**La classe de la droite affine est un diviseur de zéro dans
l'anneau de Grothendieck**

1.1 Définition de l'anneau de Grothendieck et premières propriétés

Le groupe de Grothendieck $K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}})$ des variétés algébriques complexes est le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphismes $[X]$ de variétés algébriques complexes modulo les relations d'additivité $[X] = [Y] + [X \setminus Y]$ pour toute sous-variété fermée Y de X . On le munit d'une structure d'anneau avec le produit $[X_1] \cdot [X_2] := [X_1 \times X_2]$.

Précisons quelques notations :

- On note $0 = [\emptyset]$ la classe de l'ensemble vide, neutre pour l'addition.
- On note $1 = [\text{pt}]$ la classe du point, neutre pour le produit.
- On note $\mathbb{L} = [\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1]$ la classe de la droite affine complexe.

On a immédiatement les relations $[\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n] = \mathbb{L}^n$ et $[\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n] = \sum_{k=0}^n \mathbb{L}^k$. On remarque en outre que la classe d'une partie Zariski-constructible $C \subset X$ est bien définie : il existe une partition en sous-variétés localement fermées $C_1, \dots, C_n$ de X , et on a

$$[C] = \sum_{k=1}^n [C_k]$$

Une propriété très importante de cet anneau est que toute fibration localement triviale est triviale en classe, i.e. si l'on note $f : Y \rightarrow X$ une fibration localement triviale de fibre F , on a alors l'égalité $[Y] = [X] \cdot [F]$.

1.2 Fibrations triviales par morceaux

Il est intéressant d'introduire la notion de fibrations triviales par morceaux. Pour cela, considérons Y , X et F trois variétés, A une partie constructible de Y et B une partie constructible de X .

Définition 1.2.1 Une application $f : A \rightarrow B$ est une fibration triviale par morceaux de fibre F s'il existe une partition finie de B en sous-variétés S localement fermées de X telle que :

- la restriction de f à $f^{-1}(S)$ soit induite par une application régulière de Y dans X
- la sous-variété $f^{-1}(S)$ localement fermée de Y , soit isomorphe à $S \times F$, f correspondant à la projection $S \times F \rightarrow S$.

L'intérêt des fibrations triviales par morceaux réside dans le fait qu'elles sont triviales en classe, tout comme les fibrations localement triviales, ce qui se révèle très utile dans la pratique. En outre, il est possible de généraliser cette définition au cas où Y , X et F sont des schémas sur $\mathbb{C}$. Un résultat important est la caractérisation schématique suivante des fibrations triviales par morceaux due à Sebag [Seb04, th. 4.2.3] :

Théorème 1.2.2 Soient $f : A \rightarrow B$ une application induite par un morphisme de schémas de Y dans X et F un schéma sur $\mathbb{C}$ de type fini. L'application f est une fibration triviale par morceaux de fibre F si pour tout $x \in B$, la fibre $f^{-1}(x)$ est un $\kappa(x)$ -schéma isomorphe à $F \otimes \kappa(x)$.

1.3 Une autre présentation du groupe

Une des premières questions que l'on est amené à se poser avec l'anneau de Grothendieck est la suivante : peut-on supposer certaines propriétés sur les variétés ? Par exemple, les classes de variétés irréductibles (resp. lisses, resp. complètes) suffisent-elles à engendrer le groupe $K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}})$?

La question de l'irréductibilité est rapidement réglée puisque toute variété se partitionne en ses composantes irréductibles, localement fermées. Ensuite, afin de se limiter aux variétés lisses, on considère pour toute variété X le lieu de ses points singuliers X^{sing} , fermé dans X de codimension non nulle. On a l'égalité $[X] = [X^{\text{sing}}] + [X \setminus X^{\text{sing}}]$ et il suffit alors de faire une récurrence sur la dimension de X .

Pour la complétude, en utilisant le théorème de prolongement de Nagata, toute variété X peut-être plongée dans une variété complète $\overline{X}$, dans laquelle X est un ouvert dense. Là encore, une récurrence sur la dimension de X permet de conclure. Néanmoins, pour combiner les deux propriétés précédentes (lisse et complète), il faut un résultat plus puissant que le théorème de prolongement de Nagata : le théorème d'Hironaka. Notons qu'il est nécessaire de travailler en caractéristique zéro pour invoquer ce résultat (ici on travaille sur $\mathbb{C}$). Le théorème d'Hironaka implique notamment que toute variété lisse X est isomorphe à un ouvert dense d'une variété complète lisse, ce qui suffit pour conclure par récurrence.

On peut également se demander s'il n'existe pas une présentation plus simple de ce groupe, les relations d'additivité n'étant pas toujours pratiques lorsque l'on cherche à démontrer des résultats. On a le théorème suivant dû à Bittner [Bit04] :

Théorème 1.3.1 *Le groupe $K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}})$ est le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphismes de variétés lisses complètes modulo les relations*

$$[\emptyset] = 0 \quad \text{et} \quad [\text{Bl}_Z(X)] - [E] = [X] - [Z]$$

où X est une variété lisse complète, Z une sous-variété fermée lisse de X , $\text{Bl}_Z(X)$ l'éclatement de X le long de Z et E le diviseur exceptionnel de cet éclatement.

1.4 Géométrie stablement birationnelle

La question de départ est la suivante : que peut-on dire de deux variétés X et Y vérifiant $[X] = [Y]$? On peut se demander s'il est possible de décomposer X et Y en une partition finie de sous-variétés localement fermées deux à deux isomorphes [LL03, question 1.2]. Des résultats positifs à cette question ont été obtenus par Liu et Sebag dans l'article [LS10]. Plus précisément, ils prouvent que la réponse à cette question est positive (en caractéristique zéro) dans l'un des cas suivants :

- (i) $\dim X \leq 1$
- (ii) X est une surface projective lisse connexe
- (iii) X contient seulement un nombre fini de courbes rationnelles.

La réponse générale est cependant négative. Il s'agit d'une conséquence directe du théorème principal de la sous-section 1.5 comme nous le verrons plus tard. Notons qu'une toute autre approche de Karzhemanov a récemment explicité un contre-exemple en dimension 3 [Kar14].

Soient M le monoïde multiplicatif des classes d'isomorphismes de variétés irréductibles lisses complètes, G un monoïde multiplicatif commutatif quelconque et $\Psi : M \rightarrow G$ un morphisme de monoïdes vérifiant :

- (i) $\Psi([X]) = \Psi([Y])$ si X et Y sont deux variétés birationnelles
- (ii) $\Psi([\mathbb{P}^n]) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a le résultat suivant dû à Larsen et Lunts [LL03, th. 2.3] :

Théorème 1.4.1 *Il existe un unique morphisme d'anneaux $\Phi : K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{Z}[G]$ prolongeant Ψ .*

Ce résultat est loin d'être aisé à démontrer et est l'objet principal de l'article [LL03]. Néanmoins, ce théorème devient beaucoup plus accessible une fois connue la présentation alternative de Bittner du groupe de Grothendieck vue au théorème 1.3.1, démontrée peu de temps après la parution de l'article de Larsen et Lunts. Plus précisément, la difficulté originelle principale est de voir pourquoi on a les relations $\Phi([X]) = \Phi([Y]) + \Phi([X \setminus Y])$ pour Y une sous-variété fermée de X . Avec la présentation de Bittner, il suffit de voir pourquoi $\Phi([\text{Bl}_Z(X)]) - \Phi([E]) = \Phi([X]) - \Phi([Z])$ pour X une variété lisse complète, Z une sous-variété fermée lisse de X et E le diviseur exceptionnel de cet éclatement. D'une part, $\text{Bl}_Z(X)$ et X sont birationnels, donc $\Phi([\text{Bl}_Z(X)]) = \Phi([X])$, et d'autre part, E et $Z \times \mathbb{P}^k$ sont birationnels pour un certain $k \in \mathbb{N}$, donc $\Phi([E]) = \Phi([Z] \times [\mathbb{P}^k]) = \Phi([Z])$.

Définissons maintenant la notion de stable birationnalité :

Définition 1.4.2 On dit que deux variétés X et Y sont stablement birationnelles s'il existe deux entiers k et ℓ tels que les variétés $X \times \mathbb{P}^k$ et $Y \times \mathbb{P}^{\ell}$ soient birationnelles.

Posons alors $G = SB$ le monoïde des classes $[X]_{SB}$ de variétés à stable birationnalité près. Le morphisme de monoïdes $\Psi_{SB} : M \rightarrow SB$ qui à $[X]$ associe $[X]_{SB}$ vérifie bien (i) et (ii), on a donc par le théorème précédent un unique morphisme d'anneaux $\Phi_{SB} : K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{Z}[SB]$ qui prolonge Ψ .

Proposition 1.4.3 *Le noyau de Φ_{SB} est l'idéal engendré par $\mathbb{L}$.*

Preuve. Tout d'abord, on a bien $\Phi(\mathbb{L}) = \Phi([\mathbb{P}^1] - 1) = 0$. Pour l'autre sens, écrivons $a \in \ker(\Phi_{SB})$ sous la forme

$$a = [X_1] + \cdots + [X_k] - [Y_1] - \cdots - [Y_{\ell}]$$

où les X_i et les Y_j sont lisses et complètes. On a alors

$$\Phi_{SB}(a) = \sum_{i=1}^k \Psi_{SB}([X_i]) - \sum_{j=1}^{\ell} \Psi_{SB}([Y_j])$$

donc $k = \ell$ et, après renumérotation, X_i et Y_i sont stablement birationnels. Il suffit donc de prouver que deux variétés lisses complètes stablement birationnelles vérifient $[X] - [Y] \in (\mathbb{L})$. On peut même les supposer birationnelles dans la mesure où

$$[X \times \mathbb{P}^m] - [X] = [X] \cdot (\mathbb{L}^m + \cdots + \mathbb{L}) \in (\mathbb{L}).$$

En utilisant le théorème de factorisation des applications birationnelles, on peut supposer que X est l'éclatement de Y le long d'une variété lisse Z . En notant E le diviseur exceptionnel de cet éclatement, on a $[E] = [Z] \cdot [\mathbb{P}^n]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et donc

$$[X] - [Y] = [E] - [Z] = [Z] \cdot (\mathbb{L}^n + \cdots + \mathbb{L}) \in (\mathbb{L}) \quad \square$$

On a la propriété importante suivante :

Proposition 1.4.4 *Soient X et Y des variétés de Calabi-Yau. Alors X et Y sont stablement birationnelles si et seulement si elles sont birationnelles.*

Preuve. On suppose X et Y stablement birationnelles, on note k et ℓ les entiers tels que $X \times \mathbb{P}^k$ et $Y \times \mathbb{P}^\ell$ soient birationnelles. Comme X et Y sont des variétés de Calabi-Yau, on sait que leurs fibrations MRC (voir [KMM92]) sont les morphismes identités. On en déduit que les fibrations MRC de $X \times \mathbb{P}^k$ et $Y \times \mathbb{P}^\ell$ sont données par les projections sur X et Y . Comme $X \times \mathbb{P}^k$ et $Y \times \mathbb{P}^\ell$ sont birationnelles, il en est donc de même pour X et Y . $\square$

Corollaire 1.4.5 *Soient X et Y des variétés de Calabi-Yau telles que $[X] = [Y]$ modulo $\mathbb{L}$. Alors X et Y sont birationnelles.*

Preuve. D'après la proposition 1.4.3, la propriété $[X] = [Y]$ modulo $\mathbb{L}$ implique que X et Y sont stablement birationnelles, donc birationnelles d'après la proposition précédente. $\square$

1.5 Intégrité et diviseurs de zéro

Une autre question que l'on peut se poser sur l'anneau de Grothendieck est de savoir s'il s'agit d'un anneau intègre. Poonen a prouvé que ce n'était pas le cas [Poo02]. Borisov est allé encore plus loin en montrant que $\mathbb{L}$ est un diviseur de zéro [Bor18], nous allons détailler son résultat dans cette sous-section. Il est toutefois important de noter que ce résultat n'est pas seulement une amélioration de celui de Poonen : comprendre le noyau du morphisme de localisation $K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}}) \rightarrow K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}]$ est une question cruciale en intégration motivique, dans la mesure où l'on considère des classes dans l'anneau localisé.

Soient V un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 7 et $W \subset \Lambda^2 V^\vee$ un sous-espace vectoriel générique de formes bilinéaires alternées sur V de dimension 7. On définit X_W la sous-variété de la Grassmannienne $G(2, V)$ qui est le lieu des $T \in G(2, V)$ tels que $\omega|_T = 0$ pour tout $\omega \in W$, et Y_W la sous-variété de $\mathbb{P}W$ des formes de rang strictement inférieur à 6. De plus, toutes les formes de Y_W sont de rang 4 et toutes les formes de $\mathbb{P}W \setminus Y_W$ sont de rang 6.

Les variétés X_W et Y_W sont des variétés de Calabi-Yau de dimension 3, qui sont lisses et non birationnelles (voir [Rød00] et [BC09, §0.3 et §0.5]). D'après le corollaire 1.4.5, cela implique que $[X_W] \neq [Y_W]$ modulo $\mathbb{L}$.

Considérons maintenant la sous-variété H de $G(2, V) \times \mathbb{P}W$ des $(T, \mathbb{C}\omega)$ tels que $\omega|_T = 0$. Afin d'obtenir des équations explicites définissant H , posons $T_0 \in G(2, V)$ muni d'une base e_1, e_2 et H un supplémentaire muni d'une base $e_3, \dots, e_7$. Le voisinage $U = \{T \in G(2, V) \mid T \oplus H = V\}$ de T_0 peut être identifié à $\mathcal{L}(T_0, H)$ en considérant l'application $f \in \mathcal{L}(T_0, H) \mapsto \{x + f(x) \mid x \in T_0\} \in U$. Si l'on pose $(f_{i,j})_{(i,j) \in \{1,2\} \times \{3,\dots,7\}}$ la base de $\mathcal{L}(T_0, H)$ adaptée aux deux bases précédemment considérées, on peut identifier $T \in U$ avec $\{x + \sum \alpha_{i,j} f_{i,j}(x) \mid x \in T_0\}$.

Maintenant, pour $\omega = \sum_{i=1}^7 \beta_i \omega_i \in W$, la condition $\omega|_T = 0$ peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\sum_{i=1}^7 \beta_i \cdot \omega_i \left(e_1 + \sum_{j=3}^7 \alpha_{1,j} e_j, e_2 + \sum_{j=3}^7 \alpha_{2,j} e_j \right) = 0.$$

L'idée de Borisov est de regarder les projections de H sur chacun des deux facteurs $G(2, V)$ et $\mathbb{P}W$, ce qui va donner deux moyens d'exprimer $[H]$. Après calculs, on arrive à l'expression suivante :

$$([X_W] - [Y_W]) \cdot (\mathbb{L}^2 - 1) \cdot (\mathbb{L} - 1) \cdot \mathbb{L}^7 = 0.$$

Cela montre bien que $\mathbb{L}$ est un diviseur de zéro car $([X_W] - [Y_W]) \cdot (\mathbb{L}^2 - 1) \cdot (\mathbb{L} - 1) = ([X_W] - [Y_W]) \bmod \mathbb{L}$, quantité qu'on sait non nulle modulo $\mathbb{L}$, en particulier on a $([X_W] - [Y_W]) \cdot (\mathbb{L}^2 - 1) \cdot (\mathbb{L} - 1) \neq 0$.

L'objectif de la suite est de montrer le théorème suivant :

Théorème 1.5.1 $([X_W] - [Y_W]) \cdot \mathbb{L}^6 = 0$

Ce résultat est un raffinement de celui de Borisov, et un petit pas dans la compréhension du noyau du morphisme de localisation $K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}}) \rightarrow K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}]$. Dans la sous-section suivante, nous établirons une formule de récurrence pour obtenir les classes dans l'anneau de Grothendieck des Grasmanniennes $G(k, n)$, l'un des ingrédients de la preuve du théorème ci-dessus.

De plus, ce théorème permet de répondre négativement à la question posée précédemment : est-il possible de décomposer deux variétés X et Y telles que $[X] = [Y]$ en une partition finie de sous-variétés localement fermées deux à deux isomorphes? En effet, le théorème montre que $X_W \times \mathbb{C}^6$ et $Y_W \times \mathbb{C}^6$ ont la même classe dans l'anneau de Grothendieck et s'il était effectivement possible de décomposer ces deux variétés de la sorte, elles seraient birationnelles. Cela impliquerait que X_W et Y_W soient stablement birationnelles, donc birationnelles, or on a déjà vu qu'elles ne l'étaient pas. Notons qu'il est possible de conclure négativement de la même façon avec l'égalité de Borisov, avec un facteur $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ supplémentaire dans le produit.

Notons enfin que le résultat de Borisov ainsi que le théorème ci-dessus sont encore vrais en caractéristique zéro, les preuves n'utilisant à aucun moment la spécificité du corps des nombres complexes.

1.6 Classes des Grasmanniennes

Proposition 1.6.1 *Pour $k \in \{2, \dots, n-1\}$, on a la relation de récurrence suivante :*

$$[G(k, n)] = [G(k, n-1)] + \mathbb{L}^{n-k} \cdot [G(k-1, n-1)].$$

Preuve. Soient $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, F l'hyperplan orthogonal à e_n , $U \subset G(k, n)$ l'ouvert défini par $\{T \in G(k, n) \mid \dim(T \cap F) = k-1\}$ et $\pi : U \rightarrow G(k-1, F)$ l'application régulière qui envoie T sur $T \cap F$. Pour $S \in G(k-1, F)$, la fibre $\pi^{-1}(S)$ peut être identifiée à

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}^n/S) \setminus \mathbb{P}(F/S) \simeq \mathbb{A}^{n-k}.$$

Soient H un supplémentaire de S dans F et $V \subset G(k-1, F)$ l'ouvert $\{S' \in G(k-1, F) \mid S' \oplus H = F\}$. Pour tout $S' \in V$, on a l'identification $\mathbb{C}^n/S' \simeq H \oplus \mathbb{C}e_n$, donc π est une fibration triviale sur V . Par conséquent, π est une fibration localement triviale, d'où $[U] = \mathbb{L}^{n-k} \cdot [G(k-1, n-1)]$. On a $[G(k, n)] = [Z] + [U]$ avec

$$Z = G(k, n) \setminus U = \{T \in G(k, n) \mid T \subset F\} = G(k, F),$$

ce qui donne la formule annoncée. $\square$

Une simple récurrence donne les formules suivantes pour $n \geq 4$:

$$[G(2, n)] = \begin{cases} [\mathbb{P}^{n-2}] \cdot \sum_{k=0}^{(n-2)/2} \mathbb{L}^{2k} & \text{si } n \text{ est pair} \\ [\mathbb{P}^{n-1}] \cdot \sum_{k=0}^{(n-3)/2} \mathbb{L}^{2k} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

En particulier, on a $[G(2, 5)] = [\mathbb{P}^4] \cdot (\mathbb{L}^2 + 1)$ et $[G(2, 7)] = [\mathbb{P}^6] \cdot (\mathbb{L}^4 + \mathbb{L}^2 + 1)$.

1.7 Preuve du théorème 1.5.1

Le théorème est une conséquence directe des deux propositions suivantes.

Proposition 1.7.1 $[H] = [\mathbb{P}^6] \cdot (\mathbb{L}^4 + \mathbb{L}^2 + 1) \cdot [\mathbb{P}^5] + [X_W] \cdot \mathbb{L}^6$

Preuve. En considérant la projection $p : H \rightarrow G(2, V)$ sur le premier facteur, qui est une fibration triviale en restriction à $p^{-1}(X_W)$ de fibre $\mathbb{P}W = \mathbb{P}^6$, et une fibration localement triviale en restriction à $G(2, V) \setminus p^{-1}(X_W)$ de fibre $\mathbb{P}^5$, on obtient

$$[H] = [X_W] \cdot [\mathbb{P}^6] + ([G(2, 7)] - [X_W]) \cdot [\mathbb{P}^5] = [G(2, 7)] \cdot [\mathbb{P}^5] + [X_W] \cdot \mathbb{L}^6.$$

L'expression $[G(2, 7)] = [\mathbb{P}^6] \cdot (\mathbb{L}^4 + \mathbb{L}^2 + 1)$ donne alors le résultat. $\square$

Proposition 1.7.2 $[H] = [Y_W] \cdot \mathbb{L}^6 + [\mathbb{P}^6] \cdot [\mathbb{P}^5] \cdot (\mathbb{L}^4 + \mathbb{L}^2 + 1)$

La preuve de cette proposition va être plus difficile. Nous allons démontrer trois lemmes afin d'y parvenir : le premier va préciser le comportement de la projection sur le second facteur, et les deux autres seront des lemmes techniques permettant de calculer explicitement les classes des fibres dans l'anneau de Grothendieck.

Lemme 1.7.3 Soit $\pi : H \rightarrow \mathbb{P}W$ la projection sur le second facteur. Ses restrictions à $\pi^{-1}(Y_W)$ et $\pi^{-1}(\mathbb{P}W \setminus Y_W)$ sont des fibrations triviales par morceaux.

Preuve. Le raisonnement est le même pour le rang 4 ($Y_4 = Y_W$) et le rang 6 ($Y_6 = \mathbb{P}W \setminus Y_W$). Pour $i \in \{4, 6\}$, posons

$$Z_i = \pi^{-1}(Y_i) = H \cap (G(2, V) \times Y_i).$$

Afin d'obtenir la trivialité par morceaux de π sur Z_i , il suffit de prouver d'après le théorème 1.2.2 qu'il existe une fibre uniforme F_i telle que pour tout $x \in Y_i$, on ait $Z_i \times_{Y_i} \{x\} \simeq F_i \times_{\mathbb{C}} \text{Spec}(\kappa(x))$.

Pour démontrer ce point, il suffit de voir qu'une forme bilinéaire alternée de rang 4 ou 6 à coefficients dans un corps $K \supset \mathbb{C}$ est congruente à la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & I_2 & 0 \\ -I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & I_3 & 0 \\ -I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec une matrice de changement de base à coefficients dans K , action qui se propage sur les fibres. $\square$

Lemme 1.7.4 Soit $\mathbb{C}\omega \in Y_W$ un point fermé. La classe de sa fibre est

$$[\pi^{-1}(\mathbb{C}\omega)] = [\mathbb{P}^5] \cdot (\mathbb{L}^4 + \mathbb{L}^2 + 1) + \mathbb{L}^6.$$

Preuve. Comme $\text{rg}(\omega) = 4$, il existe une base $e_1, \dots, e_7$ de V de laquelle la matrice de ω est

$$\begin{pmatrix} 0 & I_2 & 0 \\ -I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient $F = \text{Vect}\{e_3, \dots, e_7\}$ et $H = F \oplus \mathbb{C}e_2$. On a

$$[\pi^{-1}(\mathbb{C}\omega)] = [\{T \in G(2, V) \mid \omega|_T = 0\}] = [\{T \in G(2, H) \mid \omega|_T = 0\}] + [U]$$

où U est l'ouvert $\{T \in G(2, V) \mid \dim(T \cap H) = 1, \omega|_T = 0\}$, avec la fibration localement triviale $\pi : U \rightarrow \mathbb{P}H = \mathbb{P}^5$. Notons que $\ker(\omega) = \text{Vect}\{e_5, e_6, e_7\} \subset H$ et $\ker(\omega|_H) = \ker(\omega) \oplus \mathbb{C}e_3 \subset H$.

Soit $D = \mathbb{C}e \in \mathbb{P}H$. Il y a trois cas à considérer.

- Premier cas : $D \subset \ker(\omega)$. On a

$$\begin{aligned} [\pi^{-1}(D)] &= [\{\mathbb{C}f \in \mathbb{P}(V/D) \mid \omega(f, e) = 0\}] - [\{\mathbb{C}f \in \mathbb{P}(H/D) \mid \omega|_H(f, e) = 0\}] \\ &= [\mathbb{P}^5] - [\mathbb{P}^4] = \mathbb{L}^5. \end{aligned}$$

- Deuxième cas : $D \not\subset \ker(\omega)$ et $D \subset \ker(\omega|_H)$. Dans ce cas $\pi^{-1}(D) = \emptyset$, car

$$\{\mathbb{C}f \in \mathbb{P}(V/D) \mid \omega(f, e) = 0\} = \{\mathbb{C}f \in \mathbb{P}(H/D) \mid \omega|_H(f, e) = 0\}.$$

- Troisième cas : $D \not\subset \ker(\omega|_H)$. On a

$$\begin{aligned} [\pi^{-1}(D)] &= [\{\mathbb{C}f \in \mathbb{P}(V/D) \mid \omega(f, e) = 0\}] - [\{\mathbb{C}f \in \mathbb{P}(H/D) \mid \omega|_H(f, e) = 0\}] \\ &= [\mathbb{P}^4] - [\mathbb{P}^3] = \mathbb{L}^4. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
[U] &= [\mathbb{P}\ker(\omega)] \cdot \mathbb{L}^5 + ([\mathbb{P}H] - [\mathbb{P}\ker(\omega|_H)]) \cdot \mathbb{L}^4 \\
&= [\mathbb{P}^2] \cdot \mathbb{L}^5 + ([\mathbb{P}^5] - [\mathbb{P}^3]) \cdot \mathbb{L}^4 \\
&= ([\mathbb{P}^5] - 1) \cdot \mathbb{L}^4.
\end{aligned}$$

On peut répéter l'argument avec H . Comme $\omega|_F = 0$, on a

$$\begin{aligned}
[\{T \in G(2, H) \mid \omega|_T = 0\}] &= [\{T \in G(2, F) \mid \omega|_T = 0\}] + [\mathbb{P}\ker(\omega|_H)] \cdot \mathbb{L}^4 \\
&= [G(2, 5)] + [\mathbb{P}^3] \cdot \mathbb{L}^4 \\
&= [\mathbb{P}^4] \cdot (\mathbb{L}^2 + 1) + [\mathbb{P}^3] \cdot \mathbb{L}^4.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
[\pi^{-1}(\mathbb{C}\omega)] &= ([\mathbb{P}^5] - 1) \cdot \mathbb{L}^4 + [\mathbb{P}^4] \cdot (\mathbb{L}^2 + 1) + [\mathbb{P}^3] \cdot \mathbb{L}^4 \\
&= ([\mathbb{P}^5] - 1) \cdot \mathbb{L}^4 + ([\mathbb{P}^5] - \mathbb{L}^5) \cdot (\mathbb{L}^2 + 1) + (\mathbb{L}^3 + \mathbb{L}^2 + \mathbb{L} + 1) \cdot \mathbb{L}^4 \\
&= [\mathbb{P}^5] \cdot (\mathbb{L}^4 + \mathbb{L}^2 + 1) + \mathbb{L}^6.
\end{aligned}$$

□

Un calcul en tous points similaire donne le résultat suivant :

Lemme 1.7.5 *Soit $\mathbb{C}\omega \in \mathbb{P}W \setminus Y_W$ un point fermé. La classe de sa fibre est*

$$[\pi^{-1}(\mathbb{C}\omega)] = [\mathbb{P}^5] \cdot (\mathbb{L}^4 + \mathbb{L}^2 + 1).$$

Preuve de la proposition 1.7.2. On est donc maintenant en mesure de démontrer la proposition. Pour cela, considérons $\mathbb{C}\omega_1 \in Y_W$ et $\mathbb{C}\omega_2 \in \mathbb{P}W \setminus Y_W$ deux points fermés. Le lemme 1.7.3 implique que

$$\begin{cases}
[\pi^{-1}(Y_W)] = [Y_W] \cdot [\pi^{-1}(\mathbb{C}\omega_1)] \\
[\pi^{-1}(\mathbb{P}W \setminus Y_W)] = ([\mathbb{P}W] - [Y_W]) \cdot [\pi^{-1}(\mathbb{C}\omega_2)],
\end{cases}$$

et par conséquent

$$[H] = [Y_W] \cdot [\pi^{-1}(\mathbb{C}\omega_1)] + ([\mathbb{P}W] - [Y_W]) \cdot [\pi^{-1}(\mathbb{C}\omega_2)].$$

En utilisant les lemmes 1.7.4 et 1.7.5, on a

$$\begin{aligned}
[H] &= [Y_W] \cdot ([\mathbb{P}^5] \cdot (\mathbb{L}^4 + \mathbb{L}^2 + 1) + \mathbb{L}^6) + ([\mathbb{P}^6] - [Y_W]) \cdot [\mathbb{P}^5] \cdot (\mathbb{L}^4 + \mathbb{L}^2 + 1) \\
&= [Y_W] \cdot \mathbb{L}^6 + [\mathbb{P}^6] \cdot [\mathbb{P}^5] \cdot (\mathbb{L}^4 + \mathbb{L}^2 + 1),
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

1.8 Développements ultérieurs à la publication du théorème 1.5.1

Résumons le théorème 1.5.1 : on a explicité deux variétés de Calabi-Yau X et Y de dimension 3 lisses non birationnelles, telles que $([X] - [Y]) \cdot \mathbb{L}^6 = 0$. On sait que plus grâce à Borisov et Căldăraru [BC09, th 6.2] que $D_{\text{coh}}^b(X) \simeq D_{\text{coh}}^b(Y)$: on dit que X et Y sont D -équivalentes (ou que (X, Y) est une paire de Fourier-Mukai, ou encore que X et Y sont des partenaires de Fourier-Mukai). Cela fournit un premier exemple intéressant de variétés X et Y qui sont D -équivalentes et vérifient $([X] - [Y]) \cdot \mathbb{L}^r = 0$ pour un certain $r \in \mathbb{N}$, avec $[X] \neq [Y]$. On reste dans toute la suite sur le corps des nombres complexes.

Suite à la publication du théorème 1.5.1 sur arXiv en avril 2016 puis dans une note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences en septembre 2016 [Mar16], de nombreux autres exemples ont été explicités :

1. [IMOU16a, juin 2016] Ito, Miura, Okawa et Ueda montrent que des variétés de Calabi-Yau X' et Y' de dimension 3 lisses non birationnelles, obtenues par dégénérescence des variétés X et Y , vérifient $([X'] - [Y']) \cdot \mathbb{L} = 0$. De plus, ces variétés sont D -équivalentes.
2. [KS17, décembre 2016] Kuznetsov et Shinder donnent l'exemple d'une paire (X'', Y'') de surfaces K3 de degré 8 et 2, D -équivalentes et qui vérifient $([X''] - [Y'']) \cdot \mathbb{L} = 0$ et $[X''] \neq [Y'']$ (théorème 1.9).
3. [IMOU16b, décembre 2016] Ito, Miura, Okawa et Ueda montrent que toute surface K3 X''' de degré 12 admet un partenaire de Fourier-Mukai Y''' non isomorphe tel que $([X'''] - [Y''']) \cdot \mathbb{L}^3 = 0$ (théorème 1.3). Ce résultat a été amélioré par Hassett et Lai en $([X'''] - [Y''']) \cdot \mathbb{L} = 0$ dans [HL18] avec des considérations très différentes, utilisant des transformations de Cremona de $\mathbb{P}^4$.
4. [BCP18, juillet 2017] Borisov, Căldăraru et Perry montrent que deux variétés X'''' et Y'''' dites GPK^3 doubles miroirs, variétés de Calabi-Yau de dimension 3, sont D -équivalentes (théorème 1.1), ne sont pas birationnelles (théorème 1.2) et vérifient $([X''''] - [Y'''']) \cdot \mathbb{L}^4 = 0$ (théorème 1.6). Notons qu'Ottem et Rennemo ont indépendamment obtenu la D -équivalence et la non birationalité dans [OR17].
5. [Man17, décembre 2017] On remplace dans la définition de X et Y la Grassmannienne $G(2, V) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ par la variété de spin $S \subset \mathbb{P}\Delta$ où Δ est une des deux représentations demi-spin de $Spin_{10}$ (voir [Man09] pour plus de détails sur la construction). On obtient deux variétés de Calabi-Yau X'''' et Y'''' de dimension 5 simultanément lisses (proposition 4.1), le cas échéant D -équivalentes (proposition 4.2), non birationnelles (proposition 4.4) et qui vérifient $([X''''] - [Y'''']) \cdot \mathbb{L}^7 = 0$ (proposition 4.5).

1.8.1 Paire dégénérée (X', Y') de Ito, Miura, Okawa et Ueda

Parmi les cinq exemples listés plus haut, l'exemple 1 de Ito, Miura, Okawa et Ueda est celui s'approchant le plus de notre travail, profitons-en pour en dire quelques mots.

Motivés par le résultat du théorème 1.5.1, Ito, Miura, Okawa et Ueda donnent dans le théorème 1.1 de [IMOU16a] l'exemple de deux variétés de Calabi-Yau X' et Y' de dimension 3 lisses non birationnelles, telles que $([X'] - [Y']) \cdot \mathbb{L} = 0$. Ces variétés, dont la construction est explicitée dans [IMOU16a, §2], sont une dégénérescence de la paire (X, Y) considérée précédemment (voir [IIM16] et [KK16, th. 7.1] pour plus de détails).

D'une certaine manière, l'identité $([X'] - [Y']) \cdot \mathbb{L} = 0$ peut être vue comme un raffinement du théorème 1.5.1 dans le cas dégénéré. En outre, Kuznetsov montre dans [Kuz16] que les variétés X' et Y' sont bien D -équivalentes.

1.8.2 D -équivalence et L -équivalence

A la suite des exemples issus du théorème 1.5.1 et de [IMOU16a], Kuznetsov et Shinder introduisent dans [KS17] la définition de L -équivalence : on dit que X et Y sont L -équivalentes s'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $([X] - [Y]) \cdot \mathbb{L}^r = 0$. Dans le cas où $[X] = [Y]$, les deux variétés sont dites trivialement L -équivalentes. Ces deux derniers exemples sont les premiers exemples de variétés D -équivalentes qui sont L -équivalentes mais pas trivialement L -équivalentes.

Notons que si les variétés X et Y sont L -équivalentes alors elles ont les mêmes nombres de Hodge. En effet, en considérant le polynôme de Hodge $h : K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{Z}[u, v]$, l'identité $[X] \cdot \mathbb{L}^r = [Y] \cdot \mathbb{L}^r$ donne $h_X(u, v)(uv)^r = h_Y(u, v)(uv)^r$ et donc $h_X(u, v) = h_Y(u, v)$, ce qui donne l'égalité des nombres de Hodge.

Kuznetsov et Shinder émettent la conjecture suivante :

Conjecture. Dans le cas de variétés projectives lisses simplement connexes, la D -équivalence implique la L -équivalence.

Commençons dès maintenant par remarquer que la réciproque est fautive avec l'exemple des variétés $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et l'éclaté d'un point dans $\mathbb{P}^2$. Ces deux variétés ont pour classe $(\mathbb{L}+1)^2$ et sont donc (trivialement) L -équivalentes, mais ne sont pas D -équivalentes d'après [BO01].

Suite à cette conjecture, initialement formulée sans l'hypothèse de simple connexité, Ito, Miura, Okawa et Ueda d'une part, et Efimov d'autre part, répondent négativement à la question en donnant des contre-exemples dans le contexte des variétés abéliennes (théorème 1.5 et exemple 7.8 de [IMOU16b], théorème 3.1 de [Efi17]). En ajoutant l'hypothèse de simple connexité, aucun contre-exemple n'a été à ce jour explicité (voir les articles récents [KR17], [KKM17] et [Oka18] qui discutent de la question).

Un autre aspect est celui d'expliciter des exemples de variétés D -équivalentes qui ne sont pas birationnelles, cette question est discutée dans les articles [ADM16] et [MMY18].

Une autre question que l'on peut se poser est celle d'une éventuelle signification géométrique pour deux variétés L -équivalentes X et Y du r minimal vérifiant $([X] - [Y]) \cdot \mathbb{L}^r = 0$. Dans cette direction, on ne sait par ailleurs pas si $r = 6$ est bien minimal dans le théorème 1.5.1.

1.8.3 Mise en défaut d'un résultat de Galkin et Shinder

Soit $Y \subset \mathbb{P}^{d+1}$ une hypersurface cubique lisse. On appelle variété de Fano $F(Y)$ la sous-variété fermée de $G(1, \mathbb{P}^{d+1}) = G(2, d+2)$ donnée par l'ensemble des droites $L \subset Y$. Par exemple, si $d = 2$ il est connu depuis 1849 grâce à une correspondance de Cayley et Salmon ([Cay49], [Sal49]) que $F(Y)$ est constituée de 27 points distincts.

Galkin et Shinder démontrent dans [GS14, th. 7.1] le théorème suivant, dans l'hypothèse où $\mathbb{L}$ n'est pas un diviseur de zéro dans l'anneau de Grothendieck :

Théorème 1.8.1 *Si Y est rationnelle (i.e. birationnelle à un espace projectif) et $d \geq 3$, alors $F(Y)$ est stablement birationnelle au schéma de Hilbert de deux points d'une surface K3 (voir [GS14, §3]).*

Corollaire 1.8.2 *Le théorème précédent a les deux conséquences suivantes (théorème 7.4 et 7.5) :*

- (1) *Cas $d = 3$. Toute hypersurface cubique lisse $Y \subset \mathbb{P}^4$ est irrationnelle.*
- (2) *Cas $d = 4$. Toute hypersurface cubique lisse $Y \subset \mathbb{P}^5$ est génériquement irrationnelle.*

Le résultat (1) est connu depuis les travaux de Clemens et Griffiths [CG72], le résultat (2) est lui inédit (on dispose de résultats partiels, voir [AV08] et [BRS15]). Malheureusement, le fait que $\mathbb{L}$ soit un diviseur de zéro dans l'anneau de Grothendieck met en défaut la preuve de ces deux résultats. Galkin et Shinder précisent toutefois dans la remarque 7.2 qu'il est suffisant pour leurs résultats de supposer la conjecture suivante plutôt que le fait que $\mathbb{L}$ ne soit pas un diviseur de zéro :

Conjecture 1.8.3 *Si α est une combinaison linéaire de classes de variétés de dimension inférieure ou égale à $2(d-2)$, alors*

$$\alpha \cdot \mathbb{L}^2 = 0 \implies \alpha \in (\mathbb{L}).$$

Le résultat de Ito, Miura, Okawa et Ueda [IMOU16a] donne un contre-exemple à cette conjecture pour $d \geq 4$ en prenant $\alpha = [X'] - [Y']$. Nous ne savons par contre pas si la conjecture est vraie ou non pour $d = 3$.

1.8.4 Un résultat de Zakharevich

Une description algébrique du noyau du morphisme de localisation $K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}}) \rightarrow K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}]$ est une question importante encore non résolue. Les différents exemples non triviaux de variétés L -équivalentes permettent une meilleure compréhension de ce noyau, mais ne restent malgré tout que des exemples. Zakharevich a récemment montré le résultat suivant [Zak17, th. D] :

Théorème 1.8.4 *Tout élément du noyau de la multiplication par $\mathbb{L}$ est de la forme $[X] - [Y]$, où il n'est pas possible de décomposer $X \times \mathbb{A}^1$ et $Y \times \mathbb{A}^1$ en une partition finie de sous-variétés localement fermées deux à deux isomorphes.*

Une question naturelle posée par Kuznetsov et Shinder est alors la suivante [KS17, question 1.7] :

Question. Les différences $[X] - [Y]$ de variétés projectives lisses L -équivalentes engendrent-elles le noyau du morphisme de localisation $K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}}) \rightarrow K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}]$?

Cette question est à ce jour non résolue, et comme le remarquent Kuznetsov et Shinder, une réponse positive à cette question serait très utile dans certains problèmes de géométrie birationnelle, notamment pour fournir une preuve du théorème 1.8.1, sans utiliser la conjecture 1.8.3 pour $d = 3$, et plus généralement pour $d \geq 4$.