

Filtre de Kalman étendu grand gain adaptatif application à une station d'épuration biologique

3.1. Introduction	53
3.2. Épuration des eaux usées	53
3.2.1. Les étapes principales du traitement des eaux usées.....	54
a. <i>Le pré-traitement</i>	54
b. <i>Le traitement primaire</i>	54
c. <i>Le traitement secondaire</i>	54
d. <i>Le traitement tertiaire</i>	55
3.2.2. Le traitement biologique par boues activées.....	57
a. <i>Dégradation des polluants à l'échelle microscopique</i>	57
b. <i>Fonctionnement à l'échelle réelle</i>	60
3.3. Modélisation des stations d'épuration biologique	61
3.3.1. Historique de modélisation des stations d'épuration à boues activées.....	61
3.3.2. Modèle de référence ASM1.....	62
3.3.3. Modèle réduit.....	69
a. <i>Approche de simplification du modèle ASM1 : revue bibliographique</i>	69
b. <i>Modèle réduit Benoit Chachuat</i>	70
3.4. Implémentation et comparaison entre le FKE, l'OKE grand gain et le filtre de Kalman étendu grand gain adaptatif	74
3.4.1. Le filtre de Kalman étendu grand gain adaptatif.....	75
3.4.2. Système en considération Multi-entrées Multi-sorties.....	78
3.4.3. Simulations.....	78
a. <i>Le filtre de Kalman étendu</i>	82
b. <i>OKE grand gain</i>	84
c. <i>Filtre de Kalman étendu adaptatif</i>	86
d. <i>Étude comparative entre les trois observateurs</i>	91
3.5. Conclusion	95

3.1. Introduction

Nous avons vu, au chapitre 2, que le filtre de Kalman étendu a été largement utilisé dans la littérature. Cela est dû à ses bonnes propriétés locales (i.e. lorsque le système non-linéaire est bien approché par le système linéarisé), ainsi que sa capacité à faire face aux bruits. Cependant, le FKE ne présente pas la propriété globale, puisque si l'estimation à priori est loin de la valeur actuelle de l'état la linéarisation autour de la valeur estimée n'a pas de sens. Le filtre de Kalman étendu, sous certaines conditions d'observabilité uniforme (i.e. mise sous la forme canonique d'observabilité), acquiert des propriétés de convergence exponentielle. Mais l'observateur de Kalman étendu grand gain est sensible aux bruits.

Motivé par les propriétés antagonistes de ces deux observateurs, Busvelle et Gauthier ont présenté une première version [Busvelle et Gauthier, 2002]. Bien que l'observateur soit efficace, sa construction est dépendante du temps. Afin d'améliorer les performances de ce dernier, un filtre de Kalman étendu grand gain indépendant du temps a été développé par [Boizot et al., 2007 (a) ; 2007 (b) ; 2010]. L'observateur proposé possède les bonnes caractéristiques d'un FKE et d'un OKE grand gain, grâce à une adaptation du gain en terme d'innovation. Ainsi le gain θ commute entre deux valeurs:

- Lorsque l'état estimé est éloigné de l'état réel, θ est suffisamment grand de sorte que l'observateur converge quelque soit l'erreur d'estimation initiale.
- Lorsque l'erreur d'estimation est faible, θ diminue. Une fois cette condition satisfaite, on se contente de l'application d'un FKE.

Ce chapitre sera dédié à l'application de cet observateur à un système non linéaire MIMO d'une station d'épuration biologique à boues activées. Afin de mettre en évidence la pertinence et la robustesse de l'observateur adaptatif, une étude comparative entre les trois observateurs ; FKE, OKE grand gain et filtre de Kalman étendu grand gain adaptatif en présence d'une large variation des concentrations entrantes et en présence de mesures bruitées sera menée.

Avant d'aborder le problème d'implémentation de cet observateur adaptatif, nous tenterons, dans la première partie de ce chapitre, de présenter quelques concepts fondamentaux liés aux problèmes de traitement biologique des eaux usées, afin de permettre à ceux qui ne sont pas forcément spécialiste, de maîtriser les notions de base liées à ce thème.

3.2. Épuration des eaux usées

Les concepts présentés dans la l'annexe C permettent de bien cerner le problème que pose la pollution de l'eau. Ainsi pour assurer la pérennité des ressources en eau douce, la protection et la gestion des milieux aquatiques est devenue impérative.

Dans ce but, des textes réglementaires légiférant sur le traitement des eaux usées firent leur première apparition au cours de la seconde moitié de XX^e siècle [Boutin, 1985]. Ces lois ont pour objectif une épuration satisfaisante, en mettant l'accent sur la réduction des rejets des composés organiques biodégradables, d'ammoniaque...

3.2.1. Les étapes principales du traitement des eaux usées

Nous venons de voir dans l'annexe C que l'eau est le mélange des divers agents polluants. Etant donné cette structure de l'eau, plusieurs technologies sont mises en place, chacune spécifique aux caractéristiques de l'agent polluant à traiter.

On distingue principalement dans la station d'épuration, l'enchaînement de quatre étapes de traitement (figure 3.1) :

a. Le pré-traitement

Le pré-traitement est une étape préliminaire à caractère mécanique. Elle a pour but l'extraction des matières flottantes grossières. Il comprend :

- **Dégrillage**: il permet l'élimination des déchets grossiers en suspension en utilisant des grilles de plus en plus fines.
- **Le dessablage** : il a pour fonction de retenir les sables entraînés avec l'eau afin de protéger les pompes contre l'abrasion.
- **Le déshuilage** : le but de cette étape est de retenir les huiles ou les graisses rejetés par certaines entreprises ou industries raccordées au réseau d'assainissement. Ces grains sont séparés de la surface de l'eau par recyclage, suite à une injection d'air.

b. Le traitement primaire

Durant cette phase, plus de la moitié de la pollution est éliminée. Les matières solides extraites sont sous forme de boues dites « boues primaires ». Le traitement fait appel à trois procédés physiques :

- **La décantation** : l'eau s'écoule à faible vitesse dans un grand bassin, appelé décanteur, au fond duquel se séparent les matières en suspension ou colloïdales du liquide par sédimentation.
- **La flottation** : permet d'éliminer les matières dont la masse volumique réelle ou apparente est inférieure à celle de l'eau.
- **La filtration** : c'est le passage d'un mélange liquide-solide à travers un milieu poreux (filtre) qui retient les solides et laisse passer les liquides.

c. Le traitement secondaire

Dans cette étape, les agents épurateurs sont les micro-organismes. Cette population bactérienne assimile les composés solubles d'origine organique. Les procédés mis en œuvre se distinguent selon le type de culture bactérienne [Benefield et Randall, 1980; Horan, 1990; Edeline, 1993] : culture fixe ou culture libre.

- **Culture fixe** : les micro-organismes sont fixés sur des supports. Ces méthodes permettent un traitement intensif de l'eau puisqu'il y a une concentration en biomasse plus importante dans une taille relativement faible. Cependant, ils présentent des risques de colmatage ou d'émanation d'odeurs. Nous pouvons citer les méthodes les plus courantes (tableau 3.1) [Satin et Belmi, 1999, Degremont, 2005].

- **Culture libre** : les micro-organismes sont maintenus en suspension dans le mélange à épurer. Comparés aux procédés à culture fixe, ces dispositifs ont l'avantage d'une meilleure maîtrise des facteurs d'épuration.

d. Le traitement tertiaire

C'est un raffinage du traitement secondaire. Il permet d'éliminer les métaux, les composés organiques non-biodégradables ou les odeurs apparues durant le traitement secondaire afin de réutiliser les eaux épurées à des fins agricoles ou industrielles. Ils sont éliminés par des actions spécifiques de désinfection, neutralisation, stabilisation...

Leur rendement est en général très satisfaisant puisque ces procédés permettent d'abattre de 75 à 95% la DCO restante après le traitement secondaire, jusqu'à 97% des composés aromatiques et 98% de la couleur.

Nom de méthode	Type de culture bactérienne	Principe	Avantages	Inconvénients
Lit bactérien	Culture fixe	<ul style="list-style-type: none"> - Les bactéries sont fixées sur un support constitué de roche poreuse. - L'influent est distribué par aspersion en surface et l'oxydation est apportée par ventilation naturelle de bas en haut 	<ul style="list-style-type: none"> - Cout de fonctionnement faible. - Fonctionnement stable 	Risque de colmatage
Lagunage	Culture libre	<ul style="list-style-type: none"> - Consiste à faire séjourner les eaux usées dans plusieurs bassins successifs, de grande taille, peu profond (moins de 1,5 m). - L'oxydation provient directement des échanges d'air et de la photosynthèse. 	<ul style="list-style-type: none"> - Economique - facile de mettre en œuvre - rendement élevé 	Utilisé seulement lorsque de grands espaces sont disponibles
Disques biologiques	Culture fixe	Les micro-organismes sont fixés sur un disque à demi immergé et tournent autour d'un axe horizontal. La biomasse est ainsi alternativement aérée par l'air ambiant est mouillée par les eaux résiduaires.	<ul style="list-style-type: none"> - Cout de fonctionnement faible. - efficace 	<ul style="list-style-type: none"> - Sensible aux conditions climatiques - Elle peut entraîner d'émanation d'odeur
Les boues activées	Culture libre	Les micro-organismes flottent librement dans une solution maintenue en agitation et alimentée en oxygène.	Excellente performance de dépollution (rendement supérieur à 95%) par rapport à d'autres procédés existants	<ul style="list-style-type: none"> - cout d'investissement et parfois d'exploitation relativement faible - procédés difficile à maîtriser notamment pour le traitement d'azote et phosphore ou en cas de variation important des flux à traiter.

Tableau 3.1. Méthodes les plus courantes de traitement secondaire.

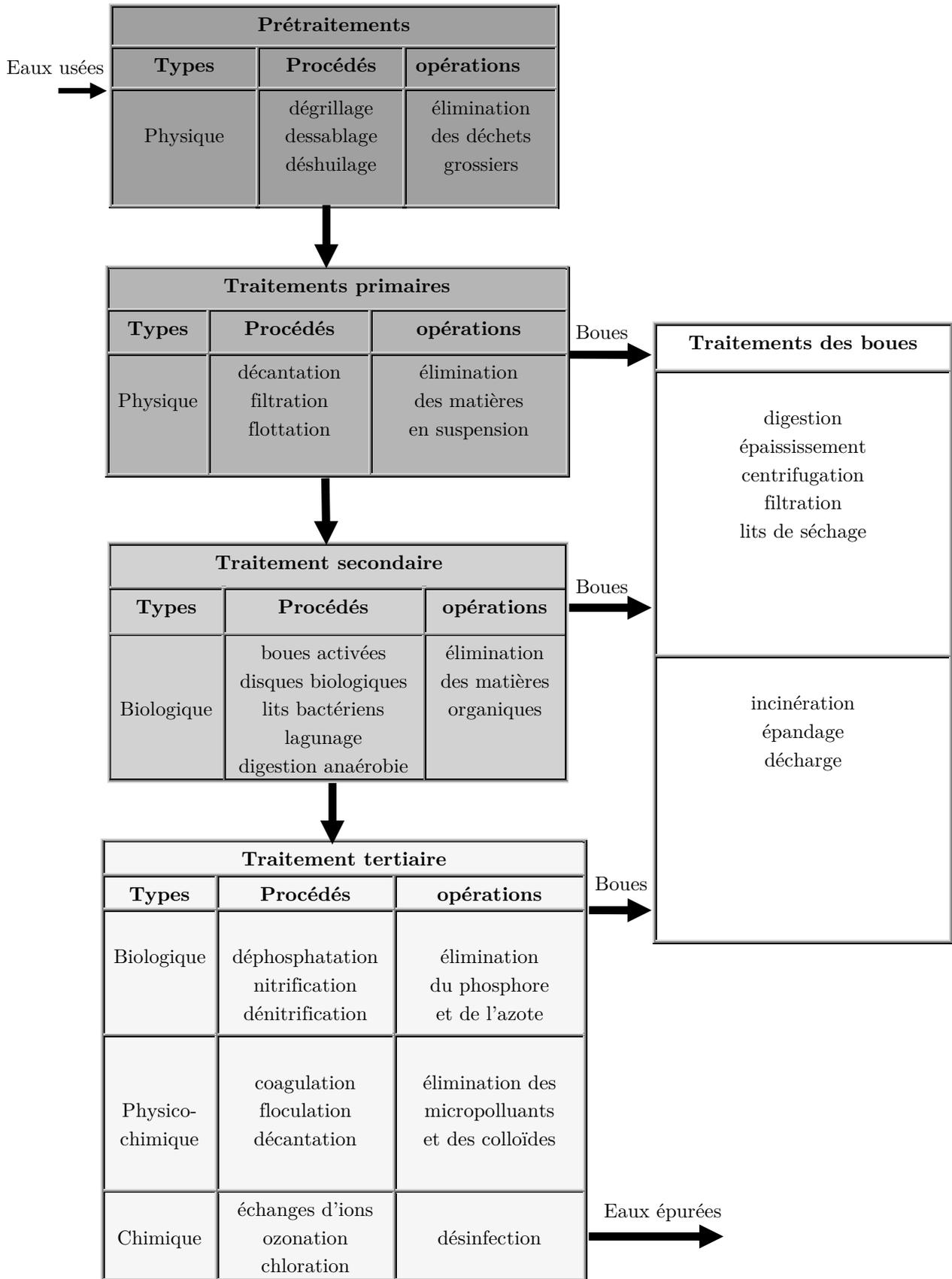


Figure 3.1. Etapes de traitement des eaux usées [Hadj-Sadok, 1999]

3.2.2. Traitement biologique par boues activées

Les procédés de traitement biologique par boues activées sont des activités biologiques de transformation des polluants biodégradables par l'intermédiaire de micro-organismes. Les boues activées représentent le milieu idéal pour une activité maximale des bactéries : un apport en oxygène suffisant, une agitation permanente et un effluent riche en nutriment.

Une description à l'échelle microscopique du processus d'épuration de l'eau, ainsi que la présentation de fonctionnement de la chaîne de traitement à l'échelle réelle, font l'objet de cette section.

a. Dégradation des polluants à l'échelle microscopique

a.1. Substrat et micro-organismes épurateurs

- **Le substrat** : les substrats ou les matières nourrissantes des micro-organismes peuvent être présents dans l'eau épurée soit sous forme directement assimilable par les bactéries, soit elles subissent une hydrolyse par exoenzymes.
- **Micro-organismes épurateurs**: ces micro-organismes sont à la base de l'épuration biologique des eaux usées. Ce sont essentiellement les bactéries, des protozoaires, des levures et moisissures. Grâce à leurs structures simples et leur multiplication rapide, certaines de ces populations microbiologiques sont capables de dégrader les matières polluantes présentes dans les eaux usées:
 - *Les bactéries* : ce sont des micro-organismes unicellulaires. Elles se multiplient et se croisent en général par fission binaire. Leur concentration dans les procédés biologiques est la plus élevée des autres populations. Elle peut atteindre jusqu'à 10^6 bactéries/ml.
 - *Les protozoaires* : ils présentent des structures plus complexes que celle des bactéries. Ils sont classifiés selon leur mode de mouvement en trois catégories : nageurs, rampants ou sessiles [Edeline, 1993]. Grâce à leurs interactions avec les bactéries épuratrices (compétition et prédation), ils peuvent jouer un rôle important au cours du processus d'épuration de l'eau.
 - *Les algues* : ces micro-organismes sont multicellulaires ou photosynthétiques unicellulaires. En général les algues sont indésirables dans les ressources d'eau car elles affectent leur goût et leur odeur. Elles jouent un rôle bénéfique, seulement pour les lits bactériens ou les bassins de lagunage.

La population bactérienne consomment les polluants pour :

- La synthèse de cytoplasme (dont le composé principal est le carbone) à partir du carbone.
- La croissance par exemple synthèse de protéine en consommant de l'azote.
- La croissance cellulaire et les réactions biosynthétiques en consommant le phosphore par exemple.

a.2. Les processus métaboliques

Les mécanismes fondamentaux impliqués dans le traitement des eaux usées se basent sur la présence des micro-organismes, essentiellement les bactéries, qui dégradent les matières minérales et organiques pour leur métabolisme ou développement (figure 3.2). On distingue principalement deux mécanismes métaboliques [Moser, 1988] :

- **Catabolisme** : c'est la phase au cours de laquelle les substances nutritives grosses ou sous forme colloïdales sont dégradées en pyruvate (composés plus petits et plus simples). Elle représente l'ensemble des réactions de dégradation enzymatique et d'oxydation. De l'énergie est libérée au cours de cette phase.
- **L'anabolisme** : contrairement au catabolisme, l'anabolisme est une activité endothermique qui utilise l'énergie libérée par le processus de catabolisme. Il correspond à l'ensemble des réactions d'oxydation et de dégradation enzymatique.

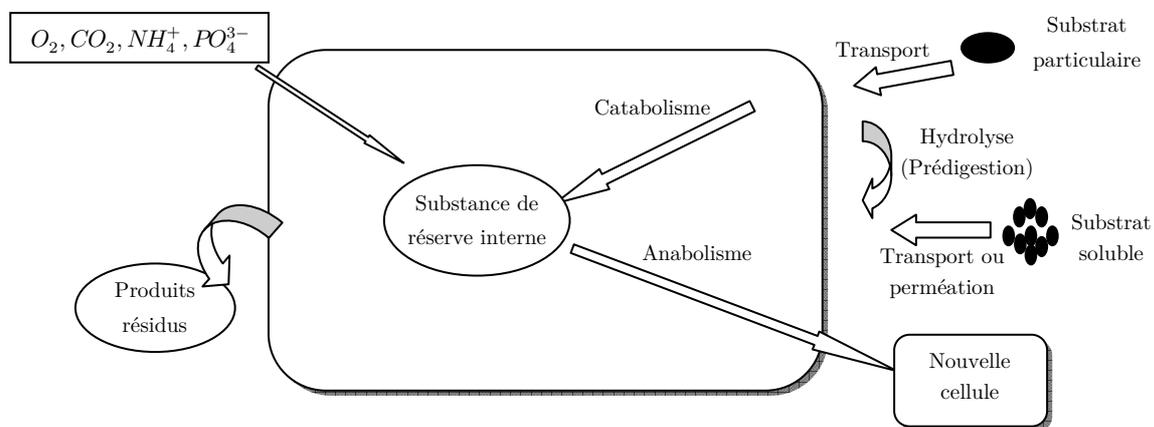
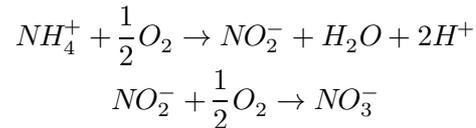


Figure 3.2. Métabolisme d'une bactérie.

L'anabolisme et le catabolisme sont les grandes étapes de dégradation des matières polluantes par les populations bactériennes. Ces deux étapes sont constituées de plusieurs activités élémentaires :

- **L'hydrolyse** : En raison de leurs tailles importantes, les particules et macromolécules subissent une série de réactions enzymatiques extracellulaires, afin d'être converties en molécules plus simple qui peuvent diffuser à travers la membrane cellulaire.
- **L'oxydation** : c'est la perte d'un ou plusieurs électrons suivie d'une production d'énergie. Cette procédure peut s'effectuer sous des conditions d'aérobiose, d'anaérobiose ou d'anoxie. Une partie des matières absorbées par les micro-organismes est utilisée pour fournir l'énergie nécessaire afin d'accomplir leur fonction biologique.
- **La digestion** : c'est un mécanisme, provoqué par les bactéries anaérobies capables de décomposer la matière organique en acides et alcools et de donner du méthane (CH_4) et du gaz carbonique (CO_2).
- **La floculation** : c'est un mécanisme permettant aux micro-organismes d'améliorer leurs caractéristiques d'absorption des aliments sur leur membrane cellulaire, en s'agglutinant sous forme de petits amas désignés bioflocs.

- **L'absorption** : les micro-organismes absorbent les matières particulaires qui ne peuvent pas être directement assimilés par les bactéries et les stockent à leur surface pour subir un processus de conversion en matières biodégradables.
- **La mortalité** : il existe plusieurs phénomènes de mortalité : la respiration endogène, la prédation (protozoaires) et le processus de lyse (dissolution). Une partie des produits de mortalité est biodégradable, l'autre fraction représente les résidus endogènes inertes.
- **La nitrification** : c'est la transformation de l'azote organique en NO_3^- par des organismes dits nitrifiant. Ce processus peut être décrit principalement par l'ensemble de ces deux équations :



D'après ces deux équations, l'ammoniac n'est pas directement oxydé en nitrate. Il doit être premièrement transformé en nitrite et après en nitrate.

- **La dénitrification** : c'est la deuxième étape, qui consiste à une conversion de nitrate par les hétérotrophes facultatifs sous les conditions d'anoxie. Ce processus peut être résumé par l'équation chimique suivante :



Avec " CH_2O " la formule brute de plusieurs isomères. Ainsi, la figure 3.3 décrit le processus de dégradation biologique de l'azote.

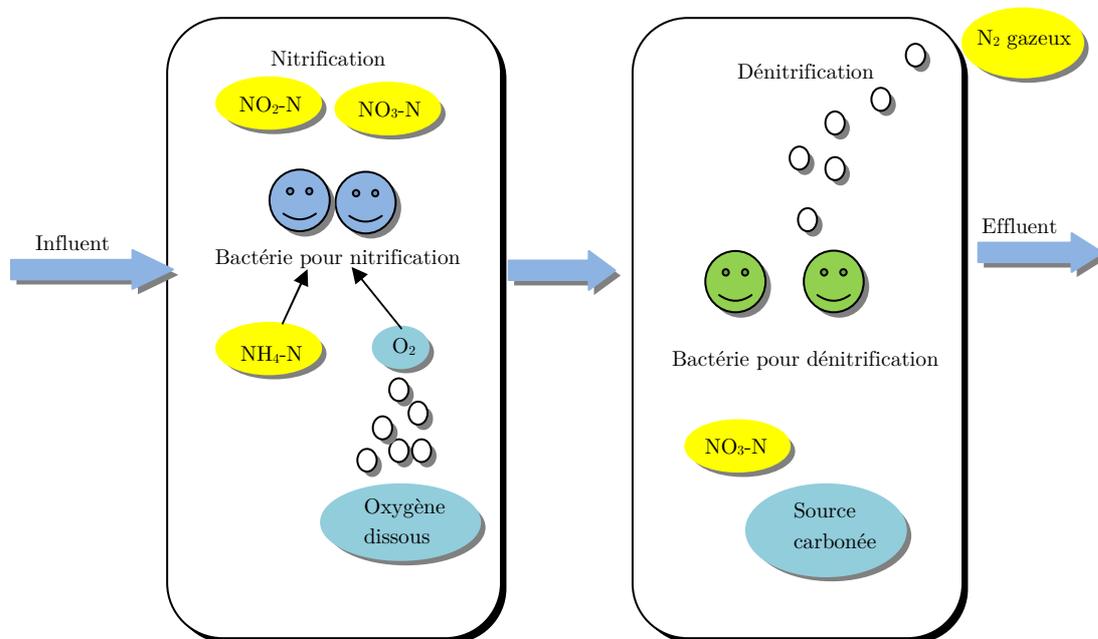


Figure 3.3. Etapes de processus de dégradation biologique d'azote.

b. Fonctionnement à l'échelle réelle

Une brève description de fonctionnement de la station d'épuration biologique à l'échelle microscopique a été présentée dans la section précédente. La station d'épuration biologique comprend principalement deux compartiments : le bioréacteur (bassin d'aération) et le décanteur (bassin de sédimentation) (figure 3.4).

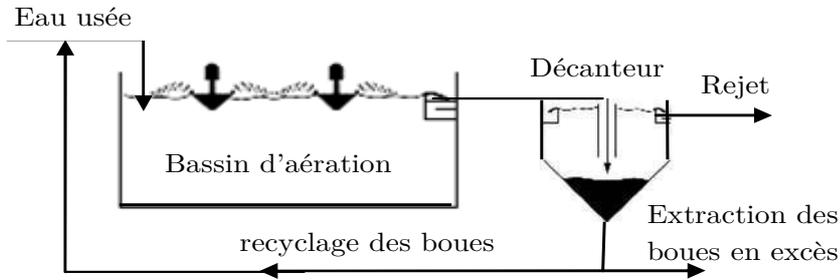


Figure 3.4. Procédé de traitement à boues activées en bassin unique [Chachuat et al, 2003]

- **Le bassin d'aération** : c'est un réacteur biologique où les déchets polluants subissent des réactions de biodégradations par l'intermédiaire des micro-organismes en suspension. Un apport continu en eau usée, en oxygène et une agitation constituent l'ensemble des facteurs favorables à un abattement efficace des substances biodégradables. Le bassin d'aération, selon le cas, est constitué d'un seul bassin permettant la réalisation des différentes réactions biologiques en même temps ou de plusieurs bassins en série privilégiant chacun le traitement d'une pollution spécifique (nitrification, dénitrification, organique, phosphatation).
- **Le décanteur** : il permet de recycler les boues vers le bassin d'aération d'une part et de récupérer l'effluent traité d'autre part. Dans les décanteurs, la phase liquide et solide est séparée par sédimentation qui se repose avec la force de gravité et la différence de densités entre les particules et le liquide.

Les étapes de traitement des eaux usées sont :

1. L'assimilation et la transformation de la pollution par les micro-organismes s'effectuent dans le bassin d'aération,
2. La formation des floccs décantables,
3. Le mélange, appelé « liqueur mixte » composée d'une phase liquide et d'une autre solide (micro-organisme, débris organiques, matières minérales), est re-circulé vers le décanteur,
4. Une séparation entre le liquide épuré et la boue par gravitation dans le décanteur,
5. Une partie de boues est mélangée avec l'eau incidente afin d'être recyclée vers le bassin d'aération. La partie restante est éliminée du système.

3.3. Modélisation des stations d'épurations biologiques

Cette section concerne l'étude de la modélisation des procédés biologiques à boues activées. Un résumé sur l'évolution historique de ce processus est présenté en premier lieu. Par la suite, les principaux travaux de modélisation effectués pour la représentation mathématique du bassin d'aération, ainsi que le décanteur, sont donnés. Nous mettrons, en évidence les équations du modèle ASM1 qui rassemblent le couple bioréacteur et décanteur, ainsi que son modèle réduit.

Les premières études entreprises depuis 1885 en Europe et 1890 aux États-Unis se sont soldées pour le développement des systèmes à boues activées. Les premières stations de traitement des eaux usées étaient une série de réacteurs aérés à remplissage et vidange. En 1914, [Arden et Lockett [Arden et Lockett, 1914], ont amélioré ce processus en récupérant les solides biologiques floculés à chaque vidange pour les réutiliser dans le bassin avec le nouvel apport d'eau, afin d'avoir un temps de biodégradation plus court.

En 1917, les premières stations d'épurations constituées d'un réacteur continu associé à un clarificateur, sont apparues en Angleterre.

Suite à l'expansion considérable de la population, ainsi que le développement rapide de l'industrie, les stations d'épurations biologiques étaient exposées à un problème majeur du gonflement de boues (bulking) [Chen et Beck, 1993].

Vers 1930, des recherches théoriques ont identifié certaines conditions environnementales susceptibles de causer le gonflement des boues : augmentation des charges organiques, concentration faible en oxygène et niveau élevé des hydrocarbures [Edeline, 1993 ; Chen, 1993 ; Jeppson, 1996]. Ainsi, la présence de l'oxygène dissous est devenue le principal sujet de recherche pour le développement d'aération étagée [Kessler et Nicholas, 1935], l'aération prolongée, l'aération des boues contact-stabilisation [Ullrich et Smith, 1951]...

Depuis les années 1980, et suite à l'application des législations de plus en plus sévères, la dénitrification, la nitrification et la déphosphatation biologique se sont intégrées au traitement par boues activées.

3.3.1. Historique de modélisation des stations d'épuration à boues activées

La modélisation est une partie inhérente à la conception d'une station d'épuration. Un grand nombre de modèles a été élaboré depuis les années cinquante. Le bassin d'aération a suscité plus d'intérêt que le décanteur. Les premiers modèles développés se contentaient de représenter les dynamiques de l'évolution des concentrations du substrat polluant et de la biomasse épuratrice, sous les conditions d'équilibre [Mckinney, 1962].

Par la suite, des efforts consacrés à la modélisation des dynamiques de croissance en biotechnologie tel que l'expression de la loi de Monod ont conduit à des modèles plus précis [Bastin et Dochain, 1990], [Monod, 1942].

A la fin des années soixante, les recherches ont montré que le caractère variable de certains aspects opérationnels du procédé de traitement avait une influence considérable sur le comportement de l'effluent à la sortie de l'unité d'épuration [Smith, 1969], [Busby et Andrews, 1975], [Andrews, 1947].

La multiplication des recherches dans ce domaine a donné lieu à des variétés de modèles : modèle structuré en âge [Ranta et al., 1977], fonction de transfert [Berthouex et al., 1978], modèle écologique et relation de régression entrée-sortie [Lacroix et Bloodgood, 1972]...

Bien que le décanteur n'a pas suscité autant d'intérêt que le bassin d'aération, de nombreuses tentatives ont été effectuées depuis le début de ce siècle dans le but de décrire les dynamiques de sédimentation. Le développement de la théorie de sédimentation a suivi deux voies : la méthode des flux de particules solides et les approches de sédimentation continue. Une étude bibliographique détaillée sur l'évolution des modèles de décanteurs peut se trouver dans le rapport de recherche [Lumiley, 1985].

En 1983, un groupe d'experts internationaux au sein de l'IAWQ (International Association on Water Quality) a élaboré un modèle général considéré comme la référence dans la modélisation des boues activées. Ce modèle est largement abordé dans la littérature [Chen, 1993 ; Jeppson, 1996 ; Julien, 1997], puisqu'il est à la fois simple et apte à reproduire de façon réaliste les processus de dégradation biologique dans les bassins à boues activées. Ce modèle décrit les mécanismes biologiques de dégradation des matières organiques, de nitrification et de dénitrification.

En 1995, le même équipe a établis le modèle ASM2 (Henze *et al.*, 1995), basé sur la notification de la structuration des variables de modèle ASM1. Ces travaux ont ouvert la voie pour de nouvelles recherches aboutissant à des modèles trop complexes en vue de la simulation tels que les modèles ASM2d (Henze et al., 2000) et ASM3 (Gujer *et al.*, 1999).

3.3.2. Modèle de référence ASM1

Proposé il y a près de 28 ans, le modèle ASM1 de l'IAWQ (Henze et al, 1987) a fait l'objet de plusieurs applications tant académique que pratique. Ce modèle décrit les mécanismes biologiques de dégradation des matières organiques, de nitrification et de dénitrification dans les stations d'épuration à boues activées. Il comporte 13 variables d'états. Deux simplifications classiques sont apportées à ce modèle :

- i) L'alcalinité est omise S_{ALK} puisqu'elle n'intervient pas dans les dynamiques des autres variables.
- ii) Les composés particuliers inertes X_I sont associés avec ceux résultant du décès de la biomasse X_P .

Ainsi le modèle ASM1 simplifié comprend 11 variables d'état (Tableau 3.2).

↓ Composé	Symbole	Unité
1. Matière organique soluble inerte	S_I	$g\ DCO\ m^{-3}$
2. Substrat facilement biodégradable	S_S	$g\ DCO\ m^{-3}$
3. Matière organique particulaire inerte	X_I	$g\ DCO\ m^{-3}$
4. Substrat lentement biodégradable	X_S	$g\ DCO\ m^{-3}$
5. Biomasse hétérotrophe active	$X_{B,H}$	$g\ DCO\ m^{-3}$
6. Biomasse autotrophe active	$X_{B,A}$	$g\ DCO\ m^{-3}$
7. Azote sous forme de nitrite et de nitrate	S_{NO}	$g\ N\ m^{-3}$
8. Azote sous forme d'ammoniaque	S_{NH}	$g\ N\ m^{-3}$
9. Azote organique soluble et biodégradable	S_{ND}	$g\ N\ m^{-3}$
10. Azote organique particulaire biodégradable	X_{ND}	$g\ N\ m^{-3}$
11. Oxygène dissous	S_O	$g\ O_2\ m^{-3}$

Tableau 3.2. Variables d'état du modèle de dégradation biologique.

Les variables d'états du modèle ASM1 sont liées par 8 processus de dégradation. Une brève description de ces processus de dégradation est résumée dans les points suivants :

- 1- ***Croissance aérobie des micro-organismes hétérotrophes*** : c'est la phase d'anabolisme où les micro-organismes hétérotrophes dégradent le substrat afin d'assurer la production de biomasse. L'épuisement du substrat et le manque d'oxygène dissous et d'ammoniaque sont les limites principales de ce processus.
- 2- ***Croissance anaérobie des micro-organismes hétérotrophes*** : Sous des conditions d'anoxie (absence d'oxygène), une partie des micro-organismes hétérotrophes entraînent une réduction des nitrates, en les utilisant comme accepteurs terminaux d'électrons avec comme substrat. Par dénitrification, ce processus conduit à la production d'azote gazeux et de biomasse hétérotrophe.
- 3- ***Croissance aérobie des micro-organismes autotrophes*** : l'oxydation de l'ammoniaque (nitrification) entraîne une production de biomasse autotrophe et une consommation de l'oxygène dissous.
- 4- ***Mortalité des micro-organismes hétérotrophes et autotrophes*** : selon l'hypothèse de mortalité-régénération [Dold et al., 1980], la mortalité des micro-organismes hétérotrophes et autotrophes se déroule de façon continue et avec un taux supposé invariant en condition d'aérobie et d'anoxie. Les cellules mortes sont transformées en particulaire non-biodégradable X_I et en substrat lentement biodégradable X_S .
- 5- ***Ammonification de l'azote organique soluble*** : la biomasse hétérotrophe active transforme l'azote organique biodégradable en ammonium, indépendamment des conditions d'aération du milieu.

- 6- **Hydrolyse de la matière organique** : comme nous l'avons précisé dans le paragraphe 3.3.2, ce processus consiste à la décomposition des substrats lentement biodégradables en substances polluantes facilement assimilés par la biomasse. Ce processus s'effectue en condition d'aérobiose comme en anoxie. La baisse de taux d'hydrolyse sous des conditions d'anoxie par rapport aux conditions d'aérobiose est exprimée par l'introduction d'un coefficient $\eta_{NO,h}$.
- 7- **Hydrolyse de l'azote organique** : la décomposition de l'azote organique particulaire en azote organique soluble à un certain taux défini par les réactions d'hydrolyse décrites précédemment.

Le tableau 3.3 suivant résume les cinétiques des processus de dégradation ρ_j , $j = 1 \dots 8$.

↓ Processus	Cinétique, ρ_j ($g \cdot m^{-3} \cdot s^{-1}$)
1. Croissance aérobie des hétérotrophes	$\mu_H \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left(\frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \right) \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) X_{B,H}$
2. Croissance anoxie des hétérotrophes	$\mu_H \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left(\frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \right) \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \eta_{NO,g} X_{B,H}$
3. Croissance aérobie des autotrophes	$\mu_A \left(\frac{S_{NH}}{K_{NH,A} + S_{NH}} \right) \left(\frac{S_O}{K_{O,A} + S_O} \right) X_{B,A}$
4. Mortalité des hétérotrophes	$b_H X_{B,H}$
5. Mortalité des autotrophes	$b_A X_{B,A}$
6. Ammonification de l'azote organique soluble	$k_a S_{ND} X_{B,H}$
7. Hydrolyse de la matière organique absorbée	$k_h \left(\frac{X_S/X_{B,H}}{K_X + (X_S/X_{B,H})} \right) \left[\left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) + \eta_{NO,h} \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right] X_{B,H}$
8. Hydrolyse de l'azote organique absorbé	$k_h \left(\frac{X_{ND}/X_{B,H}}{K_X + (X_S/X_{B,H})} \right) \left[\left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) + \eta_{NO,h} \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right] X_{B,H}$

Tableau 3.3. Cinétiques du modèle de dégradation

Dans un souci de clarté et dans la mesure du possible, les mêmes notations seront utilisées par la suite. En particulier :

- x désigne l'état du système
- Q est relatif aux différents débits

- Les exposants (ou indice selon le cas) in , rec , purg et dec sont utilisés pour désigner les grandeurs respectivement associées à l'influent, au recyclage des boues, à l'extraction et au clarificateur.

Les hypothèses adoptées pour la formulation du modèle de la station d'épuration biologique par boues activées sont les suivantes :

- i) Le réacteur est bien mélangé
- ii) La séparation entre les phases solides et liquides est parfaite et aucune réaction de dégradation n'a lieu au sein du décanteur
- iii) La somme des effluents sortants du décanteur est égale à la somme des influents entrants au décanteur.

Les équations différentielles du modèle sont données par:

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.1)$$

Où f prend les formes suivantes :

- Pour les composants solubles ($i = 1, 2, 7, 8, 9$)

$$f_i(x) = \frac{Q^{in}}{V} (x_i^{in} - x_i) + R_i(x) \quad (3.2)$$

- Pour les composants particulières ($i = 3, 4, 5, 6, 10$)

$$f_i(x) = \frac{1}{V} \left[Q^{in} (x_i^{in} - x_i) + Q^{rec} \frac{Q^{in} - Q^{purg}}{Q^{rec} + Q^{purg}} x_i \right] + R_i(x) \quad (3.3)$$

- Pour la concentration en oxygène dissous :

$$f_i(x) = \frac{1}{V} Q^{in} (x_{11}^{in} - x_{11}) + R_{11}(x) + u k_L a (S_O^{sat} - S_O) \quad (3.4)$$

Où $k_L a$ représente le coefficient de transfert d'oxygène dissous dans le milieu, S_O^{sat} est la concentration en oxygène dissous à saturation et u désigne la variable de commande relative au système d'aération. Toutefois, comme l'apport en oxygène est assuré par des aérateurs de surface de type tout-ou-rien, u ne peut prendre que deux valeurs discrètes, 0 ou 1. V est le volume réactionnel. R_i représente le taux de conversion de chaque composé et est donné par la relation:

$$R_i = \sum_{j=1}^8 \nu_{i,j} \rho_j, \quad i = 1 \dots 11 \quad (3.5)$$

Où ρ_j désigne la cinétique du $j^{ème}$ processus et $\nu_{i,j}$, la stœchiométrie du $i^{ème}$ composé pour le processus j . Les coefficients stœchiométriques $\nu_{i,j}$, qui lient les différentes variables d'états du modèle, sont consignés dans tableau (3.4).

Var. i →	1. S_I	2. S_S	3. X_I	4. X_S	5. $X_{B,H}$	6. $X_{B,A}$	7. S_{NO}	8. S_{NH}	9. S_{ND}	10. X_{ND}	11. S_O
j↓ Proc.	Les coefficients stœchiométriques $\nu_{i,j}$										
1.		$-\frac{1}{Y_H}$			1			$-i_{NBM}$			$-\frac{1-Y_H}{Y_H}$
2.		$-\frac{1}{Y_H}$			1		$-\frac{1-Y_H}{2.86Y_H}$	$-i_{NBM}$			
3.						1	$\frac{1}{Y_A}$	$-\frac{1}{Y_A}i_{NBM}$			$-4.57\frac{1}{Y_A}$
4.				1 $-f_{rXI}$	-1					i_{NBM} $-f_{rXI}i_{NXI}$	
5.				1 $-f_{rXI}$		-1				i_{NBM} $-f_{rXI}i_{NXI}$	
6.								1	-1		
7.		1		-1							
8.									1	-1	

Tableau 3.4. Stœchiométrie des réactions du modèle de dégradation

Le modèle cinétique résultant comporte 20 paramètres cinétiques et stœchiométriques, qui sont détaillés dans le tableau (3.5).

Les valeurs des concentrations entrantes $X_{DCO}^{in}, S_{NO}^{in}, S_{NH}^{in}$ et S_{ND}^{in} sont collectées à partir de fichiers des données élaborés par le groupe de travail COST 624 et utilisant le modèle ASM1 et le logiciel SIMBA.

Le BSM1 est un simulateur complet de traitement des eaux d'un effluent urbain par boues activées [Alex et al., 1999]. Ce simulateur a été conçu dans le but de fournir un outil de comparaison des différentes stratégies de commande. Comme indiqué dans la figure (3.5), il est composé d'un réacteur et d'un clarificateur. Le réacteur est scindé en cinq compartiments : deux bassins anoxiques et trois autres aérobiees qui sont parfaitement agités.

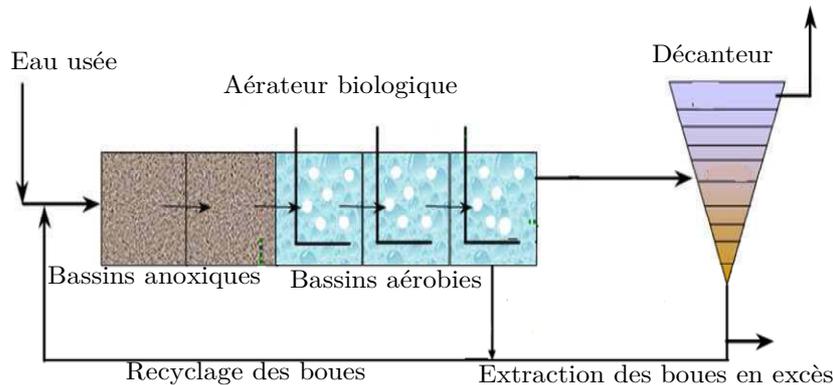
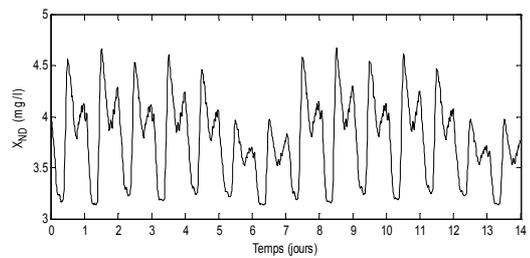
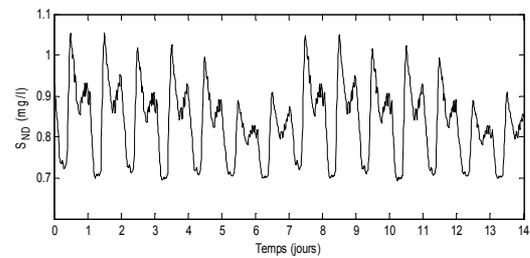
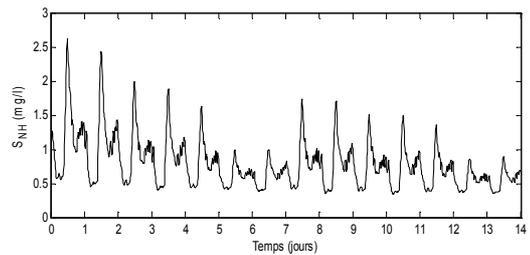
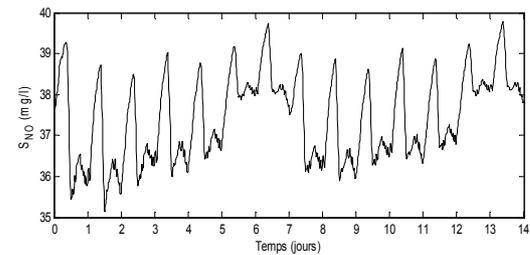
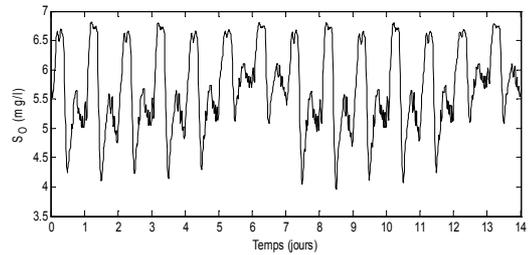
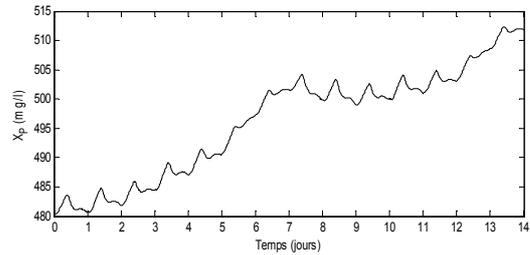
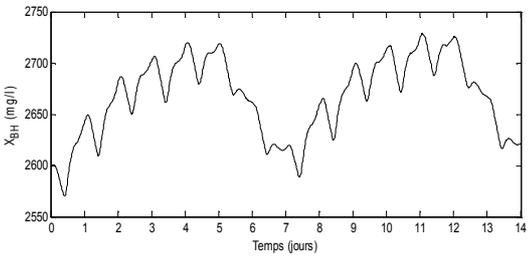
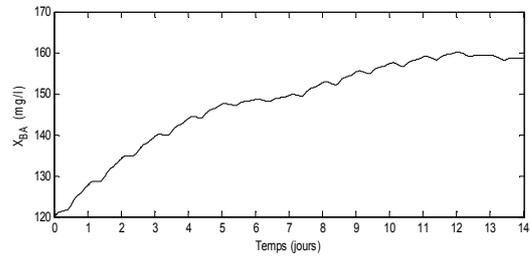
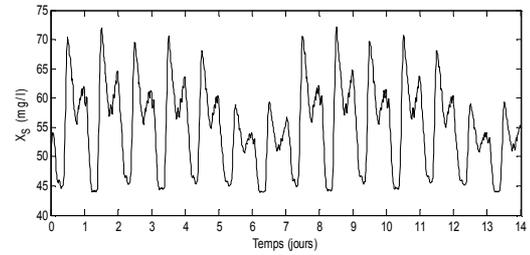
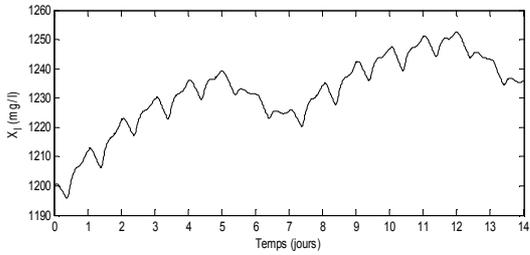
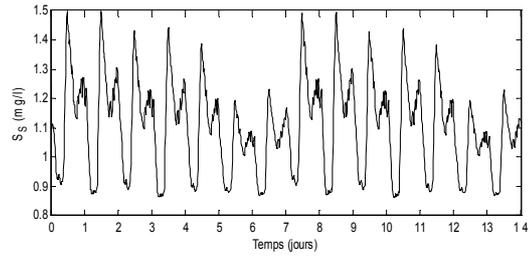
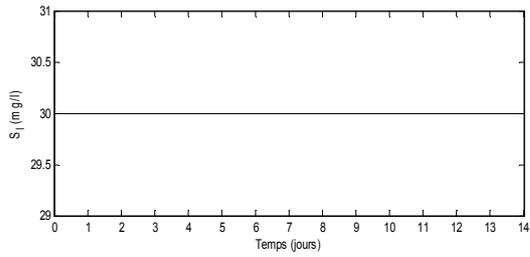


Figure 3.5. Modèle BSM1

Pour se rapprocher de la structure décrite par le modèle ASM1, seul le troisième bassin et le clarificateur sont considérés. Le volume V de ce bassin est égale à $6000 m^3$. Le coefficient $k_l a$ relatif au transfert d'oxygène a une valeur de $k_l a = 240 d^{-3}$ et $S_O^{sat} = 10 mg l^{-1}$. Tous les équations du modèle ASM1 complet sont exprimés plus en détail dans l'annexe B. Les résultats de simulation de ce modèle sont donnés figure 3.6.

Paramètre	Symbole	Valeur du benchmark	Valeurs par défaut		Gamme de variation
			20°C	10°C	
Paramètres stœchiométriques					
Rendement de conversion des hétérotrophes	Y_H	0.67	0.67	0.67	0.38 – 0.75
Rendement de conversion des autotrophes	Y_A	0.24	0.24	0.24	0.07 – 0.28
Fraction de DCO inerte issue du décès de la biomasse	$f_{r_{XI}}$	0.08	0.08	0.08	–
Proportion d'azote dans la biomasse	i_{NBM}	0.08	0.086	0.086	–
Proportion d'azote dans les produits de la biomasse	i_{NXI}	0.06	0.06	0.06	–
Paramètres cinétiques					
Taux de croissance spécifique maximal des hétérotrophes	μ_H	4.0	6.0	3.0	0.60 – 13.2
Taux de mortalité des hétérotrophes	b_H	0.3	0.62	0.20	0.05 – 1.6
Constante d'affinité en substrat des hétérotrophes	K_S	10	20	20	5 – 225
Constante d'affinité en oxygène des autotrophes	$K_{NH,H}$	0.05 [85]			–
Constante d'affinité en ammoniacque des hétérotrophes	$K_{O,H}$	0.2	0.2	0.2	0.01 – 0.20
Constante d'affinité en nitrates des hétérotrophes dénitrifiants	K_{NO}	0.5	0.5	0.5	0.01 – 0.50
Taux de croissance maximal des autotrophes	μ_A	0.5	0.8	0.3	0.20 – 1.0
Taux de mortalité des autotrophes	b_A	0.05	0.20	0.10	0.05 – 0.3
Constante d'affinité en ammoniacque des autotrophes	$K_{NH,A}$	1.0	1.0	1.0	–
Constante d'affinité en oxygène des autotrophes	$K_{O,A}$	0.4	0.4	0.4	0.4 – 2.0
Facteur de correction pour la croissance anoxie des hétérotrophes	$\eta_{NO,g}$	0.8	0.8	0.8	0.6 – 1.0
Taux d'ammonification	k_a	0.05	0.08	0.04	–
Taux maximal spécifique d'hydrolyse	k_h	3.0	3.0	1.0	–
Constante d'affinité en substrat particulaire pour l'hydrolyse	K_X	0.1	0.03	0.01	5 – 225
Facteur de correction pour l'hydrolyse en phase anoxie	$\eta_{NO,h}$	0.8	0.4	0.4	–

Tableau 3.5. Paramètres stœchiométriques et cinétiques du modèle de dégradation ([Chen et Beck, 1993])



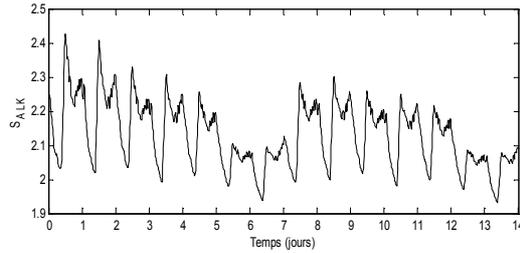


Figure 3.6. Résultats de simulation de modèle ASM1 complet pour un temps sec

3.3.3. Modèle réduit

Le modèle ASM1 a été bien accueilli par la communauté scientifique et largement utilisé. Aussi ses capacités de prédiction sont largement éprouvées. Il apparaît, cependant, que ce modèle ne réalise pas les compromis recherchés en raison de sa complexité (grand nombre de variables d'états et de paramètres, non-linéarité).

a. Approche de simplification du modèle ASM1 : revue bibliographique

Plusieurs modèles réduits à base du modèle ASM1 sont proposés pour l'observation d'état, la commande ou l'estimation en ligne des paramètres (Zhao et Kümmel, 1995 ; Jeppson, 1996 ; Julien, 1997 ; Marsili-Libelli et Aggi, 1997 ; Ryckaert, 1998 ; Steffens et Lants, 1999 ; Weijers, 2000). La réduction du modèle ASM1 peut être réalisée suivant les trois approches suivantes :

- **Simplification des variables selon leur échelle de temps** : elle est nommée encore sélection des variables d'état selon leur dynamique. Différentes méthodes sont utilisées pour la simplification des systèmes dynamiques portant plusieurs échelles de temps, à savoir : la théorie de perturbation singulière (Weijers, 2000), l'application de l'état quasi stationnaire aux dynamiques rapides (Bastin et Dochain, 1990) et l'association des valeurs propres et des variables d'état au moyen d'une méthode d'homotopie afin de choisir les variables lentes et rapides du modèle ASM1 (Steffens et al., 1997).
- **Simplification par linéarisation des cinétiques de dégradation** : les non-linéarités du modèle ASM1 proviennent principalement des cinétiques des réactions (termes cinétiques de Monod fonction de commutation de type $\frac{S}{K+S}$). Cette méthode est couramment utilisée dans les démarches de réduction de (Julien, 1997). Elle consiste à remplacer les fonctions de Monod par réaction d'ordre 0 ou 1 par rapport au substrat.
- **Simplification des composés** : afin de s'approcher au plus près du comportement réel, le modèle ASM1 décrit la majorité des phénomènes biologiques macroscopique mis en jeu dans un procédé de traitement des eaux usées par boues activées. Cependant, suivant l'application souhaitée, soit parce qu'ils présentent peu d'intérêt dans la dynamique de système tels que les composés inertes soluble S_I et particulaires X_I , X_P et l'alcanité S_{ALK} , soit parce qu'ils ne sont pas présents dans l'application considérée (Julien, 1997).

Au vu de la diversité des simplifications applicables au modèle ASM1, le nombre de combinaisons possibles est très élevé. Dans cette thèse, on opte pour le modèle réduit présenté par B. Chachuat (Chachuat et al., 2003) puisqu'il se caractérise par :

- Un horizon de prédiction de plusieurs heures,
- Une robustesse vis-à-vis des perturbations du procédé (débit, charge) et des changements des politiques d'aération,
- Les propriétés d'observabilité et d'identifiabilité conviennent à l'utilisation dans un schéma de commande en boucle fermée (commande adaptative, commande optimale, commande prédictive).

b. Modèle réduit Benoit Chachuat

L'objectif de ce paragraphe est de rappeler les différentes étapes de simplification données dans la thèse de Benoit Chachuat [Chachuat, 2001]:

- **Simplification des dynamiques lentes** : En appliquant la théorie des perturbations singulières, une séparation entre les dynamiques lentes et rapides des procédés de traitement des eaux usées par boues activées est faite. Les résultats obtenus indiquent clairement que les dynamiques des composés organiques particulaire inerte (X_I) et des biomasses hétérotrophes ($X_{B,H}$) sont nettement plus lentes que celles des autres composés du système, et ceci tout au long du cycle de fonctionnement. Ainsi, nous pouvons considérer que la concentration en composés organiques solubles inertes (S_I) est omise des autres composés. Finalement, le nombre de variable d'état se réduit de 11 à 7.
- **Simplification des composées organiques** : pour représenter les composés organiques, 2 variables d'état sont utilisées dans le modèle ASM1: les composés biodégradable soluble (S_S), supposé directement assimilable par les micro-organismes, et particulaire (X_S), qui doit être hydrolysé en composés solubles pour pouvoir être assimilés. Les variables d'états (S_S) et (X_S), vont être rassemblées sous une unique variables X_{DCO} telle que $X_{DCO} = X_S + S_S$ dont la dynamique s'écrit sous la forme :

$$\dot{X}_{DCO} = \frac{Q^{in}}{V} \left(X_{DCO}^{in} - \frac{K_S}{K_{DCO}} X_{DCO} \right) - \frac{1}{Y_H} (\rho_1 + \rho_2) + \theta_2 \quad (3.6)$$

Où X_{DCO}^{in} désigne la concentration des composés organiques relatifs à l'influent. Ces cinétiques de croissance aérobie ρ_1 et anoxie ρ_2 de la biomasse hétérotrophe sont définis en fonction des variables d'état et des paramètres du modèle ASM1, par :

$$\rho_1 = \theta_1 \left(\frac{X_{DCO}}{K_{DCO} + X_{DCO}} \right) \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) \quad (3.7)$$

$$\rho_2 = \theta_1 \eta_g \left(\frac{X_{DCO}}{K_{DCO} + X_{DCO}} \right) \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \quad (3.8)$$

Où les paramètres θ_1 et K_{DCO} sont définis par :

$$\theta_1 = \mu_H X_{B,H}$$

$$K_{DCO} = K_S \frac{X_{DCO}}{S_S} = \frac{K_S}{f_{SS}}$$

La prise en compte d'un composé organique unique présente l'avantage de masquer le mécanisme d'hydrolyse des composés particuliers en composés solubles et permet de réduire le nombre de variable d'état de 7 à 6.

- **Simplification des composés azotés** : pour représenter les composés azotés, quatre variables d'état sont utilisées : S_{NO} , S_{NH} , S_{ND} et X_{ND} . Les concentrations en azote ammoniacal S_{NH} et en nitrite/nitrates S_{NO} , s'avèrent indispensable dans l'expression du modèle réduit puisqu'elles constituent l'essentiel de rejets de l'azote et sont mesurables en ligne. En revanche, les deux fractions d'azote organique soluble S_{ND} et particulaire X_{ND} , dont le rôle est de décrire la formation interne de S_{NH} par les processus d'hydrolyse et d'ammonification, ne constituent qu'une faible partie de rejet d'azote. La simplification appliquée ici est de développer les dynamiques des composés S_{NH} et S_{ND} en simplifiant la cinétique d'ammonification ρ_6 , de sorte qu'il ne soit plus nécessaire de décrire les mécanismes de formation interne d'ammoniaque :

$$\begin{aligned}\rho_3 &= Y_A \theta_3 \left(\frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \right) \left(\frac{S_O}{K_{O,A} + S_O} \right) \\ \rho_6 &= \theta_4 S_{ND} \\ \rho_8 &= \theta_5 \left(\frac{X_{DCO}}{K_{DCO} + X_{DCO}} \right) \left[\left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) + \eta_h \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right]\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}\theta_3 &= \frac{\mu_A}{Y_A} X_{B,A} \\ \theta_4 &= k_a X_{B,H} \\ \theta_5 &= k_h \frac{X_{ND}}{X_S} X_{B,H}\end{aligned}$$

$$K_{ND} = K_X \frac{X_{DCO}}{X_S} X_{B,H}$$

Au final, l'application de l'ensemble des simplifications précédentes permet d'aboutir à un modèle dynamique de 5 variables d'état (X_{DCO} , S_{NO} , S_{NH} , S_{ND} et S_O) et décrit par le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}\dot{S}_{NO} &= \frac{Q_{in}}{V} (S_{NO}^{in} - S_{NO}) - \theta_1 \eta_{NO,g} \frac{1 - Y_H}{2.86 Y_H} \frac{X_{DCO}}{K_{DCO} + X_{DCO}} \frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \\ &\quad + \theta_3 \frac{S_{NH}}{K_{NH,A} + S_{NH}} \frac{S_O}{K_{O,A} + S_O} \\ \dot{S}_{NH} &= \frac{Q_{in}}{V} (S_{NH}^{in} - S_{NH}) \\ &\quad - \theta_1 i_{NBM} \frac{X_{DCO}}{K_{DCO} + X_{DCO}} \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} + \eta_{NO,g} \frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \\ &\quad - \theta_3 \frac{S_{NH}}{K_{NH,A} + S_{NH}} \frac{S_O}{K_{O,A} + S_O} + \theta_4 S_{ND}\end{aligned}\tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\dot{S}_O &= -\frac{Q_{in}}{V} S_O - \theta_1 \frac{1 - Y_H}{Y_H} \frac{X_{DCO}}{K_{DCO} + X_{DCO}} \frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} - 4.57\theta_3 \frac{S_{NH}}{K_{NH,A} + S_{NH}} \frac{S_O}{K_{O,A} + S_O} \\ &\quad + k_l a (S_O^{sat} - S_O) \\ \dot{X}_{DCO} &= \frac{Q_{in}}{V} \left(X_{DCO}^{in} - \frac{K_S}{K_{DCO}} X_{DCO} \right) \\ &\quad - \frac{\theta_1}{Y_H} \frac{X_{DCO}}{K_{DCO} + X_{DCO}} \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} + \eta_{NO,g} \frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) + \theta_2 \\ \dot{S}_{ND} &= \frac{Q_{in}}{V} (S_{ND}^{in} - S_{ND}) - \theta_4 S_{ND} \\ &\quad + \theta_5 \frac{X_{DCO}}{K_{ND} + X_{DCO}} \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} + \eta_{NO,h} \frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right)\end{aligned}$$

Les paramètres stœchiométriques et cinétiques Y_H , i_{NBM} , K_S , $K_{O,H}$, K_{NO} , $K_{NH,A}$, $K_{O,A}$, $\eta_{NO,g}$, $\eta_{NO,h}$ sont identiques à ceux définis dans le modèle ASM1. Les paramètres θ_i ($i = 1..5$), K_{DCO} et K_{ND} sont issus des simplifications (tableau 3.6). Dans le but de valider ces simplifications, il s'avère nécessaire de vérifier que ces paramètres varient lentement au cours de temps.

- La figure (3.7) montre que les paramètres θ_1 , θ_2 , θ_3 et θ_4 présentent de faibles variations temporelles, du fait que ces paramètres ne dépendent que des variables lentes du modèle ASM1.

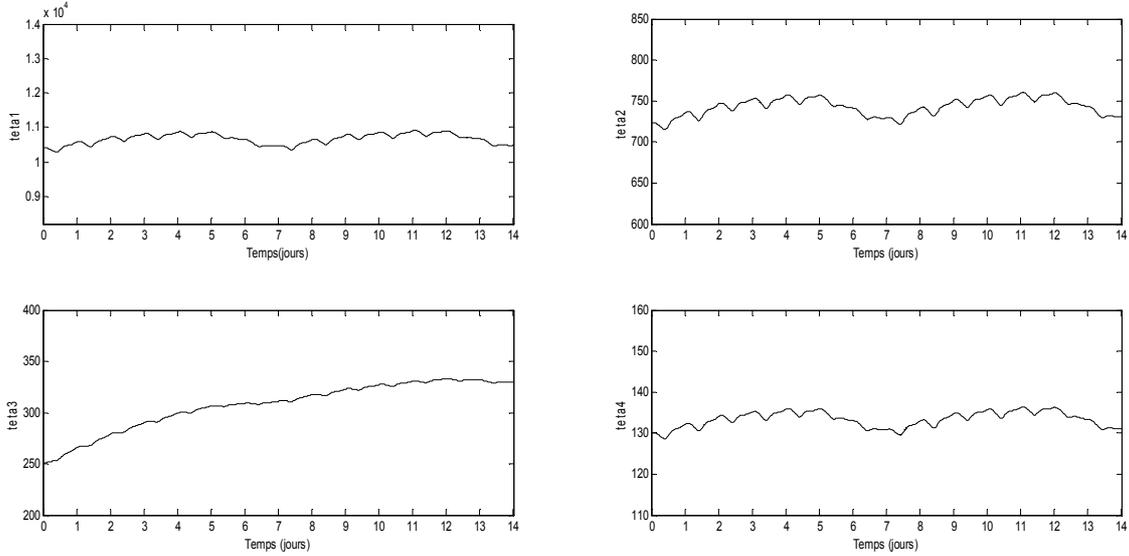


Figure 3.7. Variations des paramètres θ_1 , θ_2 , θ_3 et θ_4 .

- Le paramètre K_{DCO} dépend de la variable d'état S_S . L'évolution rapide de cette variable d'état dans le réacteur entraîne, par conséquent, une évolution temporelle de K_{DCO} plus conséquente. Cependant, ces variations gardent une valeur moyenne relativement stable (Figure 3.8).

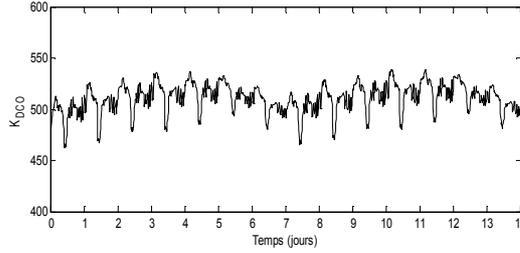


Figure 3.8. Variation du paramètre K_{DCO} .

- Les paramètres θ_5 et K_{ND} dépendent des variables d'état rapides du modèle ASM1, respectivement par le biais des termes $\frac{X_{ND}}{X_S}$ et $\frac{X_{DCO}}{X_S}$. Ces deux rapports sont cependant peu variables dans le temps. D'une part, le rapport $\frac{X_{ND}}{X_S}$ ou nommé la fraction azotée des composées organiques particulaires reste stable, étant donné que X_S et X_{ND} font l'objet du même processus de dégradation (hydrolyse). D'autre part, le rapport $\frac{X_{DCO}}{X_S}$ est compris entre 0.9 et 1 puisque les composés organiques sont en grande partie particulaires. Ainsi, de façon tout à fait prévisible, les variations temporelles des deux paramètres sont par conséquent limitées (Figure 3.9).

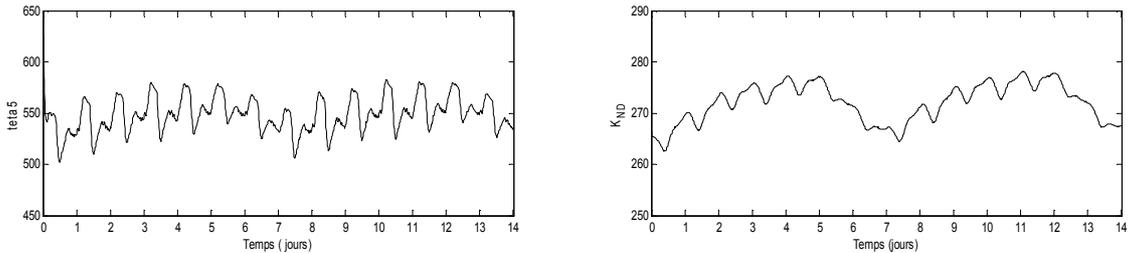


Figure 3.9. Variations des paramètres θ_5 et K_{ND}

Paramètre	Valeur
θ_1	10766
θ_2	743
θ_3	307
θ_4	133
θ_5	549
K_{ND}	272
K_{DCO}	511
$X_{B,H}$	2692 gDCOm^{-3}
$X_{B,A}$	147 gDCOm^{-3}

Tableau 3.6. Valeurs des paramètres spécifiques

Au terme de cette partie, le modèle réduit proposé apparaît apte à être utilisé pour l'estimation d'état. Avant cela, il s'agit de vérifier l'observabilité de ce modèle. Ces aspects, indispensables pour replacer les résultats d'estimation et appliquer l'observateur grand gain adaptatif, font l'objet des paragraphes suivants.

3.4. Implémentation et comparaison entre le FKE, l'OKE grand gain et le filtre de Kalman étendu grand gain adaptatif

La partie précédente était consacrée à la présentation d'une station d'épuration biologique ainsi que la modélisation de ces processus sous forme d'équations mathématiques. Nous avons signalé aussi dans le chapitre 1 que les filières biotechnologiques sont particulièrement limitées par le manque d'une instrumentation développée permettant d'accéder aux mesures pertinentes. En effet, la connaissance des bioprocédés est limitée par la complexité spécifique aux aspects biologiques qui les caractérisent. Ces méconnaissances peuvent apparaître dans deux niveaux différents des modèles des stations d'épuration biologiques :

- **Entrées appliquées** : à l'inverse de certains procédés biotechnologiques comme l'industrie pharmaceutique ou agro-alimentaire où les entrées appliquées sont connues et relativement bien maîtrisées, l'alimentation des stations d'épuration est sensible à divers facteurs extérieurs (climats, activités humaines...). En outre, ces fluctuations en débit ou en concentrations entrantes sont généralement difficiles à estimer, bien que des bassins de stockage (bassin d'orage) soient souvent prévus pour éviter en particulier les chocs de charges en cas d'orages et assurer en général la régularité des entrées du procédé de traitement. Ainsi, la maîtrise pratique de ces grandes fluctuations est souvent très délicate à instaurer. En conséquence, une partie des entrées appliquées peut être difficile à estimer et constituera donc une perturbation pour le système.
- **Sorties mesurées** : le problème des mesures a été largement détaillé dans le chapitre 1. D'une façon générale, les stations d'épuration biologique souffrent d'un manque de mesures en ligne, conséquence directe de l'absence d'instrumentation et de contraintes de faisabilité et de coût. Pratiquement, les instrumentations robustes se résument aux dispositifs des facteurs physico-chimiques [Bourdant et al., 1994]. Quant aux variables biochimiques caractéristiques de l'état du bioprocédé, comme les concentrations de biomasse ou de substrat, leur mesure est difficile et les précisions fournies par des capteurs sont souvent altérées par des bruits de mesure.

Pour appréhender à ces deux limitations, nous proposons d'appliquer les trois observateurs (OKE grand gain, FKE et l'observateur adaptatif) à un modèle réduit d'une station d'épuration biologique par boues activées. Ensuite, une comparaison, entre les estimations issues de ces trois observateurs pour mettre en évidence les performances de filtre de Kalman étendu grand gain adaptatif, est faite [Methnani et al., 2011(b)]. Ce dernier observateur a été appliqué, dans l'article de [Lafont et al., 2011] au modèle ASM1 complet, suivant deux étapes en cascade. La première consiste à appliquer l'observateur adaptatif au modèle réduit sujet de notre thèse. Au cours de la deuxième étape, ils utilisent les estimations issues du modèle simplifié comme des mesures pour le système complet. Malgré que l'étude de l'observabilité du modèle complet apparaisse triviale, la présence des termes complexes dans l'équation du modèle ASM1 le rend difficile. Par conséquent, trouver un changement de coordonnée pour mettre le système sous une forme canonique d'observabilité indispensable pour l'application d'observateur grand gain adaptatif, s'avère non possible. Pour ce faire, les auteurs ont choisi de mettre les équations de l'observateur dans des coordonnées inhabituelles : se sont les coordonnées naturelles.

3.4.1. Le filtre de Kalman étendu grand gain adaptatif

Le filtre de Kalman étendu grand gain adaptatif pour le système de la forme (2.28) peut se définir comme suit :

Définition 3.1

- Q est une matrice symétrique définie positive, et
- R et θ deux réels positifs, $\theta \geq 1$
- Δ , Q_θ et R_θ sont données par

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\theta^{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$Q_\theta = \theta \Delta^{-1} Q \Delta^{-1}$$

$$R_\theta = \theta^{-1} R$$

Ainsi le filtre de Kalman étendu grand gain adaptatif s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A(u) z + b(z, u) - S^{-1} C' R_\theta^{-1} (Cz - y(t)) \\ \dot{S}(t) = -(A(u) + b^*(z, u))' S - S(A(u) + b^*(z, u)) + C' R_\theta^{-1} C - S Q_\theta S \\ \dot{\theta} = F(\theta, \mathcal{J}_d(t)) \end{cases} \quad (3.10)$$

Avec les conditions initiales : $z(0) \in \chi$, $S(0)$ est une matrice symétrique définie positive et $\theta(0) = 1$.

La fonction $F(\theta, \mathcal{J}_d(t))$ assure la commutation entre les deux observateurs de la manière suivante:

- Si la trajectoire estimée $z(t)$ est éloignée de celle réelle $x(t)$, $\theta(t)$ évolue de 1 à un certain θ_{max} (mode grand-gain).
- Si la trajectoire estimée $z(t)$ est proche de la trajectoire réelle $x(t)$, l'application d'un FKE devient valide et $\theta(t)$ tend vers 1.

L'innovation est donnée par cette relation

$$\mathcal{J}_d(t) = \int_{t-d}^t \|y(t-d, x(t-d), \tau) - y(t-d, z(t-d), \tau)\|^2 d\tau \quad (3.11)$$

Où $y(t_0, x_0, \tau)$ comme étant la sortie du système (2.28) au temps τ et pour condition initiale $x(t_0) = x_0$.

La figure (3.10) illustre la signification de l'innovation à un moment t . Cette quantité est le carré de la distance L_2 entre la courbe noire (trait plein) et la courbe rouge (en ligne pointillée). Ces deux dernières courbes représentent respectivement la sortie du système dans un intervalle de temps $[t-d, t]$. La prédiction de sortie est réalisée avec $z(t-d)$ comme étant l'état initial.

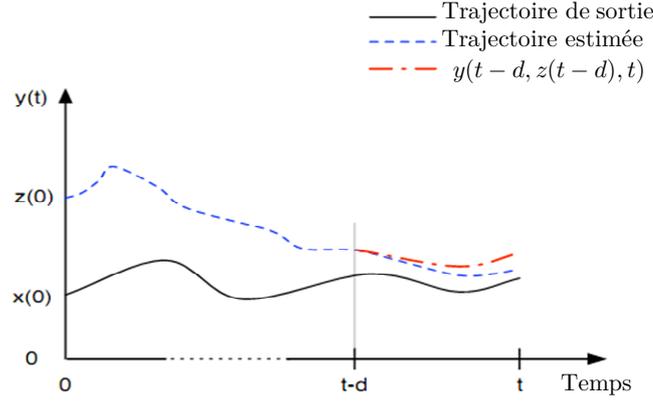


Figure 3.10. Calcul de l'innovation [Boizot et al., 2010]

L'importance de ce choix de l'innovation est explicitée par le lemme suivant qui représente une grande importance pour prouver la convergence de cet observateur adaptatif.

Lemme 3.1

Soient x_1^0 et $x_2^0 \in \mathbb{R}^n$, et $u \in \mathcal{U}_{adm}$. $y(0, x_1^0)$ et $y(0, x_2^0)$ sont les trajectoires de sortie du système (2.28) avec conditions initiales x_1^0 et x_2^0 respectivement. Alors la propriété suivante (dite «l'observabilité persistante») est vraie :

$$\forall d > 0, \exists \lambda_d^0 > 0 \text{ tel que } \forall u \in L_b^1(\mathcal{U}_{adm})$$

$$\|x_1^0 - x_2^0\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_d^0} \int_0^d \|y(0, x_1^0, \tau) - y(0, x_2^0, \tau)\|^2 d\tau$$

Si l'on considère que $x_1^0 = z(t-d)$, et que $x_2^0 = x(t-d)$ alors le lemme précédent nous indique que :

$$\|z(t-d) - x(t-d)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_d^0} \int_{t-d}^t \|y(\tau) - y(t-d, z(t-d), \tau)\|^2 d\tau$$

Ou, de manière équivalente,

$$\|z(t-d) - x(t-d)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_d^0} \mathcal{J}_d(t)$$

Cette dernière expression peut être interprétée comme suit : modulo la multiplication par un paramètre constant, l'innovation au temps t est la borne supérieure de l'erreur d'estimation au temps $t-d$.

Remarque 3.1

L'hypothèse $\theta(0) = 1$ apparait un peu atypique, cependant, ce n'est pas le cas :

- Pour des raisons techniques, la démonstration de la convergence de cet observateur dépend de la valeur initiale de θ et $\theta(0) = 1$ n'a pas d'influence sur les bornes de la matrice de Ricatti.
- Deuxièmement, suite à une large variation, θ augmente. Dans ce cas, la valeur initiale de θ n'as pas trop d'importance puisque un bon choix de la fonction d'adaptation (lemme 3.2) permet à θ d'atteindre une large valeur dans un temps arbitrairement court.
- Finalement, dans le cas idéal ou l'erreur initial est nulle, on aura besoin d'une valeur faible de θ pour avoir un lissage de bruit. Fixer $\theta(0)$ à 1 le garanti.

Lemme 3.2

- Pour tout $\Delta T > 0$, il existe une constante $M(\Delta T)$ telle que :
- Pour tout $\theta_1 > 1$, et
- Pour tout couple $\gamma_1 > \gamma_0 > 0$,

Il existe une fonction $F(\theta, \mathcal{J})$ de sorte que l'équation

$$\dot{\theta} = F(\theta, \mathcal{J}(t))$$

Où $1 \leq \theta(0) \leq 2\theta_1$ et $\mathcal{J}(t)$ une fonction positive et mesurable, a les propriétés suivantes

1. Il existe une unique solution $\theta(t)$ vérifiant $1 \leq \theta(t) \leq 2\theta_1$ pour tout $t \geq 0$,
2. $\frac{F(\theta, \mathcal{J})}{\theta^2} \leq M$
3. Si $\mathcal{J} > \gamma_1$ pour tout $t \in [\tau, \tau + \Delta T]$ alors $\theta(\tau + \Delta T) \geq \theta_1$
4. Tant que $\mathcal{J}(t) < \gamma_0$, $\theta(t)$ décroît vers 1

Ainsi le théorème de la convergence exponentielle du filtre de Kalman étendu grand gain adaptatif est exprimé par le théorème suivant :

Théorème 3.1

Pour tout temps arbitraire $T^* > 0$ et $\varepsilon^* > 0$, il existe $0 < d < T^*$ et une fonction d'adaptation $F(\theta, \mathcal{J}_d(t))$ telle que décrite au lemme (5.3), de sorte que pour tout $t \geq T^*$ et n'importe quel couple de points $(x_0, z_0) \in \chi^2$:

$$\|x(t) - z(t)\|^2 \leq \varepsilon^* e^{-a(t - T^*)}$$

Où $a > 0$ est une constante (indépendante de ε^*)

Une preuve de ce théorème est donnée en détail dans l'article [Boizot et al., 2010].

3.4.2. Système en considération Multi-entrées Multi-sorties

Le système considéré dans cette partie est un système non-linéaire Multi-entrées Multi-sorties. Pour le cas des systèmes MIMO, il n'existe pas une forme unique d'observabilité. Ces différentes formes d'observabilités peuvent conduire à différentes définitions d'observateurs. Dans ce qui suit nous considérons les systèmes non-linéaires MIMO de la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x + b(x, u) \\ y = C(t)x \end{cases} \quad (3.12)$$

Où $A(t)$ et $b(x, u)$ et $C(t)$ sont définis par :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & a_2(t) & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & a_3(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & a_n(t) \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$b(x, u) = \begin{pmatrix} b_1(x_1, u) \\ b_2(x_1, x_2, u) \\ \vdots \\ b_n(x_1, \dots, x_n, u) \end{pmatrix}$$

$$C(t) = (a_1(t) \quad 0 \quad \dots \quad 0)$$

Le vecteur d'état à la structure «bloc» suivantes :

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Où $x_i \in \mathfrak{R}^{d_i}$ et la sortie $y \in \mathfrak{R}^{d_0}$ avec $d_0 \geq d_1 \geq \dots \geq d_k$. Les matrices $a_i(t)$ sont de dimension $d_{i-1} \times d_i$ et appartiennent à un sous-ensemble compact K_i de l'ensemble des matrices du rang maximum d_i . $a_i(t)$, $b_i(x, u)$ sont des fonctions lisses par rapport à x et u . b_i est un champ de vecteur à support compact ayant une structure triangulaire dépendante de x .

On note que dans le cas de notre application $a_i(t)$ dépend du temps via y : $a_i(t) = a_i(y(t))$.

3.4.3. Simulations

Avant l'implémentation de ces trois observateurs, une étape primordiale est l'étude de l'observabilité du modèle réduit ASM1 proposé par Chachuat et al. [Chachuat et al., 2003] et représenté par les 5 équations différentielles (3.9).

Les sondes en oxygène dissous sont largement répandues. En plus, les capteurs pour la mesure des concentrations en nitrate S_{NO} et en ammoniacque S_{NH} , ne nécessitant plus de prise d'échantillons, sont robustes et ont des temps de réponse adaptés. Néanmoins, les concentrations des composés azotés organiques solubles S_{ND} et des composés organiques biodégradables X_{DCO} ne sont pas mesurables en ligne. Face à cette mesure partielle de l'état du système, il devient nécessaire d'étudier l'observabilité.

Suivant le cycle d'aération, l'expression du système change. Ainsi nous étudions l'observabilité du système dans trois types de conditions de fonctionnement : aérobie, anoxygène et anaérobie.

En conditions de fonctionnement aérobie : c'est le cas où l'aération est continue, c'est-à-dire $u = 1$. La seule connaissance de la concentration en oxygène dissous permet d'observer le système [Chachuat et al., 2003].

En condition de fonctionnement anoxique : dans le cas d'absence en oxygène dissous dans le bioréacteur, le système réduit de la station d'épuration biologique (3.9) se réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{S}_{NO} &= D^{in}(S_{NO}^{in} - S_{NO}) - \theta_1 \eta_{NO,g} \frac{1 - Y_H}{2.86 Y_H} \frac{X_{DCO}}{K_{DCO} + X_{DCO}} \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \\ \dot{S}_{NH} &= D^{in}(S_{NH}^{in} - S_{NH}) - \theta_1 i_{NBM} \eta_{NO,g} \frac{X_{DCO}}{K_{DCO} + X_{DCO}} \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} + \theta_4 S_{ND} \\ \dot{X}_{DCO} &= D^{in} \left(X_{DCO}^{in} - \frac{K_S}{K_{DCO}} X_{DCO} \right) - \frac{\theta_1}{Y_H} \eta_{NO,g} \frac{X_{DCO}}{K_{DCO} + X_{DCO}} \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} + \theta_2 \\ \dot{S}_{ND} &= D^{in}(S_{ND}^{in} - S_{ND}) - \theta_4 S_{ND} + \theta_5 \eta_{NO,h} \frac{X_{DCO}}{K_{ND} + X_{DCO}} \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}}\end{aligned}$$

Le système reste observable et, même, seule la concentration en ammoniacque permet l'observabilité du système [Chachuat et al., 2003].

En condition de fonctionnement anaérobie : l'absence de l'oxygène dissous et de nitrite permet de simplifier le système sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}\dot{S}_{NH} &= D^{in}(S_{NH}^{in} - S_{NH}) + \theta_4 S_{ND} \\ \dot{X}_{DCO} &= D^{in} \left(X_{DCO}^{in} - \frac{K_S}{K_{DCO}} X_{DCO} \right) + \theta_2 \\ \dot{S}_{ND} &= D^{in}(S_{ND}^{in} - S_{ND}) - \theta_4 S_{ND}\end{aligned}$$

La mesure de la concentration en ammoniacque permet d'observer la concentration des composés azotés organiques solubles S_{ND} . En revanche, la dynamique des composés organiques X_{DCO} devient indépendante des autres dynamiques, et leur concentration n'est alors plus observable.

Dans le reste de cette thèse on considère le modèle réduit ASM1 dans des conditions de fonctionnement aérobie $u = 1$. On considère le modèle réduit observable décrit par l'équation (3.9). Mettant le système dans les nouvelles coordonnées suivantes : $x_1 = S_{NO}$, $x_2 = S_{NH}$, $x_3 = S_O$, $x_4 = X_{DCO}$ et $x_5 = S_{ND}$, on obtient un modèle qui n'est pas mis sous la forme canonique d'observabilité (3.12). En introduisant le changement de variable suivant:

$$\tilde{x}_4 = \frac{x_4}{x_4 + K_{DCO}}$$

Alors le système peut être réécrit par :

$$\dot{x}_1 = - \left(\alpha_1 \frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + x_3} \frac{x_1}{K_{NO} + x_1} \right) \tilde{x}_4 + \left(\frac{Q^{in}}{V} (S_{NO}^{in} - x_1) + \alpha_2 \frac{x_2}{K_{NH,A} + x_2} \frac{x_3}{K_{O,A} + x_3} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_2 &= - \left(\alpha_3 \frac{x_3}{K_{O,H} + x_3} + \alpha_4 \frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + x_3} \frac{x_1}{K_{NO} + x_1} \right) \tilde{x}_4 + \alpha_5 x_5 \\
 &\quad + \left(\frac{Q^{in}}{V} (S_{NH}^{in} - x_2) - \alpha_2 \frac{x_2}{K_{NH,A} + x_2} \frac{x_3}{K_{O,A} + x_3} \right) \\
 \dot{x}_3 &= - \left(\alpha_6 \frac{x_3}{K_{O,H} + x_3} \right) \tilde{x}_4 - \left(\frac{Q^{in}}{V} x_3 + \alpha_7 \frac{x_2}{K_{NH,A} + x_2} \frac{x_3}{K_{O,A} + x_3} - k_l a (S_O^{sat} - x_3) \right) \\
 \dot{\tilde{x}}_4 &= \frac{\left(\frac{Q^{in}}{V} X_{DCO}^{in} + \alpha_{11} \right)}{K_{DCO}} (1 - \tilde{x}_4)^2 - \frac{Q^{in}}{V} \alpha_8 (1 - \tilde{x}_4) \tilde{x}_4 \\
 &\quad - \frac{1}{K_{DCO}} \left(\alpha_9 \frac{x_3}{K_{O,H} + x_3} + \alpha_{10} \frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + x_3} \frac{x_1}{K_{NO} + x_1} \right) (1 - \tilde{x}_4)^2 \tilde{x}_4 \\
 \dot{x}_5 &= \frac{Q^{in}}{V} (S_{ND}^{in} - x_5) - \alpha_5 x_5 \\
 &\quad + \left(\alpha_{12} \frac{x_3}{K_{O,H} + x_3} + \alpha_{13} \frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + x_3} \frac{x_1}{K_{NO} + x_1} \right) \frac{\tilde{x}_4 K_{DCO}}{K_{ND} + \tilde{x}_4 (K_{ND} - K_{DCO})}
 \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \mu_H X_{B,H} \eta_{NO,g} \frac{1-Y_H}{2.86 Y_H}, \quad \alpha_2 = \frac{\mu_A}{Y_A} X_{B,A}, \quad \alpha_3 = \mu_H X_{B,H} i_{NBM}, \quad \alpha_4 = \mu_H X_{B,H} i_{NBM} \eta_{NO,g}, \quad \alpha_5 = \\
 &k_a X_{B,H}, \quad \alpha_6 = \mu_H X_{B,H} \frac{1-Y_H}{Y_H}, \quad \alpha_7 = 4.57 \frac{\mu_A}{Y_A} X_{B,A}, \quad \alpha_8 = \frac{K_S}{K_{DCO}}, \quad \alpha_9 = \frac{\mu_H X_{B,H}}{Y_H}, \quad \alpha_{10} = \frac{\mu_H X_{B,H}}{Y_H} \eta_{NO,g}, \\
 \alpha_{11} &= (1 - f_{r_{XI}}) (b_H X_{B,H} + b_A X_{B,A}), \quad \alpha_{12} = k_h \frac{X_{ND}}{X_S} X_{B,H}, \quad \alpha_{13} = k_h \frac{X_{ND}}{X_S} X_{B,H} \eta_{NO,h}.
 \end{aligned}$$

Cet ensemble d'équations est de la forme

$$\begin{aligned}
 y_1 &= x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_3 \\
 \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_3) \tilde{x}_4 + g_1(x_1, x_2, x_3) \\
 \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_3) \tilde{x}_4 + \alpha_5 x_5 + g_2(x_2, x_3) \\
 \dot{x}_3 &= f_3(x_3) \tilde{x}_4 + g_3(x_2, x_3) \\
 \dot{\tilde{x}}_4 &= g_4(x_2, x_3, \tilde{x}_4) \\
 \dot{x}_5 &= g_5(x_1, x_3, \tilde{x}_4, x_5)
 \end{aligned}$$

Finalement, les équations du modèle ASM1 réduit prennent la forme suivante:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t) x + b(x, t) \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \tilde{x}_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.13)$$

Où

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 \frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + x_3} \frac{x_1}{K_{NO} + x_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_3 \frac{x_3}{K_{O,H} + x_3} - \alpha_4 \frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + x_3} \frac{x_1}{K_{NO} + x_1} & \alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_6 \frac{x_3}{K_{O,H} + x_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$b(x, t)$

$$= \begin{pmatrix} \frac{Q^{in}}{V} (S_{NO}^{in} - x_1) + \alpha_2 \frac{x_2}{K_{NH,A} + x_2} \frac{x_3}{K_{O,A} + x_3}, \\ \frac{Q^{in}}{V} (S_{NH}^{in} - x_2) - \alpha_2 \frac{x_2}{K_{NH,A} + x_2} \frac{x_3}{K_{O,A} + x_3}, \\ -\frac{Q^{in}}{V} x_3 - \alpha_7 \frac{x_2}{K_{NH,A} + x_2} \frac{x_3}{K_{O,A} + x_3} + k_l a (S_O^{sat} - x_3), \\ \frac{\left(\frac{Q^{in}}{V} X_{DCO}^{in} + \alpha_{11} \right)}{K_{DCO}} (1 - \tilde{x}_4)^2 - \frac{Q^{in}}{V} \alpha_8 (1 - \tilde{x}_4) \tilde{x}_4 - \\ \frac{1}{K_{DCO}} \left(\alpha_9 \frac{x_3}{K_{O,H} + x_3} + \alpha_{10} \frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + x_3} \frac{x_1}{K_{NO} + x_1} \right) (1 - \tilde{x}_4)^2 \tilde{x}_4, \\ \frac{Q^{in}}{V} (S_{ND}^{in} - x_5) - \alpha_5 x_5 + \left(\alpha_{12} \frac{x_3}{K_{O,H} + x_3} + \alpha_{13} \frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + x_3} \frac{x_1}{K_{NO} + x_1} \right) \frac{\tilde{x}_4 K_{DCO}}{K_{ND} + \tilde{x}_4 (K_{ND} - K_{DCO})}, \end{pmatrix}$$

Le changement de coordonnée inverse pour retourner aux coordonnées naturelles est donné par :

$$x_4 = \frac{\tilde{x}_4 K_{DCO}}{(1 - \tilde{x}_4)} \quad (3.14)$$

Pour mener une comparaison concrète entre les trois types d'observateurs, nous avons appliqué les mêmes perturbations à chaque observateur. Les trois sorties du processus sont perturbées par un bruit coloré additif. Ce bruit est obtenu en simulant l'équation stochastique suivante (Uhlenbeck et Ornstein, 1930) :

$$dX_t = -aX_t dt + \delta \sqrt{2ad} W_t$$

Où W_t est un processus de Wiener et X_t est un processus Ornstein-Uhlenbeck. Les coefficients a et δ ont été choisis de façon à obtenir un bruit réaliste.

Aussi comme toutes les concentrations entrantes, la concentration X_{DCO}^{in} peut être soumise à des variations de grande amplitude. La figure (3.11) montre la variation provoquée à X_{DCO}^{in} .

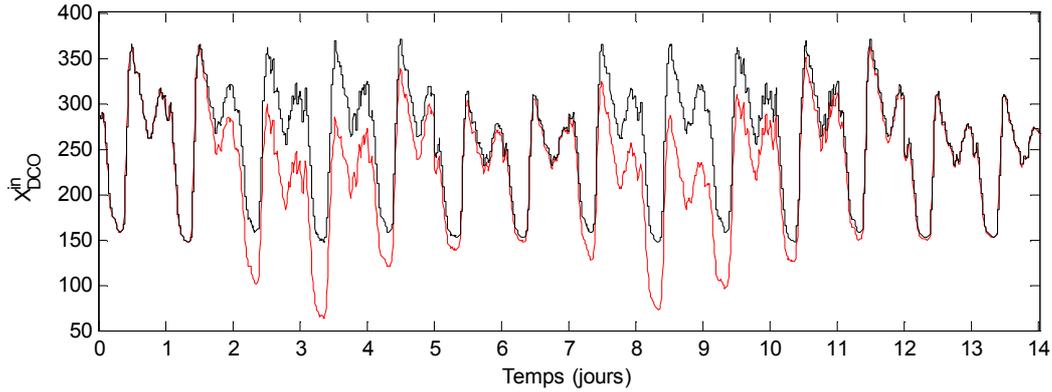


Figure 3.11. Variation de X_{DCO}^{in} pour un temps sec. Valeur de Benchmark — et valeur de Benchmark variée —.

a. Le filtre de Kalman étendu

On simule le FKE représenté par l'équation (2.30). L'objectif est de fixer les valeurs des matrices Q et R en présence du bruit et en absence de grandes perturbations sur les concentrations entrantes, de façon à obtenir un lissage du bruit acceptable. Les valeurs cinétiques et stœchiométriques sont données par le tableau (3.5). Les autres variables du modèle sont données par le tableau (3.7). Les concentrations initiales sont données par les fichiers temps sec dans le Benchmark. Les états initiaux de l'observateur sont égaux aux états initiaux du système. Les matrices Q et R sont deux matrices symétriques positives. Généralement, dans le cas continu, elles sont considérées diagonales avec des coefficients positifs:

- R est fixée de manière à refléter la covariance de bruit de mesure;
- Les coefficients diagonaux de Q sont choisis plus large pour les variables d'états qui sont inconnus ou lorsque le modèle est moins précis.

De la théorie, nous savons que la matrice de Ricatti est une matrice symétrique : par conséquent nous pouvons résoudre les équations seulement pour la partie supérieure ou inférieure de la matrice (la solution pour $\frac{n(n+1)}{2}$ équations au lieu de n^2 équations). Comme indiqué dans la figure (3.12), la mise en œuvre de l'observateur nécessite l'utilisation d'une fonction qui transforme les matrices carrées de $n \times n$ à des vecteurs et vice versa.

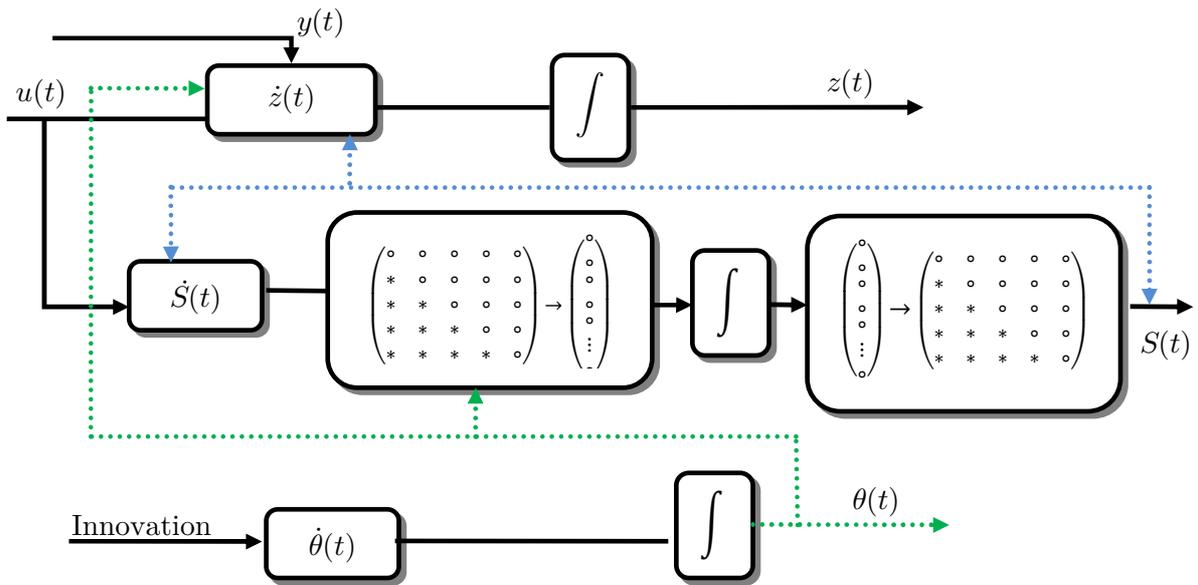
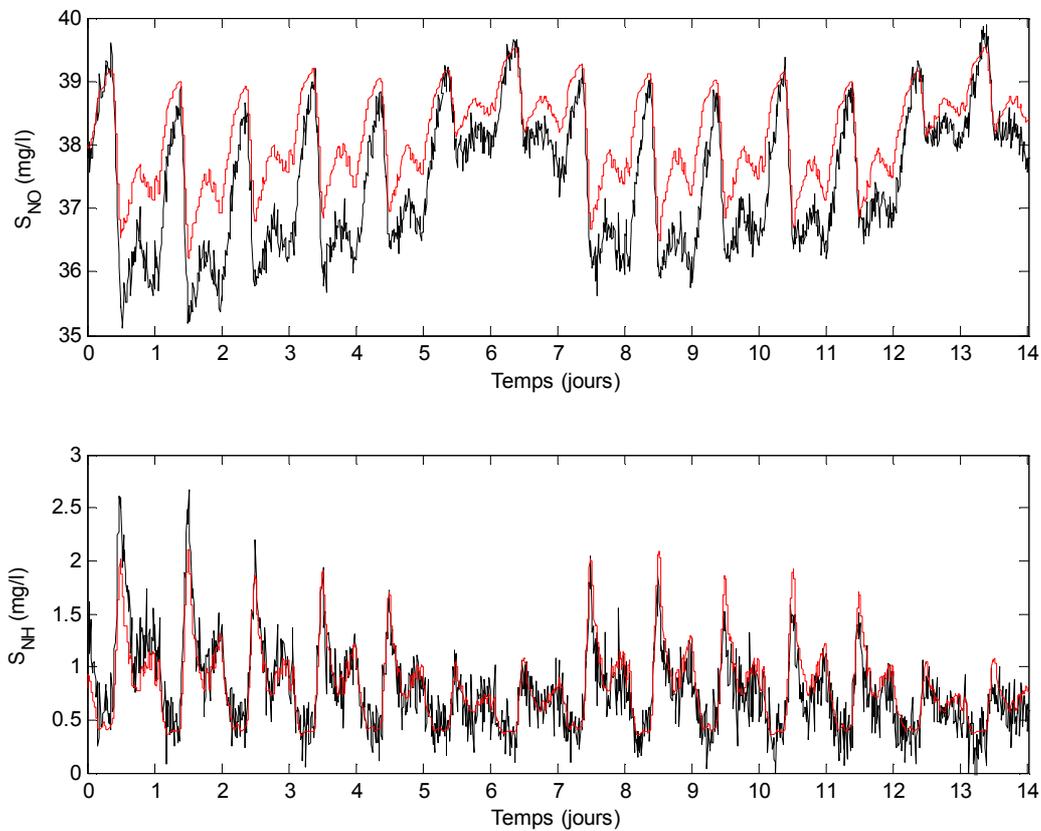


Figure 3.12. Calcul des principales équations de l'observateur

Finalement, la figure (3.13) illustre une comparaison des résultats de simulation d'un filtre de Kalman étendu appliqué au modèle ASM1 réduit et les résultats de simulation du modèle ASM1 complet.



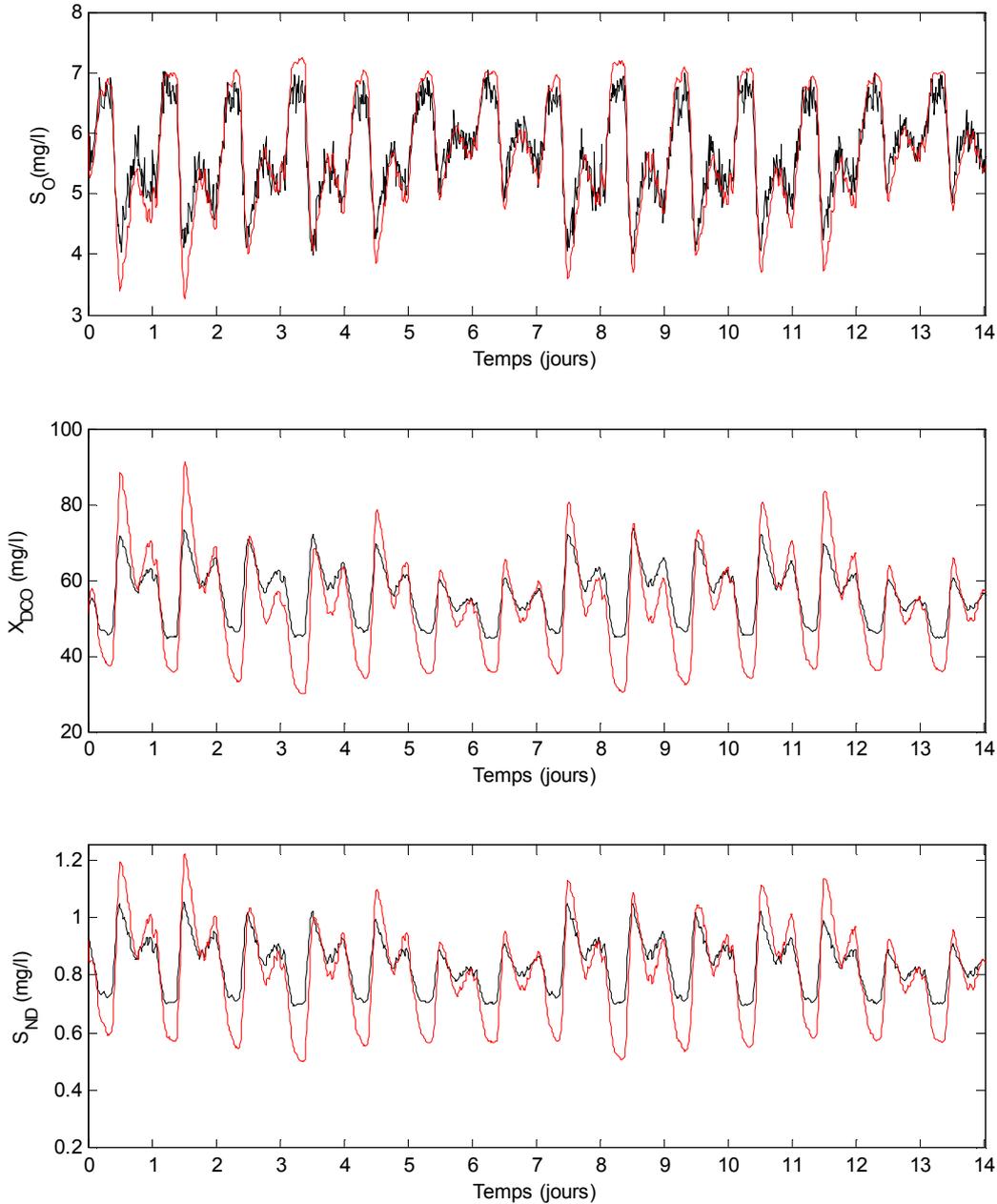


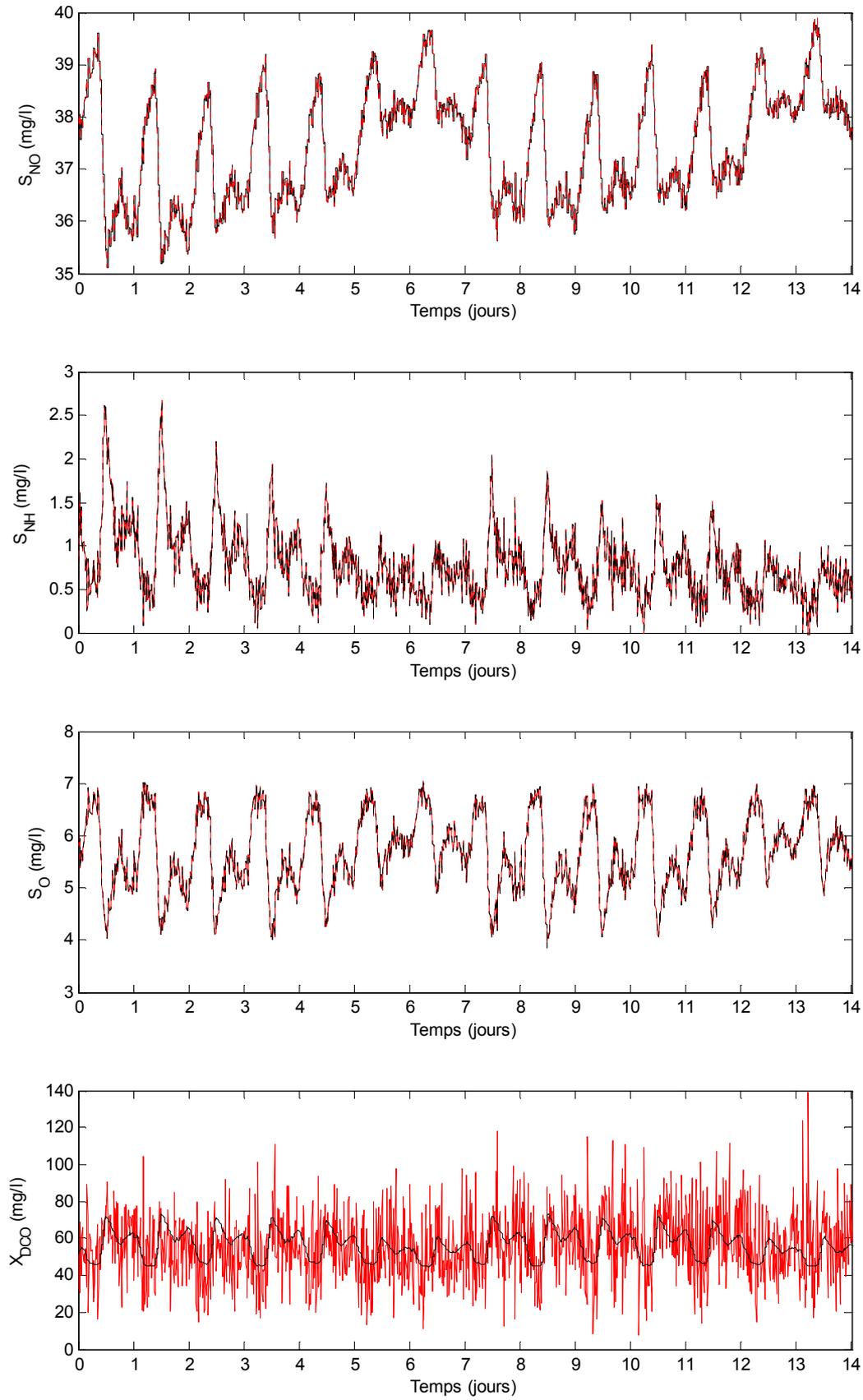
Figure 3.13. Résultats d'estimation pour un FKE. Légende : — états simulés — états estimés.

Le filtre de Kalman étendu est un observateur localement exponentiellement convergent, qui présente les mêmes inconvénients de cette classe d'observateurs. Comme illustrée par la figure (3.13), le FKE possède en pratique de très bonnes propriétés locales qui le rendent robuste au bruit. Cependant, la large variation de la concentration entrante X_{DCO}^{in} démontre l'incapacité de cet observateur à récupérer cette variation.

b. OKE grand gain

Les matrices Q et R prennent les mêmes valeurs fixées antérieurement (tableau 3.7). Le paramètre θ_{max} est choisi de telle sorte qu'il assure la meilleure réponse suite à l'application d'une large variation à la concentration X_{DCO}^{in} comme indiqué dans le tableau (3.8). Le lissage du bruit

est ignoré dans ce cas. La figure (3.14) montre les résultats de simulation d'un OKE grand gain appliqué au modèle ASM1 réduit.



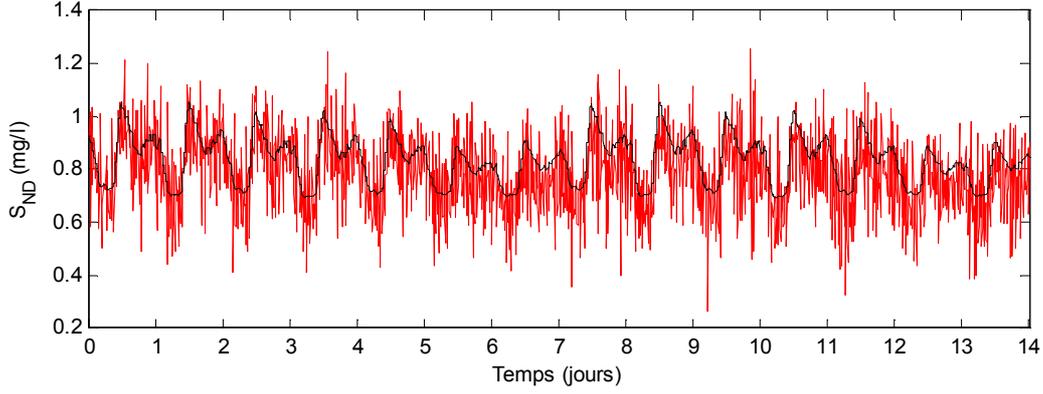


Figure 3.14. Résultats d'estimation pour un OKE grand gain. Légende : — états estimés
— états simulés.

Les concentrations estimées, en particulier la concentration d'azote organique soluble et biodégradable S_{ND} et la concentration des composés organiques X_{DCO} , démontrent que l'OKE grand gain amplifie le bruit.

c. Filtre de Kalman étendu adaptatif

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = A(t)z + b(z, u) - S^{-1}C'R_{\theta}^{-1}(Cz - y(t)) \\ \frac{dS}{dt} = -(A(t) + b^*(z, u))'S - S(A(t) + b^*(z, u)) + C'R_{\theta}^{-1}C - SQ_{\theta}S \\ \frac{d\theta}{dt} = F(\theta, I_d(t)) \end{cases} \quad (3.15)$$

Où

$$Q_{\theta} = \theta\Delta^{-1}Q\Delta^{-1}$$

$$R_{\theta} = \theta^{-1}R$$

$$\Delta = \left(1, 1, 1, \frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta}\right)$$

$$F(\theta, I_d) = \mu(\mathcal{J}_d)F_0(\theta) + (1 - \mu(\mathcal{J}_d))\lambda(1 - \theta)$$

$$F_0(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta T}\theta^2 & \text{si } \theta \leq \theta_1 \\ \frac{1}{\Delta T}(\theta - 2\theta_1^2) & \text{si } \theta > \theta_1 \end{cases}$$

$\mu(\mathcal{J}_d) = [1 + e^{-\beta(\mathcal{J}_d - m)}]^{-1}$ où β et m sont les paramètres de la fonction sigmoïde (figure 5.12).

$\mu(\mathcal{J}_d)$ vérifie :

$$\mu(\mathcal{J}_d) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{J}_d \leq \gamma_0 \\ \in [0, 1] & \text{si } \gamma_0 \leq \mathcal{J}_d \leq \gamma_1 \\ 1 & \text{si } \mathcal{J}_d \geq \gamma_1 \end{cases}$$

Remarque 3.2

Choisir la fonction d'adaptation $F(\theta, I_d)$ et $F_0(\theta)$ comme définis précédemment permet de vérifier les propriétés 1 à 4 du lemme (3.2). En effet,

Si $\mathcal{J}_d \geq \gamma_1$ alors $F(\theta, I_d) = F_0(\theta)$. Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = F_0(\theta) \\ \theta(0) = 1 \end{cases}$$

Un simple calcul permet d'obtenir la solution :

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{\Delta T}{\Delta T - t} & \text{pour } \theta \leq \theta_1 \\ 2\theta_1 - \frac{\theta_1 \Delta T}{\theta_1 t + (2 - \theta_1) \Delta T} & \text{pour } \theta > \theta_1 \end{cases}$$

Ainsi $\theta(t)$ peut atteindre θ_1 au cours d'un temps $t < \Delta T$. Cela est vérifié pour tout $\theta(0) \in [1, \theta_1[$. Ainsi la première propriété est satisfaite.

Au contraire, si $\mathcal{J}_d \leq \gamma_0$, $F(\theta, I_d) = \lambda(1 - \theta)$ alors la quatrième propriété est vérifiée. En plus, puisque $F(\theta, I_d)$ est Lipschitz, par conséquent on aura la première propriété. Vérifions, par la suite, la deuxième propriété :

$$\text{On a } \left| \frac{F(\theta, I_d)}{\theta^2} \right| \leq \left| \frac{F_0(\theta)}{\theta^2} \right| + \left| \frac{\lambda(1-\theta)}{\theta^2} \right|$$

Le premier terme vérifie :

- Pour $\theta \leq \theta_1$, $\left| \frac{F_0(\theta)}{\theta^2} \right| = \frac{1}{\Delta T}$, et
- Pour $\theta_1 \leq \theta < 2\theta_1$, $\left| \frac{F_0(\theta)}{\theta^2} \right| = \frac{1}{\Delta T} \left(\frac{\theta - 2\theta_1}{\theta} \right)^2 \leq \frac{1}{\Delta T}$

Le second terme satisfait :

$$- \left| \frac{\lambda(1-\theta)}{\theta^2} \right| = \lambda \frac{\theta-1}{\theta^2} = \lambda \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{\theta-1}{\theta} \right)^2 \right) \leq \frac{\lambda}{4}$$

Finalement, la deuxième propriété est vérifiée avec $M = \frac{1}{\Delta T} + \frac{\lambda}{4}$.

L'innovation pour le système MIMO (3.12) est de la forme :

$$I_d(t) = \int_{t-d}^t \|y(t-d, x(t-d), \tau) - y(t-d, z(t-d), \tau)\|_{\mathcal{X}^{d_0}}^2 d\tau$$

Grâce à la forte propriété de l'observabilité du système, l'inéquation suivante montre que $I_d(t)$ (contrairement au concept standard de l'innovation) mesure effectivement l'erreur d'estimation:

$$\|x(t-d) - z(t-d)\|^2 \leq k \cdot (I_d(t))^2 \text{ pour certaine constante } k > 0.$$

Ainsi

$$I_d(t) = \int_{t-d}^t \|S_{NO} - \hat{S}_{NO}\|^2 + \|S_{NH} - \hat{S}_{NH}\|^2 + \|S_O - \hat{S}_O\|^2$$

Avec $\hat{S}_{NO}(s)$, $\hat{S}_{NH}(s)$ et $\hat{S}_O(s)$ désigne les valeurs estimées issues de l'observateur pour tout $t - d \leq s \leq t$.

Comme l'illustre la figure (3.15), l'implémentation de filtre de Kalman étendu à grand gain adaptatif se divise en deux étapes:

1. Le calcul de l'innovation $I_d(t)$
2. Le calcul de l'état estimé des éléments de la matrice de Ricatti et la variable θ .

La dernière étape est similaire à l'implémentation d'un filtre de Kalman standard pour les systèmes continus comme indiqué dans la partie (a) ci-dessus.

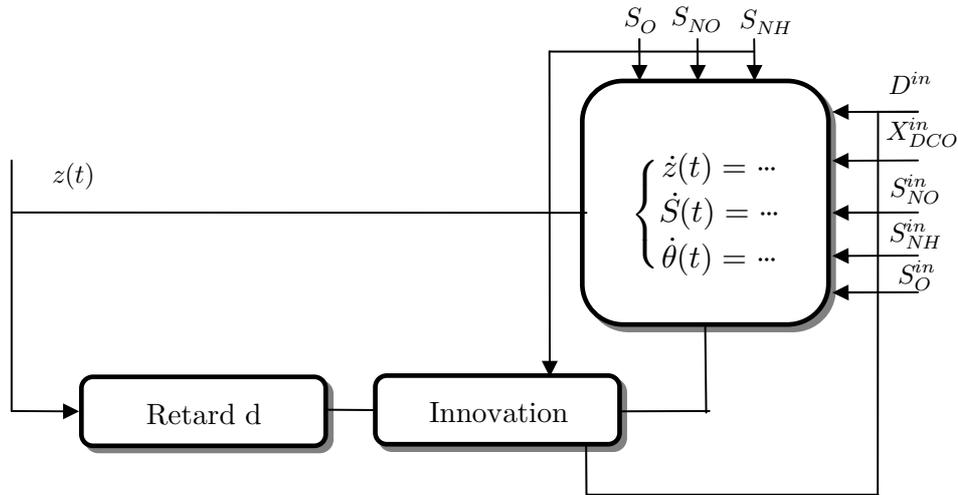


Figure 3.15. Structure d'un filtre de Kalman étendu grand gain adaptatif.

Le calcul de l'innovation se déroule en quatre étapes :

- garder en mémoire le signal de sortie sur un intervalle de temps de longueur d ,
- garder en mémoire la trajectoire de sortie de l'observateur sur un intervalle de temps de longueur d , afin de calculer la prédiction,
- calculer la prédiction de cette trajectoire dans un intervalle de temps de longueur $[t - d, t]$,
- calculer l'intégrale avec une méthode trapézoïdale.

Dans le paragraphe qui suit, nous donnons une signification des paramètres de l'observateur adaptatif et la méthode pour les calculer.

Ces paramètres sont divisés en deux catégories :

- Ceux définissant les performances du système par rapport au bruit et aux perturbations ($F(\theta, I_d(t)) = 0$) :
 - Les matrices Q et R sont fixées antérieurement pour un FKE standard afin réduire l'effet de bruit du mesure.
 - θ_{max} est fixé pour assurer une convergence rapide suite au large variation de la concentration X_{DCO}^{in} .

- Les paramètres liés à la procédure d'adaptation
 - m et β de la fonction sigmoïde. La figure (3.16) montre l'influence de ces deux paramètres sur la fonction sigmoïde. β contrôle la durée de la partie de transition de la sigmoïde. Plus β est grand plus la transition est petite. En pratique, les meilleurs résultats sont obtenus pour un temps de transition faible.
 - m permet de déplacer la fonction sigmoïde vers la gauche. m est en fait divisé en deux parties $m = m_1 + m_2$. m_1 est choisi tel que la fonction sigmoïde soit proche de zéro $\mu(0) \simeq 0$ pour la valeur fixe de β . m_2 permet de fixer la valeur limite de l'innovation pour le passage en mode grand gain.
 - λ : contrairement à l'observateur présenté dans [Busvelle et Gauthier, 2002] la condition « λ est suffisamment petit » n'est plus nécessaire puisque θ augmente lorsque l'erreur d'estimation devient trop large. Ce paramètre contrôle la vitesse de décroissance de $\theta(t)$.
 - ΔT contrôle le temps de montée de θ . Plus ΔT est petit plus le temps de montée de θ est faible.
 - d est la longueur de l'intervalle de temps pour calculer l'innovation.
 - δ est la période d'échantillonnage pour la discrétisation de l'innovation.

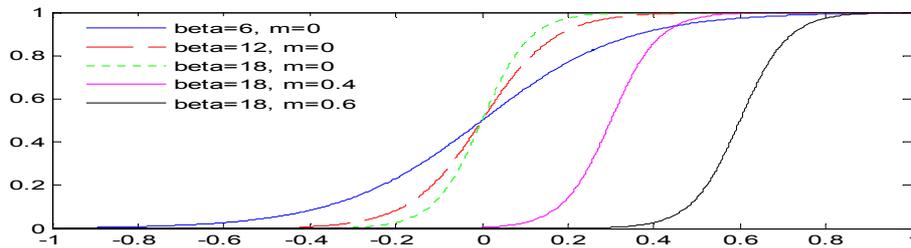
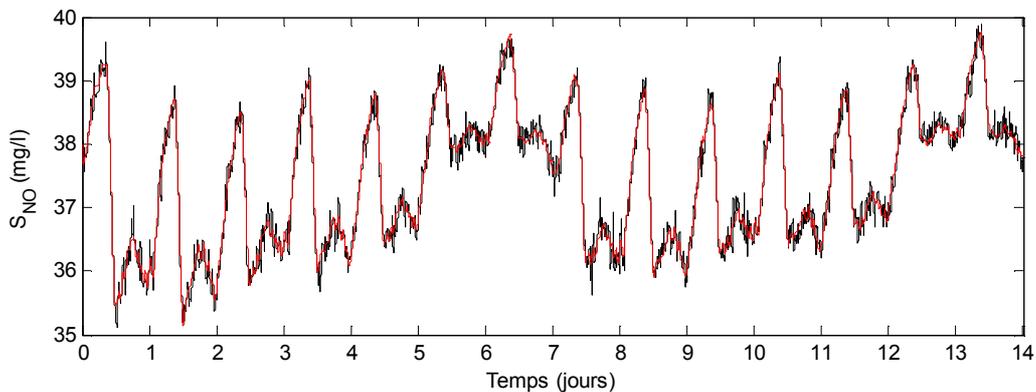
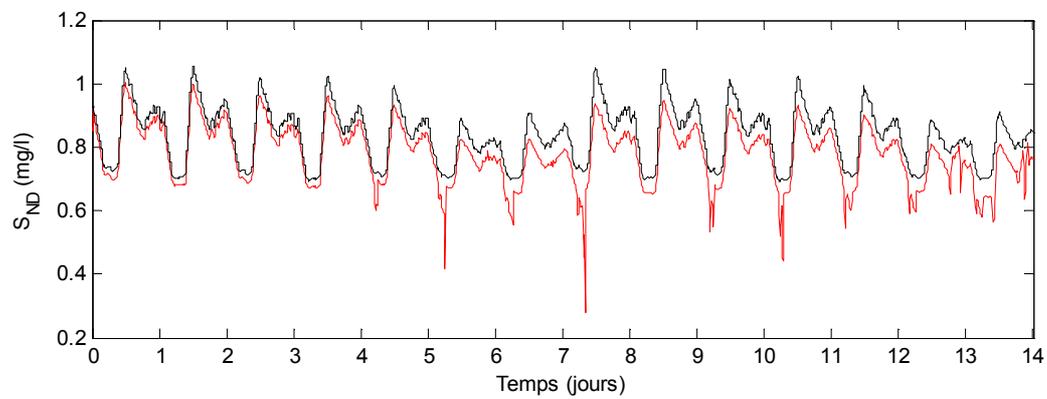
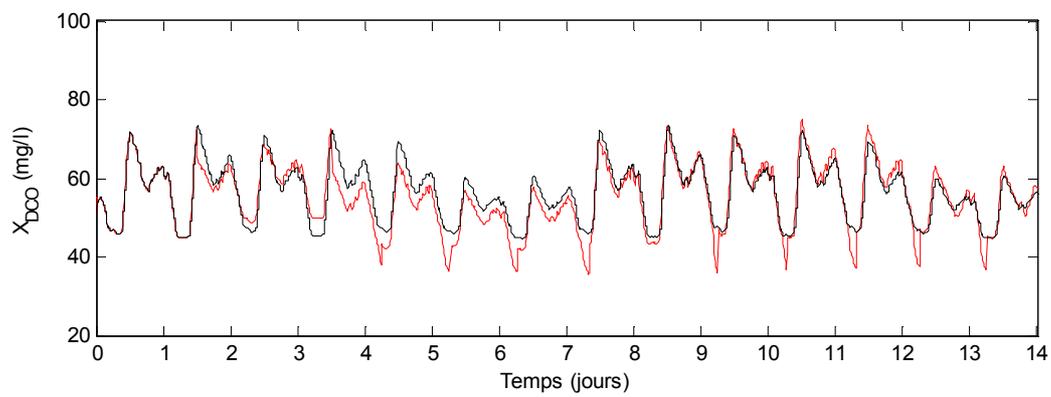
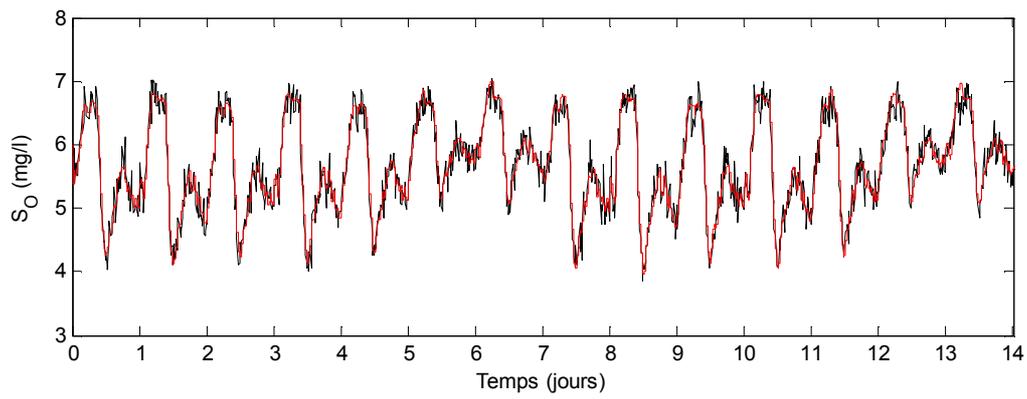
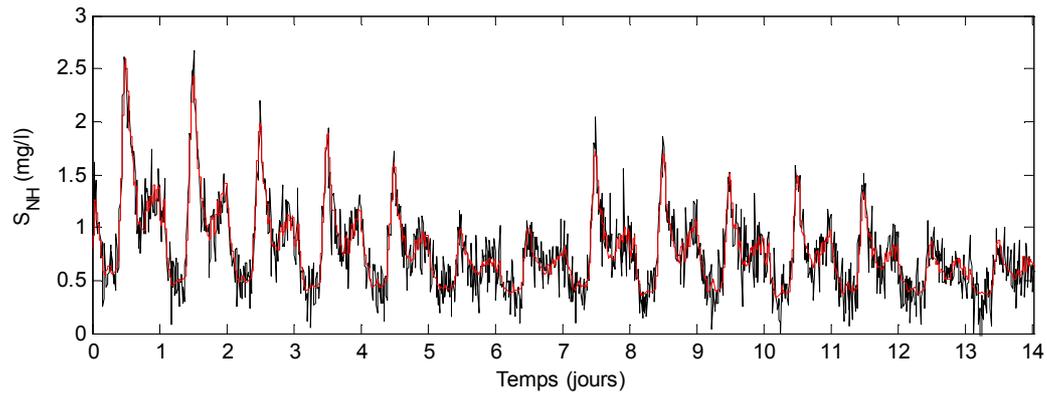


Figure 3.16. Influence des paramètres m et β sur l'allure de la fonction sigmoïde.

Les résultats de simulation d'un filtre de Kalman étendu grand gain adaptatif sont donnés par la figure (3.17) lorsque les paramètres sont fixés aux valeurs indiquées dans le tableau (3.8).





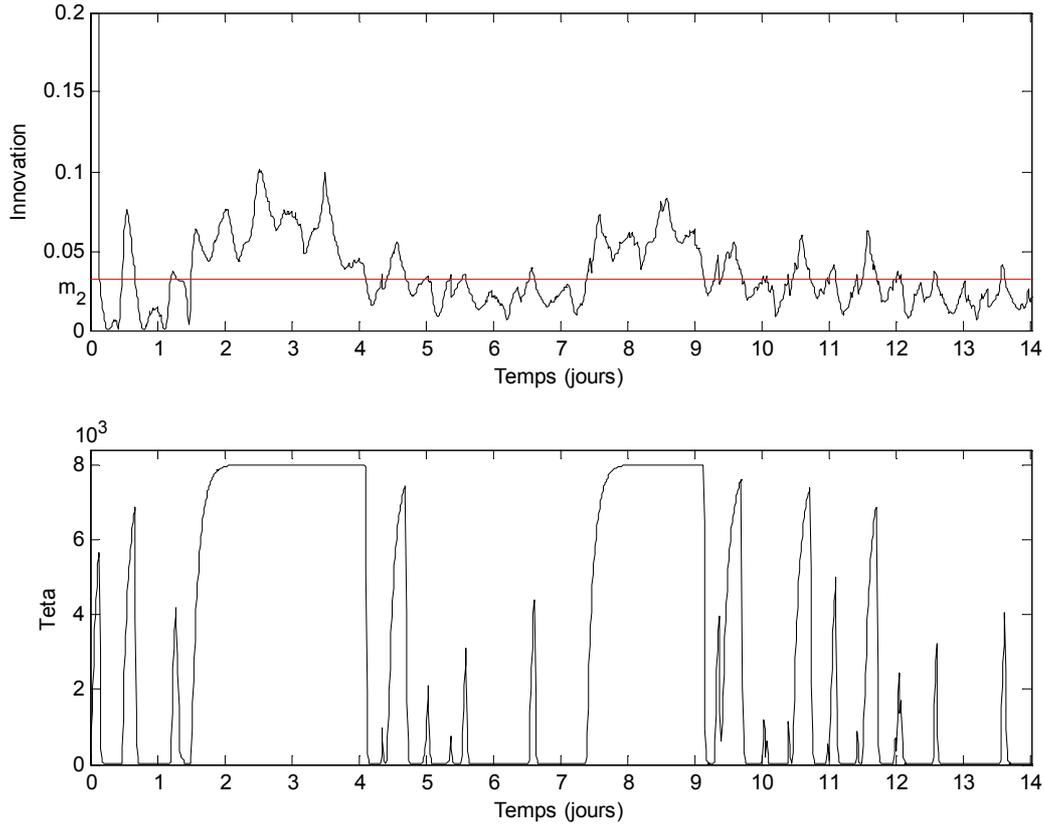


Figure 3.17. Résultats d'estimation pour un filtre de Kalman étendu grand gain adaptatif.

Légende : — états estimés — états simulés.

Il est clair que l'observateur adaptatif combine les deux avantages suivants : lissage du bruit et compensation de larges perturbations. En effet, lorsqu'elle est confrontée à une variation brusque de la concentration X_{DCO}^{in} , par exemple entre $t = 2$ jours et $t = 4$ jours, l'innovation augmente. Quand elle dépasse la valeur m_2 une alarme se déclenche pour que le gain commute de 1 à θ_{max} au cours d'un temps ΔT .

Au moment où l'innovation devient faible ($I_d(t) < m_2$), le gain sera ramené de nouveau à 1 avec une vitesse de descente λ .

La vitesse de convergence après la perturbation est comparable à celui d'un filtre de Kalman étendu grand gain, mais avec un petit retard qui correspond au temps nécessaire :

- pour que la perturbation ait un effet sur la sortie,
- pour que la perturbation soit détectée,
- pour que le gain θ décroît.

Ce retard dépend aussi du paramètre δ qui est, en fait, le temps d'échantillonnage pour le calcul de l'innovation.

d. Étude comparative entre les trois observateurs

Les trois observateurs non-linéaires FKE, OKE grand gain et le filtre de Kalman étendu grand gain adaptatif ont été simulés en considérant les mêmes hypothèses. La moyenne et l'écart type de l'erreur d'estimation sur 14 jours avec un temps sec sont donnés par le tableau (3.9). En com-

parant les erreurs d'estimation (figure 3.18) issues de chaque observateur, on constate que l'erreur d'estimation de FKE est la plus grande, face à une large variation provoquée sur X_{DCO}^{in} . En d'autres termes, le FKE a l'écart type de l'erreur d'estimation le plus grand. Les états estimés à l'aide d'un OKE grand gain sont plus bruités que les deux autres observateurs.

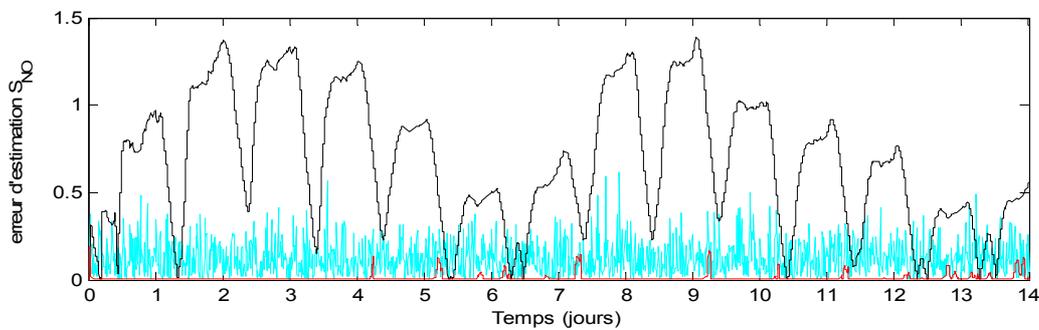
Paramètre	Valeur
Q	diag (10^{-2} , 10^{-2} , 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-3})
R	eye(3,3)
θ_{max}	8×10^3
β	2000
m_1	0.001
m_2	0.032
ΔT	0.01
λ	200
d	0.1

Tableau 3.7. Valeurs des différents paramètres

Paramètre	Valeur
α_1	1483
α_2	307
α_3	861
α_4	689
α_5	135
α_6	5303
α_7	1403
α_8	0.019
α_9	16069
α_{10}	12855
α_{11}	743
α_{12}	272
α_{13}	218
K_{DCO}	511
K_{ND}	272
$X_{B,A}$	147 gDCOm^{-3}
$X_{B,H}$	2692 gDCOm^{-3}
$k_I a$	240 d^{-3}
V_O	6000 m^3

Tableau 3.8. Choix final des paramètres de l'observateur adaptatif

L'observateur grand gain adaptatif possède la meilleure réponse puisqu'il combine les avantages d'un filtre de Kalman et d'un OKE grand gain : la convergence des états estimés vers les états réels, dans le cas d'une large variation, et la rejection de bruit (plus faible écart type de l'erreur d'estimation et plus faible moyenne de l'erreur d'estimation).



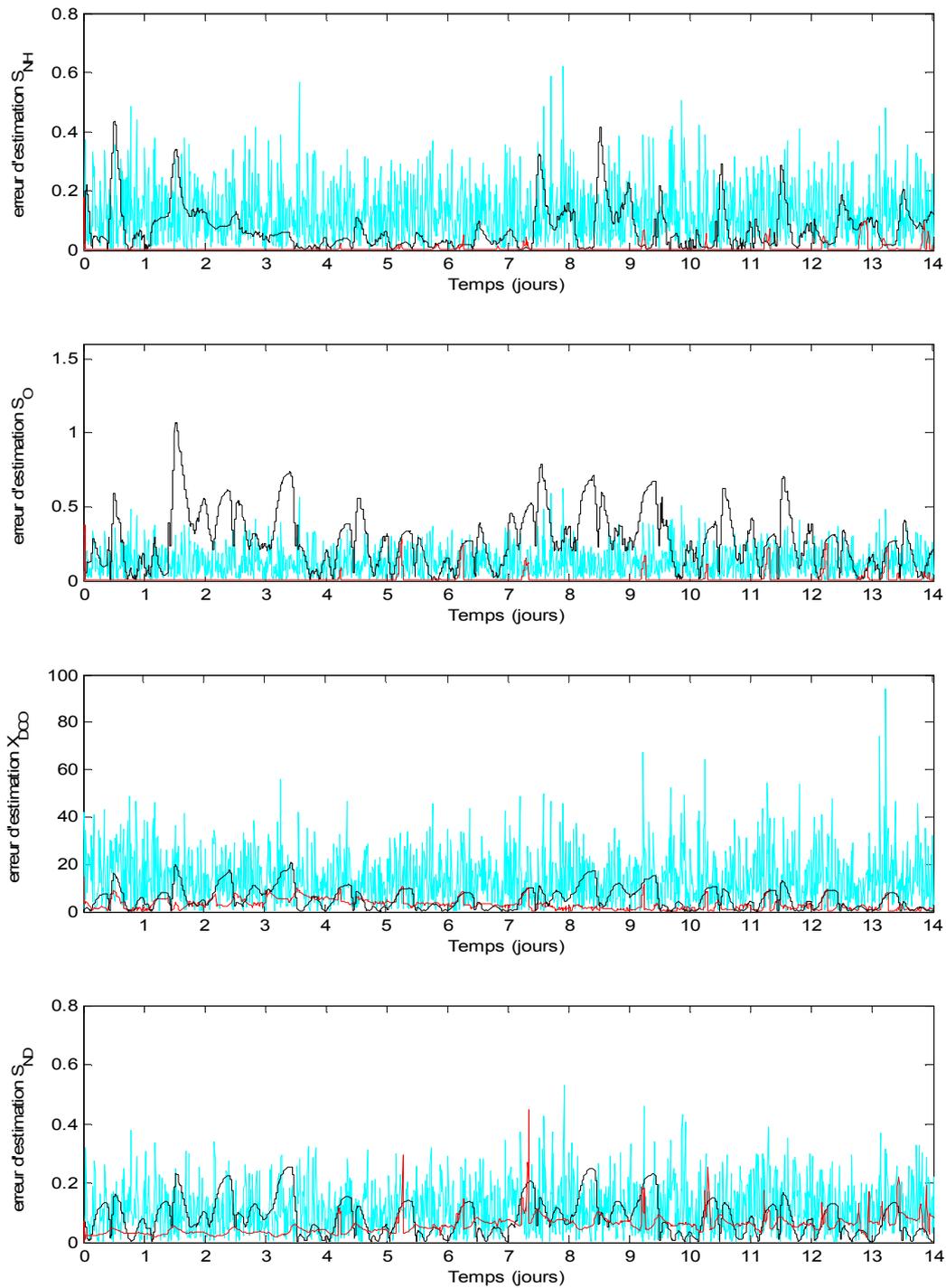


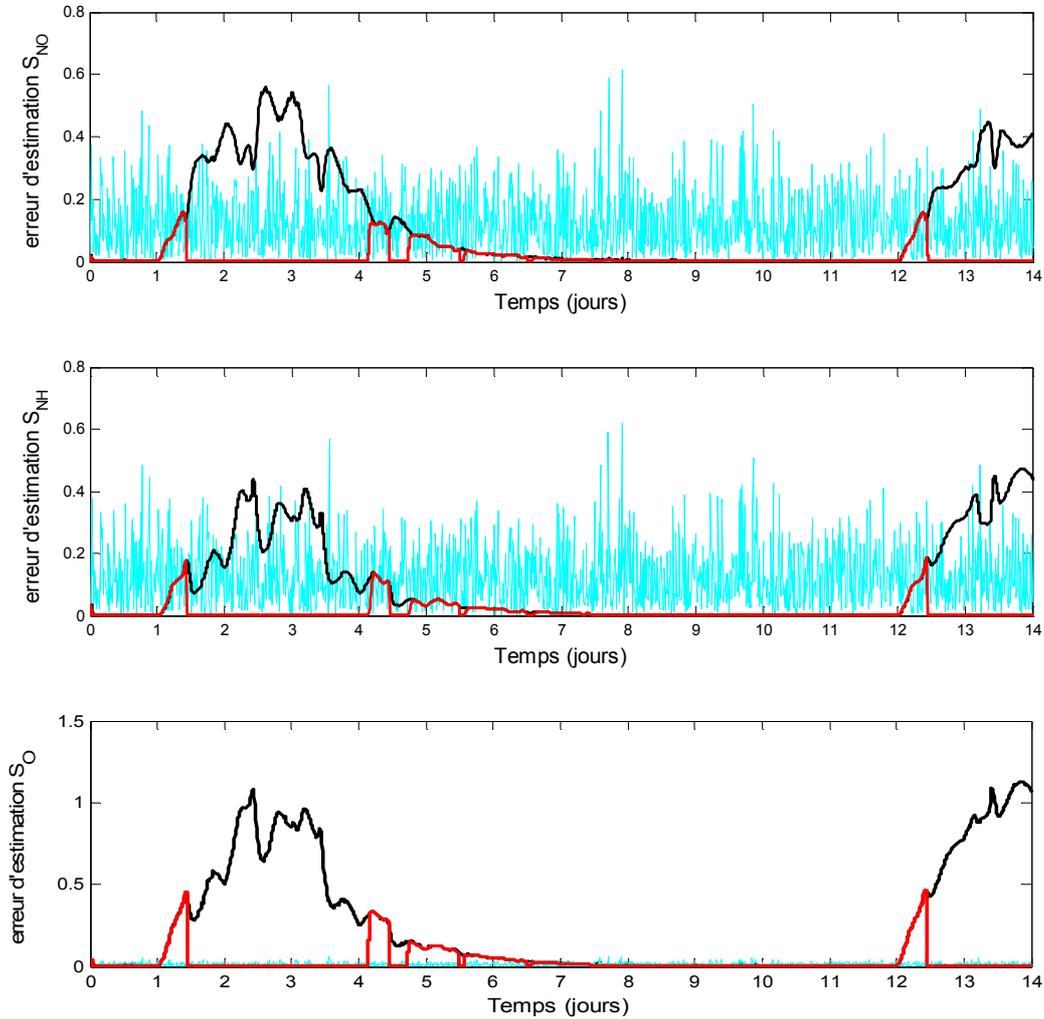
Figure 3.18. Comparaison entre les erreurs d'estimation des trois observateurs. Légende :
 — FKE — OKE grand gain et — filtre de Kalman étendu grand gain adaptatif

Le filtre de Kalman étendu grand gain adaptatif a la moyenne et l'écart type de l'erreur d'estimation les plus faibles que ceux d'un observateur de Kalman étendu grand gain et d'un filtre de Kalman étendu.

	FKE		OKE grand gain		FKE grand gain adaptatif	
	moyenne	Écart type	Moyenne	Écart type	Moyenne	Écart type
S_{NO}	0.6735	0.3781	0.1245	0.0957	0.0065	0.0201
S_{NH}	0.0719	0.0956	0.1232	0.0724	0.0029	0.0127
S_O	0.1244	0.1936	0.2800	0.0958	0.0082	0.0347
X_{DCO}	5.6377	4.6283	13.778	10.958	2.9816	2.2929
S_{ND}	0.0854	0.0829	0.1123	0.0620	0.0577	0.0310

Tableau 3.9. La moyenne et l'écart type de l'erreur d'estimation pendant 14 jours pour un temps sec.

Les résultats de simulation sont plus clairs dans le cas où l'estimation du modèle réduit est comparée avec les données recueillis sur le même modèle ASM1 réduit (figure 3.19).



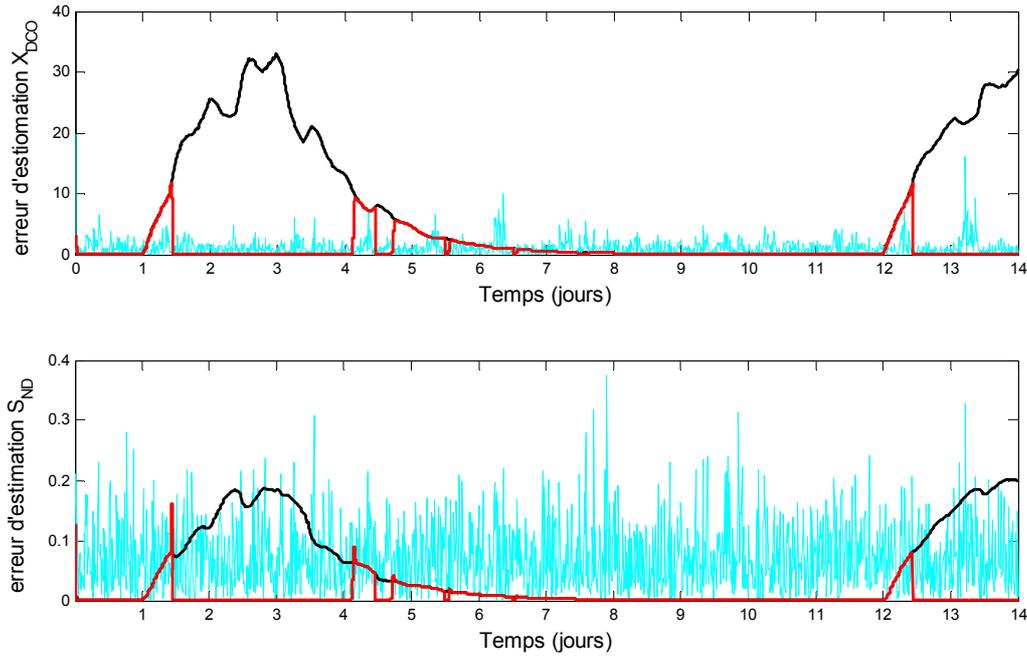


Figure 3.19. Comparaison entre les erreurs d'estimation des trois observateurs (Modèle ASM1 réduit). Légende : —FKE —OKE grand gain et — filtre de Kalman étendu grand gain adaptatif

3.5. Conclusion

Avant d'aborder le problème d'estimation d'état d'une station d'épuration biologique à boues activées, la première partie de ce chapitre avait pour but de présenter les notions de base d'épuration des eaux usées par voie biologique : une caractérisation globale des constituants des eaux usées ainsi que des populations biologiques, la mise en œuvre des principales interactions métaboliques entre les micro-organismes épurateurs et les matières polluantes à traiter, et la description des différentes étapes pour le traitement des eaux résiduaires. La mise en relief des éléments épurateurs et polluants mis en jeu, et la spécification du rôle de chacun permettent d'établir un modèle mathématique décrivant les divers opérations d'épuration. De ce fait, une brève présentation du modèle ASM1 ainsi que son modèle réduit élaboré par [Chachuat, 2001], a été donné.

La deuxième partie a été consacrée à une comparaison entre l'observateur de Kalman étendu grand-gain, le filtre de Kalman étendu et le filtre de Kalman étendu grand-gain adaptatif. Ces trois observateurs ont été appliqués à un modèle ASM1 réduit d'une station d'épuration biologique à boues activées. Cet observateur adaptatif se comporte comme un filtre de Kalman étendu lorsque l'innovation est faible et un observateur de Kalman étendu grand gain quand l'innovation devient assez large.