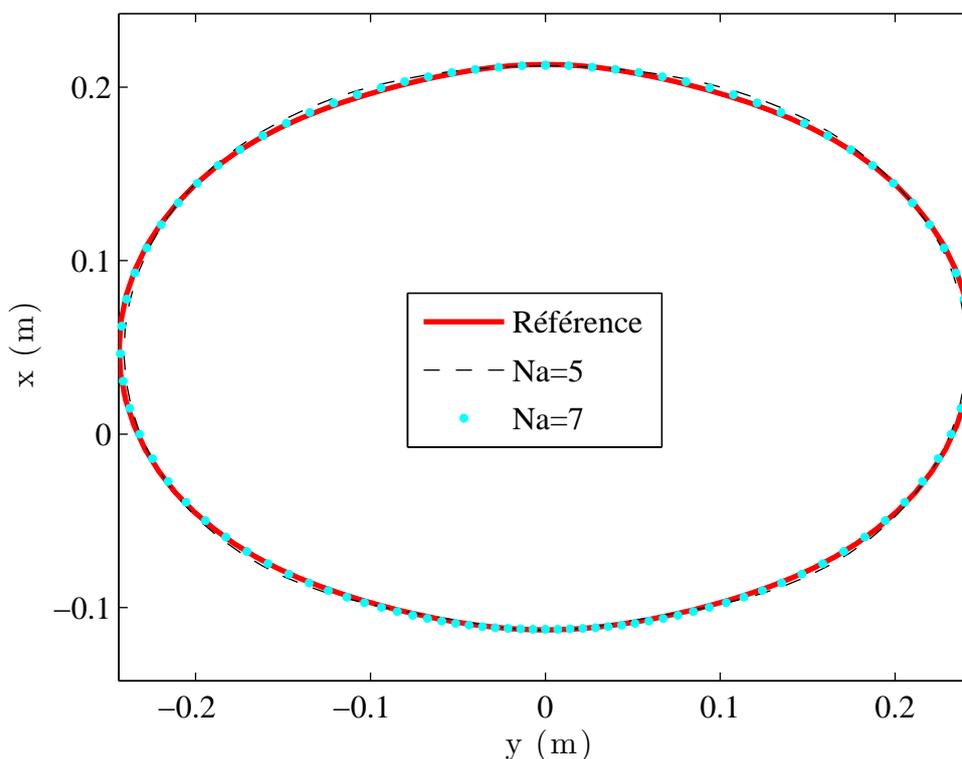


FIGURE 2.19 – Surface mouillée d'un paraboloïde elliptique décalé de $\Delta x = 0,05$ m suivant l'axe x .

Na	5	7
$a_0(t)$	$1,934 \times 10^{-1}$	$1,929 \times 10^{-1}$
$a_1(t)$	$6,039 \times 10^{-2}$	$5,982 \times 10^{-2}$
$a_2(t)$	$-3,456 \times 10^{-2}$	$-3,438 \times 10^{-2}$
$a_3(t)$	$-1,075 \times 10^{-2}$	$-1,171 \times 10^{-2}$
$a_4(t)$	$3,815 \times 10^{-3}$	$4,397 \times 10^{-3}$
$a_5(t)$	0,000	$1,942 \times 10^{-3}$
$a_6(t)$	0,000	$-4,195 \times 10^{-4}$
$e_T/h(t)$	3%	0,6%

TABLE 2.4 – Comparaison des calculs de surface mouillée pour un paraboloidé décentré.

Pyramide à base carrée d'angle 15°

Le cas d'une pyramide à base carrée est intéressant du fait de la présence d'arêtes vives. [Gazzola \(2007\)](#), [Gazzola et al. \(2005\)](#) et [Korobkin et Scolan \(2006\)](#) ont montré que la ligne de contact pour une telle forme était néanmoins régulière. Le déplacement le long de la ligne de contact $\eta(\xi_0)$ n'étant par contre uniquement de régularité C_1 par morceaux, ce cas d'étude pourrait être défavorable à notre méthode du fait de la régularité C_∞ intrinsèque aux séries de Fourier (risque d'apparition du phénomène de Gibbs).

Considérons une pyramide d'angle de relèvement γ dont la forme est définie ci-dessous :

$$\begin{cases} f(x, y) = \tan \gamma |x| & , \theta(x, y) \in [-\pi/4; \pi/4] \cup [3\pi/4; 5\pi/4] \\ f(x, y) = \tan \gamma |y| & , \theta(x, y) \in [\pi/4; 3\pi/4] \cup [-3\pi/4; -\pi/4] \end{cases} \quad (2.50)$$

Dans ce cas, le problème de Wagner peut être reformulé en introduisant les variables adimensionnelles $x_1 = x \tan \gamma / h(t)$, $y_1 = y \tan \gamma / h(t)$, $z_1 = z \tan \gamma / h(t)$ et $\psi_1(x_1, y_1, z_1) = \frac{\tan \gamma}{h(t)^2} \psi \left(\frac{x_1 h(t)}{\tan \gamma}, \frac{y_1 h(t)}{\tan \gamma}, \frac{z_1 h(t)}{\tan \gamma} \right)$. Le problème aux limites (2.13) devient alors :

$$\begin{cases} \Delta \psi_1 = 0 & , z_1 < 0 \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial z_1} = f_1(x_1, y_1) - 1 & , (x_1, y_1, z_1) \in SM_1^{(w)} \\ \psi_1 = 0 & , (x_1, y_1, z_1) \in SL_1^{(w)} \\ \psi_1 \rightarrow 0 & , x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.51)$$

avec la fonction f_1 définie par :

$$\begin{cases} f_1(x_1, y_1) = |x_1| & , \theta_1(x_1, y) \in [-\pi/4; \pi/4] \cup [3\pi/4; 5\pi/4] \\ f_1(x_1, y_1) = |y_1| & , \theta_1(x_1, y_1) \in [\pi/4; 3\pi/4] \cup [-3\pi/4; -\pi/4] \end{cases}. \quad (2.52)$$

La condition de Wagner devient alors :

$$\lim_{\substack{(x_1, y_1) \rightarrow \Gamma_1^{(w)} \\ (x_1, y_1) \in SL_1^{(w)}}} \frac{\partial \psi_1}{\partial z_1}(x_1, y_1, 0) = f_1(x_1, y_1) - 1. \quad (2.53)$$

On en déduit que $\Gamma_1^{(w)}$ ne dépend ni de γ , ni de $h(t)$. Il est possible de construire toutes les solutions à partir de $\Gamma_1^{(w)}$ en faisant le changement de variables inverse : $(x_1, y_1) \in \Gamma_1^{(w)} \Leftrightarrow (x, y) \in \Gamma^{(w)}$.

La figure 2.20 montre la ligne de contact prédite par la méthode proposée, ainsi que les résultats obtenus par [Gazzola \(2007\)](#) avec la méthode des inégalités variationnelles et par [Korobkin et Scolan \(2006\)](#) en utilisant une méthode de perturbation. On observe que notre solution numérique est proche de la solution numérique de référence de [Gazzola \(2007\)](#) mais qu'un grand nombre d'harmoniques est nécessaire pour atteindre cette précision ($N_a = 15$). On remarque également que la solution analytique approchée de [Korobkin et Scolan \(2006\)](#) est une bonne estimation de la ligne de contact et qu'elle apporte une amélioration considérable à la solution de von Karman.

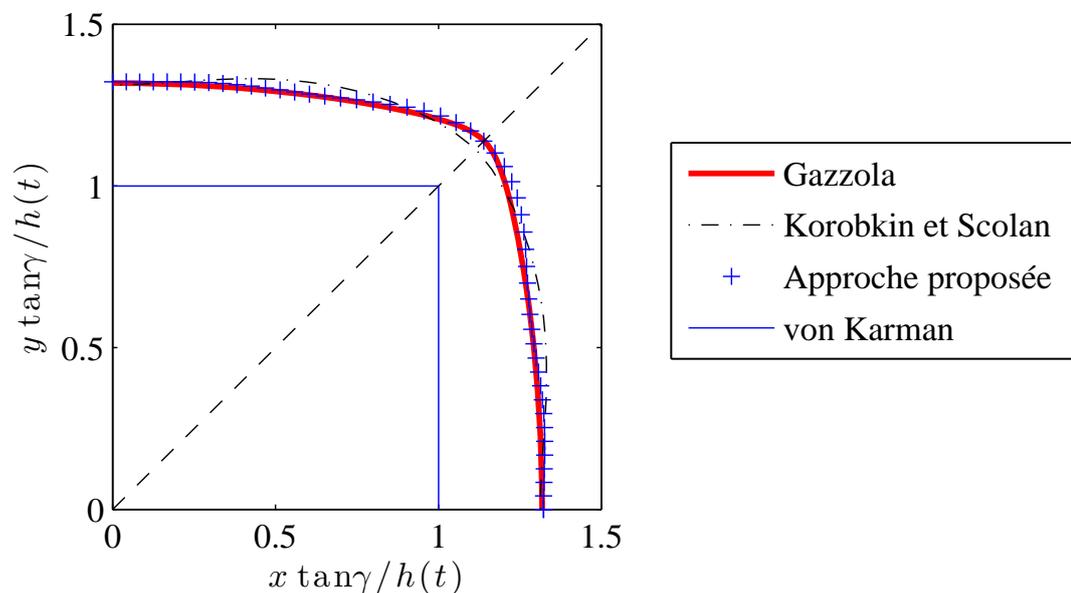


FIGURE 2.20 – Surface mouillée d'une pyramide à base carrée

2.3 Conclusion

La méthode numérique proposée dans ce chapitre permet de déterminer la géométrie de la surface de contact lors de l'impact d'un solide tridimensionnel. Pour la mise en oeuvre et la programmation de cette méthode, nous nous sommes limités à des formes présentant un plan de symétrie, mais elle pourrait être aisément adaptée à des formes sans symétrie (en incluant des termes en sinus dans la série de Fourier décrivant le rayon de la surface de contact). Il serait également possible de prendre en compte une rotation du corps ; ceci dans les limites de la théorie de Wagner qui impose, qu'à un instant donné, la surface mouillée englobe les surfaces mouillées des instants précédents. On a pu voir que l'élancement du corps avait une influence importante sur le nombre d'harmoniques nécessaires pour une bonne estimation de la ligne de contact. Enfin, malgré l'approximation du rayon par une série de Fourier, la méthode fournit des résultats convenables pour des formes présentant des arêtes vives.

