

# La modélisation unidimensionnelle

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>52</b>
<b>4.2</b>	<b>Le problème stationnaire</b>	<b>52</b>
4.2.1	Le système d'équations stationnaires	52
4.2.2	Résolution du système et résultats	53
4.2.3	La thermique	56
4.2.3.1	Influence des différentes contributions (convection et rayonnement) sur le profil de température	56
4.2.3.2	Bilan	58
<b>4.3</b>	<b>Étude de stabilité linéaire</b>	<b>59</b>
4.3.1	Définition	59
4.3.2	Les équations linéarisées	59
4.3.3	Les conditions aux limites du problème instationnaire	60
4.3.4	La résolution	61
4.3.4.1	Résolution par la méthode matricielle	61
4.3.4.2	Résolution de l'équation aux valeurs propres	62
4.3.5	Les résultats	66
4.3.6	Influence du profil de température sur la stabilité	69
4.3.6.1	Stratégie et données de l'étude	69
4.3.6.2	Résultats	70
4.3.7	Conclusion sur la stabilité	71

---

## 4.1 Introduction

CETTE partie est consacrée à un modèle  $1D$  du procédé de fibrage. Le but de cette étude est de mettre en évidence des défauts de type hydrodynamiques qui pourraient être gênant au cours de la fabrication.

Ainsi, nous allons mettre en place les équations de ce modèle  $1D$ , puis nous les exploiterons afin de faire une étude de stabilité linéaire. La méthode présentée ici est celle couramment utilisée dans le cas du filage textile [AGASSANT et others, 1996], [DEMAY et AGASSANT, 1982].

Nous verrons dans cette partie que la mise en place d'un modèle  $1D$  est intéressante pour plusieurs raisons. Tout d'abord, elle permet une étude plus simple du procédé. D'autre part, elle donne des résultats intéressants qui seront validés plus tard avec un modèle plus élaboré. Enfin, compte tenu de la géométrie du procédé, un tel modèle s'impose naturellement.

Cette étude  $1D$  sera menée de la manière suivante : tout d'abord, nous poserons les équations générales de ce modèle. Puis, nous aborderons le modèle stationnaire qui nous permettra, grâce à un profil de température expérimental, de déterminer la géométrie de la fibre. Cette dernière pourra être comparée à la géométrie obtenue expérimentalement. Ensuite, nous aborderons l'étude de stabilité linéaire, c'est-à-dire la résolution des équations instationnaires. Nous verrons les méthodes abordées pour la résolution et conclurons quant à la stabilité du procédé. Enfin, pour conclure cette partie, nous aborderons l'influence des différents paramètres de fabrication sur la stabilité (ou la non-stabilité???) du procédé.

## 4.2 Le problème stationnaire

### 4.2.1 Le système d'équations stationnaires

Les équations du modèle stationnaire sont les équations du modèle  $1D$  indépendantes du temps. Le système obtenu à partir des équations (3.17), (3.23), (3.24) et (3.25) est donc le suivant :

$$s u = Q \quad (4.1)$$

$$F = 3\eta s \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -\rho g s + \rho s u \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4.3)$$

$$\rho c s u \frac{\partial T}{\partial z} = -h_T (T - T_{air}) 2\pi R \quad (4.4)$$

Le profil de température est mesuré expérimentalement. Donc la température n'est pas une inconnue du problème stationnaire. A partir de ce profil de température, nous allons déterminer le profil géométrique de la fibre le long du chemin de fibrage, ainsi que la vitesse pour chaque section et la tension de fibrage.

Le coefficient de transfert thermique  $h_T$  est à priori inconnu. Or la température est connue pour toute cote  $z$ , donc, dans l'équation (4.4) la seule inconnue est  $h_T$ .

Ainsi, nous allons le calculer à chaque incrément par la relation :

$$h_T(z) = - \frac{Q}{T(z) - T_{air}} \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\rho c}{2\pi R} \quad (4.5)$$

Finalement, le système à résoudre se réduit à un système aux différentiel de deux équations à deux inconnues :

$$(S) : \begin{cases} \frac{du}{dz} = \frac{F u}{3\eta Q} \\ \frac{dF}{dz} = \rho \left( \frac{F u}{3\eta} - \frac{gQ}{u} \right) \end{cases} \quad (4.6)$$

### 4.2.2 Résolution du système et résultats

La résolution de ces équations se fait par une méthode de Runge et Kutta à l'ordre 2 avec les conditions aux limites suivantes :

- ◇ Vitesse de descente de la préforme :  $U_0$
- ◇ Vitesse de fibrage :  $U_L$  (  $\frac{U_L}{U_0} \approx 10^5$  )

Le plus simple serait d'avoir une condition limite sur la tension de fibrage mais nous n'en avons pas. Nous allons donc utiliser un algorithme de Newton, i.e. résoudre le système

avec une valeur supposée de la tension de fibrage à un bord et la vraie valeur de la vitesse puis regarder la valeur de la vitesse obtenue à l'autre bord. Ensuite, nous mesurons l'écart et modifions la valeur de tir en conséquence.

Pour des raisons de convergence du schéma numérique, nous allons tirer sur la valeur de la tension de fibrage en bas du dispositif, i.e. à l'abscisse  $z = L$ . L'algorithme de résolution est décrit sur la figure (4.2.2).

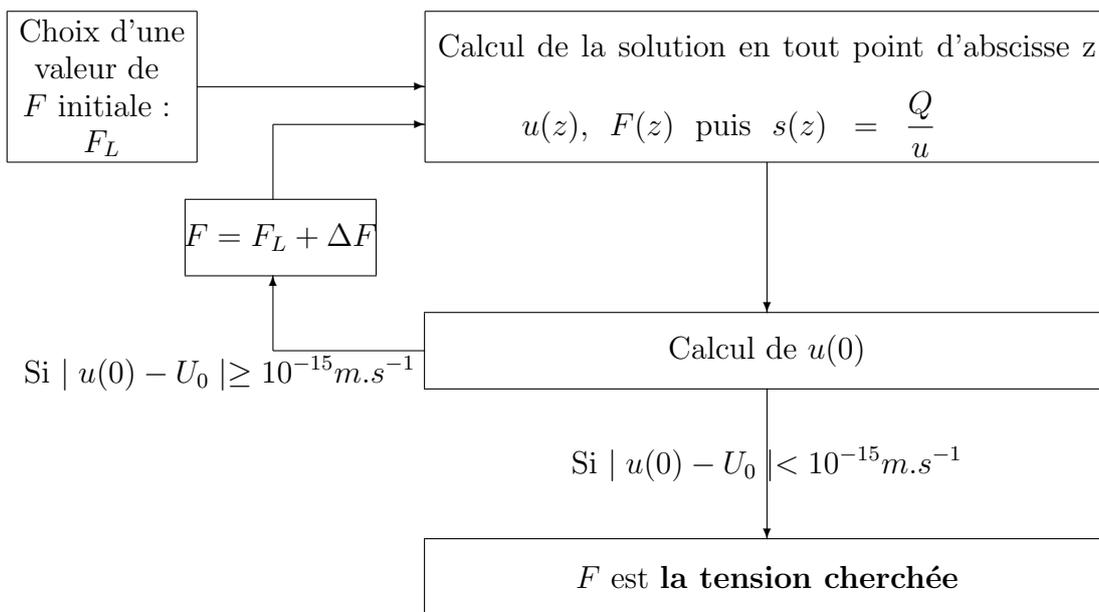


FIG. 4.1 – Algorithme de résolution du système stationnaire

Le profil de température expérimental fourni par la société Alcatel est donné sur la figure (4.2)

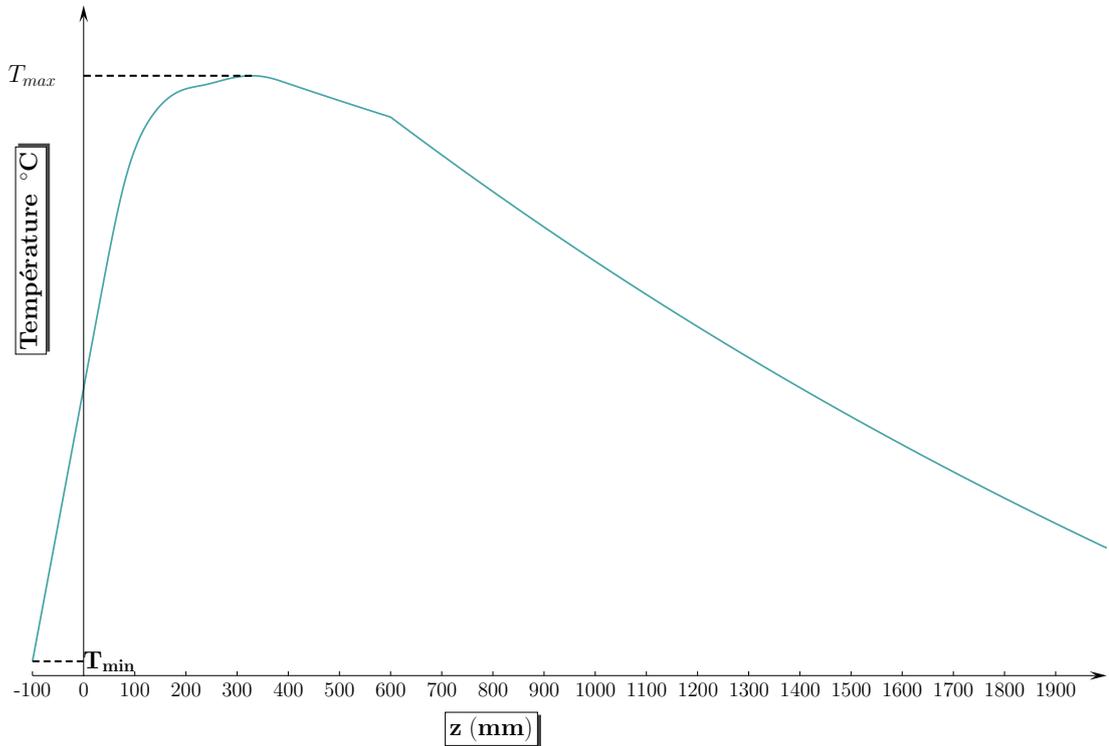


FIG. 4.2 – Profil de température expérimental pour une vitesse de fibrage imposée

Ce modèle permet de calculer la solution stationnaire, en particulier la géométrie du cône de fibrage et la tension de fibrage (imposée en bas du chemin de fibrage). Nos résultats peuvent être comparés à des résultats expérimentaux obtenus par la société Alcatel. Sur la figure (4.3), nous avons représenté l'évolution du diamètre de la fibre en fonction de la position axiale le long du chemin de fibrage. Nous remarquons que les deux profils obtenus sont superposés. Nous pouvons donc en déduire que le modèle mis en place est plutôt correct. D'autre part, nous avons représenté la solution stationnaire obtenue en négligeant les effets de masse et d'inertie. Il découle de la figure (4.3) que ces effets ont un rôle dans le procédé et ne sont donc pas négligeables.

D'autre part, la détermination numérique de la tension de fibrage est également très proche de la valeur expérimentale (l'erreur relative est de l'ordre de 1%), ce qui confirme la qualité du modèle.

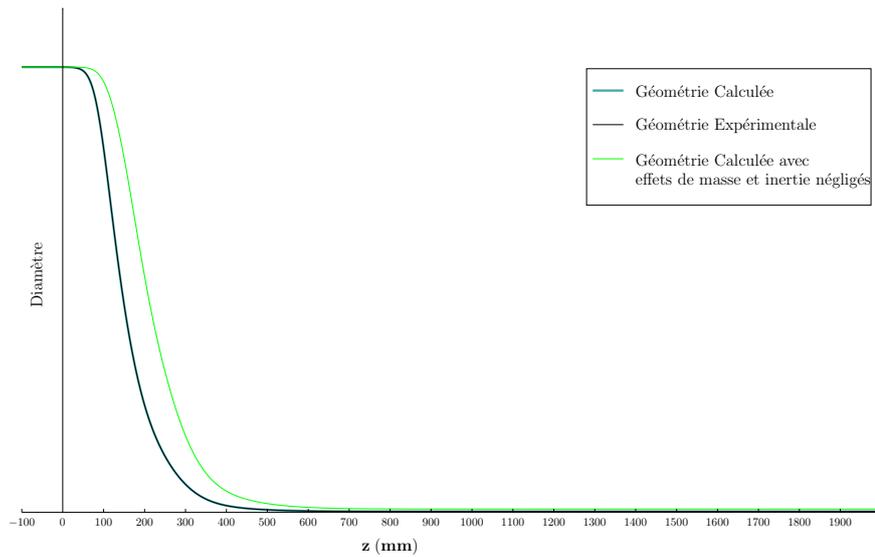


FIG. 4.3 – Comparaison diamètre fibre expérimental et diamètre fibre obtenu par le calcul stationnaire

### 4.2.3 La thermique

Comme nous l’avons montré dans le paragraphe (2.3) page 35 , les échanges thermiques au cours du fibrage sont de différentes natures. Compte tenu du caractère semi-transparent du verre, les échanges par rayonnement sont plus complexes à modéliser que s’il s’agissait d’un corps noir.

#### 4.2.3.1 Influence des différentes contributions (convection et rayonnement) sur le profil de température

Nous allons ici chercher à mettre en évidence la nature des échanges thermiques au cours du fibrage. Pour cela, nous allons repartir des résultats obtenus avec le modèle stationnaire et résoudre une équation thermique avec des contributions différentes. Dans le paragraphe précédent, nous sommes partis du profil de température expérimental afin de déterminer la géométrie de la fibre le long du chemin de fibrage. Nous allons à présent partir du profil géométrique de la fibre et résoudre l’équation de la chaleur pour retrouver le profil de température.

L’équation thermique que nous allons résoudre est de la forme :

$$\rho c s \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -h_T (T - T_{air}) 2\pi R \quad (4.7)$$

où  $h_T$  est le coefficient de transfert thermique inconnu.

Afin de tester l'influence de contributions comme la convection forcée ou le rayonnement, nous allons exprimer  $h_T$  comme la somme d'un terme de convection forcée  $h_c$  et d'un terme de rayonnement  $h_r$  et résoudre l'équation (4.7) dans trois configurations :

- ◇ Terme de convection forcée uniquement
- ◇ Terme de rayonnement uniquement
- ◇ Somme des deux termes

Nous allons prendre pour  $h_c$  et  $h_r$  des expressions classiques tirées de la littérature. Le terme de convection forcée est donné par Matsuo et Kase [KASE et MATSUO, 1965] par :

$$h_c = 0,21 R_e^{1/3} \frac{k_{air}}{R} \left( 1 + \left( \frac{8V_{air}}{u} \right)^2 \right)^{1/6} \quad (4.8)$$

Le terme de rayonnement est pris sous sa forme simplifiée la plus courante :

$$h_r = \sigma \epsilon \frac{T^4 - T_{air}^4}{T - T_{air}} \quad (4.9)$$

où  $\sigma$  est la constante de Stefan-Boltzmann et  $\epsilon$  est l'émissivité du matériau.

Les résultats obtenus sont tracés sur la figure (4.4) ainsi que le profil de température réel à partir de la sortie du four.

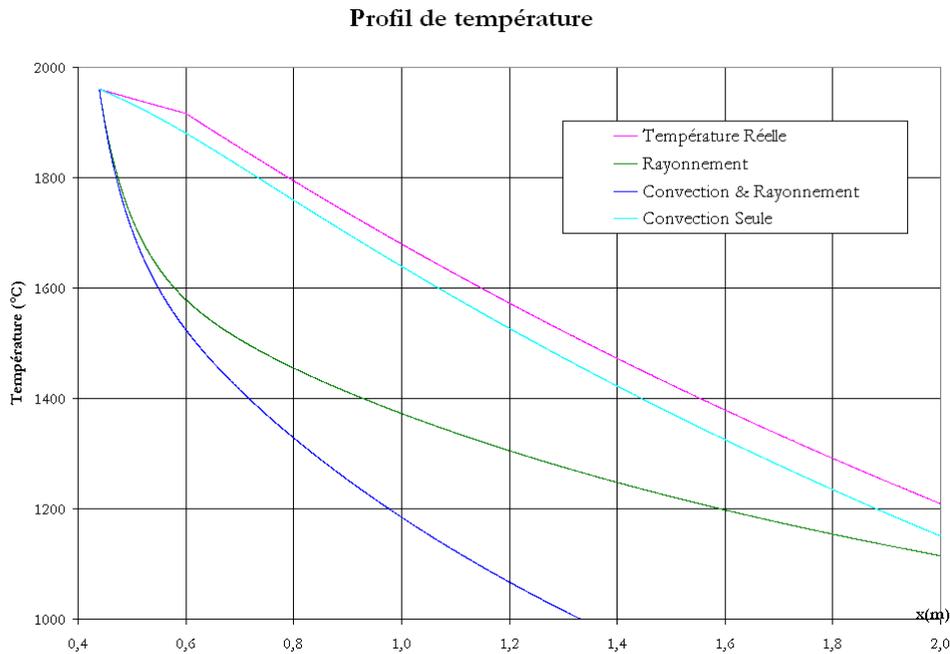


FIG. 4.4 – Nature des échanges thermiques au cours du fibrage

La figure (4.4) montre que le profil de température le plus proche du profil réel est celui qui a été calculé avec une contribution de convection seule. Il semble que la contribution d'un terme de rayonnement (tel qu'il a été exprimé pour cette étude) fasse s'éloigner le profil calculé du profil réel.

#### 4.2.3.2 Bilan

A ce stade, nous pouvons conclure qu'en première approximation, les échanges par rayonnement modélisés par une expression classique, ne permettent pas d'avoir une bonne approximation du profil réel de température.

C'est pourquoi nous avons adopté un coefficient de transfert thermique équivalent pour chaque cote  $z$ , défini par :

$$h_{eq}(z) = -\frac{Q}{T - T_{air}} \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\rho c}{2\pi R} \quad (4.10)$$

Ce coefficient équivalent est calculé à chaque incrément en stationnaire et sera utilisé dans les équations instationnaire. Nous ferons donc l'hypothèse qu'il ne dépend que de la cote  $z$  et pas du temps.

## 4.3 Étude de stabilité linéaire

### 4.3.1 Définition

Il s'agit d'étudier l'évolution d'une petite perturbation de la solution stationnaire des équations du modèle. Typiquement, la forme perturbée d'une solution stationnaire  $f_0(z)$  est décrite par l'expression :  $f(z, t) = f_0(z) + \tilde{f}(z) e^{\lambda t}$ . ( $\lambda$  complexe et  $\tilde{f}$  à valeurs complexes).

Cette forme perturbée est introduite dans les équations instationnaires du modèle qui sont ensuite linéarisées en ne gardant que les termes du premier ordre. Nous obtenons alors une relation entre  $\lambda$  et les paramètres du procédé, ce qui permet de calculer  $\lambda$  qui est appelée **valeur propre** du système. C'est la valeur propre de plus grande partie réelle qui permet de conclure sur la stabilité. Deux cas se présentent alors : si la partie réelle de cette valeur propre est négative alors le système tend vers sa solution stationnaire, nous sommes dans un cas stable. Si au contraire, la partie réelle est positive, la solution diverge de sa solution stationnaire et nous sommes alors dans un cas instable.

Nous allons chercher la solution des équations instationnaires sous la forme :

$$u(z, t) = u_1(z) + \tilde{u}(z) e^{\lambda t} \quad (4.11)$$

$$s(z, t) = s_1(z) + \tilde{s}(z) e^{\lambda t} \quad (4.12)$$

$$F(z, t) = F_1(z) + \tilde{F}(z) e^{\lambda t} \quad (4.13)$$

$$T(z, t) = T_1(z) + \tilde{T}(z) e^{\lambda t} \quad (4.14)$$

Où  $u_1$ ,  $s_1$ ,  $F_1$  et  $T_1$  sont les solutions du système stationnaire (équations 4.1 à 4.4). Les fonctions  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{s}$ ,  $\tilde{F}$  et  $\tilde{T}$  sont les fonctions perturbées inconnues également appelées **fonctions propres** du système.

### 4.3.2 Les équations linéarisées

Nous allons introduire les solutions perturbées (4.11), (4.12), (4.13) et (4.14) dans les équations (3.17), (3.23), (3.24) et (3.25).

Ainsi, le système à résoudre est :

$$\frac{\partial}{\partial t} (s_1(z) + \tilde{s}(z) e^{\lambda t}) + \frac{\partial}{\partial z} ((s_1(z) + \tilde{s}(z) e^{\lambda t}) (u_1(z) + \tilde{u}(z) e^{\lambda t})) = 0 \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (F_1(z) + \tilde{F}(z) e^{\lambda t}) &= -\rho g (s_1(z) + \tilde{s}(z) e^{\lambda t}) + \rho (s_1(z) + \tilde{s}(z) e^{\lambda t}) \\ &\times \left[ \frac{\partial}{\partial t} (u_1(z) + \tilde{u}(z) e^{\lambda t}) + (u_1(z) + \tilde{u}(z) e^{\lambda t}) \frac{\partial}{\partial z} (u_1(z) + \tilde{u}(z) e^{\lambda t}) \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$(F_1(z) + \tilde{F}(z) e^{\lambda t}) = 3\eta (s_1(z) + \tilde{s}(z) e^{\lambda t}) \frac{\partial}{\partial z} (u_1(z) + \tilde{u}(z) e^{\lambda t}) \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \rho c (s_1(z) + \tilde{s}(z) e^{\lambda t}) \left( \frac{\partial}{\partial t} (T_1(z) + \tilde{T}(z) e^{\lambda t}) + (u_1(z) + \tilde{u}(z) e^{\lambda t}) \frac{\partial}{\partial z} (T_1(z) + \tilde{T}(z) e^{\lambda t}) \right) \\ = -h_T 2\pi R \left( (T_1(z) + \tilde{T}(z) e^{\lambda t}) - T_{air} \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Après linéarisation, nous obtenons un système différentiel dont les fonctions propres sont les inconnues, la solution stationnaire une donnée et  $\lambda$  un paramètre. Il faut alors résoudre :

$$\frac{d\tilde{u}}{dz} = -\frac{1}{s_1} \frac{du_1}{dz} \tilde{s} + \frac{1}{3\eta(T_1) s_1} \tilde{F} - \frac{\eta'(T_1)}{\eta(T_1)} \frac{du_1}{dz} \tilde{T} \quad (4.19)$$

$$\frac{d\tilde{F}}{dz} = \rho Q \frac{d\tilde{u}}{dz} + \rho \left( \lambda + s_1 \frac{du_1}{dz} \right) \tilde{u} - \rho \left( g - u_1 \frac{du_1}{dz} \right) \tilde{s} \quad (4.20)$$

$$\frac{d\tilde{s}}{dz} = -\frac{s_1}{u_1} \frac{d\tilde{u}}{dz} - \frac{1}{u_1} \frac{ds_1}{dz} \tilde{u} - \frac{1}{u_1} \left( \lambda + \frac{du_1}{dz} \right) \tilde{s} \quad (4.21)$$

$$\frac{d\tilde{T}}{dz} = -\frac{1}{u_1} \frac{dT_1}{dz} \tilde{u} - \frac{1}{s_1} \frac{dT_1}{dz} \tilde{s} - \frac{1}{u_1} \left( \lambda + \frac{C_t}{s_1} \right) \quad (4.22)$$

### 4.3.3 Les conditions aux limites du problème instationnaire

Les conditions aux limites du procédé sont toujours les mêmes, à savoir :

$$\begin{aligned} \forall t, \quad u(0, t) &= U_0 \\ u(L, t) &= U_L \\ s(0, t) &= S_0 \\ T(0, t) &= T_0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ce qui fait que nous pouvons en déduire les conditions sur les fonctions propres :

$$\tilde{u}(0) = 0 \quad (4.24)$$

$$\tilde{u}(L) = 0 \quad (4.25)$$

$$\tilde{s}(0) = 0 \quad (4.26)$$

$$\tilde{T}(0) = 0 \quad (4.27)$$

Pour résoudre le système il nous manque toujours une valeur de la fonction propre associée à la tension de fibrage ( $\tilde{F}$ ) à une extrémité (par exemple,  $\tilde{F}(0)$ ). Cette valeur est en réalité arbitraire mais **non nulle**. En effet, tant que  $\tilde{F}(0)$  est choisie non nulle, la valeur en elle-même importe peu pour la détermination des valeurs propres; changer la valeur de  $\tilde{F}(0)$  reviendrait à multiplier le vecteur propre par un scalaire non nul ce qui multiplierait les autres fonctions propres par ce même scalaire. Cette opération ne change pas la valeur propre.

Nous choisirons la valeur la plus simple possible, soit :  $\tilde{F}(0) = F_1(0)$ . Les fonctions propres seront donc connues à un coefficient multiplicatif près.

### 4.3.4 La résolution

La résolution de ce système a été faite par deux méthodes qui vont s'avérer complémentaires l'une de l'autre. La première, dite *méthode matricielle*, va nous permettre d'obtenir un certain nombre de valeurs propres mais de manière assez peu précise. La seconde méthode, dite *méthode de résolution de l'équation aux valeurs propres*, est plus précise mais nécessite d'avoir une petite idée de la valeur propre cherchée.

#### 4.3.4.1 Résolution par la méthode matricielle

Comme son nom l'indique, nous allons transformer le système afin de le mettre sous forme matricielle  $AX = \lambda BX$ .

Pour cela, nous utilisons les approximations des différences finies pour remplacer les dérivées et transformer ainsi le système différentiel en système algébrique. Nous discrétisons donc l'espace  $z \in [0; L]$  en  $N$  intervalles  $[z_i; z_{i+1}]_{i=0..(n-1)}$  et sur chacun de ces intervalles, nous approchons les dérivées par :

$$\begin{cases} \frac{df}{dz} \simeq \frac{3f(z) - 4f(z-h) + f(z-2h)}{h} \\ h = z_{i+1} - z_i \quad i = 1..(n-1) \end{cases}$$

Ce schéma n'étant utilisable qu'à partir du second point de discrétisation, nous utiliserons pour le premier point la forme plus classique :

$$\frac{df}{dz} \simeq \frac{f(z) - f(z-h)}{h}$$

Compte tenu des conditions aux limites, nous pouvons remarquer que :

✓  $\tilde{s}_i$  et  $\tilde{T}_i$  sont définies pour  $i \in [1; n]$  car les conditions aux limites en  $z = 0$  sont nulles.

- ✓  $\tilde{F}_i$  est définie pour  $i \in [0; n]$  car  $\tilde{F}_0 = F_1(0)$  non nulle.
- ✓  $\tilde{u}_i$  est définie pour  $i \in [1; n - 1]$  car les valeurs en  $z = 0$  et  $z = L$  sont nulles.

Nous obtenons alors un système de  $4n$  équations à  $4n$  inconnues et fonction du paramètre  $\lambda$ , inconnu lui aussi. Ce système peut se mettre sous la forme :

$$AX = \lambda BX$$

Où  $\lambda$  est une valeur propre complexe du système,  $A$  et  $B$  des matrices de dimension  $4n \times 4n$  et  $X$  le vecteur de composantes complexes :

$$X^T = \left( \tilde{u}_1 \quad \dots \quad \tilde{u}_{n-1} \quad \tilde{s}_1 \quad \dots \quad \tilde{s}_{n-1} \quad \tilde{s}_n \quad \tilde{F}_0 \quad \tilde{F}_1 \quad \dots \right. \\ \left. \tilde{s}_n \quad \tilde{F}_{n-1} \quad \tilde{F}_n \quad \tilde{T}_1 \quad \dots \quad \tilde{T}_{n-1} \quad \tilde{T}_n \right) \quad (4.28)$$

La résolution de ce système se fait numériquement, grâce à un sous-programme de la librairie IMSL utilisable en Fortran. Elle retourne comme résultats un vecteur contenant  $4n$  valeurs propres complexes. Nous voyons donc clairement les limites de cette méthode. En effet, le nombre de valeurs propres obtenues est directement lié au nombre de points de discrétisation (puisque celui-ci implique la dimension de la matrice).

Donc, il est clair que toutes les valeurs propres obtenues ne sont pas significatives. Il faut donc les trier.

Cette méthode est d'autant plus mauvaise qu'elle est lourde à mettre en œuvre. En effet, le remplissage des matrices est fastidieux comme nous pouvons l'observer dans le détail joint en annexe A page 101.

#### 4.3.4.2 Résolution de l'équation aux valeurs propres

Le système différentiel (équations (4.19) à (4.22)) est résolu par un algorithme de Runge et Kutta d'ordre deux en prenant en compte les conditions aux limites à une extrémité. Nous obtenons les fonctions propres solutions pour une valeur de  $\lambda$  donnée. Il reste à satisfaire la condition à l'autre bout :  $\tilde{u}(L) = 0$ . Nous obtenons ainsi une équation aux valeurs propres de la forme  $f(\lambda) = 0$  qui est résolue par une méthode de Newton.

Il existe une infinité de valeurs de  $\lambda$  solutions de cette équation, cependant, la valeur propre à considérer sera celle de plus grande partie réelle car elle donne la stabilité.

Il y a deux moyens d'aborder cette résolution, en considérant soit les conditions limites en haut du chemin de fibrage (en  $z = 0$ ) soit en bas (en  $z = L$ ).

La résolution en partant du haut du chemin de fibrage est la méthode "naturelle" puisque les conditions initiales sont définies en haut (en  $z = 0$ ). Cette méthode est décrite sur la figure (4.5).

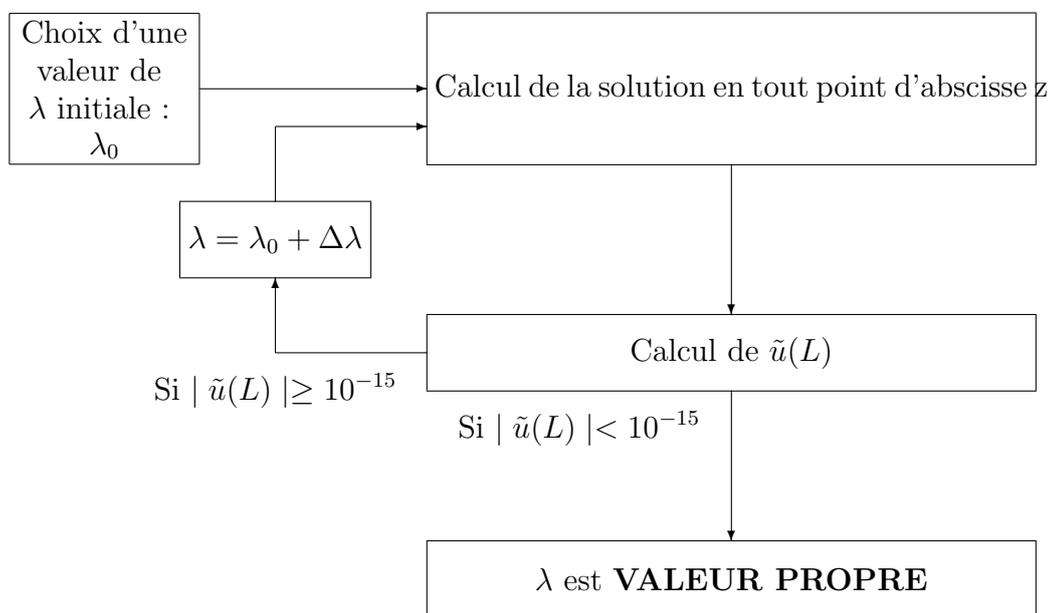


FIG. 4.5 – Algorithme de résolution de l'équation aux valeurs propres en partant des conditions limites en haut

Après avoir postulé une valeur initiale de  $\lambda$ , nous résolvons le système linéarisé avec les conditions aux limites fixées en  $z = 0$ . Puis, nous calculons la valeur de  $\tilde{u}$  en  $z = L$ . Cette valeur doit être nulle. Donc, si elle est très proche de zéro, le  $\lambda$  postulé est valeur propre du système, sinon, il faut modifier la valeur de  $\lambda$  et résoudre à nouveau le système. Nous procédons ainsi jusqu'à ce que l'algorithme converge.

Dans la méthode de résolution par le bas, il s'agit de prendre le problème à l'envers. Il faut donc connaître les conditions aux limites en  $z = L$ .

La détermination des conditions initiales en  $z = L$  ajoute une difficulté supplémentaire au calcul puisque qu'elles sont inconnues sauf pour  $\tilde{u}$ . Pour les trouver, nous allons utiliser la propriété de linéarité des vecteurs propres.

Bilan des conditions aux limites connues et à déterminer :

$$\begin{array}{rcccl}
 & \text{En } z = 0 & & \text{En } z = L & \\
 \tilde{u}(0) & = & 0 & \tilde{u}(L) & = & 0 \\
 \tilde{s}(0) & = & 0 & \tilde{s}(L) & = & \tilde{s}_L \\
 \tilde{F}(0) & = & \text{arbitraire} & \tilde{F}(L) & = & 1 \text{ (arbitraire)} \\
 \tilde{T}(0) & = & 0 & \tilde{T}(L) & = & \tilde{T}_L
 \end{array}$$

Il faut donc définir  $\tilde{s}_L$  et  $\tilde{T}_L$ . La méthode de calcul utilisée est détaillée ci-dessous.

1. Soit une valeur de  $\lambda$  fixée.
2. Résolution du système (équations 4.19 à 4.22) par RK2<sup>2</sup> avec comme conditions au bas du chemin de fibrage :

$$\begin{cases} \tilde{s}(L) = 1 \\ \tilde{F}(L) = 0 \\ \tilde{T}(L) = 0 \end{cases}$$

Cette résolution permet de calculer des valeurs des fonctions propres en  $z = 0$  (qui ne sont pas les bonnes, évidemment !). Nous stockons ces valeurs initiales dans un vecteur :

$$X_1(0) = \begin{pmatrix} \tilde{s}(0) \\ \tilde{F}(0) \\ \tilde{T}(0) \end{pmatrix}$$

3. De la même manière, nous résolvons le système en choisissant d'autres conditions en  $z = L$  :

$$\begin{cases} \tilde{s}(L) = 0 \\ \tilde{F}(L) = 1 \\ \tilde{T}(L) = 0 \end{cases}$$

Nous obtenons d'autres valeurs des fonctions propres en  $z = 0$ , que nous stockons aussi :

$$X_2(0) = \begin{pmatrix} \tilde{s}_1(0) \\ \tilde{F}_1(0) \\ \tilde{T}_1(0) \end{pmatrix}$$

4. Enfin, nous résolvons le système avec :

$$\begin{cases} \tilde{s}_2(L) = 0 \\ \tilde{F}_2(L) = 0 \\ \tilde{T}_2(L) = 1 \end{cases}$$

---

<sup>2</sup>Méthode de Runge et Kutta d'ordre 2

Et nous posons :

$$X_3(0) = \begin{pmatrix} \tilde{s}_3(0) \\ \tilde{F}_3(0) \\ \tilde{T}_3(0) \end{pmatrix}$$

C'est ici que nous allons faire appel à la linéarité des vecteurs propres : la solution du problème est combinaison linéaire des fonctions propres ( $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$ ) obtenues, donc pour tout  $z$ , la solution s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \tilde{s}(z) \\ \tilde{F}(z) \\ \tilde{T}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_1(z) \\ \tilde{F}_1(z) \\ \tilde{T}_1(z) \end{pmatrix} + \tilde{T}_L \begin{pmatrix} \tilde{s}_2(z) \\ \tilde{F}_2(z) \\ \tilde{T}_2(z) \end{pmatrix} + \tilde{s}_L \begin{pmatrix} \tilde{s}_3(z) \\ \tilde{F}_3(z) \\ \tilde{T}_3(z) \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

En particulier cela est vrai en  $z = 0$  et en  $z = L$ , donc les  $\tilde{s}_L$  et  $\tilde{T}_L$  sont solutions des équations (4.30) et (4.31) :

$$\begin{aligned} X(L) &= X_1(L) + \tilde{T}_L X_2(L) + \tilde{s}_L X_3(L) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{T}_L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{s}_L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$X(0) = X_1(0) + \tilde{T}_L X_2(0) + \tilde{s}_L X_3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Nous retrouvons avec un système linéaire de deux équations à deux inconnues, très simple à résoudre. Toutefois, numériquement cela rajoute pas mal d'opérations puisqu'il faut effectuer ce calcul pour chaque valeur de  $\lambda$  fixée.

Finalement, l'algorithme utilisé n'est guère différent que celui de la méthode par le haut sauf qu'il faut rajouter le calcul des conditions initiales, comme représenté sur la figure (4.6).

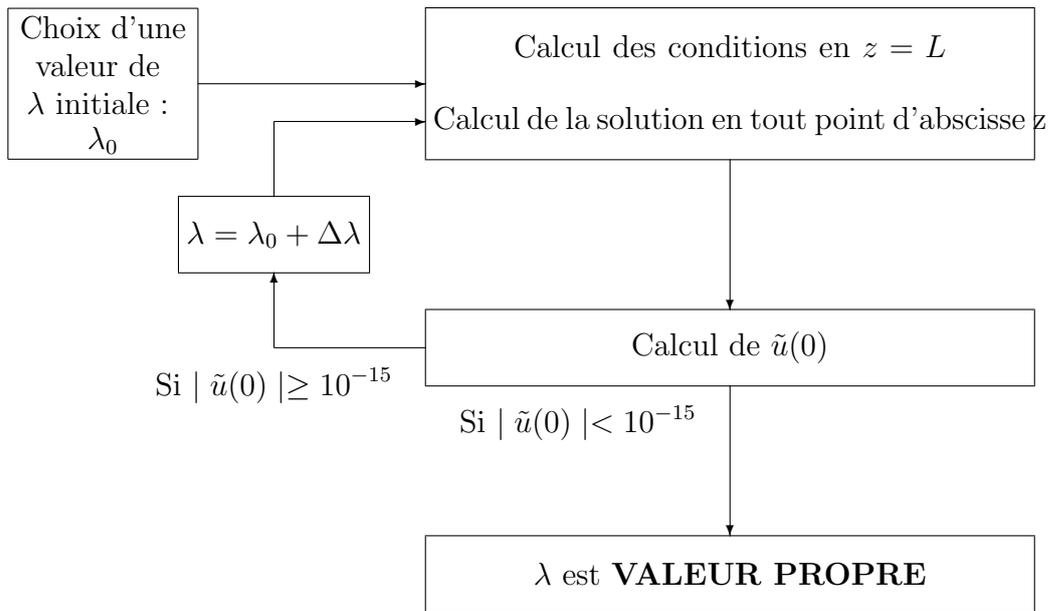


FIG. 4.6 – Algorithme de résolution de l'équation aux valeurs propres avec conditions limites en bas

### 4.3.5 Les résultats

Nous avons mis en place deux méthodes de résolution du système linéarisé. Chacune d'elle a des avantages et des inconvénients.

La résolution de l'équation aux valeurs propres par la méthode de tir est bien plus précise mais a l'inconvénient de demander une valeur initiale de la valeur propre.

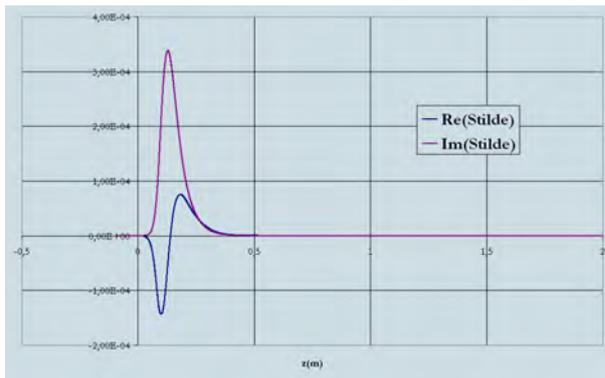
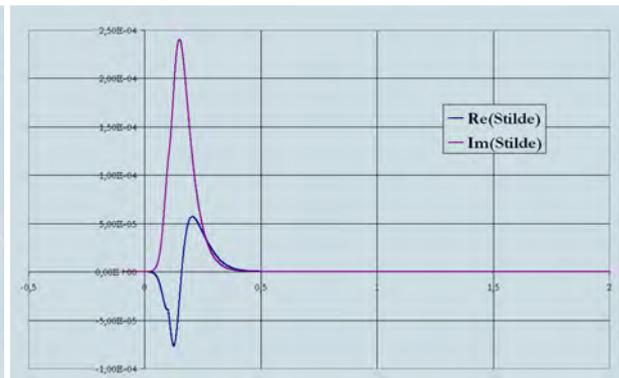
La méthode matricielle quant à elle, est beaucoup moins précise et le nombre de valeurs propres obtenues dépend du nombre de points de discrétisation choisi le long du chemin de fibrage. En contrepartie, elle ne nécessite pas la connaissance d'une valeur propre initiale.

Nous allons donc combiner les deux méthodes afin d'optimiser la recherche de la valeur propre de plus grande partie réelle. Tout d'abord, nous allons lancer la méthode matricielle pour récupérer  $n$  valeurs de  $\lambda$ . Les résultats obtenus vont servir de valeurs initiales de  $\lambda$  pour la seconde méthode.

Cette stratégie nous amène donc à mettre en évidence la valeur propre de plus grande partie réelle, dans les conditions de fabrication décrites précédemment. Les 10 premières valeurs propres obtenue pour le taux d'étirage fixé sont données dans le tableau ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -2.55 \cdot 10^{-3} + i 4.24 \cdot 10^{-3} \\
\lambda_2 &= -3.85 \cdot 10^{-3} + i 7.77 \cdot 10^{-3} \\
\lambda_3 &= -4.79 \cdot 10^{-3} + i 1.56 \cdot 10^{-2} \\
\lambda_4 &= -4.86 \cdot 10^{-3} + i 2.61 \cdot 10^{-2} \\
\lambda_5 &= -5.48 \cdot 10^{-3} + i 7.01 \cdot 10^{-3} \\
\lambda_6 &= -5.67 \cdot 10^{-3} + i 4.65 \cdot 10^{-3} \\
\lambda_7 &= -6.31 \cdot 10^{-3} + i 9.70 \cdot 10^{-3} \\
\lambda_8 &= -6.63 \cdot 10^{-3} + i 9.85 \cdot 10^{-3} \\
\lambda_9 &= -6.78 \cdot 10^{-3} + i 4.21 \cdot 10^{-3} \\
\lambda_{10} &= -6.87 \cdot 10^{-3} + i 3.57 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}$$

Sur la figure (4.7) est représenté l'évolution spatiale des parties réelle et imaginaire de la fonction propre  $\tilde{s}$  associée à la valeur propre de plus grande partie réelle. Cette figure montre que l'amortissement se fait au bout d'une seule oscillation. Nous nous trouvons donc bien sur le premier mode.

FIG. 4.7 –  $\tilde{s}$  associée à  $\lambda_1$ FIG. 4.8 –  $\tilde{s}$  associée à  $\lambda_2$ 

Sur les figures (4.8) à (4.16), sont représentées les fonctions propres  $\tilde{s}$  associées aux neuf valeurs propres suivantes.

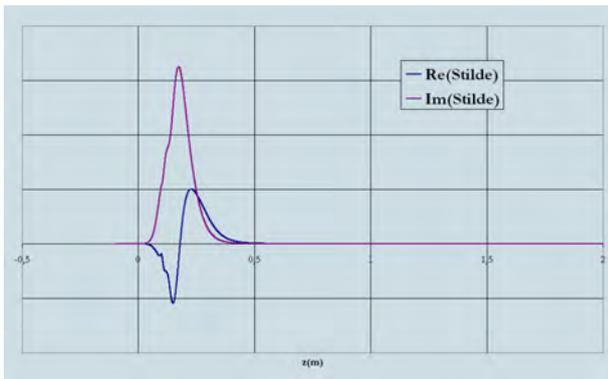


FIG. 4.9 –  $\tilde{s}$  associée à  $\lambda_3$

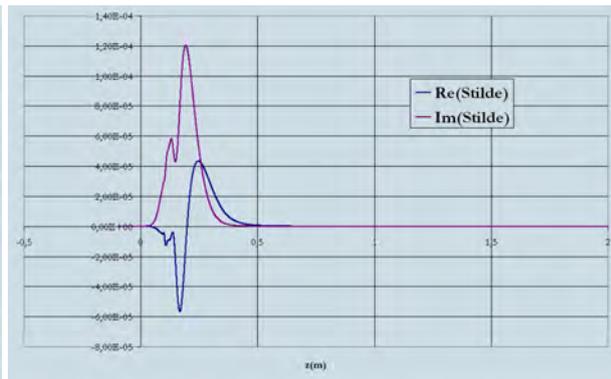


FIG. 4.10 –  $\tilde{s}$  associée à  $\lambda_4$

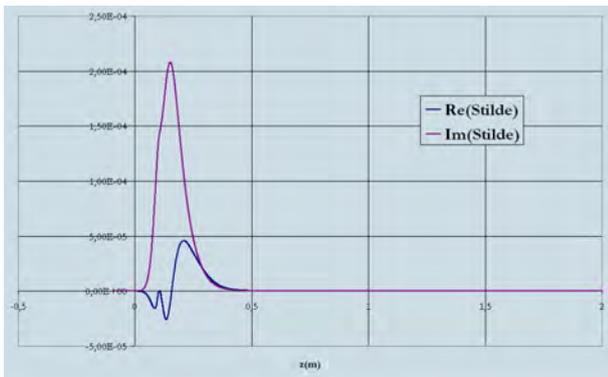


FIG. 4.11 –  $\tilde{s}$  associée à  $\lambda_5$

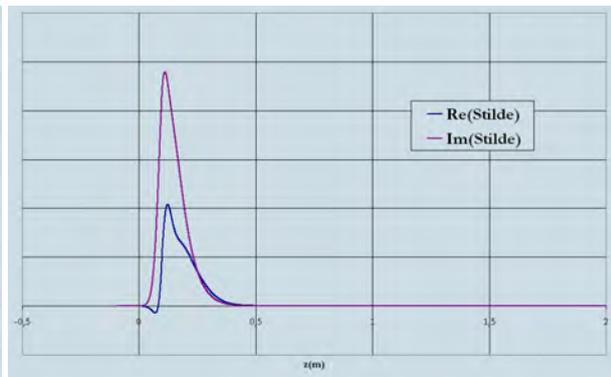


FIG. 4.12 –  $\tilde{s}$  associée à  $\lambda_6$

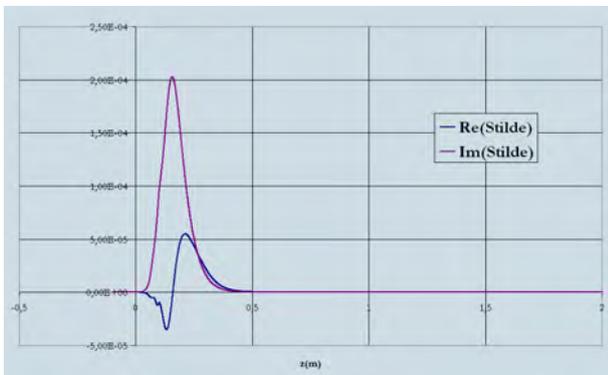


FIG. 4.13 –  $\tilde{s}$  associée à  $\lambda_7$

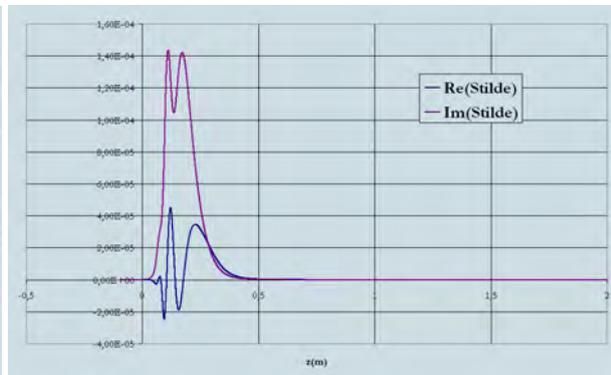


FIG. 4.14 –  $\tilde{s}$  associée à  $\lambda_8$

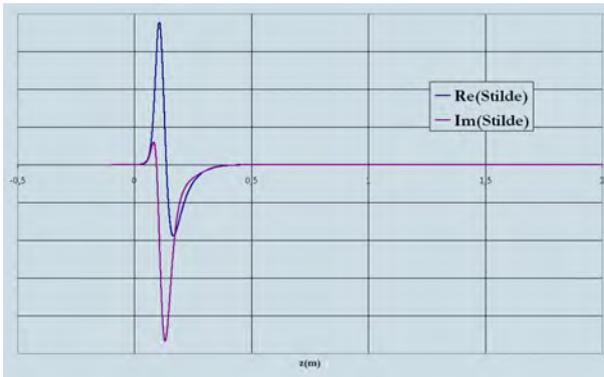


FIG. 4.15 –  $\tilde{s}$  associée à  $\lambda_9$

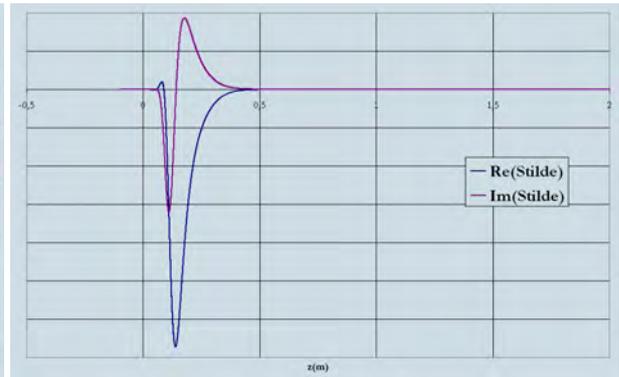


FIG. 4.16 –  $\tilde{s}$  associée à  $\lambda_{10}$

Sur la figure (4.17) est représenté le spectre de ces dix premières valeurs propres.

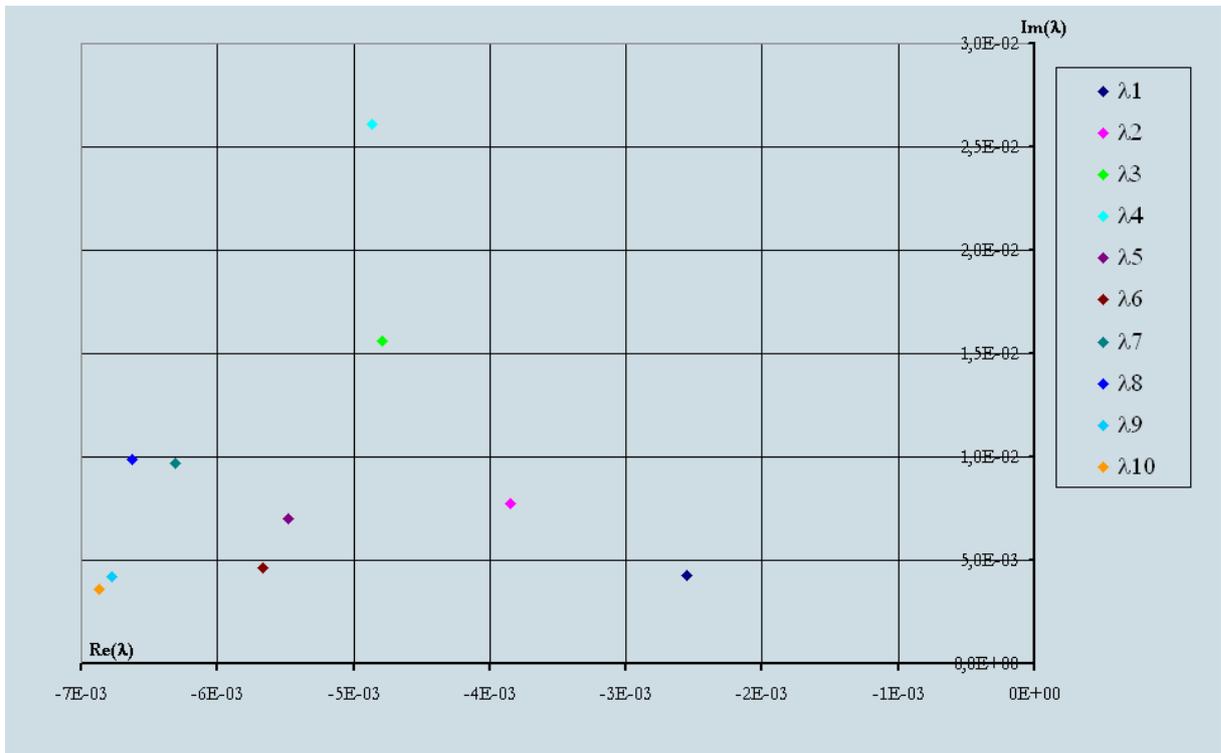


FIG. 4.17 – Spectre des 10 premières valeurs propres obtenues

### 4.3.6 Influence du profil de température sur la stabilité

#### 4.3.6.1 Stratégie et données de l'étude

Maintenant que nous avons montré la stabilité du procédé dans certaines conditions de fabrication, nous allons nous intéresser à l'influence des différents paramètres du procédé

sur la stabilité. Pour cela, nous allons faire varier le taux d'étirage, le profil de température et la tension de fibrage. Ces paramètres étant liés, la variation de l'un entraîne la variation de l'autre.

Nous allons donc faire la même étude de stabilité avec des profils de température différents. Ces profils sont donnés figure (4.18), où  $V_4$  correspond à l'étude détaillée dans les paragraphes ci-dessus.

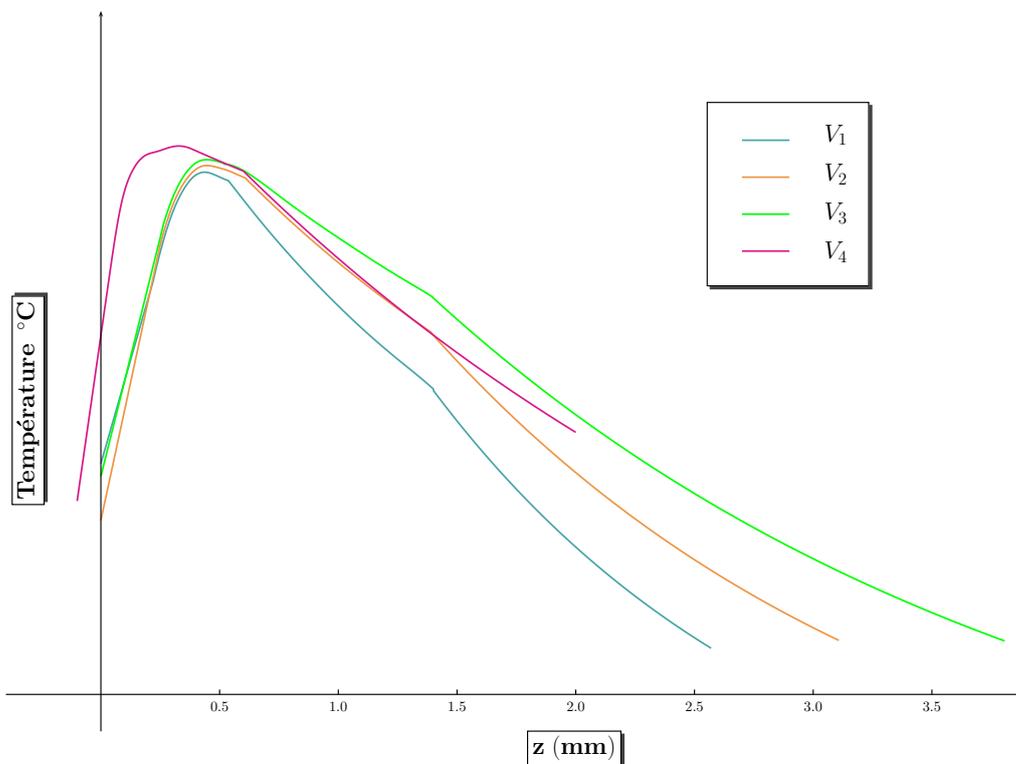


FIG. 4.18 – Profils de température pour différentes vitesses de fibrage :  $V_1 < V_2 < V_3 < V_4$

#### 4.3.6.2 Résultats

Grâce au programme mis en place, nous avons obtenu des valeurs propres pour chaque profil de température. Les dix premières valeurs propres pour chaque vitesse de fibrage sont portées dans le tableau (4.1).

	$V_1$	$V_2$	$V_3$
$\lambda_1$	$-1.10 \cdot 10^{-3} + i 1.50 \cdot 10^{-3}$	$-1.94 \cdot 10^{-3} + i 1.77 \cdot 10^{-3}$	$-2.45 \cdot 10^{-3} + i 2.88 \cdot 10^{-3}$
$\lambda_2$	$-1.16 \cdot 10^{-3} + i 9.84 \cdot 10^{-4}$	$-2.11 \cdot 10^{-3} + i 2.43 \cdot 10^{-3}$	$-2.50 \cdot 10^{-3} + i 7.12 \cdot 10^{-4}$
$\lambda_3$	$-1.84 \cdot 10^{-3} + i 7.71 \cdot 10^{-4}$	$-2.27 \cdot 10^{-3} + i 3.03 \cdot 10^{-4}$	$-2.82 \cdot 10^{-3} + i 2.04 \cdot 10^{-3}$
$\lambda_4$	$-1.93 \cdot 10^{-3} + i 1.15 \cdot 10^{-3}$	$-2.65 \cdot 10^{-3} + i 1.54 \cdot 10^{-3}$	$-3.68 \cdot 10^{-3} + i 1.64 \cdot 10^{-3}$
$\lambda_5$	$-2.07 \cdot 10^{-3} + i 1.53 \cdot 10^{-3}$	$-2.69 \cdot 10^{-3} + i 3.52 \cdot 10^{-3}$	$-3.73 \cdot 10^{-3} + i 4.05 \cdot 10^{-3}$
$\lambda_6$	$-2.10 \cdot 10^{-3} + i 3017 \cdot 10^{-3}$	$-2.87 \cdot 10^{-3} + i 2.06 \cdot 10^{-3}$	$-3.79 \cdot 10^{-3} + i 1.20 \cdot 10^{-3}$
$\lambda_7$	$-2.24 \cdot 10^{-3} + i 1.91 \cdot 10^{-3}$	$-3.15 \cdot 10^{-3} + i 2.57 \cdot 10^{-3}$	$-3.82 \cdot 10^{-3} + i 5.17 \cdot 10^{-3}$
$\lambda_8$	$-2.52 \cdot 10^{-3} + i 2.28 \cdot 10^{-3}$	$-3.32 \cdot 10^{-3} + i 4.14 \cdot 10^{-3}$	$-4.04 \cdot 10^{-3} + i 2.91 \cdot 10^{-3}$
$\lambda_9$	$-2.75 \cdot 10^{-3} + i 2.67 \cdot 10^{-3}$	$-3.52 \cdot 10^{-3} + i 3.07 \cdot 10^{-3}$	$-4.48 \cdot 10^{-3} + i 3.63 \cdot 10^{-3}$
$\lambda_{10}$	$-? \cdot 10^{-3} + i ? \cdot 10^{-3}$	$-3.98 \cdot 10^{-3} + i 3.56 \cdot 10^{-3}$	$-4.70 \cdot 10^{-3} + i 5.52 \cdot 10^{-3}$

TAB. 4.1 – Valeurs Propres pour différentes vitesses de fibrage

### 4.3.7 Conclusion sur la stabilité

Dans les conditions étudiées dans cette partie, la valeur propre de plus grande partie réelle obtenue est de partie réelle **négative**. Nous pouvons donc en conclure que dans ces conditions, le procédé de fibrage est **STABLE**.

Le premier point sur lequel nous pouvons conclure c'est sur la stabilité du procédé : quelle que soit la vitesse de fibrage utilisée, il est stable puisque la partie réelle de la plus grande valeur propre est toujours négative. Sur la figure (4.19) nous voyons l'évolution des parties réelle et imaginaire de la première valeur propre pour chaque vitesse. Nous pouvons donc en déduire que plus la vitesse est élevée, plus le procédé est stable (la partie réelle de cette valeur propre augmente avec la vitesse en valeur absolue).

Nous nous sommes également intéressés à l'amortissement. Si le système est perturbé, cette perturbation s'amortit en  $e^{\Re(\lambda)t}$ . Nous pouvons donc calculer en combien de temps une perturbation atteint 1% de sa valeur initiale. Il est également pertinent de calculer la longueur de fibre nécessaire à l'élimination de la perturbation ainsi que la longueur d'onde "  $\lambda$  " =  $v \frac{2\pi}{\omega}$ . Les résultats sont donnés dans le tableau (4.2).

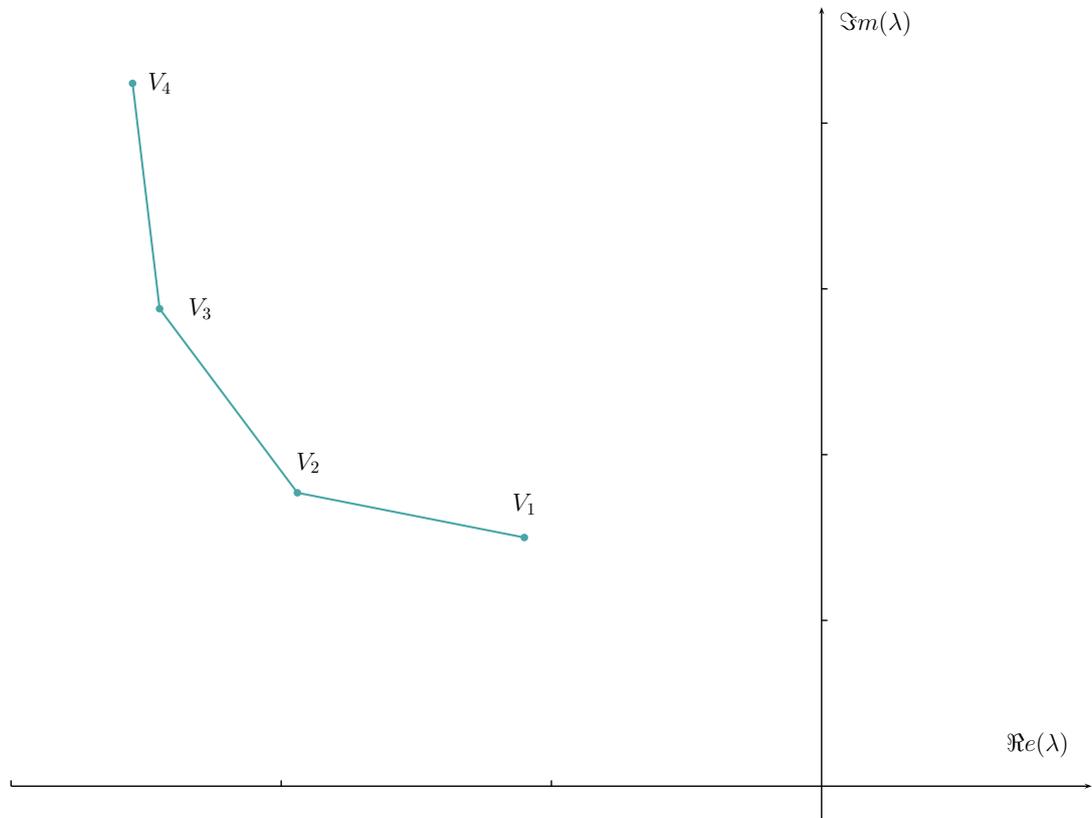


FIG. 4.19 – Evolution de la valeur propre de plus grande partie réelle en fonction de la vitesse de fibrage

Vitesse	1 <sup>ière</sup> Valeur Propre	Longueur d'Onde	Amortissement	Longueur d'élimination d'un défaut
$V_1$	$(-1.10 \cdot 10^{-3}; 1.50 \cdot 10^{-3})$	27.9 km	4186.5 s	$L = 27.88 \text{ km}$
$V_2$	$(-1.94 \cdot 10^{-3}; 1.77 \cdot 10^{-3})$	35.5 km	2373.8 s	$L = 23.74 \text{ km}$
$V_3$	$(-2.45 \cdot 10^{-3}; 2.88 \cdot 10^{-3})$	29.0 km	1879.7 s	$L = 25.0 \text{ km}$
$V_4$	$(-2.55 \cdot 10^{-3}; 4.23 \cdot 10^{-3})$	23.4 km	1805.9 s	$L = 28.0 \text{ km}$

TAB. 4.2 – Résultats

Les résultats obtenus ici ont pu être vérifiés expérimentalement par la société Alcatel, ce qui permet de valider notre modèle. En effet, Alcatel a procédé à des mesures par procédé OTDR : il s'agit de mesurer la lumière réfléchiée en fonction du temps après application d'un pulse laser. L'intensité de la lumière réfléchiée dépend du diamètre du cylindre dans lequel se propage le mode considéré. Dans notre cas, travaillant sur des fibres monomode, la lumière se propage dans le cœur. Nous pouvons donc considérer que les fluctuations de l'intensité du signal OTDR peuvent être reliées aux variations de la dimension du cœur de la fibre. Ces mesures ont permis d'observer des fluctuations de diamètre sur des longueurs de l'ordre de la vingtaine de kilomètres.

Ces calculs nous ont permis de déterminer pour chaque vitesse la tension de fibrage imposée en bas du procédé. Cette tension est d'autant plus forte que la vitesse est grande.

Le temps d'amortissement d'une petite perturbation semble assez long (de l'ordre de la demi-heure, voire de l'heure selon la vitesse) mais en fait il est raisonnable compte tenu du temps de séjour du procédé : un élément de matière qui se trouve en haut de la tour de fibrage à l'instant initial met environ une heure pour arriver en bas avec une vitesse de fibrage maximale ( $V_4$ ).