Figures et raisonnements géométriques dans un environnement de géométrie dynamique

Nous l'avons vu dans la section 1.4, l'objectif principal de ce travail de thèse est de construire des parcours d'apprentissage qui prennent en compte les démarches des élèves pour les faire entrer dans la géométrie théorique. Ces parcours d'apprentissage sont implémentés dans un EIAH. En ce qui concerne la géométrie et en particulier les constructions, le travail des élèves se situe donc dans un environnement de géométrie dynamique.

Dans la section 2.3, nous avons présenté des travaux théoriques qui permettent de s'interroger sur les impacts de l'utilisation d'un EIAH dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Dans ce chapitre, nous nous intéressons en particulier aux logiciels de géométrie dynamique. Nous étudions comment certains des aspects épistémologiques liés aux figures géométriques, aux constructions et aux raisonnements relevés dans le chapitre 3 sont modifiés dans l'environnement de géométrie dynamique.

La géométrie est « un lieu privilégié où les apports spécifiques de l'ordinateur peuvent le mieux s'exprimer » (Bellemain, 1992, p. 7). Cette affirmation est reprise quelques années plus tard lors de l'étude ICMI de 1998 concernant l'enseignement de la géométrie à venir au XXI^{e} siècle : « Among all the subjects which are part of the school mathematics curriculum, geometry stands as one which is bound to be influenced most profoundly by the recent progress both in hardware and software development

[...] especially in connection with so-called dynamic geometry software » [1] (Osta et al., 1998, p. 109). L'ancienneté des études sur le sujet de la géométrie dynamique le montre. En effet, depuis l'introduction de l'outil informatique dans les classes, on se pose la question de son intérêt pour la géométrie en particulier. Aujourd'hui, les TICE et notre rapport à ceux-ci ont bien évolué depuis les années 80 mais beaucoup des questions soulevées à cette époque sont toujours d'actualité, notamment parce que les interactions entre l'environnement informatique et l'environnement papier-crayon traditionnel ainsi que celles avec l'environnement de la classe en général sont assez complexes à étudier (Sinclair et al., 2017, p. 278).

Comme le résument Grugeon et Duvert (2001), les élèves doivent mettre en place un nouveau contrat concernant la géométrie dynamique :

— par rapport aux connaissances géométriques embarquées dans le logiciel ;

— par rapport aux objets logiciels et à leurs statuts ;

— par rapport à la distinction entre dessin dynamique et figure logicielle (critères de validité d'une figure géométrique) ;

— par rapport à l'utilisation du vocabulaire géométrique.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous demandons donc comment se manifeste ce nouveau rapport aux connaissances et aux objets géométriques et sur quels aspects en particulier nous pouvons nous appuyer pour l'élaboration des modèles des tâches, de l'élève et des parcours d'apprentissage que nous présentons dans le chapitre 7.

6.1 Une réification des propriétés géométriques

Comme nous l'avons vu dans la section 2.3, il est nécessaire de prendre en compte les notions de transposition informatique des savoirs mathématiques et de genèses instrumentales des élèves et des enseignants lorsque nous étudions l'utilisation de technologies [2] en cours de mathématiques. Nous nous intéressons maintenant plus précisément à la question des logiciels de géométrie dynamique. Il en existe de nombreux mais nous nous concentrerons surtout sur les logiciels ouverts [3] qui

1. Traduction personnelle : « Parmi tous les sujets qui font partie du programme de mathématiques de l'école, la géométrie est l'un de ceux qui sont susceptibles d'être le plus profondément influencés par les progrès récents en matière de développement matériel et logiciel [...], notamment en ce qui concerne les logiciels de géométrie dite dynamique. »

2. Ici au sens des TICE.

3. C'est-à-dire des logiciels pour lesquels l'élaboration de situations didactiques les exploitant est entièrement à la charge de l'enseignant, l'environnement fournissant seulement un cadre pour cette élaboration (Artigue, 1997).

permettent d'afficher et déplacer les objets géométriques directement (à l'aide de la souris ou du pavé tactile) [4]. Les plus connus sont CABRI (anciennement CABRI-GÉOMÈTRE), qui a fait l'objet de nombreuses études en didactique des mathématiques (Bellemain, 1992 ; Laborde & Capponi, 1994 ; Luengo, 1997 ; Soury-Lavergne, 1998 ; Restrepo, 2008), et GEOGEBRA, actuellement plus utilisé dans les classes en France.

6.1.1 Déplacements dans un environnement de géométrie dynamique

La notion de déplacement est un élément central de l'utilisation des logiciels de géométrie dynamique que nous considérons. Elle a fait l'objet de nombreuses références en didactique des mathématiques et dans le domaine des EIAH depuis l'introduction des logiciels permettant le déplacement des objets tracés à l'écran par la manipulation directe.

Dans les environnements de géométrie dynamique, il existe en fait plusieurs types de déplacements liés aux types de points que l'on peut créer :

- le point libre peut être déplacé partout dans l'écran ;
- le point sur un objet implique un déplacement « contraint ou limité » (Restrepo, 2008, p. 42) sur l'objet auquel appartient le point ;
- le point « non attrapable » implique un déplacement « indirect » (Restrepo, 2008, p. 42) puisqu'on ne peut pas le déplacer directement. Il est nécessaire de passer par le déplacement des points desquels il dépend. Par exemple, un point construit à l'intersection de deux droites ne peut pas être attrapé, il se déplace sur l'écran lorsqu'on déplace les points qui sous-tendent les deux droites auxquelles il appartient.

a. Paradigme des constructions robustes

Le déplacement par manipulation directe est considéré comme une composante importante offrant une rétroaction aux actions de l'élève (Laborde & Capponi, 1994, p. 175). À savoir que si la figure n'est pas **robuste**, qu'elle ne résiste pas au déplacement, c'est qu'elle n'a pas été construite « selon des procédés adéquats à la géométrie » (Lagrange & C.-Dedeoglu, 2009, p. 199). En effet, le déplacement conserve les propriétés géométriques mises en jeu dans la construction par l'utilisation des outils, mais ne conserve pas forcément les propriétés spatio-graphiques de la

4. Nous n'aborderons pas la question des tablettes et des smartphones dans cette thèse.

figure auxquelles s'attachent pourtant souvent les élèves lorsqu'ils construisent une figure.

Ainsi, Laborde et Capponi montrent que le déplacement joue un rôle très important dans l'évolution des procédures des élèves. Ils lui distinguent deux fonctions :

— « il disqualifie des procédures au jugé [...] ce qui entraîne les élèves à analyser le dysfonctionnement du Cabri-dessin, et à le modifier en conséquence ;

— il met visuellement en évidence des invariants géométriques et suscite ainsi la rectification de procédures erronées » (Laborde & Capponi, 1994, p. 194).

Le déplacement dans les logiciels de géométrie dynamique favorise la distinction entre le dessin et la figure (Grugeon & Duvert, 2001 ; Assude & Grugeon, 2004) en faisant mieux apparaître les liens entre propriétés spatio-graphiques et propriétés géométriques car la figure construite doit respecter un certain nombre de contraintes même déplacée sur l'écran (Laborde, 2005 ; Soury-Lavergne, 2007). Ainsi, l'enseignant peut, par exemple, faire remarquer que l'orientation horizontale ou verticale des côtés perpendiculaires d'un triangle rectangle (positions prototypiques) est une propriété spatio-graphique liée à une configuration particulière mais n'est pas une propriété géométrique du triangle rectangle.

Le déplacement peut également permettre de séparer les propriétés conjoncturelles, des propriétés constitutives (Mithalal, 2010, p. 26). Par exemple, le triangle peut avoir l'air rectangle sans que cela soit pertinent pour la résolution en cours. Les propriétés constitutives sont alors des « invariants du déplacement, ce qui conduit certains auteurs à parler de **réification des propriétés** » (Mithalal, 2010, p. 26, c'est nous qui soulignons). Balacheff définit la réification de connaissances comme la « visualisation et manipulation directe d'entités abstraites donnant à voir des comportements évocateurs de leurs propriétés » (Balacheff, 1994b, p. 367). Le déplacement dans l'environnement de géométrie dynamique permet ainsi de réifier des relations entre les objets géométriques qui restent la plupart du temps implicites dans l'environnement papier-crayon.

Enfin, le déplacement des objets à l'écran est aussi un moyen d'obtenir plus de configurations d'une même figure (Lagrange & C.-Dedeoglu, 2009, p. 198-199). Il peut ainsi être utilisé pour lutter contre l'installation des figures prototypiques.

Cependant, le déplacement ne va pas de soi pour l'élève (Laborde & Capponi, 1994 ; Mariotti, 2000 ; Soury-Lavergne, 2007). Non seulement, il doit savoir qu'il peut effectivement déplacer les objets à l'écran mais il doit également apprendre à interpréter géométriquement ce déplacement. Or, même quand l'élève pense à déplacer les figures, il ne déplace pas forcément tous les points libres pertinents de sa construction et pas non plus dans toutes les directions, ce qui peut l'empêcher de constater certaines déformations (Soury-Lavergne, 2007, pp. 327-328). Ainsi le déplacement fait lui aussi l'objet d'une genèse instrumentale, il n'est pas « une fonctionnalité évidente de la géométrie dynamique, mais [...] un instrument pour faire des mathématiques qui doit être construit par les élèves au cours de leur interaction avec le logiciel [...]. L'instrument est construit par l'élève quand ce dernier est capable d'utiliser cette possibilité de l'environnement pour résoudre un problème particulier » (Soury-Lavergne, 2007, pp. 328-329). L'élève construit ainsi différents instruments « déplacement » selon les finalités qu'il lui donne : déplacer pour identifier une propriété invariante, déplacer pour remarquer qu'une propriété ne se conserve pas, déplacer pour émettre une conjecture, déplacer pour valider ou invalider une construction, etc. (Soury-Lavergne, 2007, p. 340).

b. Paradigme des constructions molles

Assez logiquement d'après ce que nous venons de voir, le déplacement est souvent présenté par les enseignants comme un moyen de vérifier que sa construction est correcte car ne se déformant pas lorsque ses points sont déplacés. C'est ce que Laborde (2005) appelle le paradigme des constructions robustes. Cependant, comme nous avons commencé à le souligner, le déplacement peut être utilisé à d'autres fins et en particulier dans le cadre du paradigme des **constructions molles** (Laborde, 2005). Ce type de déplacements permet de positionner les points de la figure dans une configuration faisant apparaître certaines propriétés (Gousseau-Coutat, 2006, p. 67), ce qui favorise l'élaboration d'une argumentation heuristique. Les propriétés réalisées sont alors éphémères et la construction réalisée est appelée une construction molle.

Les élèves (de tous les niveaux scolaires) utilisent souvent « naturellement » ce paradigme comme le montre, par exemple, Jones (1998) qui observe quatre étudiants diplômés en mathématiques résoudre le problème de construction d'un cercle tangent à deux droites sécantes. Pendant les premiers essais, ces étudiants construisent un cercle qu'ils ajustent en le déplaçant et en faisant varier sa taille (c'est-à-dire en déplaçant un des points du cercle de manière à l'éloigner ou le rapprocher du centre). Ils recommencent ainsi plusieurs fois la construction en utilisant de plus en plus de propriétés géométriques au fur et à mesure qu'ils les découvrent et de moins en moins le paradigme de la construction molle. La plupart du temps, les élèves ou étudiants qui agissent de même ne présentent à l'enseignant que leur travail final dans lequel les constructions molles successives n'apparaissent pas, l'enseignant ne les remarque donc pas (Laborde, 2005). Selon Laborde, les constructions molles devraient être officiellement introduites par l'enseignant et exploitées en classe au même titre que les constructions robustes. Elles paraissent en effet particulièrement pertinentes dans une phase heuristique. Dans la section 3.1.4, nous avons montré que les représentations d'une figure géométrique et en particulier un schéma codé ont une forte fonction heuristique. Dans l'environnement de géométrie dynamique, le déplacement des figures à l'écran constitue une autre source d'heuristiques. Cependant, dans les tâches de construction que nous proposons aux élèves, nous visons la construction de figures robustes. L'élève doit donc remettre en jeu les propriétés potentiellement découvertes dans une phase heuristique de construction molle en faisant le lien avec les outils de construction disponibles dans le milieu.

6.1.2 Les outils de construction des logiciels de géométrie dynamique

Le déplacement n'est donc pas le seul outil à disposition des élèves dans l'environnement de géométrie dynamique. S'il est particulièrement utilisé pour valider la robustesse d'une figure géométrique, celle-ci est en fait construite à partir des primitives proposées par les logiciels (Laborde & Capponi, 1994). Ces primitives sont aussi appelées « commandes », « méthodes de construction » ou encore « outils » par Bellemain (1992). Nous choisissons de parler d'outils, et en particulier d'outils de construction, conservant le vocabulaire que nous avons adopté jusque-là, désignant à la fois les outils de l'environnement informatique et de l'environnement papier-crayon.

a. Différences entre les outils de construction des environnements papier-crayon et informatique

Les outils de construction des environnements de géométrie dynamique sont souvent nommés à partir de l'objet qu'ils permettent de construire. Par exemple, l'outil « droite » de Cabri ou de GeoGebra est utilisé pour construire une droite à l'écran. Ce sont ces outils de construction qui permettent à l'élève de communiquer au logiciel le programme de construction qu'il a établi dans la phase heuristique pour construire sa figure (Bellemain, 1992 ; Laborde & Capponi, 1994). Les autres outils de construction sont souvent nommés à partir d'une propriété géométrique. Par exemple, les outils « perpendiculaire » ou « parallèle ». C'est une autre réification des propriétés dans l'environnement de géométrie dynamique. Par la suite, en particulier dans la partie II de cette thèse, nous parlerons souvent des outils de report de longueur et de construction d'angles. Le premier se traduit la plupart du temps par l'outil « cercle » dans les logiciels de géométrie dynamique, en lien avec la caractérisation du cercle comme ensemble des points à la même distance du centre. On trouve aussi des outils « compas » dans les environnements CABRI et GEOGEBRA [5] mais nous les laisserons de côté. Le constructeur d'angle correspond aux outils nommés à partir de l'objet qu'ils permettent de construire (« angle » dans CABRI et « angle de mesure donnée » dans GEOGEBRA par exemple). Enfin, d'autres outils du logiciel ne permettent pas de construire un objet géométrique mais servent à mesurer (un angle, une longueur ou une distance, une aire, etc.) ou sont liés à la gestion de l'affichage sur l'écran (outil pour écrire du texte, pour afficher/cacher un objet, etc.). Nous ne nous intéressons pas à ces outils par la suite.

Les logiciels de géométrie dynamique proposent ainsi un certain nombre d'outils de construction ou non que l'élève peut sélectionner dans un menu. De la même manière que l'enseignant peut empêcher l'élève d'utiliser un outil spécifique dans l'environnement papier-crayon, il peut masquer certains outils de l'interface du logiciel : « le fait de confronter l'élève à un ensemble réduit de commandes peut être l'occasion de privilégier l'apparition de certaines stratégies dans la résolution d'un problème » (Bellemain, 1992, p. 82). Mais l'enseignant peut également créer, ou faire créer de nouveaux outils par l'élève, beaucoup plus facilement que dans l'environnement papier-crayon. Ces nouveaux outils sont en fait des macros qui englobent une série d'actions (Laborde, 2002). Il est ainsi possible de prendre en charge certains opérations « pratiques » mais coûteuses en temps d'exécution pour se concentrer sur des aspects conceptuels (Bellemain, 1992, p. 82). C'est-à-dire, en reprenant les notions de valences pragmatiques et épistémiques des techniques (cf. section 2.3.3), de proposer des techniques utilisant des outils avec une meilleure valence pragmatique mais aussi une meilleure valence épistémique.

Soury-Lavergne (2003) et Athias (2014) montrent que le passage des outils de construction usuels aux outils de construction du logiciel se fait en appui sur des techniques anciennes. Les élèves et les enseignants parlent par exemple du compas

5. Leur fonctionnement est très différent. Dans CABRI, le fonctionnement se rapproche de celui du compas dans l'environnement papier-crayon : le compas est représenté à l'écran, il faut cliquer sur un premier point (le centre) puis sur un deuxième et faire glisser la pointe du compas pour tracer un arc de cercle. Dans GEOGEBRA, il faut cliquer sur un segment déjà créé pour que le logiciel crée instantanément un cercle de rayon de même longueur que le segment. On peut ensuite déplacer ce cercle sur l'écran. À noter qu'on peut déjà utiliser l'outil « cercle » de CABRI de cette façon.

ou de l'équerre à la place des outils « cercle » ou « perpendiculaire » du logiciel car ils n'associent pas forcément l'instrument dans l'environnement papier-crayon avec la propriété géométrique qu'il embarque et qui apparaît directement dans un environnement de géométrie dynamique. L'utilisation des outils de construction du logiciel peut d'ailleurs se rapprocher de celle mise en œuvre dans le contexte papier-crayon, par exemple la création des points libres, des segments ou des droites. Cependant, d'autres démarches sont particulières au logiciel comme la construction du cercle qui se fait traditionnellement en utilisant un compas mais qui nécessite de cliquer sur deux points (le centre et un point du cercle) pour l'outil « cercle » le plus courant dans l'environnement informatique (Assude & Gélis, 2002 ; Soury-Lavergne, 2003). Un autre exemple est celui de l'outil « point » qui permet en fait de construire trois types de points (libre, sur un objet ou non attrapable) comme nous l'avons vu dans la section 6.1.1. Même si on peut généralement construire ces trois types de points avec le même outil « point », les logiciels proposent également des outils « point sur objet » et « intersection » afin de les distinguer, ce qui n'est pas possible dans l'environnement papier-crayon.

b. Caractéristiques des outils de construction de géométrie dynamique

Dans l'EIAH MindMath nous nous appuyons sur certaines caractéristiques des outils de construction de l'environnement de géométrie dynamique.

Les outils de construction d'un environnement de géométrie dynamique peuvent ainsi faciliter une vision non iconique et la mobilisation des déconstructions dimensionnelles et instrumentales des objets géométriques. Par exemple, l'élève sur le logiciel n'utilise pas une équerre (outil qui favorise une vision en deux dimensions) pour tracer l'angle droit d'un carré mais l'outil « perpendiculaire » qui, sur une droite donnée et en un point donné, construit une autre droite, favorisant une vision en une dimension. Il passe ainsi d'une vision 2D de la figure géométrique à une vision 1D. De plus, parce que l'outil « perpendiculaire » trace des droites et non des segments, les côtés du carré vus comme « finis » dans l'environnement papier-crayon sont plus facilement vus comme des droites qui se coupent perpendiculairement deux à deux en quatre points dans l'environnement logiciel.

Contrairement à ce qui se passe dans l'environnement papier-crayon, l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique amène également une certaine hiérarchie de dépendances entre les objets construits à l'écran qui ne peut pas être modifiée sans recommencer toute la construction (Jones, 2000, p. 59). Ce phénomène peut être profitable, notamment parce que l'élève passe ainsi « d'une logique de description à une logique de construction géométrique » (Grugeon & Duvert, 2001).

Ainsi, dans la section 3.5.2, nous avons vu qu'un jeu sur les outils de construction à disposition pouvait permettre de favoriser la mobilisation de différentes propriétés. Cependant, ce jeu sur les outils de construction montre certaines limites dans l'environnement papier-crayon. Laborde et Capponi (1994) citent par exemple la recherche de Grenier (1988) qui étudie la construction de l'axe de symétrie d'un trapèze isocèle à la règle non graduée et au compas par des élèves de 6^{e}. Pour résoudre cette tâche, des élèves détournent l'utilisation des outils de construction qui leur sont proposés. Ils utilisent la section de leur règle comme unité de mesure alors que l'enseignant attend la mobilisation de la propriété d'intersection de deux droites homologues (par la symétrie axiale) sur l'axe. Cependant, « il ne peut le dire aux élèves car il les empêcherait de trouver seuls la solution au problème (paradoxe de la dévolution des situations, Brousseau 1986, p.66). Il refuse donc l'une après l'autre les solutions proposées par les différents groupes en arguant du fait qu'elles ne sont pas précises, ce qui est incompréhensible par les élèves, pour lesquels le recours à la mesure est associé à précision » (Laborde & Capponi, 1994, p. 185). Ici, parce que les élèves comprennent la tâche « comme portant sur un tracé et non sur le procédé » (Laborde & Capponi, 1994, p. 185), le jeu sur les outils de construction ne suffit pas à les amener à mobiliser les propriétés attendues.

Or, contrairement aux outils de construction classiques de l'environnement papier-crayon, il est plus difficile de détourner les outils de construction du logiciel de leur fonction (Bellemain, 1992, p. 82). Par exemple, on ne peut pas directement utiliser l'outil qui permet de mesurer pour reporter une longueur dans le logiciel alors que les élèves peuvent détourner la règle graduée pour cet usage dans l'environnement papier-crayon. Nous nous appuyons sur cette particularité dans la conception des tâches de construction que nous proposons pour imposer la mise en œuvre de certaines propriétés grâce à la restriction des outils de construction ou de mesure à disposition. Les outils du logiciel pouvant plus difficilement être détournés, et encore plus difficilement être détournés pour obtenir une figure robuste, valide géométriquement (Laborde & Capponi, 1994, p. 185), retirer certains des outils à disposition revient à empêcher complètement l'utilisation de certaines propriétés, qu'elles soient pertinentes ou non pour la construction visée.

c. Liens entre le compas et le cercle

L'appui sur les démarches de l'environnement papier-crayon peut aussi être un obstacle à l'utilisation du logiciel. Laborde et Capponi ont par exemple observé « des élèves sachant tracer sur papier crayon un triangle équilatéral avec un compas, désemparés face à la même tâche dans Cabri-géomètre : ils ne reconnaissent pas le cercle entier comme contenant les arcs de cercle qu'ils utilisaient en papier crayon » (Laborde & Capponi, 1994, p. 183). Même constat pour Gélis et Assude pour qui « les enfants ont bien du mal à associer la création explicite sous Cabri d'un cercle "entier", avec le tracé très limité d'arcs de cercles "locaux" » (Gélis & Assude, 2002, p. 467). Ces élèves ne font pas le lien entre le cercle et l'arc de cercle parce qu'ils ne semblent pas mobiliser la définition du cercle comme un ensemble de points à la même distance du centre. Or c'est un outil essentiel dans les environnements papier-crayon et informatiques dans de nombreuses constructions pour reporter des longueurs.

Soury-Lavergne (2003) fait le même constat en étudiant la construction d'un carré à partir de ses côtés par une élève de 4e et un élève de 3e. Ceux-ci, guidés par une préceptrice, utilisent tous les deux l'outil « cercle » comme un outil de report de longueur. Cependant, selon Soury-Lavergne, c'est ici « la connaissance géométrique en tant qu'outil (au sens de la dialectique outil-objet de Douady) qui est sollicitée et qui conduit l'utilisateur à employer l'instrument compas ou la primitive cercle. Ainsi, même si les connaissances outils sur le cercle opèrent dans la mise en œuvre d'une primitive ou d'un instrument dont elles permettent de contrôler le fonctionnement, elles peuvent rester implicites sous la forme de théorèmes en acte. Elles ne sont donc pas forcément disponibles explicitement pour transférer l'usage du compas papier-crayon à la primitive cercle de Cabri-géomètre » (Soury-Lavergne, 2003, pp. 24-25).

Cet obstacle peut être dépassé comme l'affirme Artigue dans son étude sur l'utilisation du logiciel de géométrie dynamique EUCLIDE[6]. Elle indique que les élèves, n'ayant pas la possibilité de reporter les longueurs comme ils le font avec le compas dans l'environnement papier-crayon, ont rapidement été conduits « à donner au cercle un statut qu'il n'acquiert que difficilement dans les conditions usuelles d'enseignement » (Artigue, 1991, p. 8). Nous nous appuyons sur ce résultat pour faire l'hypothèse que l'élève sera amené à faire le lien entre l'outil de construction

6. Ce n'est pas un logiciel que nous considérons par la suite car l'interaction avec le logiciel se fait au moyen de commandes textuelles rédigées par les élèves.

utilisé et la (ou les) propriété(s) géométrique(s) qui le sous-tend(ent) plus rapidement que dans l'environnement papier-crayon.

6.2 Construire et prouver dans un environnement de géométrie dynamique

Dans cette section, nous étudions certains aspects de l'activité de construction et de preuves dans un environnement de géométrie dynamique. Nous faisons notamment le lien avec certains des critères que nous avons présentés dans la section 4.3, en particulier :

— les outils utilisés pour la construction : outils de dessin, utilisation combinatoire d'outils de construction, utilisation réfléchie d'outils de construction ;

— la validation de la construction : pas de validation, validation perceptive ou par les instruments de tracé, validation en utilisant le déplacement, validation théorique.

Le critère correspondant au type de constructions réalisé (construction au jugé, construction molle, construction robuste) a été abordé dans la section 6.1.1.

6.2.1 Construire dans un environnement de géométrie dynamique

Lagrange et C.-Dedeoglu expliquent qu'à « la différence d'autres logiciels graphiques, construction et déplacement [dans les logiciels de géométrie dynamique] obéissent aux règles de la géométrie euclidienne » (Lagrange & C.-Dedeoglu, 2009, pp. 198-199). De plus, « l'ordinateur introduit la nécessité d'une communication par l'intermédiaire de commandes qui donnent un caractère générique aux notions manipulées » (Bellemain, 1992, p. 84). Néanmoins Houdement et Kuzniak (2003) considèrent que les logiciels comme Cabri ou GeoGebra restent dans le paradigme de la géométrie naturelle (GI) parce que les mathématiques ne peuvent pas régir complètement ces environnements. Par exemple, à cause des approximations numériques inhérentes à l'implémentation sur un ordinateur, deux droites dans une configuration de triangles indiquées comme parallèles par le logiciel peuvent ne pas respecter les rapports de Thalès. Nous gardons cependant l'idée que dans un contexte de construction de figures robustes, l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique contraint mathématiquement les constructions réalisées à l'aide des outils proposés beaucoup plus que dans l'environnement papier-crayon.

En revanche, certains aspects des logiciels éloignent au contraire les élèves de la démarche mathématique attendue à leur niveau scolaire. Ainsi, comme dans l'environnement papier-crayon (cf. section 3.3.5), on peut distinguer deux grandes catégories de traitement et de validation dans l'analyse des dessins tracés à l'écran ou sur une feuille (Laborde, 1994) :

— traitements et validations perceptifs, reconnaissance visuelle des phénomènes ;

— traitements et validations par des connaissances théoriques géométriques.

Mais lorsque l'élève construit une figure dans un logiciel de géométrie dynamique, on observe, en plus des stratégies purement visuelles ou purement géométriques, des stratégies correspondant à des utilisations combinatoires d'outils de construction sans intention particulièrement définie. Les outils de construction des logiciels sont en effet beaucoup plus faciles et rapides à manipuler (une fois leur utilisation comprise) que ceux de l'environnement papier-crayon. S'il peut être coûteux d'utiliser dix fois sa règle, son compas et son équerre dans différentes combinaisons, il l'est beaucoup moins de cliquer simplement dix fois sur les différents boutons du menu.

Bellemain explique que le logiciel favorise ainsi souvent une démarche par essais successifs, « le tâtonnement [...] devient beaucoup plus acceptable comme mode de résolution pour l'élève » (Bellemain, 1992, p. 86).

> « Tout se passe comme si le tâtonnement, en milieu informatique, était non seulement valorisé par le fait qu'il devient moins coûteux, plus efficace, mais aussi se trouvait anobli, médiatisé qu'il est par l'intervention du milieu informatique, donc faisant intervenir des instruments et des modes d'action plus élaborés que le tâtonnement en papier/crayon » (Artigue, 1991, p. 19).

Ce tâtonnement peut prendre plusieurs formes. Il peut s'agir de recommencer plusieurs fois une construction comme l'élève pourrait le faire dans l'environnement papier-crayon mais aussi d'essayer de façon un peu systématique tous les outils de construction à disposition, en particulier si leur nombre a été restreint par l'enseignant (Laborde & Capponi, 1994, p. 192). Ainsi, l'utilisation des outils de construction du logiciel n'est pas la preuve d'un travail géométrique de la part de l'élève (Laborde & Capponi, 1994, p. 186). Néanmoins, parce que l'élève sait que la configuration géométrique qu'il a produite, potentiellement par chance, est le résultat de l'utilisation d'outils de construction du logiciel, il peut être sûr qu'elle peut être reproduite en utilisant les règles de la géométrie (Osta et al., 1998).

Du fait de l'interface des logiciels de géométrie dynamique qui proposent un certain nombre d'outils de construction, l'élève peut également être amené :

- « d'une part, à ne composer pour ces constructions qu'avec les méthodes proposées ;
- d'autre part, à utiliser des méthodes qu'il ne connaît pas ou à ne pas mettre en œuvre une méthode qu'il connaît parce que n'étant pas proposée » (Bellemain, 1992, p. 118).

Cette tendance à travailler par essais-erreurs en combinant les outils de construction à disposition tient au moins en partie au fait que les élèves ont du mal à recourir au brouillon lorsqu'ils travaillent dans un environnement informatique. Typiquement, ils essaient de faire tous les calculs de tête (quand une calculatrice n'est pas fournie dans le logiciel) plutôt que de les écrire (Stacey & Wiliam, 2012, p. 736). Assude et Gélis (2002) remarquent le même phénomène et l'appellent le conflit « entre la souris et le crayon ». Même lorsque le travail dans l'environnement informatique s'accompagne d'un travail écrit explicitement donné par l'enseignant, les élèves, peu habitués à ces types de tâches, continuent de privilégier le logiciel et n'écrivent que très peu ou pas du tout sur leur feuille.

Concernant l'EIAH que nous élaborons, nous essayons de limiter les tâtonnements sans fondement géométrique [7] en proposant des rétroactions adaptées aux réponses de l'élève, à son mode de justification (cf. section 4.3) et dans sa ZPD (cf. section 2.2.2) comme nous l'aborderons dans le chapitre 8.

6.2.2 Prouver dans un environnement de géométrie dynamique

Si nous nous intéressons à la construction de figures planes dans un environnement de géométrie dynamique, c'est avec l'objectif de faire développer aux élèves une argumentation heuristique mettant en jeu des îlots déductifs pour élaborer un programme de construction et ainsi favoriser l'entrée dans le raisonnement de la géométrie dynamique en particulier mobilisé dans des tâches de preuve au cycle 4 (cf. section 1.2.2). Or, les logiciels de géométrie dynamique peuvent également être utilisés pour travailler la notion de preuve. De nombreux auteurs tels De Villiers (1998), Osta

7. Nous ne parlons pas ici du tâtonnement qui consiste à produire des figures d'abord dans le paradigme des constructions molles, avant d'intégrer de plus en plus de propriétés géométriques dans la construction comme nous l'avons vu dans la section 6.1.1.

et al. (1998) ou Lagrange et C.-Dedeoglu (2009) réfutent l'idée que l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique comme moyen de validation annulerait complètement chez l'élève tout besoin de preuves déductives. Même s'il peut sembler en effet moins nécessaire de se lancer dans la rédaction d'une preuve déductive lorsqu'on a l'occasion de vérifier sa conjecture à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique (visuellement ou avec les outils proposés), de nouvelles questions apparaissent. En particulier, l'élève peut continuer à se demander « pourquoi » la conjecture est vérifiée (lien avec les différentes raisons de prouver (Hanna, 1995)). Ainsi, Hadas, Hershkowitz, et Schwarz (2000) font l'hypothèse que des activités bien construites dans le logiciel de géométrie dynamique peuvent créer des situations de contradiction. Celles-ci provoquent de la surprise ou du doute chez les élèves qui sont alors encouragés à chercher des explications. Hadas et al. (2000) distinguent alors six utilisations possibles du logiciel de géométrie dynamique dans ce contexte :

- faire émerger des conjectures ;
- réfuter ou confirmer une conjecture (formulée à l'aide du logiciel ou non) et dans le cas d'une réfutation, exhiber un contre-exemple ;
- guider les élèves d'une conjecture initiale à une autre ;
- amener les élèves à se convaincre qu'une conclusion est vraie en se basant sur des essais inductifs ;
- permettre la construction d'un exemple dans le cas d'une preuve d'existence ;
- donner de nouvelles sources d'explication.

Le déplacement joue un rôle important dans ce travail sur les conjectures. Comme nous l'avons vu dans la section 6.1.1, il permet de remarquer des invariants qui peuvent être des propriétés géométriques plus rapidement que dans l'environnement papier - crayon.

Dans une autre perspective mais toujours pour introduire ou travailler la notion de preuve, Osta et al. (1998) pensent que la construction de certaines configurations géométriques permet de soutenir l'intuition d'une démonstration. Hoyles et Jones (1998) développent cette idée en proposant de reproduire dans l'environnement de géométrie dynamique une figure donnée sur papier. La figure ne doit pas se « déformer » lors du déplacement, ce qui pousse les élèves à se concentrer sur les relations entres les objets géométriques qui composent la figure. C'est aussi ce que propose plus récemment Soury-Lavergne à partir d'une figure donnée sur le logiciel de géométrie dynamique et en ajoutant un travail sur la distinction entre les « propriétés données » et les « propriétés déduites ». En effet, « certaines propriétés de la figure n'apparaissent pas dans l'énoncé : ce sont celles qui s'en déduisent. Cela peut permettre de susciter chez les élèves une question : pourquoi certaines propriétés de la figure sont-elles préservées au cours du déplacement et pourtant n'apparaissent pas dans l'énoncé ? Une telle constatation motive l'introduction d'un premier pas de déduction de la part de l'enseignant » (Soury-Lavergne, 2007, p. 326).

Comme nous l'avons vu, nous nous appuyons également sur les types de tâches de construction pour amener les élèves à développer une argumentation heuristique qui met en jeu des îlots déductifs. À partir des données de l'énoncé mais aussi des éléments de la figure déjà présents à l'écran, l'élève doit inférer dans une phase heuristique, puis déduire dans une phase d'élaboration du raisonnement, des propriétés qui lui permettront d'élaborer un programme de construction puis de construire la figure avec les outils de construction présents dans le milieu.

Comme Hoyles et Healy (1997), les énoncés que nous proposons indiquent que la figure ne doit pas se déformer. La validation de la construction ne revient donc plus au professeur mais à l'élève lui-même qui doit s'appuyer sur les rétroactions du logiciel (Artigue, 1991 ; Bellemain, 1992 ; Laborde, 2005). Cette validation ne constitue pas encore tout à fait une validation théorique mais, comme nous l'avons vu, les constructions dans le logiciel sont mathématiquement contraintes et les rétroactions liées au déplacement et à l'utilisation des outils réifient certaines propriétés géométriques, elles permettent donc de commencer à entrer dans une validation théorique des constructions.

6.3 Géométrie dynamique dans les programmes en 2020

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié les programmes et manuels scolaires en vigueur à la rentrée 2020 sur la question de l'entrée dans la géométrie théorique et en particulier par les problèmes de construction. Pour compléter cette analyse, dans cette section, nous étudions succinctement la place et le rôle occupés par la géométrie dynamique dans les programmes de 2020.

Dans un premier temps, même si les programmes mentionnent effectivement la géométrie dynamique, celle-ci reste globalement anecdotique et ce constat semble assez constant depuis les années 90. Ainsi Caliskan-Dedeoglu qui analyse les programmes du collège de 1996 indique que « dans les programmes, les propositions d'usages de la GD [Géométrie Dynamique] apparaissent dans peu de contenus : sur 17 contenus de travaux géométriques au collège, 4 recommandent ces usages de façon ponctuelle » (Caliskan-Dedeoglu, 2006, p. 58). De la même façon, Restrepo remarque que les programmes du collège de 2004 évoquent bien l'utilisation d'outils informatiques qui pourraient « permettre une meilleure conceptualisation aux élèves » ou encore « permettre aux élèves de faire le passage du dessin à la figure, en explorant une construction afin de trouver ses propriétés géométrique ». Mais les programmes restent très allusifs et « dans la pratique, peu d'enseignants mettent en œuvre ce type de situations par manque de temps, de connaissances instrumentales ou [par] manque d'éléments et de données leur permettant de mettre en œuvre des situations utilisant l'ordinateur » (Restrepo, 2008, p. 18).

Nous étudions à notre tour les programmes scolaires de 2020 des cycles 3 et 4. Les outils informatiques y occupent une place, notamment dans le thème « algorithmique et programmation » apparu dans le programme du cycle 4 de 2016. Néanmoins, la place de la géométrie dynamique reste très restreinte. Dans les deux programmes scolaires, on peut lire dans l'introduction concernant les mathématiques : « de même, des activités géométriques peuvent être l'occasion d'amener les élèves à utiliser différents supports de travail : papier et crayon, mais aussi logiciels de géométrie dynamique, d'initiation à la programmation ou logiciels de visualisation de cartes, de plans, etc. » (*Programme du cycle 3*, 2020, p. 90) et « l'utilisation d'outils comme le tableur, la calculatrice, un logiciel de géométrie dynamique ou de programmation permet de gérer des données réelles ou expérimentales, de faire des représentations et des simulations, de programmer des objets techniques et d'inscrire l'activité mathématique dans les domaines 4 et 5 du socle [8] » (*Programme du cycle 4*, 2020, p. 129). Les logiciels de géométrie dynamique sont présentés comme un outil parmi d'autres pour travailler les notions géométriques.

Si nous nous intéressons aux attendus de fin de cycle et aux connaissances et compétences associées du domaine « espace et géométrie », maintenant, nous remarquons que la géométrie dynamique est moins souvent mentionnée encore que dans les programmes de 1996 décrits par Caliskan-Dedeoglu (2006). Celle-ci apparaît une fois au cycle 3 dans le thème « reconnaître, nommer, décrire, reproduire, représenter, construire quelques solides et figures géométriques » : « réaliser une figure plane simple ou une figure composée de figures simples à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique » (*Programme du cycle 3*, 2020, p. 97). Une fois également au cycle 4 dans le thème « représenter l'espace » : « utiliser un logiciel de géométrie dynamique

8. Le domaine 4 du socle correspond à l'intitulé « les systèmes naturels et les systèmes techniques » et le domaine 5 à l'intitulé « les représentations du monde et l'activité humaine ».

pour représenter des solides » (*Programme du cycle 4*, 2020, p. 136). De plus, nous notons, même si ce n'est pas repris dans les attendus de fin de cycle, la mention de la géométrie dynamique en lien avec les transformations géométriques : « de nouvelles transformations (symétries centrales, translations, rotations, homothéties) font l'objet d'une première approche, basée sur l'observation de leur effet sur des configurations planes, essentiellement à partir de manipulations concrètes (papier calque, papier pointé, quadrillage, etc.) ou virtuelles (logiciel de géométrie dynamique) » (*Programme du cycle 4*, 2020, p. 136).

Les documents d'accompagnement scolaire nous fournissent un peu plus d'éléments. En particulier au cycle 3 puisqu'on peut lire dans le document d'accompagnement *Espace et géométrie au cycle 3* que « l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique au cycle 3, par l'enseignant face à la classe en vidéoprojection ou par les élèves eux-mêmes, doit permettre de familiariser les élèves à un outil qu'ils utiliseront au cycle 4 dans le cadre de la résolution de problèmes notamment pour émettre des conjectures. Cet outil peut permettre de faire travailler les élèves sur les propriétés des figures géométriques planes, en utilisant l'aspect dynamique du logiciel, la déformation d'une figure fera que certaines propriétés seront ou non conservées » (*Espace et géométrie au cycle 3*, 2018, p. 18).

On trouve cependant peu de traces de cet « outil [utilisé] au cycle 4 dans la résolution de problèmes » dans le document *Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer* proposé pour le cycle 4. Celui-ci évoque simplement l'usage d'outils informatiques divers dont les logiciels de géométrie dynamique mis en avant à trois reprises :

— d'abord en donnant quelques spécificités de tels logiciels : « un logiciel de géométrie dynamique est un outil pour construire, déformer ou transformer une figure plane » (*Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer*, 2016, p. 2) ;

— puis concernant les tâches de construction, il est indiqué que les élèves doivent « se familiariser progressivement avec les fonctionnalités d'un logiciel de géométrie dynamique permettant des constructions » (*Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer*, 2016, p. 4) sans que l'on précise comment ni pour quelles constructions ;

— et enfin, pour résoudre un problème-exemple qui nécessite de démontrer la nature d'un triangle, les auteurs du document indiquent que « la solution peut d'abord être appréhendée à l'aide d'une figure tracée en vraie grandeur et

> en utilisant l'équerre, ou encore un logiciel de géométrie dynamique affichant les mesures d'angles, ou encore offrant un test d'orthogonalité » (*Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer*, 2016, p. 8).

Nous voyons encore ici que l'utilisation des logiciels de géométrie dynamique bien que systématiquement proposée parmi d'autres outils reste très anecdotique et ses potentialités sont rapidement évoquées. Notons également qu'en mathématiques, pour les cycles 3 et 4, il n'y a aucun document d'accompagnement spécifique à la géométrie dynamique.

6.4 Retour à la problématique

Nous avons vu dans ce chapitre que nous pouvons nous appuyer sur certains aspects des environnements de géométrie dynamique pour concevoir un milieu pour les tâches de construction en lien avec les conditions didactiques à la création d'un milieu riche que nous avons étudiées dans la section 3.5. Ces aspects sont :

— le déplacement pour valider des figures robustes mais surtout pour invalider des figures qui ne respectent pas toutes les propriétés géométriques de la figure demandée dans l'énoncé. De plus, le déplacement peut également être utilisé dans une phase heuristique en passant par la construction de figures molles ;

— les outils de construction du logiciel qui réifient certaines propriétés des figures à construire et sont, pour la plupart, utilisables pour cette seule propriété. Nous pouvons également jouer sur les outils de construction à disposition dans le milieu comme dans l'environnement papier - crayon (cf. section 3.5.2).

Ces aspects sont donc particulièrement liés à la notion d'environnement mathématiquement contraint permettant de construire des figures géométriques robustes à partir d'outils de construction qui réifient les propriétés géométriques.

Dans cette thèse, nous n'étudions pas la question de la genèse instrumentale des enseignants et des élèves même si nous verrons dans le chapitre 8 que nous la prenons au moins partiellement en compte sur les aspects purement techniques d'utilisation des outils de construction du logiciel. Nous verrons également dans le chapitre 9 qu'elle peut être un obstacle à l'utilisation de l'EIAH MindMath par les élèves.

De plus, comme l'expliquent Grugeon et Duvert (2001) les élèves doivent mettre en place un nouveau contrat concernant la géométrie dynamique. L'enseignant joue un rôle très important dans cette mise en place. Nous verrons dans le chapitre 7, qu'au-delà d'une utilisation personnelle du logiciel qui a été envisagée, c'est l'enseignant qui choisit les objectifs d'apprentissage des parcours d'apprentissage proposés aux élèves. Cependant, sa gestion de l'utilisation du logiciel en classe (attributions des parcours aux élèves, moments didactiques auxquels il propose l'utilisation du logiciel, etc.) ne sera pas étudiée ici.

Enfin, nous ne nous attardons pas non plus sur le travail effectué concernant la transposition informatique des savoirs en jeu dans l'EIAH. Cependant, dans le chapitre 7, nous présenterons l'ontologie qui exprime les liens entre les praxéologies et le modèle du savoir implémentés dans l'EIAH et sur lesquels nous nous appuyons pour organiser les savoirs et communiquer avec les autres acteurs non didacticiens du projet *MindMath*.

Deuxième partie

Conception des modèles didactiques dans un EIAH et expérimentations