La construction d'Abbes et Saito pour les connexions méromorphes le cas d'un trait

Sommaire

Dans cette partie, on démontre une formule explicite 2.2.4 reliant la construction d'Abbes et Saito [3] appliquée à un module différentiel $\mathcal{M}$ aux polynômes de Laurent de degré $\leq r-1$ intervenant dans la décomposition de Levelt-Turrittin de $\mathcal{M}$.

Après avoir détaillé la géométrie de la construction et l'énoncé du résultat principal, on commence en 2.3 par réduire le problème au cas où le corps de base est $\mathbb{C}$. Il s'agit d'une manifestation du principe de Lefschetz. La stratégie est alors de se ramener à la situation où $\mathcal{M}$ est donné sous forme décomposée tout en contrôlant la façon dont sont affectés les cycles proches qui interviennent dans la construction d'Abbes et Saito. Ce dernier point est l'objet de 3.2.1. On conclut alors grâce aux lemmes d'annulation de 3.5 et à un calcul explicite.

1 Notations et rappels

1. On désigne par $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, par $\overline{\mathbb{K}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{K}$, et on note $G_{\mathbb{K}}$ le groupe de Galois de $\overline{\mathbb{K}}$ sur $\mathbb{K}$. Pour une extension quelconque $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$, la présence d'un indice $\mathbb{L}$ sera synonyme de changement de base à une situation sur $\mathbb{L}$. Cet indice sera omis lorsque $\mathbb{L}=\mathbb{K}$.
   Si X est une variété sur $\mathbb{K}$ et P un point fermé de X, on désignera par $\mathbb{K}(P)$ le corps résiduel de P. Il s'agit d'une extension finie de $\mathbb{K}$.
2. Si S est un schéma et $\mathcal{E}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_S$-modules quasi-cohérent sur S, on note suivant [14] $\mathbf{V}(\mathcal{E})$ pour le spectre de l'algèbre quasi-cohérente $\operatorname{Sym}_{\mathcal{O}_S}\mathcal{E}$ et $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ pour le Proj de $\operatorname{Sym}_{\mathcal{O}_S}\mathcal{E}$.
3. On notera $\mathfrak{F}$ la transformation de Fourier sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$, et pour un point fermé P de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$, on désignera par δ_P le $\mathcal{D}$-module Dirac en P. Dans une coordonnée y de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$, le point P correspond à l'orbite sous $G_{\mathbb{K}}$ d'un scalaire $c\in\overline{\mathbb{K}}$. Si $\mu_c(y)$ est le polynôme minimal de c sur $\mathbb{K}$, δ_P est par définition $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}}/\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}}\mu_c(y)$.
4. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathbb{K}((x))$-module différentiel. On rappelle que le théorème de Levelt-Turrittin [52] assure l'existence d'un entier m et d'une extension galoisienne finie $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ tels que
   $$\mathbb{L}((t))\otimes_{\mathbb{K}((x))}\mathcal{M}\simeq\bigoplus_{\omega\in\mathbb{L}[\frac{1}{t}]\frac{1}{t}}\mathcal{E}^{\omega}\otimes\mathcal{R}_{\omega}\tag{1.0.3}$$
   avec $t=x^{1/m}$, $\mathcal{E}^{\omega}=(\mathbb{L}((t)),d+d\omega)$ et $\mathcal{R}_{\omega}$ régulier de rang noté n_{ω}. Le plus petit entier m tel que (1.0.3) ait lieu est *l'indice de ramification de* $\mathcal{M}$. On le notera $m_{\mathcal{M}}$.
   Pour un nombre rationnel $r>0$, on note $\Omega_r(\mathcal{M})$ le fermé de $\mathbf{V}(\mathbb{K}(t))$ constitué des polynômes en $1/t$ de degré r par rapport à la variable $1/x$ apportant une contribution non-nulle dans (1.0.3), et $\Omega_{<r}(\mathcal{M})$ pour $\sqcup_{r'<r}\Omega_{r'}(\mathcal{M})$. On aura à considérer l'application
   $$t_r:\mathbf{V}(\mathbb{K}(t))\longrightarrow\mathbf{V}(\mathbb{K}\tfrac{1}{x^r})$$
   associant à ω son monôme de degré r en la variable $1/x$, ainsi que l'application
   $$c_r:\mathbf{V}(\mathbb{K}(t))\longrightarrow\mathbf{V}(\mathbb{K})$$
   qui associe à ω le coefficient de $t_r(\omega)$.

5. Soit $p : Y \longrightarrow X$ un morphisme de variétés algébriques lisses sur $\mathbb{K}$. Soit Z une hypersurface de X et $\mathcal{M}$ une connexion sur X méromorphe le long de Z. Alors, on sait que l'image inverse $p^+\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$ par p admet $p^*\mathcal{M}$ pour $\mathcal{O}_Y$-module sous-jacent. Si on suppose que p est étale au-dessus de $U = X \setminus Z$, alors pour une connexion $\mathcal{N}$ méromorphe le long de $f^{-1}(Z)$, le $\mathcal{O}_X$-module sous-jacent à $p_+\mathcal{N}$ est $p_*\mathcal{N}$. Dans ces conditions, le morphisme d'adjonction $\mathcal{M} \longrightarrow p_+p^+\mathcal{M}$ est l'adjonction usuelle des $\mathcal{O}_X$-modules.

2 La construction d'Abbes et Saito

2.1 Prologue géométrique

On rappelle ici le nécessaire concernant la notion de dilatation. Pour une exposition plus circonstanciée, on pourra se reporter à [3].

Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas sur $\mathbb{K}$, D un sous-schéma fermé de X défini par un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ et E un sous-schéma fermé de $f^{-1}(D)$ défini par un faisceau d'idéaux $\mathcal{J}$ sur Y. Alors $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y \subset \mathcal{J}$, de sorte qu'on dispose d'un morphisme de $\mathcal{O}_Y$-algèbres graduées

$$\theta : f^*(\oplus_{\mathbb{N}} \mathcal{I}^n) \longrightarrow \oplus_{\mathbb{N}} \mathcal{J}^n. \tag{2.1.1}$$

Notons $\widetilde{Y}_E$ (resp. $\widetilde{X}_D$) l'éclaté de Y le long de E (resp. D). Si $\mathfrak{p} \in \widetilde{Y}_E$, alors $\theta^{-1}(\mathfrak{p})$ détermine un élément de $\widetilde{X}_D \times_X Y = \operatorname{Proj} f^*(\oplus_{\mathbb{N}} \mathcal{I}^n)$ si et seulement si $\mathfrak{p}$ est dans l'un des ouverts $D_+(\theta(x))$ de $\widetilde{Y}_E$, avec $x \in \mathcal{I}$ vu dans l'algèbre source comme élément de degré 1. On en déduit que $\cup_{x\in\mathcal{I}} D_+(\theta(x))$ est le plus grand ouvert de $\widetilde{Y}_E$, noté $Y_{(D)}$ sur lequel θ induit un morphisme de schémas $Y_{(D)} \to \widetilde{X}_D \times_X Y$.

Définition 2.1.2. On appelle $Y_{(D)}$ *la dilatation de* Y *en* E *par rapport à* D.

Soit $f : Y \to X$ un morphisme séparé de $\mathbb{K}$-schémas localement noethériens et $g : X \to Y$ une section de f. Le morphisme g est alors une immersion fermée. Soit D un sous-schéma fermé de X, de complémentaire U et $i : D \longrightarrow X$ l'injection canonique. Notons encore $Y_{(D)}$ le dilaté de Y en $g(D)$ par rapport à D. Si $E_{[D]}$ désigne le diviseur exceptionnel de $\widetilde{Y}_{g(D)}$ et $E_{(D)}$ l'intersection de $E_{[D]}$ avec l'ouvert $Y_{(D)}$, on dispose du diagramme

$$\begin{tikzcd}
E_{(D)} \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y_{(D)} \arrow[d, hook] \arrow[ddr, bend left] & \\
E_{[D]} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \widetilde{Y}_{g(D)} \arrow[d] & \\
D \arrow[r] & Y \arrow[r] & X
\end{tikzcd} \tag{2.1.3}$$

Lemme 2.1.4. *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
E_{(D)} \arrow[r] \arrow[d] & Y_{(D)} \arrow[d] & Y \times_X U \arrow[l] \arrow[d] \\
D \arrow[r] & X & U \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

est à carrés cartésiens.

Démonstration. Seul le caractère cartésien du diagramme de gauche pose a priori problème. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & & \\ & E_{(D)} \arrow[r] \arrow[d] & Y_{(D)} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \widetilde{Y}_{g(D)} \arrow[d] \\ & D \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Puisque $E_{[D]} = \widetilde{Y}_{g(D)} \times_D Y$, on obtient une factorisation canonique de $Z \longrightarrow Y_{(D)}$ à travers $E_{[D]}$. Le fait $Z \longrightarrow E_{[D]}$ se factorise par $E_{(D)}$ provient donc du caractère cartésien du carré supérieur de (8.1.2). □

Supposons de plus que D est un diviseur de Cartier globalement défini par une fonction régulière t. Alors par [15, 21.2.12], i est une immersion régulière donc [15, 16.9.13] assure que la suite des faisceaux conormaux pour $D \xrightarrow{i} X \xrightarrow{g} Y$

$$i^*\mathcal{N}^\vee_{X/Y} \longrightarrow \mathcal{N}^\vee_{D/Y} \longrightarrow \mathcal{N}^\vee_{D/X} \longrightarrow 0$$

est exacte. Si $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{J}$) désigne le faisceau d'idéaux de D dans X (resp. de $g(D)$ dans Y), cette suite s'explicite en

$$0 \longrightarrow i^*\mathcal{N}^\vee_{X/Y} \longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \xrightarrow{g^\sharp} \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow 0\,. \tag{2.1.5}$$

Puisque g est une section de f, $f^\sharp$ fournit un scindage

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \xrightarrow{\sim} i^*\mathcal{N}^\vee_{X/Y} \oplus \mathcal{I}/\mathcal{I}^2\,. \tag{2.1.6}$$

Supposons de plus que g est une immersion régulière. Alors, $g \circ i$ est aussi régulière et on a suivant [15, 16.9.3] une identification canonique $\mathrm{Sym}\,\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \xrightarrow{\sim} \oplus_{\mathbb{N}}\mathcal{J}^n/\mathcal{J}^{n+1}$, d'où une identification $E_{[D]} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$.

Soit U un ouvert affine de X, et notons encore par t la restriction de la fonction régulière t à U. Avec les notations de 2.1.1, $E_{(D)|U} = E_{[D]|U} \cap D_+(\theta(t)) = D_+([f^\sharp(t)])$, avec $[f^\sharp(t)] \in \mathrm{Sym}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$ de degré 1. Donc à travers l'identification (2.1.6), $\mathfrak{p} \in E_{[D]|U}$ définit un élément de $E_{(D)|U}$ si et seulement si $\mathfrak{p}$ ne contient pas $0 \oplus [t] \in \mathrm{Sym}(i^*\mathcal{N}^\vee_{X/Y} \oplus (t)/(t^2))$ vu en degré 1, soit encore que $\mathfrak{p}$ est d'intersection nulle avec le facteur $(t)/(t^2)$ placé en degré 1.

Or $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \simeq i^*\mathcal{O}_X(-D) := \mathcal{O}_D(-D)$ est un fibré en droite sur D trivialisé par t. On a donc un isomorphisme $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \otimes \mathcal{O}_D(D)$ et en utilisant (2.1.6), on en déduit une identification

$$E_{[D]} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}(i^*\mathcal{N}^\vee_{X/Y} \otimes \mathcal{O}_D(D) \oplus \mathcal{O}_D).$$

A travers cette identification $E_{(D)}$ correspond aux $\mathfrak{p} \in \mathbf{P}(i^*\mathcal{N}^\vee_{X/Y} \otimes \mathcal{O}_D(D) \oplus \mathcal{O}_D)$ ne rencontrant pas le facteur $\mathcal{O}_D$ placé en degré 1. C'est donc selon [14, 8.4.1] le fibré vectoriel $\mathbf{V}(i^*\mathcal{N}^\vee_{X/Y} \otimes \mathcal{O}_D(D))$. Du fait de l'identification $\mathcal{N}^\vee_{X/Y} \simeq g^*(\Omega^1_{Y/X})$, on a obtenu la

Proposition 2.1.7 (interprétation différentielle de la fibre spéciale du dilaté)**.** *Avec les notations de 2.1.4, si on suppose de plus que D est un diviseur de Cartier défini par une fonction régulière globalement définie, et si g est une immersion régulière, alors on a une identification*
$$E_{(D)} \xrightarrow{\sim} \mathbf{V}((g\circ i)^*\Omega^1_{Y/X}\otimes \mathcal{O}_D(D))\ .$$

2.2 Enoncé du théorème

Soit S un trait complet sur $\mathbb{K}$. Le choix d'une uniformisante x de S induit une identification $S \simeq \operatorname{Spec} \mathbb{K}[\![x]\!]$. Soient $n\geq 1$ et $k\geq 1$ des entiers. On pose $r = k/n$, $t = x^{1/n}$ et on note D_k le diviseur de degré k de $S_n = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[\![t]\!]$. Soient s_n le point fermé de S_n, η_n son point générique et $\gamma_n : S_n \to S$ le morphisme d'élévation à la puissance n. Soit $S_{1,n}$ le complété de $S\times S_n$ en l'origine. Le graphe de γ_n induit une immersion fermée $\Gamma_n : S_n \to S_{1,n}$. Pour la structure de S_n-schéma sur $S_{1,n}$ donnée par la seconde projection, on définit $S_{1,n}(D_k)$ comme le dilaté de $S_{1,n}$ en $\Gamma_n(D_k)$ relativement à D_k. On en déduit suivant 2.1.4 le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} T_{D_k} \arrow[r, "i_{n,k}"] \arrow[d] & S_{1,n}(D_k) \arrow[d, "\pi"'] & S\times\eta_n \arrow[l, "j_{n,k}"'] \arrow[d] \\ D_k \arrow[r, "i_k"] & S_n & \eta_n \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{2.2.1}$$

avec une identification canonique

$$T_{D_k} \xrightarrow{\sim} \mathbf{V}((\Gamma_n\circ i_k)^*\Omega^1_{S_{1,n}/S_n}\otimes \mathcal{O}_{D_k}(D_k))\ .$$

Concrètement, $\Gamma_n(D_k)$ est le sous-ensemble algébrique de $S_{1,n}$ donné par l'idéal $\mathcal{J} = \big(x-t^n, t^k\big)$. Le choix des variables $y_0 = x-t^n$ et $y_1 = t^k$ placées en degré 1 fournit une présentation de l'algèbre éclatée de $S_{1,n}$ en $\mathcal{J}$, soit encore un plongement du schéma associé dans $S_{1,n}\times\mathbb{P}^1$. Suivant 2.1, le dilaté $S_{1,n}(D_k)$ en est l'ouvert affine $y_1\neq 0$, donné dans $S_{1,n}\times\mathbb{A}^1$ par l'équation $x-t^n-t^k y = 0$, où l'on a posé $y = y_0/y_1$. D'autre part, le choix des coordonnées x et t fournit les identifications

$$\Omega^1_{S_{1,n}/S_n} \simeq \mathbb{K}[\![x,t]\!]\cdot dx \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{s_n}(D_k)\simeq \mathbb{K}\cdot\frac{1}{t^k}\ .$$

Notons T_r le réduit [6] de T_{D_k}, et relions $\frac{dx}{x^r}$ au choix de la coordonnée y sur $S_{1,n}(D_k)$. Dans la situation présente, la suite exacte (2.1.5) s'explicite en

$$0\longrightarrow (x-t^n)/((x-t^n)^2, t^k(x-t^n))\longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2\longrightarrow (t^k)/(t^k)^2\longrightarrow 0\ ,$$

de sorte que (2.1.6) devient $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \simeq (y_0)\oplus(y_1)$. Via l'isomorphisme $\mathcal{N}^\vee_{S_n/S_{1,n}} \simeq \Gamma_n^*\Omega^1_{S_{1,n}/S_n}$, la coordonnée y_0 correspond à la classe de la forme différentielle $d(x-t^n)$, soit encore la classe de dx. On en déduit que, vu dans

$$T_r = \mathbf{V}((\Gamma_n\circ i_k^{\mathrm{red}})^*\Omega^1_{S_{1,n}/S_n}\otimes\mathcal{O}_{s_n}(D_k)), \tag{2.2.2}$$

6. Dans [3], le foncteur des cycles proches est considéré comme à valeur dans la catégorie dérivée des faisceaux sur $T_{D_k,\text{ét}}$. Le fibré T_{D_k} est un schéma sur D_k, non réduit en général. Par invariance du site étale par homéomorphisme universel [12, Exp VIII], on peut tout aussi bien se placer sur le réduit $T_{D_k}^{\mathrm{red}}$ qui est un schéma sur le point fermé s_n de S_n. C'est le point de vue qui doit être adopté lorsqu'on considère les cycles proches pour les $\mathcal{D}$-modules.

la coordonnée $y = y_0/y_1$ correspond exactement à $\frac{dx}{x^r}$. C'est par rapport à cette coordonnée privilégiée du fibré T_r que se feront tous les calculs.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathbb{K}((x))$-module différentiel. Le protagoniste de cet article est le $\mathcal{D}$-module sur $S_{1,n}(D_k)$

$$H_{n,k}\,(\mathcal{M}) := j_{k,n+}\mathcal{H}om(p_2^+\gamma_n^+\mathcal{M}, p_1^+\mathcal{M}),$$

où $p_1 : S \times \eta_n \longrightarrow S$ et $p_2 : S \times \eta_n \longrightarrow \eta_n$ sont les projections canoniques. Soit $\omega \in \Omega_{r-1}(\mathcal{M})$. Notons $[\omega]$ l'image de ω par la composée

$$\mathbf{V}(\mathbb{K}(t)) \xrightarrow{c_{r-1}} \mathbf{V}(\mathbb{K}) \xrightarrow{(1-r)\times} \mathbf{V}(\mathbb{K}\cdot y^\vee) \simeq T_r^\vee\ .$$

Il s'agit d'un point fermé de $T_r^\vee$.

Lemme 2.2.3. *Le point $[\omega]$ est indépendant du choix des uniformisantes x et t.*

Démonstration. Soit en effet $x' = f(x)x$, $f(0) \neq 0$ et $t' = g(t)t$, $g(0) \neq 0$ un autre choix d'uniformisantes de S et S_n respectivement, avec $g(t)^n = f(t^n)$. D'après (2.2.2), on a les égalités suivantes dans $\overline{\mathbb{K}}[T_{r,\overline{\mathbb{K}}}]$

$$y' = \frac{dx'}{x'^r} = \frac{f(0)}{g(0)^k}\frac{dx}{x^r} = g(0)^{n-k}y,$$

d'où on déduit que $y'^\vee = y^\vee/g(0)^{n-k}$. Soit $\omega \in \Omega_{r-1}(\mathcal{M})$ et soit $\widetilde{\omega}$ un $\overline{\mathbb{K}}$-point de $\Omega_{r-1}(\mathcal{M})$ au-dessus de ω. La relation

$$t_{r-1}(\widetilde{\omega}) = \frac{c_{r-1}(\widetilde{\omega})}{x^{r-1}} = \frac{g(t)^{k-n}c_{r-1}(\widetilde{\omega})}{x'^{r-1}}$$

assure que $c_{r-1}(\widetilde{\omega})' = g(t)^{k-n}c_{r-1}(\widetilde{\omega})$. On a donc dans $\overline{\mathbb{K}}[T^\vee_{r,\overline{\mathbb{K}}}]$ les égalités d'idéaux

$$(y'^\vee + (r-1)c_{r-1}(\widetilde{\omega})') = g(0)^{k-n}(y^\vee + (r-1)c_{r-1}(\widetilde{\omega})) = (y^\vee + (r-1)c_{r-1}(\widetilde{\omega})).$$

□

Notons Ψ_π le foncteur des cycles proches par rapport à π pour les modules holonomes sur $S_{1,n}(D_k)$. Le but de ce texte est de démontrer le

Théorème 2.2.4. *On suppose que $r > 1$. Alors, le $\mathcal{D}_{T_r}$-module $\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M})$ ne dépend de n et k que par l'intermédiaire de r, et avec les notations de 1.4, on a la formule*

$$\mathfrak{F}\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}) = \delta_0^{n^2_{<r-1}(\mathcal{M})} \oplus \bigoplus_{\omega\in\Omega_{r-1}(\mathcal{M})} \delta_{[\omega]}^{[\mathbb{K}(\omega):\mathbb{K}([\omega])]n^2_\omega}, \tag{2.2.5}$$

où $n^2_{<r-1}(\mathcal{M})$ est l'entier $\displaystyle\sum_{\omega\in\Omega_{<r-1}(\mathcal{M})} [\mathbb{K}(\omega):\mathbb{K}]n^2_\omega.$

Remarque 2.2.6. Soit R un anneau de valuation discrète complet d'égale caractéristique p, d'idéal maximal $\mathfrak{M}$ et de corps résiduel F, supposé de type fini sur un corps parfait. On note K le corps de fraction de R. Soit $S = \operatorname{Spec} R$ le trait complet associé à R et η_S son point générique. On se donne un entier n multiple de p, un caractère $\chi \in H^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et pour un nombre premier $\ell \neq p$, on fixe une injection $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$. On note encore

$\chi : G_K \to \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$ le caractère induit, et $\mathcal{F}$ le $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-faisceau étale associé sur η_S.

Si le conducteur de Swan $\mathrm{sw}(\chi)$ de $\mathcal{F}$ vérifie $\mathrm{sw}(\chi) > 1$, Abbes et Saito démontrent [3, 9.10] que le support de $\mathfrak{F}\Psi H_{1,\mathrm{sw}(\chi)+1}(\mathcal{F})$ est réduit à la forme différentielle tordue

$$\mathrm{rsw}(\chi) : F \longrightarrow \Omega^1_R \otimes_R (\mathfrak{M}^{-\mathrm{sw}(\chi)-1}/\mathfrak{M}^{-\mathrm{sw}(\chi)})$$

donnée par la théorie de la ramification des caractères d'Artin-Schreier-Witt de Kato [3, 10]. Le théorème 2.2.4 pour $\mathcal{M}$ de type exponentiel en est l'exact analogue.

Quant à la finitude du support de $\mathfrak{F}\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M})$ en général (et le fait que celui-ci ne rencontre pas l'origine lorsque $\mathcal{M}$ est purement de pente $r' > 0$ et $r = r' + 1$ dans 2.2.4), il s'agit de l'analogue de [3, 9.3], démontrée dans *loc. it.* lorsque F est parfait.

Remarque 2.2.7. Puisque la construction fait aussi sens lorsque $k \leq n$, on peut se demander ce qu'elle donne dans ce cas. On montre en 5.1.1 qu'il n'y a pas grand chose à en attendre, puisque dans le cas particulier le plus simple où $\mathcal{M}$ est décomposé, on a toujours $\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}) \simeq 0$.

2.3 Réduction au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Il va s'agir d'une application du principe de Lefschetz. Soit $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$, $\overline{\mathbb{L}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{L}$ et $\overline{\mathbb{K}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{K}$ dans $\overline{\mathbb{L}}$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathbb{K}((x))$-module différentiel.

Proposition 2.3.1. *La formule* (2.2.5) *est vraie pour* $\mathcal{M}_\mathbb{L}$ *si et seulement si elle est vraie pour* $\mathcal{M}$.

Démonstration. On commence par observer que les manipulations géométriques intervenant dans la construction d'Abbes et Saito (2.2.1) commutent à l'extension des scalaires, de même que les foncteurs Ψ_π et $\mathfrak{F}$.

Supposons que (2.2.5) soit vraie pour $\mathcal{M}$ et considérons le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V}(\mathbb{L}(t)) \arrow[r] \arrow[d, "{[\ \ ]_\mathbb{L}}"'] & \mathbf{V}(\mathbb{K}(t)) \arrow[d, "{[\ \ ]}"] \\ T^\vee_{r,\mathbb{L}} \arrow[r] & T^\vee_r \end{tikzcd}$$

On a

$$\mathfrak{F}\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}_\mathbb{L}) = \delta_0^{n^2_{<r-1}(\mathcal{M})} \oplus \bigoplus_{\omega\in\Omega_{r-1}(\mathcal{M})} \bigoplus_{P_\omega\in[\omega]\times_\mathbb{K}\mathbb{L}} \delta_{P_\omega}^{[\mathbb{K}(\omega):\mathbb{K}([\omega])]n^2_\omega}. \tag{2.3.2}$$

Soient $\omega \in \Omega_{r-1}(\mathcal{M})$ et $P_\omega \in [\omega] \times_\mathbb{K} \mathbb{L}$. En développant les termes de (2.3.2) grâce aux formules

$$[\mathbb{K}(\omega) : \mathbb{K}([\omega])] = \sum_{\omega'\in P_\omega\times_{[\omega]}\omega} [\mathbb{L}(\omega') : \mathbb{L}([\omega']_\mathbb{L})],$$

$$[\mathbb{K}(\omega) : \mathbb{K}] = \sum_{\omega'\in\omega\times_\mathbb{K}\mathbb{L}} [\mathbb{L}(\omega') : \mathbb{L}],$$

on observe que la somme triple que l'on obtient se fait sur l'ensemble d'indice $\Omega_{r-1}(\mathcal{M})_{\mathbb{L}} = \Omega_{r-1}(\mathcal{M}_{\mathbb{L}})$. Vue de cette façon, elle s'explicite en

$$\mathfrak{F}\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}_{\mathbb{L}}) = \delta_0^{n^2_{<r-1}(\mathcal{M}_{\mathbb{L}})} \oplus \bigoplus_{\omega \in \Omega_{r-1}(\mathcal{M}_{\mathbb{L}})} \delta_{[\omega]_{\mathbb{L}}}^{[\mathbb{L}(\omega):\mathbb{L}([\omega]_{\mathbb{L}})]n^2_\omega},$$

qui est exactement la formule (2.2.5) pour $\mathcal{M}_{\mathbb{L}}$.

Supposons réciproquement que (2.2.5) est vraie pour $\mathcal{M}_{\mathbb{L}}$, à savoir

$$\mathfrak{F}\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M})_{\mathbb{L}} \simeq \delta_0^{n^2_{<r-1}(\mathcal{M}_{\mathbb{L}})} \oplus \bigoplus_{\omega \in \Omega_{r-1}(\mathcal{M})_{\mathbb{L}}} \delta_{[\omega]_{\mathbb{L}}}^{[\mathbb{L}(\omega):\mathbb{L}([\omega]_{\mathbb{L}})]n^2_\omega}. \tag{2.3.3}$$

Alors, le support de $\mathfrak{F}\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M})$ est réduit à un nombre fini de points fermés et 2.3.1 provient de ce que les multiplicités de ces points sont inchangées par extension des scalaires. □

Soit $\mathcal{N}$ un modèle algébrique de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire un $K[x, x^{-1}]$-module différentiel tel que $\mathcal{M} \simeq K((x)) \otimes_{K[x,x^{-1}]} \mathcal{N}$. Un tel modèle existe d'après [25, 2.4.10].

Soit $\mathbb{K}'/\mathbb{Q}$ l'extension de $\mathbb{Q}$ engendrée par les coefficients des polynômes de Laurent intervenant dans la matrice de ∂_x dans une base B choisie de $\mathcal{N}$. Si on note $\mathcal{N}_{\mathbb{K}'}$ le $\mathbb{K}'((x))$-module différentiel que le choix de base B définit, le lemme 2.3.1 assure qu'il suffit de prouver 2.2.4 pour $\mathcal{N}_{\mathbb{K}'}$. Puisque le degré de transcendance de $\mathbb{K}'/\mathbb{Q}$ est fini, on peut se donner un plongement de $\mathbb{K}'$ dans $\mathbb{C}$. Via ce choix de plongement, on se ramène toujours par 2.3.1 à démontrer 2.2.4 pour le module différentiel complexe qui se déduit de $\mathcal{N}_{\mathbb{K}'}$ par extension des scalaires.

Dans toute la suite, on supposera que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dans la coordonnée $y = \frac{dx}{x^r}$ de T_r, il s'agit donc de démontrer

$$\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}) = \mathcal{O}_{T_r}^{n^2_{<r-1}(\mathcal{M})} \oplus \bigoplus_{\omega \in \Omega_{r-1}(\mathcal{M})} (\mathcal{E}^{-(r-1)c_{r-1}(\omega)y})^{n^2_\omega}. \tag{2.3.4}$$

3 Quelques lemmes sur les cycles proches

3.1 Le cas complexe. Généralités et exemples

Pour les rudiments concernant les cycles proches pour les $\mathcal{D}$-modules, on pourra consulter [33]. Dans toute cette section, X désigne une variété complexe lisse, $f : X \to \mathbb{C}$ un morphisme lisse de fibre spéciale $Y = f^{-1}(0)$, $i : Y \longrightarrow X$ l'inclusion de Y dans X et $\mathcal{I}$ l'idéal de définition de Y. Soit

$$V_k(\mathcal{D}_X) = \{P \in \mathcal{D}_X, P(\mathcal{I}^l) \subset \mathcal{I}^{l-k} \quad \forall l \in \mathbb{Z}\}$$

la V-filtration de $\mathcal{D}_X$, et soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module spécialisable le long de Y (par exemple un module holonome). Alors on dispose pour toute V-filtration U localement image à décalage près de $V_{\cdot}(\mathcal{D}_X)^p$ par une surjection locale $\mathcal{D}_X^p \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$ (c'est la propriété de bonté d'une V-filtration) d'un unique polynôme unitaire b_U vérifiant pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$b_U(t\partial_t + k)U_k \in U_{k-1},$$

avec t équation locale de Y. On dit que b_U est le *polynôme de Bernstein de* $(U_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Il est indépendant du choix de l'équation locale de Y. Puisqu'un sous-module d'un module spécialisable est encore spécialisable, on peut définir pour $m \in \mathcal{M}$ le polynôme de Bernstein de m comme le polynôme de Bernstein de la bonne V-filtration $V_{\cdot}(\mathcal{D}_X)m$ sur $\mathcal{D}_X m$. On notera b_m ce polynôme, et $\mathrm{ord}_Y(m)$ l'ensemble de ses racines.

Soit $\geq$ l'ordre l'exicographique sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} + i\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{C}$, on définit

$$V_a(\mathcal{M}) = \{m \in \mathcal{M}, \mathrm{ord}_Y(m) \subset \{\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \geq -a-1\}\}$$

et

$$V_{<a}(\mathcal{M}) = \{m \in \mathcal{M}, \mathrm{ord}_Y(m) \subset \{\alpha \in \mathbb{C}, \alpha > -a-1\}\}.$$

D'après [33, 4.3-5], $(V_{a+k}(\mathcal{M}))_{k\in\mathbb{Z}}$ (resp. $(V_{<a+k}(\mathcal{M}))_{k\in\mathbb{Z}}$ est l'unique bonne V-filtration de $\mathcal{M}$ dont les racines du polynôme de Bernstein sont dans l'intervalle $[-a-1, -a[$ (resp. $]-a-1, -a]$). Si $\Psi_{f,a}\mathcal{M}$ désigne la quotient $V_a(\mathcal{M})/V_{<a}(\mathcal{M})$, on pose

$$\Psi_f\mathcal{M} := \bigoplus_{-1\leq a<0} \Psi_{f,a}\mathcal{M}. \tag{3.1.1}$$

Exemple 3.1.2. *Soit $\mathcal{E}$ une connexion algébrique sur X. Alors, on a une identification canonique $\Psi_f\mathcal{E} \simeq i^+\mathcal{E}$.*

Démonstration. Soit U un ouvert de trivialisation de $\mathcal{E}$ et (s_i) une trivialisation locale de $\mathcal{E}$ sur U. Par lissité de f, on peut toujours choisir U de telle sorte que Y soit le lieu d'annulation d'une coordonnée t. Alors $V_k := \sum V_k(\mathcal{D}_U)s_i$ est une bonne V-filtration de $\mathcal{E}$ sur U. Or par définition de $\mathcal{E}$, $t\partial_t s = t\sum f_i s_i \in V_{-1}$, de sorte que le polynôme de Bernstein $b_{V_{\cdot}} = b_{V_{\cdot}}(t\partial_t)$ de $V_{\cdot}$ divise $t\partial_t$. Mais $b_{V_{\cdot}}$ ne peut être constant, car sinon les s_i s'annuleraient dans les fibres de $\mathcal{E}$ au-dessus de Y. Ainsi $b_{V_{\cdot}} = t\partial_t$ et on a donc $V_a(\mathcal{E}) = V_0 = \sum V_0(\mathcal{D}_U)s_i = \mathcal{E}$ sur U pour $-1 \leq a < 0$, et $V_{<a}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ sur U pour $-1 < a < 0$. D'autre part, $(V_{k-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ admet $t\partial_t - 1$ pour polynôme de Bernstein, donc $V_{<-1}(\mathcal{E}) = V_{-1} = t\sum V_0(\mathcal{D}_U)s_i = t\mathcal{E}$. Par définition de Ψ_f, on en déduit une identification $\Psi_f\mathcal{E} \simeq i^+\mathcal{E}$ indépendante des choix faits, d'où le résultat. □

On dispose du résultat plus général

Proposition 3.1.3. *Soit $\mathcal{E}$ une connexion algébrique sur X et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome. Alors, on a une identification canonique $\Psi_f(\mathcal{E} \otimes \mathcal{M}) \simeq i^+\mathcal{E} \otimes \Psi_f\mathcal{M}$.*

Démonstration. Soit V une bonne filtration sur $\mathcal{M}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose

$$U_k = \mathcal{E} \otimes V_k.$$

Montrons qu'il s'agit d'une bonne V-filtration de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{M}$. On va pour cela utiliser le critère [33, 4.1–9].

Pour $k \in \mathbb{Z}$, il faut commencer par montrer la $V_0(\mathcal{D}_X)$-cohérence de U_k. Puisque $V_0(\mathcal{D}_X)$ est un faisceau d'anneaux localement noethérien et cohérent [33, 4.1-5], il suffit de montrer la finitude locale de U_k sur $V_0(\mathcal{D}_X)$. Soit $m_1, \ldots, m_n$ un système de $V_0(\mathcal{D}_X)$-générateurs locaux de V_k et $e_1, \ldots, e_n$ un système de $\mathcal{O}_X$-générateurs locaux de $\mathcal{E}$. On va montrer que les $e_i \otimes m_j$ forment un système de $V_0(\mathcal{D}_X)$-générateurs locaux de U_k. On se donne $e \in \mathcal{E}$, $f_1, \ldots, f_n$ les coefficients de e dans la base des (e_i), et $m \in V_k$. Pour $P \in V_0(\mathcal{D}_X)$, on désigne par $d(P)$ l'ordre de P. On pose alors

$$d_m = \mathrm{Min}\{\mathrm{Max}(d(P_j)), m = \sum P_j m_j \ \text{ avec } \ P_j \in V_0(\mathcal{D}_X)\}.$$

Il faut montrer que

$$e \otimes m \in \sum V_0(\mathcal{D}_X) \cdot (e_i \otimes m_j). \tag{3.1.4}$$

On raisonne par récurrence sur d_m, le cas $d_m = 0$ découlant du fait que le produit tensoriel envisagé est pris sur $\mathcal{O}_X$. Si $d_m > 0$, on choisit des opérateurs P_j qui réalisent d_m et on écrit

$$\sum P_j(e \otimes m_j) = e \otimes m + \sum Q_{ij} e \otimes R_{ij} m_j$$

avec $d_{R_{ij}m_j} < d_m$, de sorte que l'hypothèse de récurrence s'applique à $Q_{ij}e \otimes R_{ij}m_j$. Puisque

$$\sum P_j(e \otimes m_j) = \sum P_j f_i(e_i \otimes m_j) \in \sum V_0(\mathcal{D}_X) \cdot (e_i \otimes m_j),$$

on en déduit que (3.1.4) est vraie, d'où la $V_0(\mathcal{D}_X)$-cohérence de U_k.

Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$V_{k_0+k} = V_k(\mathcal{D}_X) V_{k_0} \quad \text{et} \quad V_{-k_0-k} = V_{-k}(\mathcal{D}_X) V_{-k_0}. \tag{3.1.5}$$

Montrons que U vérifie les identités analogues. Le cas $k = 0$ étant immédiat car $V_0(\mathcal{D}_X)$ contient la fonction unité. On peut donc supposer $k > 0$. Il suffit alors de démontrer

$$U_{k_0+k} = U_{k_0+k-1} + \partial_t U_{k_0+k-1} \quad \text{et} \quad U_{-k_0-k} = tU_{-k_0-k+1}. \tag{3.1.6}$$

Seules les inclusions directes posent a priori problème. La seconde relation de (3.1.6) découle immédiatement de (3.1.5) du fait que le produit tensoriel envisagé est pris sur $\mathcal{O}_X$. Prouvons la première relation. Soit $e \in \mathcal{E}$ et $m \in V_{k_0+k}$. On choisit $m_1, m_2 \in V_{k_0+k-1}$ tels que $m = m_1 + \partial_t m_2$. Alors

$$e \otimes m = e \otimes m_1 + \partial_t(e \otimes m_2) - (\partial_t e) \otimes m_2 \in U_{k_0+k-1} + \partial_t U_{k_0+k-1},$$

d'où (3.1.6), et par suite U est une bonne V-filtration.

En particulier pour $a \in \mathbb{C}$, $U_k = \mathcal{E} \otimes V_{a+k}(\mathcal{M})$ définit une bonne filtration de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{M}$. Pour $e \in \mathcal{E}$ et $m \in V_{a+k}(\mathcal{M})$, on a par lissité de $\mathcal{E}$

$$b_{V_{a+}(\mathcal{M})}(t\partial_t + k)(e \otimes m) \in e \otimes b_{V_{a+}(\mathcal{M})}(t\partial_t + k)m + U_{k-1} \subset U_{k-1}.$$

On en déduit que b_U divise $b_{V_{a+}(\mathcal{M})}$, donc $V_a(\mathcal{E} \otimes \mathcal{M}) = \mathcal{E} \otimes V_a(\mathcal{M})$. De même $V_{<a}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{M}) = \mathcal{E} \otimes V_{<a}(\mathcal{M})$ et 3.1.3 découle alors de la $\mathcal{O}_X$-platitude de $\mathcal{E}$.

□

Si Y est non lisse, les résultats de [33] ne s'appliquent pas tels quels. On peut néanmoins toujours définir des cycles proches dans ce cas en plongeant X dans $X \times A^1_{\mathbb{C}}$ via l'application graphe de f notée $\Gamma(f)$, puis en prenant les cycles proches suivant la projection par rapport au second facteur. On obtient alors un $\mathcal{D}$-module à support dans X et dans le cas où Y lisse on retrouve bien la définition initiale. Par exemple, si on se donne $n > 0$, Ψ_f est relié à Ψ_{f^n} de la façon suivante

Proposition 3.1.7. *Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on a une identification canonique*

$$\Psi_{f^n,a}\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} i_+\Psi_{f,na}\mathcal{M} .$$

Pour une preuve de ce résultat, voir [47, 3.3.13].

3.2 Compatibilité à la formalisation

Les cycles proches sont compatibles à la formalisation le long de Y, c'est l'objet de la

Proposition 3.2.1. *Soit $\widehat{f} : \widehat{X} \to \mathbb{C}$ la formalisation de f le long de Y. Alors, pour tout $\mathcal{D}_X$-module spécialisable $\mathcal{M}$, le $\mathcal{D}_{\widehat{X}}$-module $\widehat{\mathcal{M}}$ est spécialisable et on a une identification canonique $\Psi_f\mathcal{M} \simeq \Psi_{\widehat{f}}\widehat{\mathcal{M}}$.*

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{C}$. Posons $U_k = \widehat{\mathcal{O}}_X \otimes V_{a+k}(\mathcal{M})$ et montrons qu'il s'agit de $V_{a+k}(\widehat{\mathcal{M}})$. On commence par établir la bonté de U. Dire que $(V_{a+k}(\mathcal{M}))_{k\in\mathbb{Z}}$ est une bonne V-filtration de $\mathcal{M}$ sur X, c'est dire qu'on dispose localement d'une surjection $\mathcal{D}_X^p \to \mathcal{M} \to 0$ pour laquelle $V_{a+\cdot}(\mathcal{M})$ est à décalage près la filtration image de $V_\cdot(\mathcal{D}_X)^p$. Par tensorisation par $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$, il suffit de prouver qu'à travers l'identification canonique $\mathcal{O}_{\widehat{X}}\otimes \mathcal{D}_X \simeq \mathcal{D}_{\widehat{X}}$, l'espace $\mathcal{O}_{\widehat{X}} \otimes V_k(\mathcal{D}_X)$ correspond à $V_k(\mathcal{D}_{\widehat{X}})$. Ceci découle immédiatement du fait que si (x,t) sont des coordonnées locales avec Y définie par $t = 0$, alors $V_k(\mathcal{D}_X)$ et $V_k(\mathcal{D}_{\widehat{X}})$ sont les faisceaux localement libres (sur X et $\widehat{X}$ respectivement) engendrés par les $t^{-k}\partial_x^i(t\partial_t)^j$ si $k < 0$ et les $\partial_x^i\partial_t^l(t\partial_t)^j$, $0 \le l \le k$ si $k \ge 0$.

Soit b le polynôme de Bernstein de $V_a(\mathcal{M})$, $m \in V_{a+k}(\mathcal{M})$ et $f \in \mathcal{O}_{\widehat{X}}$. On a

$$\begin{aligned} t\partial_t(f\otimes m) &= \partial_t f \otimes tm + f \otimes t\partial_t m \\ &\equiv f \otimes t\partial_t m \quad (U_{k-1}), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} b(t\partial_t + k)(f\otimes m) &\equiv f \otimes b(t\partial_t + k)m \quad (U_{k-1}) \\ &\equiv 0 \quad (U_{k-1}), \end{aligned}$$

donc le polynôme de Bernstein de U divise b, et ainsi il vient $V_{a+k}(\widehat{\mathcal{M}}) = \mathcal{O}_{\widehat{X}} \otimes V_{a+k}(\mathcal{M})$ pour tout k. On conclut alors par platitude de $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$ sur $\mathcal{O}_X$.

□

3.3 Une définition générale

On considère une variété X lisse sur $\mathbb{K}$ et Y une hypersurface lisse de X donnée comme lieu des zéros d'une fonction f. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome, et $\sigma : \overline{\mathbb{K}}/\mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{K}}$ une section de la projection $\overline{\mathbb{K}} \longrightarrow \overline{\mathbb{K}}/\mathbb{Z}$ telle que la classe de 0 soit envoyée sur 1.

D'après [7], il fait sens de définir $V_k^\sigma(\mathcal{M})$ comme le sous-faisceau de $\mathcal{M}$ constitué des éléments m dont l'image dans $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{K}}}$ admet un polynôme de Bernstein à racines dans $\sigma(\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{Z}) + \mathbb{N}$. Comme dans le cas complexe, on dispose d'un second point de vue sur $V_k^\sigma(\mathcal{M})$: en mimant les propositions 4.2-6 et 4.3-5 de [33], on obtient en effet le

Lemme 3.3.1. *La filtration $V^\sigma(\mathcal{M})$ est l'unique bonne V-filtration de $\mathcal{M}$ dont les racines du polynôme de Bernstein sont dans l'image de σ.*

Suivant [33, 4.3.9], on est amené à définir

$$\Psi_f \mathcal{M} := V_{-1}(\mathcal{M})/V_{-2}(\mathcal{M}).$$

Cette définition est indépendante du choix de σ à isomorphisme non canonique près. Comme application immédiate de 3.3.1, on observe que le foncteur Ψ_f commute à l'extension des scalaires.

3.4 Cycles proches et action par un groupe fini

Dans toute cette section, on se donne une variété lisse complexe Y munie d'une action admissible d'un groupe fini G. Soit $X = Y/G$, $p : Y \to X$ le morphisme de projection et Z une hypersurface lisse de X donnée comme lieu d'annulation d'une fonction régulière f. On suppose p étale au-dessus de $U = X \setminus Z$, et on se donne un $\mathcal{D}_X$-module holonome $\mathcal{M}$ localisé le long de Z, à savoir $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}(*Z)$.

Pour $g \in G$, le morphisme d'adjonction $p^+\mathcal{M} \to g_+g^+p^+\mathcal{M} \simeq g_+p^+\mathcal{M}$ induit une action $g_\mathcal{M} : p_+p^+\mathcal{M} \to p_+p^+\mathcal{M}$ de g sur $p_+p^+\mathcal{M}$. D'autre part p est finie, d'où $\mathcal{H}^i p_+ \simeq 0$ pour $i > 0$. Puisque p est étale au-dessus de U, $\mathcal{H}^i p^+\mathcal{M}$ est à support dans $p^{-1}(Z)$ pour $i > 0$, et ainsi $\mathcal{H}^i p_+p^+\mathcal{M} \simeq p_+\mathcal{H}^i p^+\mathcal{M}$ est à support dans Z pour $i > 0$. On en déduit que le complexe $(p_+p^+\mathcal{M})(*Z)$ est concentré en degré 0 et peut donc être considéré comme un objet de la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules, ce qui sera implicitement fait dans la suite.

Proposition 3.4.1. *le morphisme canonique* $\mathrm{adj}_\mathcal{M} : \mathcal{M} \to (p_+p^+\mathcal{M})(*Z)$ *identifie* $\mathcal{M}$ *aux G-invariants de* $(p_+p^+\mathcal{M})(*Z)$.

Démonstration. Par construction, $\mathrm{adj}_\mathcal{M}$ se factorise en un morphisme $\mathcal{M} \to ((p_+p^+\mathcal{M})(*Z))^G$. Puisque f agit de façon inversible sur son conoyau, ce morphisme est un isomorphisme dès que sa restriction à U l'est. On est donc ramené au cas où p est étale et $Z = \emptyset$ (en particulier, p est automatiquement galoisien).

Soit $h : X' \to X$ un revêtement étale de X. Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{h'} & Y \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X' & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

On dispose alors du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} h^+\mathcal{M} & \xrightarrow{h^+\,\mathrm{adj}_\mathcal{M}} & h^+p_+p^+\mathcal{M} \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow \\ h^+\mathcal{M} & \xrightarrow{\mathrm{adj}_{h^+\mathcal{M}}} & p'_+p'^+h^+\mathcal{M} \end{array}$$

où la seconde flèche verticale est la composée du morphisme de changement de base $h^+p_+p^+\mathcal{M} \to p'_+h'^+p^+\mathcal{M}$ avec l'identification canonique $p'_+h'^+p^+\mathcal{M} \simeq p'_+p'^+h^+\mathcal{M}$.

D'après [16, 1.7.3], il s'agit d'un isomorphisme. Or le diagramme

$$\begin{tikzcd} h^+p_+p^+\mathcal{M} \arrow[r, "h^+g_{\mathcal{M}}"] \arrow[d, "\wr"'] & h^+p_+p^+\mathcal{M} \arrow[d, "\wr"] \\ p'_+p'^+h^+\mathcal{M} \arrow[r, "g_{h^+\mathcal{M}}"] & p'_+p'^+h^+\mathcal{M} \end{tikzcd}$$

commute, donc par exactitude de h^+ et 5.2.1

$$\begin{aligned} h^+(p_+p^+\mathcal{M})^G &= h^+\bigcap_G \ker(g_{\mathcal{M}} - \mathrm{id}) = \bigcap_G \ker(h^+g_{\mathcal{M}} - \mathrm{id}) \\ &\simeq \bigcap_G \ker(g_{h^+\mathcal{M}} - \mathrm{id}) = (p'_+p'^+h^+\mathcal{M})^G. \end{aligned}$$

On en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} h^+\mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & h^+(p_+p^+\mathcal{M})^G \arrow[d, "\wr"] \\ h^+\mathcal{M} \arrow[r] & (p'_+p'^+h^+\mathcal{M})^G \end{tikzcd}$$

Or h est étale, donc le $\mathcal{O}_{X'}$-module sous-jacent à $h^+\mathcal{M}$ est $h^*\mathcal{M}$ et $h^+\operatorname{adj}_{\mathcal{M}}$ vu comme morphisme de $\mathcal{O}_{X'}$-module correspond à $h^*\operatorname{adj}_{\mathcal{M}}$. On en déduit par descente pour les faisceaux quasi-cohérents [13, Exp. VIII] que l'énoncé de 3.4.1 est local sur X pour la topologie étale. On est donc ramené au cas où p est un revêtement galoisien trivial, mais alors le résultat est immédiat.

□

Corollaire 3.4.2. *$\Psi_{f\circ p}\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M}$ est muni d'une action G-équivariante de G, et le morphisme canonique $\Psi_f\mathcal{M} \to p_+\Psi_{f\circ p}\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M}$ induit un isomorphisme de $\Psi_f\mathcal{M}$ sur les G-invariants de $p_+\Psi_{f\circ p}\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M}$.*

Démonstration. Pour $g \in G$, la compatibilité des cycles proches avec l'image directe par un morphisme propre [42, 4.8.1] fournit une identification naturelle

$$\Psi_{f\circ p}g_+\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M} \simeq g_+\Psi_{f\circ p\circ g}\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M} = g_+\Psi_{f\circ p}\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M}.$$

Le morphisme de $\mathcal{D}_Y$-module $\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M} \to g_+\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M}$ induit donc un morphisme $\Psi_{f\circ p}\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M} \to g_+\Psi_{f\circ p}\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M}$, d'où la première partie de 3.4.2.

Par naturalité de l'identification $p_+\Psi_{f\circ p} \simeq \Psi_f p_+$, le morphisme $\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M} \to g_+\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M}$ donne aussi le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \Psi_f\mathcal{H}^0p_+p^+\mathcal{M} \arrow[r, "\Psi_f\mathcal{H}^0g_{\mathcal{M}}"] \arrow[d, "\wr"'] & \Psi_f\mathcal{H}^0p_+p^+\mathcal{M} \arrow[d, "\wr"] \\ p_+\Psi_{f\circ p}\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M} \arrow[r] & p_+\Psi_{f\circ p}\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M} \end{tikzcd} \tag{3.4.3}$$

Or par invariance des cycles proches par localisation [33, 4.4-3], la flèche supérieure de 3.4.3 est aussi $\Psi_f g_{\mathcal{M}} : \Psi_f p_+p^+\mathcal{M}(*Z) \longrightarrow \Psi_f p_+p^+\mathcal{M}(*Z)$ et la proposition se déduit alors de 3.4.1 et de l'exactitude de Ψ_f. □

3.5 Trois lemmes d'annulation

Les lemmes d'annulation de ce paragraphe apparaissent déjà dans la littérature [48, 14.22, 14.26]. On rappelle ici les preuves de 3.5.1 et 3.5.3 pour la commodité du lecteur, et on donne une autre preuve de 3.5.2 à l'aide de 3.4.2.

Soit U un ouvert de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ contenant l'origine et $f = f(t, y)$ régulière sur U. Soit $\mathcal{R}$ connexion sur U méromorphe à singularité régulière le long de $t = 0$.

Lemme 3.5.1. *On suppose que* $f(0,0) \neq 0$ *ou que* $f(0,y)$ *admet un zéro simple en l'origine. Alors si* $k > 0$ *et* $a > 0$*, on a* $\Psi_{t^a}(\mathcal{E}^{f(t,y)/t^k} \otimes \mathcal{R}) \simeq 0$ *au voisinage de* 0.

Démonstration. Par 3.1.7, il suffit de traiter le cas $a = 1$.

D'après [48, 14.10], on a une identification canonique

$$\widehat{\mathcal{O}_{U,0}} \otimes_{\mathcal{O}_{U,0}} \Psi_t(\mathcal{E}^{f(t,y)/t^k} \otimes \mathcal{R}) \simeq \Psi_t(\mathcal{E}^{f(t,y)/t^k} \otimes \widehat{\mathcal{R}_0}).$$

Si $f(0,0) \neq 0$, il fait sens d'effectuer le changement de variable $t' = t/\sqrt[k]{f}$ dans $\widehat{\mathcal{O}_{U,0}}$, de sorte qu'on est ramené par fidèle platitude de $\widehat{\mathcal{O}_{U,0}}$ sur $\mathcal{O}_{U,0}$ à prouver la nullité de $\Psi_t(\mathcal{E}^{1/t^k} \otimes \widehat{\mathcal{R}_0})$.

Si $f(0,y)$ admet un zéro simple en l'origine, alors on pose $y' = f(t,y)$ et on observe que la matrice jacobienne de (t, y') ne s'annule pas en l'origine. Ainsi le couple (t, y') constitue un système de coordonnées au voisinage de l'origine, de sorte que quitte à rétrécir U, on est ramené par fidèle platitude de $\widehat{\mathcal{O}_{U,0}}$ sur $\mathcal{O}_{U,0}$ à prouver la nullité de $\Psi_t(\mathcal{E}^{y/t^k} \otimes \widehat{\mathcal{R}_0})$.

Montrons dons la nullité de $\Psi_t(\mathcal{E}^{y^l/t^k} \otimes \widehat{\mathcal{R}_0})$ avec $l = 0, 1$. D'après [46, 2.1.1], $\widehat{\mathcal{R}_0}$ admet un réseau sur lequel $t\partial_t$ agit via une matrice à coefficients constants et ∂_y agit par 0. En particulier par trigonalisation, $\widehat{\mathcal{R}_0}$ admet un sous-objet propre dès que son rang est >1. Par exactitude de Ψ_t, une récurrence permet de se ramener au cas où $\widehat{\mathcal{R}_0}$ est de rang 1. Alors $\widehat{\mathcal{R}_0}$ admet un générateur m satisfaisant à $t\partial_t m = cm$, $c \in \mathbb{C}$ et $\partial_y m = 0$. Dans tous les cas, la section $s =$ « e^{y^l/t^k} » $\otimes\, m$ est génératrice et satisfait à $t^k(c - t\partial_t)s = ks$ si $l = 0$ et $t^k \partial_y s = s$ si $l = 1$. Le polynôme de Bernstein de s est donc constant. La trivialité de la V-filtration en découle. □

Lemme 3.5.2. *On suppose que* $f(0,0) \neq 0$ *et soit* $g = t^a y^b$ *avec* $a \neq 0$ *et* $b \neq 0$*. Alors si* $k, k' > 0$*, on a* $\Psi_g(\mathcal{E}^{f(t,y)/t^k y^{k'}} \otimes \mathcal{R}) \simeq 0$ *au voisinage de* 0.

Démonstration. On se ramène comme en 3.5.1 à montrer la nullité du module $\Psi_g(\mathcal{E}^{1/t^k y^{k'}} \otimes \widehat{\mathcal{R}_0})$ avec $\widehat{\mathcal{R}_0}$ de rang 1 admettant un générateur m qui vérifie $t\partial_t m = cm$, $c \in \mathbb{C}$ et $\partial_y m = 0$. Si on définit

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{A}^2 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ (u, z) & \mapsto & (u^b, z^a), \end{array}$$

on a d'après 3.4.2 une injection canonique

$$\Psi_{t^a y^b}(\mathcal{E}^{1/t^k y^{k'}} \otimes \widehat{\mathcal{R}_0}) \hookrightarrow h_+ \Psi_{(uz)^{ab}}(\mathcal{E}^{1/u^{bk} z^{ak'}} \otimes h^+ \widehat{\mathcal{R}_0}),$$

et on se ramène ainsi à étudier le cas où $a = b$. Par 3.1.7, on peut supposer $a = b = 1$. Par définition, $\Psi_{ty} = \Psi_v \circ \Gamma(g)_+$ où $\Gamma(g)$ désigne le graphe de g et v est donnée par

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^2 \arrow[r, hook, "\Gamma(g)"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1 \arrow[d, "v"] \\ & \mathbb{A}^1 \end{tikzcd}$$

Or $s =$ « $e^{1/t^k y^{k'}}$ » $\otimes m$ engendre $\mathcal{E}^{1/t^k y^{k'}} \otimes \widehat{\mathcal{R}_0}$ et vérifie $t^k y^{k'+1} \partial_y s = -k's$. Donc $s' = s\delta(v - ty)$ engendre $\Gamma(g)_+ \mathcal{E}^{1/t^k y^{k'}} \otimes \widehat{\mathcal{R}_0}$. Or

$$v\partial_y \cdot s' = \partial_y v \cdot s' = \partial_y \cdot (tys\delta) = ts' + ty(\partial_y s)\delta - yt^2 s \partial_v \delta \in V_{-1}s'.$$

donne par multiplication par y

$$yts' + ty^2(\partial_y s)\delta - y^2 t^2 s \partial_v \delta \in V_{-1}s'.$$

Puisque $yts' = vs' \in V_{-1}s'$, on en déduit

$$ty^2(\partial_y s)\delta - y^2 t^2 s \partial_v \delta \in V_{-1}s'.$$

D'autre part

$$\partial_v v^2 s' = 2vs' + v^2 \partial_v s' = t^2 y^2 s \partial_v \delta \in V_{-1}s'$$

d'où finalement $ty^2(\partial_y s)\delta \in V_{-1}s'$. Puisque $k \geq 1$ et $k' \geq 1$, il fait sens de multiplier cette dernière relation par $t^{k-1} y^{k'-1}$. On obtient alors

$$t^k y^{k'+1}(\partial_y s)\delta = -k's\delta = -k's' \in V_{-1}s'$$

Ainsi, $s' \in V_{-1}s'$ est de polynôme de Bernstein constant, d'où 3.5.2.

□

Lemme 3.5.3. *On fait l'hypothèse que* $f = t^l g(t,y) + y^m h(t,y)$ *avec* $g(0,0) \neq 0$, $h(0,0) \neq 0$, $(l,m) \neq (0,0)$. *Soit* $g = t^a y^b$ *avec* $(a,b) \neq 0$. *Alors si* $k > l$ *et* $k' > 0$, *on a* $\Psi_g(\mathcal{E}^{f(t,y)/t^k y^{k'}} \otimes \mathcal{R}) \simeq 0$ *au voisinage de* 0.

Démonstration. Les cas $l = 0$ ou $m = 0$ étant traités par 3.5.2, on peut raisonner par récurrence sur (l,m) et supposer $l \neq 0$ et $m \neq 0$. Soit $p : \widetilde{U} \to U$ l'éclaté de U en l'origine. Par compatibilité des cycles proches avec les modifications propres [48, 14.12], on a

$$\Psi_g(\mathcal{E}^{f(t,y)/t^k y^{k'}} \otimes \mathcal{R}) \simeq p_+ \Psi_{g \circ p}(\mathcal{E}^{f(p_t,p_y)/p_t^k p_y^{k'}} \otimes p^+\mathcal{R}).$$

Démontrons que $\Psi_{g \circ p}(\mathcal{E}^{f(p_t,p_y)/p_t^k p_y^{k'}} \otimes p^+\mathcal{R}) \simeq 0$ sur le diviseur exceptionnel E.

Dans la carte U_0 de $\widetilde{U}$ donnée par $t = u$ et $y = uv$, on a $p(u,v) = (u,uv)$, de sorte que la trace de E sur U_0 est donnée par $u = 0$, et

$$f(p_t,p_y)/p_t^k p_y^{k'} = (u^l g(u,uv) + (uv)^m h(u,uv))/u^{k+k'} v^{k'}.$$

Au voisinage d'un point $v_0 \neq 0$ de U_0, 3.5.1 s'applique immédiatement si $l \neq m$. Dans le cas $l = m$, on observe que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,v_0) = m v_0^{m-1} h(0,0) \neq 0$ de sorte que 3.5.1 s'applique encore. Au voisinage de l'origine de U_0, 3.5.2 s'applique si $l < m$, et sinon $m > 0$ permet