



## Propagation d'une onde acoustique dans un milieu piézoélectrique contraint

La propagation des ondes ultrasonores dépend des propriétés élastiques des matériaux, mais elle est également sensible à d'autres phénomènes tels que la présence de contraintes résiduelles ou appliquées. Cette présence de contraintes va se traduire dans les relations non-linéaires entre contrainte et déformation ; la théorie de l'élasticité linéaire décrite par la loi de Hooke n'est donc plus suffisante. Le comportement élastique non-linéaire d'un matériau peut-être abordé en étudiant la dépendance des paramètres électroacoustiques en fonctions des vitesses de propagation vis-à-vis des contraintes (acoustoélasticité). Pour développer les équations du mouvement, il faut tenir compte à la fois des déformations dynamiques occasionnées par le passage de l'onde, mais aussi des déformations statiques concomitantes à la présence de contraintes.

La méthode présentée consiste à étudier la propagation des ondes acoustiques dans un milieu piézoélectrique contraint électriquement et mécaniquement afin d'en déduire les expressions des vitesses de propagation et du coefficient de couplage en fonction des constantes élastiques, piézoélectriques et diélectriques effectives.

## I Généralités sur les grandeurs mécaniques

### I.1 Déformations

Considérons la déformation d'un solide sous l'action d'une sollicitation, à partir d'un état initial (I) vers un état final (II), représenté ici par des surfaces de normales  $\boldsymbol{\eta}$  et  $\mathbf{N}$  respectivement. Cette déformation est caractérisée par le déplacement  $\mathbf{u}$  d'un point matériel de la position  $\boldsymbol{\xi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  à l'instant  $t = 0$ , à la position finale  $\mathbf{X}(X_1, X_2, X_3)$  à l'instant  $t$ . Les positions de chaque point matériel sont repérées dans un même repère cartésien, de vecteurs de base orthonormée fixe  $y_1, y_2, y_3$ .

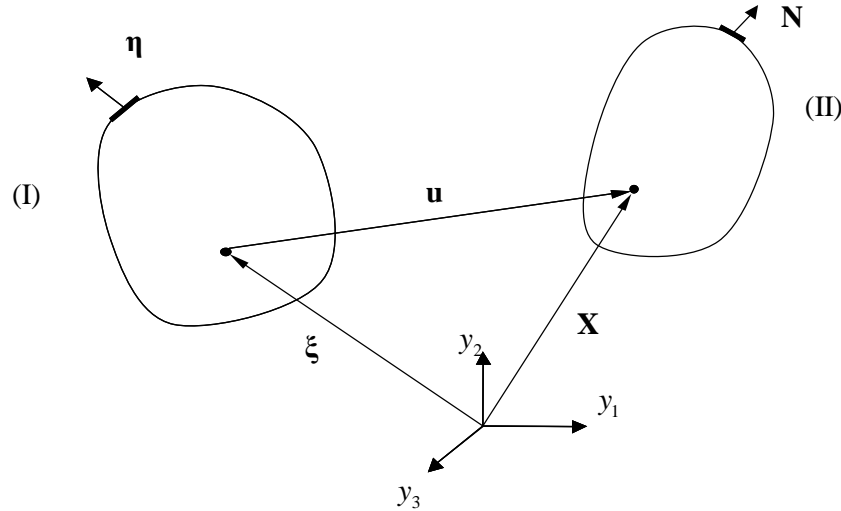


Figure II.1 : Transformation d'un milieu de l'état initial (I) à l'état final (II).

D'un point de vue acoustique, lorsque la longueur d'onde des ondes élastiques est grande devant les distances interatomiques, tout solide homogène peut-être assimilable à un milieu continu. De manière à assurer la continuité de la matière dans son mouvement, l'application  $\mathbf{G} : (\boldsymbol{\xi}, t) \rightarrow \mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}, t)$  est supposée bijective et continûment dérivable.

#### I.1.1 Tenseurs de déformations

Les variations des carrés des longueurs d'un petit segment matériel, qui passe de l'état initial ( $dl_0$ , longueur à l'état non-déformé) à l'état final ( $dl$ , longueur à l'état déformé), sont décrites par

divers tenseurs de déformations. Le tenseur de déformations de Green-Lagrange, noté  $\mathbf{S}$ , peut s'exprimer en utilisant la différence quadratique des longueurs :

$$dl^2 - dl_0^2 = 2 S_{\alpha\beta} d\xi_\alpha d\xi_\beta, \text{ avec } S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial X_p}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial X_p}{\partial \xi_\beta} - \delta_{\alpha\beta} \right), \quad (\text{II.1})$$

où  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$  et  $\delta_{\alpha\beta}$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_{\alpha\beta} = 0$  pour  $\alpha \neq \beta$  et  $\delta_{\alpha\beta} = 1$  pour  $\alpha = \beta$ ).

### I.1.2 Déplacement

Le déplacement  $\mathbf{u}$  d'un point matériel peut-être exprimé à l'aide des vecteurs  $\mathbf{X}$  et  $\xi$  par :

$$\mathbf{u} = \mathbf{X} - \xi, \quad (\text{II.2})$$

ce qui permet d'exprimer les composantes du tenseur de déformations par :

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \xi_\beta} \right). \quad (\text{II.3})$$

Les neuf composantes de déformations  $S_{\alpha\beta}$  forment un tenseur de rang 2 et en raison de sa symétrie, seules six d'entre elles sont distinctes [Royer1996].

La conservation de la masse entre l'état (I) et l'état (II), s'exprime à l'aide du Jacobien de la transformation  $J$  :

$$\rho^f(\mathbf{X}(\xi, t)) = J^{-1} \rho^i, \quad (\text{II.4})$$

où

$$J = \det \mathbf{G}, \quad (\text{II.5})$$

avec  $\mathbf{G}$  le tenseur du gradient de transformation :

$$\mathbf{G} \equiv \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi}. \quad (\text{II.6})$$

$\rho^f$  et  $\rho^i$  correspondent respectivement, aux masses volumiques du milieu dans l'état final et initial.

## I.2 Tenseurs des contraintes

Différents tenseurs de contrainte peuvent être introduits pour traduire l'état de contrainte en un point matériel. Considérons un élément de force de contact  $d\mathbf{F}$  s'appliquant sur un élément de surface matérielle  $dA$  portée par le vecteur  $\mathbf{N}$ , normal à cette surface. Ce milieu continu est soumis à une transformation finie qui le fait passer dans la configuration déformée. Considérons alors un élément de force de contact  $d\mathbf{f}$  s'appliquant sur un élément de surface matérielle  $da$  portée par le vecteur  $\mathbf{n}$ , normal à cette surface. A chaque milieu est associé un élément de déplacements respectif  $d\mathbf{X}$  et  $d\mathbf{x}$  respectivement. La figure II.2 décrit ce système.

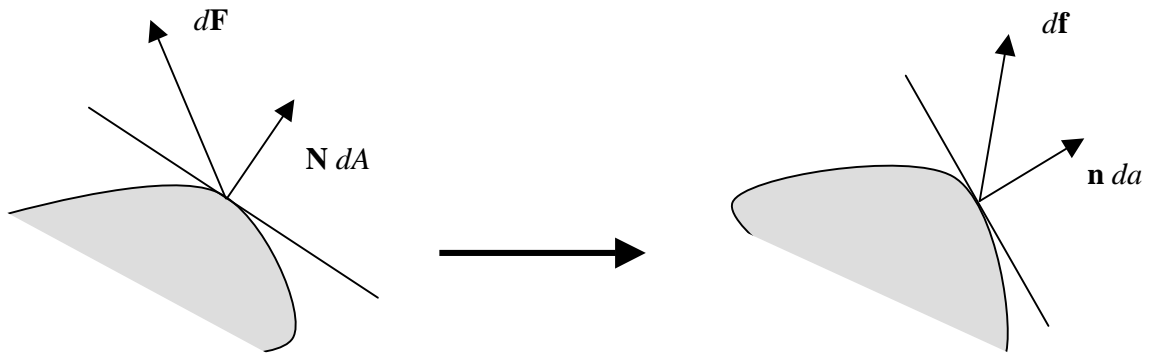


Figure II.2 : Effet d'une transformation de milieu sur les éléments de surface et de force.

Le tenseur de *contrainte de Cauchy*  $\mathbf{t}$  est la contrainte 'vraie' qui relie la force définie dans l'état prédéformé (précontraint) à la surface dans l'état déformé (contraint). C'est un tenseur symétrique.

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}(\mathbf{n}) da . \quad (\text{II.7})$$

Cette relation est facile d'aspect mais difficile à mettre en œuvre dans la pratique puisque la surface déformée fait partie de l'inconnue du problème.

Considérant les éléments de déplacements et de surface définis précédemment :

$$d\mathbf{X} = \mathbf{G} d\mathbf{x} , \quad (\text{II.8.a})$$

$$da = J \mathbf{G}^{-T} dA . \quad (\text{II.8.b})$$

Pour garder une formulation analogue à la formule précédente, il est d'usage d'introduire la *contrainte nominale* (dite *contrainte de Piola-Kirchoff I* ou *Piola-Boussinesq*) :

$$\mathbf{P} = J \mathbf{t} \mathbf{G}^{-T} , \quad (\text{II.9})$$

qui permet d'écrire :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{P}(\mathbf{N}) dA . \quad (\text{II.10})$$

C'est la contrainte que mesurée expérimentalement, car la plus accessible (force appliquée par unité de surface initiale). Son défaut majeur est qu'elle n'est pas symétrique.

De manière à effectuer des mesures de contrainte symétrique, définies dans la configuration initiale, on introduit la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$ , appelée *contrainte matérielle* ou contrainte de PIOLA-KIRCHOFF 2.

Elle est définie par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{P}, \quad \text{d'où} \quad \boldsymbol{\sigma} = J \mathbf{G}^{-1} \mathbf{t} \mathbf{G}^{-T}. \quad (\text{II.11})$$

Suivant la surface choisie, il y a égalité ou non entre le tenseur de Cauchy et le tenseur de PIOLA-KIRCHOFF 2 [Rakotomanana2003].

### I.3 Relations entre contraintes et déformations

#### I.3.1 Comportement linéaire d'un solide élastique

La théorie linéaire de l'élasticité est basée sur une loi purement expérimentale exprimée par Hooke en 1678 pour un solide parfaitement élastique [Royer1996]. Cette théorie se traduit par l'existence d'une relation biunivoque entre contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et déformations  $\mathbf{S}$ , développée ici jusqu'à l'ordre 2 en déformation :

$$\sigma_{ij}(S_{kl}) = \sigma_{ij}(0) + \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial S_{kl}} \right)_{S_{kl}=0} S_{kl} + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial S_{kl} \partial S_{mn}} \right)_{\substack{S_{kl}=0 \\ S_{mn}=0}} S_{kl} S_{mn} + O(S^3), \quad (\text{II.12})$$

$\sigma_{ij}(0)$  correspondant à la contrainte à l'équilibre. On pose  $\sigma_{ij}(0) = 0$  et  $i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3$ .

Ce développement conduit aux relations suivantes, définissant les constantes élastiques isothermes du second et du troisième ordre :

$$C_{ijkl} = \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial S_{kl}} \right)_{S_{kl}=0}, \quad (\text{II.13.a})$$

$$C_{ijklmn} = \left( \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial S_{kl} \partial S_{mn}} \right)_{\substack{S_{kl}=0 \\ S_{mn}=0}}. \quad (\text{II.13.b})$$

Les constantes élastiques du second ordre  $C_{ijkl}$ , forment un tenseur de rang quatre (donc  $3^4 = 81$  composantes) généralement appelé tenseur des rigidités élastiques. Les tenseurs de contraintes  $\sigma_{ij}$  et de déformations  $S_{kl}$  étant tous deux symétriques, cela implique des égalités entre constantes du

second ordre par permutations d'indices :  $C_{ijkl} = C_{jikl}$  et  $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ . Ceci ramène le nombre de constantes indépendantes à 36 au lieu de 81.

La notation matricielle contractée de Voigt peut être utilisée pour la désignation des constantes :

ij ou kl	$\alpha$ ou $\beta$	
11	1	
22	2	
33	3	
23 ou 32	4	
31 ou 13	5	
12 ou 21	6	

$$C_{\alpha\beta} = \begin{cases} C_{ijkl} & \text{pour } i = j \text{ et } k = l \\ 2 C_{ijkl} & \text{pour } i \neq j \text{ et } k = l \\ 2 C_{ijkl} & \text{pour } i = j \text{ et } k \neq l \\ 4 C_{ijkl} & \text{pour } i \neq j \text{ et } k \neq l \end{cases}$$

Des considérations thermodynamiques [Royer1996] nous permettent d'écrire :

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{\partial U}{\partial s_{ij}} \right)_{\zeta}, \quad (\text{II.14})$$

avec  $U$  l'énergie interne d'un corps déformé et  $\zeta$  son entropie.

Il vient alors au second ordre :

$$C_{ijkl}^{(\zeta)} = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial s_{ij} \partial s_{kl}} \right)_{\zeta} = C_{klij}^{(\zeta)}, \quad (\text{II.15})$$

ou en utilisant la notation matricielle de Voigt :

$$C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}. \quad (\text{II.16})$$

Cette relation dite de Maxwell, est vraie dans tous les milieux [Royer1996]. Elle conduit à un tenseur des rigidités élastiques symétriques, dont le nombre de constantes indépendantes se réduit à 21.

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (\text{II.17})$$

Ce nombre de constantes indépendantes se réduira davantage en fonction des symétries des différents matériaux.

Le développement au troisième ordre donne :

$$C_{ijklmn}^{(\zeta)} = \left( \frac{\partial^3 U}{\partial S_{ij} \partial S_{kl} \partial S_{mn}} \right)_{\zeta}. \quad (\text{II.18})$$

Les constantes élastiques du troisième ordre  $C_{ijklmn}$ , forment un tenseur de rang 6 contenant 729 composantes indépendantes dans le cas le plus général. Comme dans le cas des constantes élastiques du second ordre, ce nombre se réduit en fonction du degré de symétrie du matériau. Par exemple pour un matériau présentant une symétrie orthotrope, le nombre des constantes indépendantes se réduit à 20, alors que pour un matériau isotrope il n'en reste que 3.

Notons que le fait de se restreindre à l'ordre 3 dans le développement de la contrainte  $\sigma$ , n'est pas un choix arbitraire. A ce jour, il est impossible d'évaluer expérimentalement des constantes élastiques au-delà des constantes du troisième ordre.

### I.3.2 Comportement linéaire d'un solide piézoélectrique

Comme décrit au premier chapitre, la piézoélectricité est une dépendance entre les propriétés élastiques et électriques de certains matériaux. Dans le cas unidimensionnel, l'effet piézoélectrique direct exprime la polarisabilité de certains diélectriques lorsqu'ils sont déformés :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{e} \mathbf{S}, \quad (\text{II.19})$$

avec  $\mathbf{D}$  l'induction (déplacement) électrique,  $\mathbf{E}$  le champ électrique et  $\mathbf{S}$  la déformation.  $\epsilon$  et  $\mathbf{e}$  sont respectivement les constantes diélectrique (permittivité) et piézoélectrique. Par souci de simplification, la valeur du déplacement électrique à contrainte nulle, soit la polarisation spontanée  $P^sp$ , n'est pas indiquée. De plus, les échanges de chaleur au sein de matériaux piézoélectriques sont largement négligeables [Delaunay2006], ce qui conduit à négliger l'effet des variations d'entropie. C'est pourquoi nous ne l'indiquons plus dans la notation.

L'effet piézoélectrique inverse indique qu'un matériau, placé dans un champ électrique, est soumis à des contraintes et se déforme :

$$\sigma = \mathbf{C} \mathbf{S} - \mathbf{e} \mathbf{E}, \quad (\text{II.20})$$

avec  $\sigma$  la contrainte mécanique et  $\mathbf{C}$  la constante de rigidité.

La généralisation à trois dimensions de la relation (II.19) définit les tenseurs  $\epsilon$  et  $\mathbf{e}$  :



$$D_m = \epsilon_{mp}^S E_p + e_{mij} S_{ij} . \quad (\text{II.21})$$

Les constantes diélectriques à déformation constante  $\epsilon_{mp}^S$  relient la variation d'induction  $D_m$ , au champ électrique  $E_p$  auquel est soumis le solide :

$$\epsilon_{mp}^S = \left( \frac{\partial D_m}{\partial E_p} \right)_{S, \zeta} . \quad (\text{II.22})$$

Elles s'expriment en  $F/m$ . Le nombre de constantes diélectriques est ainsi de 9 (tenseur de rang 2), soit :

$$[\epsilon_{mp}^S] = \begin{bmatrix} \epsilon_{12}^S & \epsilon_{12}^S & \epsilon_{13}^S \\ \epsilon_{21}^S & \epsilon_{22}^S & \epsilon_{23}^S \\ \epsilon_{31}^S & \epsilon_{32}^S & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} . \quad (\text{II.23})$$

Par des considérations thermodynamiques analogues à celles développées pour le tenseur d'élasticité [Royer1996], il résulte que ce tenseur est symétrique :

$$\epsilon_{mp}^S = \epsilon_{pm}^S . \quad (\text{II.24})$$

Les constantes piézoélectriques  $e_{mij}$  relient la variation d'induction  $D_m$ , à champ électrique constant, aux déformations  $S_{ij}$  subies par le solide :

$$e_{mij} = \left( \frac{\partial D_m}{\partial S_{ij}} \right)_{E, \zeta} . \quad (\text{II.25})$$

Elles s'expriment en  $C/m^2$ . On ne spécifie pas qu'elle est à champ électrique constant dans la notation, mais dans d'autres cas, l'exposant apparaîtra. Dans la mesure où  $S_{ij} = S_{ji}$ , le tenseur  $e_{mij}$  est symétrique par rapport à ses deux indices  $i$  et  $j$  :

$$e_{mij} = e_{mji} , \quad (\text{II.26})$$

ce qui permet d'utiliser la notation de Voigt :  $e_{mij} = e_{m\alpha}$  avec  $m, i, j = 1, 2, 3$  et  $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ .

Le nombre de constantes piézoélectriques passe ainsi de 27 (tenseur de rang 3) à 18.

$$[e_{m\alpha}] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{32} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix} . \quad (\text{II.27})$$

Le coefficient piézoélectrique inverse, reliant la contrainte mécanique  $\sigma_{ij}$  et le champ électrique  $E_i$  dans l'équation généralisée, se déduit de la constante  $e_{ijk}$  par des considérations thermodynamiques :

$$\left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial E_m} \right)_S = -e_{mij}. \quad (\text{II.28})$$

Les coefficients de proportionnalité des deux effets sont opposés. L'effet piézoélectrique inverse est donc une conséquence thermodynamique de l'effet direct. Dans le domaine linéaire, les coefficients  $e_{mij}$  sont constants, par hypothèse, et l'intégration de l'équation précédente à entropie et déformations constantes conduit à :

$$\sigma_{ij} = -e_{mij} E_m. \quad (\text{II.29})$$

Si de plus le solide subit une déformation  $S_{kl}$  :

$$\sigma_{ij} = -e_{mij} E_m + C_{ijkl}^E S_{kl}, \quad (\text{II.30})$$

avec la constante élastique à champ électrique constant  $C_{ijkl}^E$  définie par la loi de Hooke généralisée :

$$C_{ijkl}^E = \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial S_{kl}} \right)_{E, \zeta}, \quad (\text{II.31})$$

qui relie les contraintes et les déformations lorsque le champ électrique  $\mathbf{E}$  est maintenu constant.

Les équations (II.21) et (II.30) constituent un système d'équations d'état (constitutives) d'un matériau piézoélectrique. En notation matricielle, ce système s'écrit :

$$\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta}^E S_\beta - e_{m\alpha} E_m, \quad (\text{II.32.a})$$

$$D_\mu = \epsilon_{\mu\varphi}^S E_\varphi + e_{\mu\alpha} S_\alpha. \quad (\text{II.32.b})$$

Ce système fournit la contrainte mécanique et l'induction électrique en fonction des variables indépendantes, champ électrique et déformation.

En plus de ce système d'équation, il en existe trois autres qui peuvent être décrit selon les variables indépendantes choisies.

En prenant  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{D}$ , le système s'écrit :

$$S_{ij} = -d_{mij} E_m + s_{ijkl}^E \sigma_{kl}, \quad (\text{II.33.a})$$

$$D_m = \varepsilon_{mp}^T E_p + d_{mij} \sigma_{ij}, \quad (\text{II.33.b})$$

avec  $s_{ijkl}^E$  la souplesse à champ électrique constant (inverse du tenseur des rigidités),  $\varepsilon_{mp}^T$  la permittivité à contrainte constante et  $d_{mij}$  le coefficient piézoélectrique.

Les couples définis en (II.32) et (II.33) sont les plus utilisés. Les deux autres permettent d'écrire  $\mathbf{E}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  en fonction de  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{E}$  en fonction de  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{D}$  :

$$\sigma_{ij} = h_{mij} D_m + C_{ijkl}^D S_{kl}, \quad (\text{II.34.a})$$

$$E_m = \beta_{mp}^S D_p - h_{mij} S_{ij}, \quad (\text{II.34.b})$$

avec le coefficient piézoélectrique  $h_{mij}$ , le tenseur des rigidités à induction constante  $C_{ijkl}^D$  et  $\beta_{mp}^S$  l'inverse du tenseur  $\varepsilon_{mp}^S$ .

$$S_{ij} = g_{mij} D_m + s_{ijkl}^D \sigma_{kl}, \quad (\text{II.35.a})$$

$$E_m = \beta_{mp}^T D_p - g_{mij} \sigma_{ij}, \quad (\text{II.35.b})$$

où  $g_{mij}$  est un nouveau coefficient piézoélectrique,  $s_{ijkl}^D$  la souplesse à induction constante et  $\beta_{mp}^T$  l'inverse du tenseur  $\varepsilon_{mp}^T$ .

Afin de pouvoir passer facilement d'un système à l'autre, il est utile d'exprimer les relations liant les constantes élastiques, piézoélectriques et diélectriques. La notation de Voigt permettant de passer en notation matricielle :

$$C_{\alpha\beta}^E s_{\beta\gamma}^E = \delta_{\alpha\gamma}, \quad (\text{II.36.a})$$

$$e_{i\beta} = d_{i\alpha} C_{\alpha\beta}^E, \quad (\text{II.36.b})$$

$$\varepsilon_{ij}^T - \varepsilon_{ij}^S = d_{i\alpha} e_{j\alpha}, \quad (\text{II.36.c})$$

$$C_{\alpha\beta}^D = C_{\alpha\beta}^E + e_{i\alpha} h_{i\beta}, \quad (\text{II.36.d})$$

$$h_{i\beta} = g_{i\alpha} C_{\alpha\beta}^D, \quad (\text{II.36.e})$$

$$d_{i\alpha} = \varepsilon_{ij}^T g_{j\alpha}. \quad (\text{II.36.f})$$

Par la suite, nous utiliserons principalement le système d'équations (II.32) et nous ne mettrons plus les indices  $E$  et  $S$  dans les constantes  $C_{\alpha\beta}^E$ ,  $s_{\beta\gamma}^E$  et  $\varepsilon_{ij}^S$  pour alléger la notation.

Le tableau de la figure II.3 rassemble les résultats de la réduction du nombre de composantes des tenseurs traduisant les propriétés élastiques, électriques et piézoélectriques des cristaux appartenant aux différentes classes de symétrie ponctuelle.

<p>Triclinique</p> <p>1 <math>\bar{1}</math></p> <p>21 21 18 0 6 6</p>	<p>Monoclinique</p> <p>2 <math>m</math> <math>2/m</math></p> <p>13 13 8 0 4 4</p>	<p>Orthorhombique</p> <p>222</p> <p>9 9 3 0 3 3</p>
<p>Trigonal</p> <p>3 <math>\bar{3}</math></p> <p>7 7 6 0 2 2</p>	<p>32 <math>3m</math> <math>\bar{3}m</math></p> <p>6 6 2 0 2 2</p>	<p>2mm <math>mmm</math></p> <p>9 9 5 0 3 3</p>
<p>Tétragonal</p> <p>4 <math>\bar{4}</math> <math>4/m</math></p> <p>7 7 4 0 2 2</p>	<p>422 <math>4mm</math></p> <p>6 6 1 0 2 2</p>	<p>4mm <math>4/mmm</math></p> <p>6 6 3 0 2 2</p>
<p>Hexagonal</p> <p>6 <math>\bar{6}</math> 622</p> <p>5 5 4 2 2 2</p>	<p>6mm <math>\bar{6}m2</math> 6/m <math>6/mmm</math></p> <p>5 5 3 1 2 2</p>	<p>42m <math>4/mmm</math></p> <p>6 6 2 0 2 2</p>
<p>Cubique</p> <p>23 <math>\bar{4}3m</math> 432 <math>m\bar{3}</math> <math>m\bar{3}m</math></p> <p>3 3 1 0 1 1</p>		

· Constantes nulles    ● ○ Constantes non nulles    × Constantes égales à  $(C_{11} - C_{12})/2$   
 ●—● Constantes égales    ●—○ Constantes opposées

Figure II.3 : Composantes des tenseurs élastiques, piézoélectriques et diélectriques suivant les classes de symétrie [Royer1996].

## I.4 Couplage électromécanique

Le plus important des coefficients caractérisant les matériaux piézoélectriques est le coefficient de couplage électromécanique qui peut se définir de trois manières [Rogacheva2000].

La formule de Mason est souvent utilisée pour déterminer le coefficient de couplage électromécanique dans des problèmes dynamiques pour des oscillations près de la résonance, il sera noté  $k_d$  :

$$k_d^2 = \frac{\omega_a^2 - \omega_r^2}{\omega_a^2}, \quad (\text{II.37})$$

avec  $\omega_r$   $\omega_a$  les pulsations de résonance et d'antirésonance des vibrations.

Une autre formule pour déterminer le coefficient de couplage électromécanique est une formule en énergie. Le coefficient sera alors noté  $k_e$  :

$$k_e^2 = \frac{U^{(d)} - U^{(sh)}}{U^{(d)}}, \quad (\text{II.38})$$

où  $U^{(d)}$  est l'énergie interne de l'élément piézoélectrique avec les électrodes et  $U^{(sh)}$  est l'énergie interne de ce même élément avec les électrodes déconnectées. Pour calculer le  $k_e$ , on résout l'équation dynamique pour déterminer les deux énergies, en considérant que les contraintes sont connues.

Une autre méthode (la manière la plus courante), est de calculer le couplage électromécanique, qui sera noté  $k_t^2$ , en le définissant comme le rapport entre la densité d'énergie mutuelle élastique et diélectrique et la moyenne géométrique des densités d'énergies élastique et diélectrique. En négligeant les effets thermiques et magnétiques de la piézoélectricité, l'énergie interne du mode est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} S_{ij} \sigma_{ij} + \frac{1}{2} E_m D_m. \quad (\text{II.39})$$

Cette équation est une fonction linéaire de l'énergie qui néglige donc le deuxième ordre en déformation. En prenant  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{S}$  comme variables indépendantes, on reprend le système d'équation (II.34) sous la forme :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^D S_{kl} - \frac{e_{mij}}{\epsilon_{mp}} D_p, \quad (\text{II.40.a})$$

$$E_m = \frac{1}{\varepsilon_{mp}} D_p - \frac{e_{pij}}{\varepsilon_{mp}} S_{ij}, \quad (\text{II.40.b})$$

avec

$$C_{ijkl}^D = C_{ijkl} + \frac{e_{mij} e_{pkl}}{\varepsilon_{mp}}. \quad (\text{II.41})$$

Ainsi, l'équation (II.39) se développe-en :

$$U = \frac{1}{2} C_{ijkl}^D S_{ij} S_{kl} - \frac{e_{pij}}{\varepsilon_{mp}} S_{ij} D_m + \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon_{mp}} D_m D_p, \quad (\text{II.42})$$

en posant :

$$U_e = \frac{1}{2} C_{ijkl}^D S_{ij} S_{kl}, \quad (\text{II.43.a})$$

$$U_m = -\frac{e_{pij}}{\varepsilon_{mp}} S_{ij} D_m, \quad (\text{II.43.b})$$

$$U_d = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon_{mp}} D_m D_p, \quad (\text{II.43.c})$$

où  $U_e$ ,  $U_m$  et  $U_d$  représentent respectivement l'énergie élastique, mutuelle (d'interaction élastique électrique) et diélectrique. L'énergie du système s'écrit alors :

$$U = U_e + U_m + U_d \quad (\text{II.44})$$

et le coefficient de couplage électromécanique devient alors :

$$k_t = \frac{U_m}{\sqrt{U_e U_d}}. \quad (\text{II.45})$$

Ce coefficient de couplage permet de caractériser un matériau à l'instar de l'ensemble des constantes élastiques, diélectriques et piézoélectriques. En effet, il tient compte à la fois des propriétés élastiques, diélectriques, et piézoélectriques. Ainsi, il est un élément de comparaison des matériaux qui traduit l'aptitude d'un matériau piézoélectrique à convertir une énergie mécanique (et inversement). Cette formule est très souvent utilisée pour déterminer les caractéristiques piézoélectriques d'un matériau piézoélectrique, traditionnellement noté  $k_{33}$ ,  $k_{31}$ ... Ils sont trouvés en résolvant le problème quasi-statique pour des matériaux piézoélastiques de géométrie simple, et ces solutions sont indépendantes de la position et du temps [Brissaud2007].

Ainsi, pour un mode de vibration en épaisseur d'une plaque, plusieurs simplifications apparaissent du fait de la nullité de la plupart des contraintes. En indice contracté, lors d'une propagation le long de l'axe de polarisation ( $Oy_3$ ), l'énergie du système se ramène à :

$$U = \frac{1}{2} C_{33}^D S_{33}^2 - \frac{e_{33}}{\epsilon_{33}} S_{33} D_3 + \frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon_{33}} D_3^2. \quad (\text{II.46})$$

Dans ce cas, le coefficient de couplage (du mode plaque) est donné par :

$$k_i^2 = \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33} C_{33}^D}. \quad (\text{II.47})$$

Pour des états électrostatiques non uniforme, ce coefficient dépend de beaucoup de paramètres comme la fréquence de vibration, la géométrie du matériau, les électrodes, les conditions de bords mécaniques et électriques. Généralement, les valeurs de coefficient de couplage mesurées sont moins importantes que celles définies pour des matériaux uniformes.

## II Équation de propagation d'une onde acoustique dans un milieu piézoélectrique précontraint

### II.1 Équations du mouvement dans un milieu précontraint non piézoélectrique

L'étude de la propagation d'une onde ultrasonore dans un milieu contraint nécessite la prise en compte de la nature de cette onde et du comportement mécanique du matériau. Ceci conduit à distinguer plusieurs états du milieu :

- État naturel : Cet état correspond au milieu libre de toute contrainte (appliquée ou résiduelle). Les positions de ses points matériels sont données par le vecteur position  $\xi$  dont les composantes sont  $(\xi_\alpha, \xi_\beta, \xi_\gamma)$ . Les lettres grecques faisant directement référence à l'état naturel indicé en  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

- État statique : Si le milieu subit une déformation statique (contrainte résiduelle ou appliquée) dans le domaine élastique, son état change et nous l'appellerons "état statique" ou "état prédéformé" ou encore "état précontraint". Les positions des points matériels sont alors données par le vecteur position  $\mathbf{X}$  dont les composantes sont  $(X_I, X_J, X_K)$ . Les lettres latines majuscules faisant directement référence à l'état statique indicé en  $(I, J, K)$ .

- État dynamique : Lorsque le milieu précontraint (déformé statiquement) est traversé par une onde acoustique, cela se traduit par l'addition d'une petite contrainte dynamique. Elle vient se superposer à la première et amène le milieu dans un troisième état que nous nommerons "état dynamique". Les positions des points matériels sont définies par le vecteur  $\mathbf{x}$  dont les composantes sont  $(x_i, x_j, x_k)$ . Les lettres latines minuscules faisant directement référence à l'état dynamique indicé en  $(i, j, k)$ .

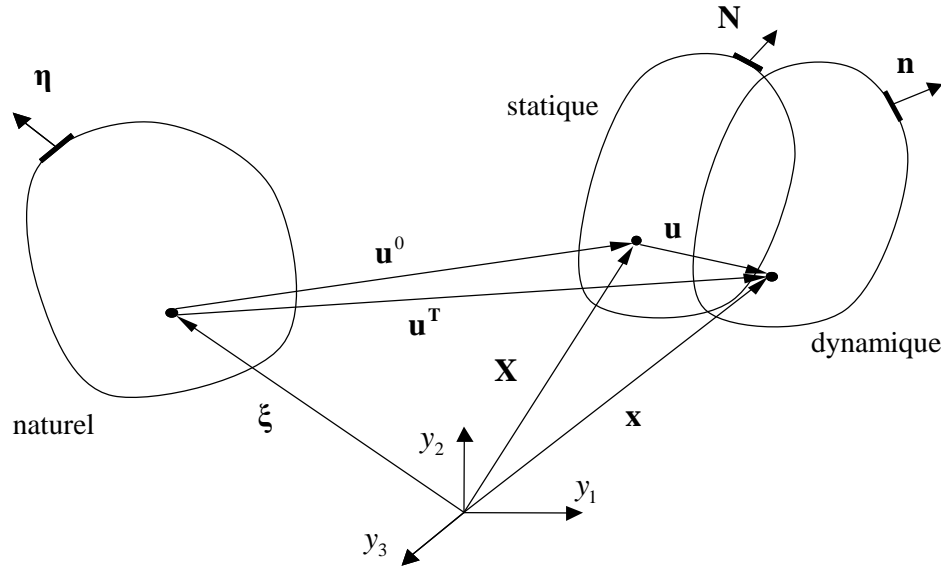


Figure II.4 : Schématisation des trois états du matériau : naturel, statique et dynamique.

Dans les trois états (représentés respectivement par des surfaces de normales  $\boldsymbol{\eta}$ ,  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{n}$ ) la position d'un point matériel est toujours repérée dans le même repère cartésien orthonormé, de vecteurs de bases unitaires  $y_1, y_2, y_3$ . Ainsi,  $\boldsymbol{\xi}$ ,  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{x}$  sont les composantes des vecteurs positions d'un même point matériel respectivement dans l'état naturel, statique et dynamique.

### II.1.1 Déplacements

Contrairement au cas linéaire où il n'y a qu'un seul déplacement à identifier, ici nous en différencions trois :

- la déformation statique, qui correspond au passage de l'état naturel à l'état statique, et qui provoque un déplacement des particules du milieu noté  $\mathbf{u}^0$ ,
- la déformation dynamique, qui correspond au passage de l'état statique à l'état dynamique, et qui provoque à son tour un déplacement noté  $\mathbf{u}$ ,



- la déformation totale, qui correspond au passage de l'état naturel à l'état dynamique, et qui provoque un déplacement global  $\mathbf{u}^T$ .

Ces vecteurs de déplacements sont reliés aux vecteurs de position par :

$$\mathbf{u}^0(\xi) = \mathbf{X} - \xi, \quad (\text{II.48.a})$$

$$\mathbf{u}^T(\xi, t) = \mathbf{x} - \xi, \quad (\text{II.48.b})$$

$$\mathbf{u}(\xi, t) = \mathbf{u}^T(\xi, t) - \mathbf{u}^0(\xi) = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (\text{II.48.c})$$

D'un point de vue dynamique, nous resterons dans le cadre de l'acoustique linéaire. Ainsi, la perturbation apportée par l'onde acoustique est supposée petite par rapport à celle engendrée par la contrainte statique [Pao1984-Su2005] :

$$\|\mathbf{u}\| \ll \|\mathbf{u}^0\|. \quad (\text{II.49})$$

En effet, prenons l'exemple d'une déformation occasionnée dans un aluminium par le passage d'une onde (de fréquence de 2.5 MHz), le déplacement est de l'ordre de quelques angströms, alors qu'une déformation finie appliquée provoque des déplacements de l'ordre de quelques microns [Duquennoy1997].

Ici, nous avons choisi de définir ces vecteurs en fonction des coordonnées de l'état naturel, mais ces relations seraient analogues dans les deux autres systèmes de coordonnées.

### II.1.2 Déformations

Ayant défini trois vecteurs déplacements  $\mathbf{u}^0$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}^T$ , nous pouvons définir trois tenseurs de déformations  $\mathbf{S}^0$ ,  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{S}^T$ . Comme pour les relations en déplacements, ces trois tenseurs peuvent être représentés dans différents systèmes de coordonnées. Ainsi, l'exposant indique l'état de déformation du milieu et les indices le choix du système de coordonnées. Ces tenseurs de déformations sont reliés aux vecteurs de déplacements par :

$$S_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial X_K}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial X_K}{\partial \xi_\beta} - \delta_{\alpha\beta} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial u_\beta^0}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial u_\lambda^0}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial u_\lambda^0}{\partial \xi_\beta} \right), \quad (\text{II.50.a})$$

$$S_{\alpha\beta}^T = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_k}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_\beta} - \delta_{\alpha\beta} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha^T}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial u_\beta^T}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial u_\lambda^T}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial u_\lambda^T}{\partial \xi_\beta} \right). \quad (\text{II.50.b})$$

Comme pour les déplacements, les déformations apportées par l'onde acoustique sont considérées petites par rapport à celles causées par les contraintes statiques, ceci se traduit par la relation :

$$\|\mathbf{S}\| \ll \|\mathbf{S}^0\|. \quad (\text{II.51})$$

Le tenseur dynamique est alors donné approximativement par :

$$S_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}^T - S_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \xi_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial \xi_{\alpha}} + \frac{\partial u_{\lambda}^0}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial u_{\lambda}}{\partial \xi_{\beta}} + \frac{\partial u_{\lambda}^0}{\partial \xi_{\beta}} \frac{\partial u_{\lambda}}{\partial \xi_{\alpha}} \right), \quad (\text{II.52})$$

où nous ne prenons pas en compte le terme  $\frac{\partial u_{\lambda}}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial u_{\lambda}}{\partial \xi_{\beta}}$  qui est largement négligeable devant les autres termes [Duquennoy1997].

### II.1.3 Tenseurs de contraintes

Les deux états de déformations et les trois systèmes de coordonnées, nous permettent de définir cinq configurations pour les tenseurs de contraintes.

- $\sigma_{IJ}^0 = t_{IJ}^0$  : l'exposant 0 réfère à l'état de déformation statique. Les indices majuscules expriment le fait que la contrainte soit calculée par rapport à la surface dans l'état statique, et qu'elle est exprimée avec les coordonnées statiques.

- $\sigma_{\alpha\beta}^0$  : état de déformation statique : contrainte calculée par rapport à la surface dans l'état naturel et exprimée avec les coordonnées naturelles.

- $\sigma_{ij}^T = t_{ij}^T$  : l'exposant T réfère à l'état de déformation dynamique : contrainte calculée par rapport à la surface dans l'état dynamique et exprimée avec les coordonnées dynamiques.

- $\sigma_{IJ}^T$  : état de déformation dynamique : contrainte calculée par rapport à la surface dans l'état statique et exprimée avec les coordonnées statiques.

- $\sigma_{\alpha\beta}^T$  : état de déformation dynamique : contrainte calculée par rapport à la surface dans l'état naturel et exprimée avec les coordonnées naturelles.

Les différents tenseurs de déformations sont reliés par les relations suivantes :

$$\sigma_{IJ}^0 = t_{IJ}^0 = \frac{\rho^S}{\rho^0} \frac{\partial X_I}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial X_J}{\partial \xi_{\beta}} \sigma_{\alpha\beta}^0, \quad (\text{II.53.a})$$

$$\sigma_{ij}^T = t_{ij}^T = \frac{\rho^T}{\rho^S} \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \frac{\partial x_j}{\partial X_L} \sigma_{KL}^T = \frac{\rho^T}{\rho^0} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_{\beta}} \sigma_{\alpha\beta}^T, \quad (\text{II.53.b})$$

$$t_{IJ}^T = \frac{\rho^S}{\rho^0} \frac{\partial X_I}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial X_J}{\partial \xi_\beta} \sigma_{\alpha\beta}^T. \quad (\text{II.53.c})$$

En accord avec les équations de déplacements (II.48), nous avons :

$$\frac{\partial X_I}{\partial \xi_\alpha} = \delta_{I\alpha} + \frac{\partial u_I^0}{\partial \xi_\alpha}, \quad (\text{II.54.a})$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_K} = \delta_{iK} + \frac{\partial u_i}{\partial X_K}, \quad (\text{II.54.b})$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_\alpha} = \delta_{i\alpha} + \frac{\partial u_i^T}{\partial \xi_\alpha}. \quad (\text{II.54.c})$$

Le déplacement  $\mathbf{u}$  dû à la perturbation dynamique ayant été introduit, par analogie, le tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$  correspond à la composante dynamique due au passage de l'onde :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T - \boldsymbol{\sigma}^0. \quad (\text{II.55})$$

Les composantes de ces tenseurs s'expriment respectivement dans les systèmes de coordonnées des états prédéformé et naturel sous la forme :

$$\sigma_{IJ} = \sigma_{IJ}^T - \sigma_{IJ}^0 = \sigma_{IJ}^T - t_{IJ}^0, \quad (\text{II.56.a})$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^T - \sigma_{\alpha\beta}^0. \quad (\text{II.56.b})$$

En utilisant les équations (II.53.a-b-c) dans l'équation (II.56.a), ces composantes sont reliées par la relation :

$$\sigma_{IJ} = \frac{\rho^S}{\rho^0} \frac{\partial X_I}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial X_J}{\partial \xi_\beta} \sigma_{\alpha\beta}. \quad (\text{II.57})$$

Avec l'expression (II.4), il est possible d'exprimer le rapport de masse volumique comme le déterminant de la matrice de transformation correspondante, soit :

$$\sigma_{IJ} = \left| \frac{\partial X}{\partial \xi} \right|^{-1} \frac{\partial X_I}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial X_J}{\partial \xi_\beta} \sigma_{\alpha\beta}. \quad (\text{II.58})$$

#### II.1.4 Conditions d'équilibre dans l'état statique

Pour un corps en équilibre mécanique dans l'état statique, la résultante et le moment des forces agissant sur ce corps sont nuls. Cette condition d'équilibre statique se traduit mécaniquement par :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left[ \sigma_{\beta\varphi}^0 \left( \delta_{\alpha\varphi} + \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial \xi_\varphi} \right) \right] = 0, \quad (\text{II.59.a})$$

$$\frac{\partial \sigma_{IJ}^0}{\partial X_J} = \frac{\partial t_{IJ}^0}{\partial X_J} = 0. \quad (\text{II.59.b})$$

II.1.5 Développement de l'équation de la dynamique pour un milieu précontraint dans les différents systèmes de coordonnées

A partir du principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{\partial t_{ij}^T}{\partial x_j} = \rho^T \frac{\partial^2 u_i^T}{\partial t^2}, \quad (\text{II.60})$$

et d'après les équations de déplacements (II.48.a-b-c), en accord avec les relations de dérivation sur ces différents vecteurs (II.54.a-b-c), l'équation de la dynamique dans l'état final peut s'exprimer selon les 3 systèmes de coordonnées :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left( \sigma_{\beta\alpha}^T + \sigma_{\beta\varphi}^T \frac{\partial u_\alpha^T}{\partial \xi_\varphi} \right) = \rho^0 \frac{\partial^2 u_\alpha^T}{\partial t^2} = \rho^0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}, \quad (\text{II.61.a})$$

$$\frac{\partial}{\partial X_K} \left( \sigma_{KI}^T + \sigma_{KP}^T \frac{\partial u_I}{\partial X_P} \right) = \rho^S \frac{\partial^2 u_I^T}{\partial t^2} = \rho^S \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}, \quad (\text{II.61.b})$$

$$\frac{\partial t_{ij}^T}{\partial x_j} = \rho^T \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho^T \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_p \frac{\partial v_i}{\partial x_p} \right) = \rho^T \frac{Dv_i}{Dt}, \quad (\text{II.61.c})$$

avec  $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$  la vitesse de la particule à la position  $\mathbf{x}$  et où l'opérateur  $D/Dt$  est la dérivée Lagrangienne.

D'après la condition d'équilibre (II.59.a), la relation (II.61.a) s'exprime par :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left( \sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\beta\varphi}^0 \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\varphi} + \sigma_{\beta\varphi} \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial \xi_\varphi} \right) = \rho^0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}. \quad (\text{II.62})$$

De même, la relation (II.59.b), nous permet d'exprimer la relation (II.61.b) sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial X_J} \left( \sigma_{IJ} + t_{JP}^0 \frac{\partial u_I}{\partial X_P} \right) = \rho^S \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}. \quad (\text{II.63})$$

Rappelons qu'ici, le tenseur  $t_{JP}^0$  est le tenseur de Cauchy qui est égal au deuxième tenseur de Piola-Kirchoff exprimé dans le système de coordonnées statique  $\sigma_{JP}^0$ .

Jusqu'à présent, deux hypothèses ont été faites : la prédéformation est statique et la perturbation dynamique est petite. La manière dont les particules sont mues de la position  $\xi$  à  $\mathbf{X}$  ne sera pas traitée, et aucune restriction sur les propriétés intrinsèques du matériau n'est imposée. Les équations de mouvement (II.62-63) sont donc applicables à un corps dans une forme générale de prédéformation, finie ou infinitésimale, élastique ou inélastique [Duquennoy1997].

## II.2 Équations de la dynamique et équations constitutives d'un matériau piézoélectrique sous contrainte

### II.2.1 Approximation quasi-statique

Les vibrations élastiques nécessitant un déplacement de matière, la vitesse avec laquelle se déplace une déformation ou une contrainte est très inférieure à celle avec laquelle se déplace un champ électrique [Royer1996]. La vitesse des ondes élastiques est, en effet,  $10^4$  à  $10^5$  fois plus petite que la vitesse des ondes électromagnétiques. Compte tenu du fait que le champ électromagnétique associé au champ élastique est quasi-statique, le champ magnétique associé ne joue aucun rôle et les équations de Maxwell se réduisent à :

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \equiv \vec{0}. \quad (\text{II.64})$$

Les seules grandeurs électriques nécessaires à la description d'un solide piézoélectrique sont le champ électrique  $E_p$  et l'induction électrique  $D_M$ . Les équations régissant l'état électrostatique décrivent que le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire  $\Phi$ , et que le déplacement électrique obéit à l'équation de Poisson, soit respectivement :

$$E_p = -\frac{\partial \Phi}{\partial X_p}, \quad (\text{II.65})$$

$$\frac{\partial D_M}{\partial X_M} = \rho_e, \quad (\text{II.66})$$

où  $\rho_e$  est la densité volumique de charges libres. Pour un matériau isolant parfait,  $\rho_e = 0$ .

## II.2.2 Équations de la dynamique et équations constitutives d'un matériau piézoélectrique sous contrainte dans le système de coordonnées de l'état naturel

L'équation de la dynamique (II.62) et d'équilibre à l'état statique (II.59.a) sont déjà connues dans le système de coordonnées de l'état naturel, mais il vient se rajouter l'équation de Poisson pour un diélectrique dans l'état dynamique et dans l'état statique :

$$\frac{\partial D_{\mu}}{\partial \xi_{\mu}} = 0, \quad (\text{II.67.a})$$

$$\frac{\partial D_{\mu}^0}{\partial \xi_{\mu}} = 0. \quad (\text{II.67.b})$$

De la même manière que précédemment, il est possible d'exprimer les équations constitutives d'un matériau piézoélectrique sous contrainte [Liu2003-Su2005] et soumis à une petite perturbation dynamique. Les équations constitutives de l'état précontraint seul sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^0 &= C_{\alpha\beta\gamma\delta} S_{\gamma\delta}^0 + \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta} S_{\gamma\delta}^0 S_{\epsilon\eta}^0 + e_{\varphi\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\varphi}} + e_{\varphi\alpha\beta\gamma\delta} S_{\gamma\delta}^0 \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\varphi}} - \frac{1}{2} l_{\varphi\omega\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\varphi}} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\omega}} + O(S^3, \Phi^3, S \Phi^2, S^2 \Phi) \\ D_{\mu}^0 &= e_{\mu\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^0 + \frac{1}{2} e_{\mu\alpha\beta\gamma\delta} S_{\alpha\beta}^0 S_{\gamma\delta}^0 - \epsilon_{\mu\varphi} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\varphi}} + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\varphi\omega} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\varphi}} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\omega}} - l_{\mu\varphi\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\varphi}} S_{\alpha\beta}^0 + O(S^3, \Phi^3, S \Phi^2, S^2 \Phi) \end{aligned} \quad (\text{II.68.a-b})$$

où les  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$  et  $C_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta}$  sont les constantes élastiques du deuxième et troisième ordre,  $e_{\pi\alpha\beta}$  et  $e_{\pi\alpha\beta\gamma\delta}$  sont les constantes piézoélectriques du deuxième et troisième ordre.  $\epsilon_{\mu\pi}$  et  $\epsilon_{\mu\pi\omega}$  sont les constantes diélectriques du deuxième et troisième ordre et  $l_{\mu\pi\alpha\beta}$  est la constante électrostrictive. L'ensemble des éléments de symétrie de ces constantes ont été étudiés par Declercq [Declercq2005].

Les équations constitutives de l'état final sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^T &= C_{\alpha\beta\gamma\delta} S_{\gamma\delta}^T + \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta} S_{\gamma\delta}^T S_{\epsilon\eta}^T + e_{\varphi\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_{\varphi}} + e_{\varphi\alpha\beta\gamma\delta} S_{\gamma\delta}^T \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_{\varphi}} - \frac{1}{2} l_{\varphi\omega\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_{\varphi}} \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_{\omega}} + O(S^3, \Phi^3, S \Phi^2, S^2 \Phi) \\ D_{\mu}^T &= e_{\mu\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^T + \frac{1}{2} e_{\mu\alpha\beta\gamma\delta} S_{\alpha\beta}^T S_{\gamma\delta}^T - \epsilon_{\mu\varphi} \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_{\varphi}} + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\varphi\omega} \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_{\varphi}} \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_{\omega}} - l_{\mu\varphi\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_{\varphi}} S_{\alpha\beta}^T + O(S^3, \Phi^3, S \Phi^2, S^2 \Phi) \end{aligned} \quad (\text{II.69.a-b})$$

Comme pour la contrainte et la déformation, ces deux variables ainsi que le potentiel et le déplacement électrique sont traités comme des variables totales, composées de leurs composantes statiques et dynamiques :

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{II.70.a})$$

$$\mathbf{u}^T = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}, \quad (\text{II.70.b})$$

$$\Phi^T = \Phi^0 + \Phi, \quad (\text{II.70.c})$$

$$\mathbf{D}^T = \mathbf{D}^0 + \mathbf{D}. \quad (\text{II.70.d})$$

En faisant la différence entre les équations (II.69.a-b) et (II.68.a-b), en exprimant le tenseur de contraintes ainsi que le déplacement électrique et en négligeant les termes d'ordre 4 en énergie, nous obtenons les équations de la dynamique et constitutives pour un matériau piézoélectrique sous contrainte :

$$\sigma_{\alpha\beta}^* = C_{\alpha\beta\gamma\delta}^* \frac{\partial u_\gamma}{\partial \xi_\delta} + e_{\mu\alpha\beta}^* \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}, \quad (\text{II.71.a})$$

$$D_\mu^* = e_{\mu\alpha\beta}^{**} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta} - \varepsilon_{\mu\varphi}^* \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\varphi}, \quad (\text{II.71.b})$$

avec

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}^* = C_{\alpha\beta\gamma\delta} + C_{\alpha\beta\varphi\delta} \frac{\partial u_\gamma^0}{\partial \xi_\varphi} + C_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta} \frac{\partial u_\epsilon^0}{\partial \xi_\eta} + e_{\varphi\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_\varphi}, \quad (\text{II.72.a})$$

$$e_{\mu\alpha\beta}^* = e_{\mu\alpha\beta} + e_{\mu\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma^0}{\partial \xi_\delta} - l_{\mu\varphi\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_\varphi}, \quad (\text{II.72.b})$$

$$e_{\mu\alpha\beta}^{**} = e_{\mu\alpha\beta} + e_{\mu\beta\delta} \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial \xi_\delta} + e_{\mu\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma^0}{\partial \xi_\delta} - l_{\mu\varphi\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_\varphi}, \quad (\text{II.72.c})$$

$$\varepsilon_{\mu\varphi}^* = \varepsilon_{\mu\varphi} + l_{\mu\varphi\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial \xi_\beta} - \varepsilon_{\mu\varphi\omega} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_\omega}. \quad (\text{II.72.d})$$

En substituant les équations (II.71.a-b) dans (II.62) et (II.67.a) et en négligeant à nouveaux les termes d'ordre 4 en énergie, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left( \tilde{\sigma}_{\alpha\beta} + \sigma_{\beta\varphi}^0 \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\varphi} \right) = \rho^0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}, \quad (\text{II.73.a})$$

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \xi_\delta} + \tilde{e}_{\mu\alpha\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}, \quad (\text{II.73.b})$$

$$D_\mu = \tilde{e}_{\mu\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta} - \tilde{\varepsilon}_{\mu\varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\varphi}, \quad (\text{II.73.c})$$

avec 4 paramètres effectifs respectivement élastiques, piézoélectriques et diélectriques définis par :

$$\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} + C_{\phi\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_{\alpha}^0}{\partial \xi_{\phi}} + C_{\alpha\beta\phi\delta} \frac{\partial u_{\gamma}^0}{\partial \xi_{\phi}} + C_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta} \frac{\partial u_{\epsilon}^0}{\partial \xi_{\eta}} + e_{\phi\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\phi}}, \quad (\text{II.74.a})$$

$$\tilde{e}_{\mu\alpha\beta} = e_{\mu\alpha\beta} + e_{\mu\beta\phi} \frac{\partial u_{\alpha}^0}{\partial \xi_{\phi}} + e_{\mu\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_{\gamma}^0}{\partial \xi_{\delta}} - l_{\mu\phi\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\phi}}, \quad (\text{II.74.b})$$

$$\tilde{\epsilon}_{\mu\phi} = \epsilon_{\mu\phi} + l_{\mu\phi\alpha\beta} \frac{\partial u_{\alpha}^0}{\partial \xi_{\beta}} - \epsilon_{\mu\phi\omega} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\omega}}, \quad (\text{II.74.c})$$

et comme condition au bord :

$$\left( \tilde{\sigma}_{\alpha\beta} + \sigma_{\beta\phi}^0 \frac{\partial u_{\alpha}^0}{\partial \xi_{\phi}} \right) \eta_{\beta} = \Lambda_{\alpha}^{\sigma} \text{ sur la surface } S^{\sigma}, \quad (\text{II.75.a})$$

$$D_{\mu} \eta_{\mu} = \Lambda^q \text{ sur la surface } S^q. \quad (\text{II.75.b})$$

$\Lambda_{\alpha}^{\sigma}$  est la contrainte surfacique appliquée sur la surface  $S^{\sigma}$  et  $\Lambda^q$  est la charge surfacique appliquée sur la surface  $S^q$ .

Ici, le terme  $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}$  est d'un ordre de symétrie inférieur à  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ . Il conserve la symétrie  $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \tilde{C}_{\gamma\delta\alpha\beta}$ , mais perd les autres ( $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq \tilde{C}_{\beta\alpha\gamma\delta} \neq \tilde{C}_{\alpha\beta\delta\gamma}$ ). De la même manière, on perd la symétrie sur  $\tilde{e}_{\mu\alpha\beta}$  ( $\tilde{e}_{\mu\alpha\beta} \neq \tilde{e}_{\mu\beta\alpha}$ ) comme sur  $\tilde{\epsilon}_{\mu\phi}$  ( $\tilde{\epsilon}_{\mu\phi} \neq \tilde{\epsilon}_{\phi\mu}$ ). Intuitivement, on comprend que la prédéformation a changé l'orientation des vecteurs et on perd donc une bonne partie de la symétrie des tenseurs.

### II.2.3 Équation dynamique et équations constitutives d'un matériau piézoélectrique sous contrainte dans le système de coordonnées de l'état prédéformé

Comme précédemment, nous reprenons l'équation de la dynamique (II.63) et à l'équilibre statique (II.59.b) qui sont déjà connues dans le système de coordonnées de l'état prédéformé. Nous rajoutons l'équation de Poisson pour un diélectrique dans l'état dynamique et dans l'état statique :

$$\frac{\partial D_M}{\partial X_M} = 0, \quad (\text{II.76.a})$$

$$\frac{\partial D_M^0}{\partial X_M} = 0. \quad (\text{II.76.b})$$



Les équations obtenues dans le repère naturel sont maintenant exprimées dans le système de coordonnées statique. En accord avec la relation (II.58), nous passons du tenseur  $\sigma_{\alpha\beta}$  au tenseur  $\sigma_{IJ}$  par :

$$\sigma_{IJ} = \delta_{I\alpha} \delta_{J\beta} \left[ \sigma_{\alpha\beta} \left( 1 - \frac{\partial u_{\varphi}^0}{\partial \xi_{\varphi}} \right) + \sigma_{\alpha\varphi} \frac{\partial u_{\beta}^0}{\partial \xi_{\varphi}} + \sigma_{\beta\varphi} \frac{\partial u_{\alpha}^0}{\partial \xi_{\varphi}} \right]. \quad (\text{II.77})$$

Concernant le changement de coordonnées du vecteur déplacement électrique  $\mathbf{D}$ , rappelons que ce vecteur est orienté par la normale à la surface où il est défini. C'est donc le changement de surface de l'équation (II.8.b) qui nous permet de poser que :

$$D_M = \left| \frac{\partial X}{\partial \xi} \right|^{-1} \frac{\partial X_M}{\partial \xi_{\mu}} D_{\mu}, \quad (\text{II.78})$$

soit :

$$D_M = \delta_{M\mu} \left[ D_{\mu} \left( 1 - \frac{\partial u_{\varphi}^0}{\partial \xi_{\varphi}} \right) + D_{\varphi} \frac{\partial u_{\mu}^0}{\partial \xi_{\varphi}} \right]. \quad (\text{II.79})$$

Ceci mène au nouveau couple d'équations de la dynamique et constitutives exprimées dans le système de coordonnées de l'état statique :

$$\frac{\partial}{\partial X_J} \left( \bar{\sigma}_{IJ} + t_{JP}^0 \frac{\partial u_I}{\partial X_P} \right) = \rho^s \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}, \quad (\text{II.80.a})$$

$$\bar{\sigma}_{IJ} = \bar{C}_{IJKL} \frac{\partial u_K}{\partial X_L} + \bar{e}_{MIJ} \frac{\partial \Phi}{\partial X_M}, \quad (\text{II.80.b})$$

$$D_M = \bar{e}_{MIJ} \frac{\partial u_I}{\partial X_J} - \bar{\epsilon}_{MP} \frac{\partial \Phi}{\partial X_P}, \quad (\text{II.80.c})$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{C}_{IJKL} &= C_{IJKL} \left( 1 - \frac{\partial u_{\varphi}^0}{\partial \xi_{\varphi}} \right) + C_{PJKL} \frac{\partial u_I^0}{\partial X_P} + C_{IPKL} \frac{\partial u_J^0}{\partial X_P} + C_{IJPL} \frac{\partial u_K^0}{\partial X_P} + C_{IJKP} \frac{\partial u_L^0}{\partial X_P} + C_{IJKLMN} \frac{\partial u_M^0}{\partial X_N} + e_{PIJKL} \frac{\partial \Phi^0}{\partial X_P}, \\ \bar{e}_{MIJ} &= e_{MIJ} \left( 1 - \frac{\partial u_{\varphi}^0}{\partial \xi_{\varphi}} \right) + e_{MPJ} \frac{\partial u_I^0}{\partial X_P} + e_{MIP} \frac{\partial u_J^0}{\partial X_P} + e_{PIJ} \frac{\partial u_M^0}{\partial X_P} + e_{MIJKL} \frac{\partial u_K^0}{\partial X_L} - l_{MPIJ} \frac{\partial \Phi^0}{\partial X_P}, \\ \bar{\epsilon}_{MP} &= \epsilon_{MP} \left( 1 - \frac{\partial u_{\varphi}^0}{\partial \xi_{\varphi}} \right) + \epsilon_{MPW} \frac{\partial u_P^0}{\partial X_W} + \epsilon_{WP} \frac{\partial u_M^0}{\partial X_W} + l_{MPIJ} \frac{\partial u_I^0}{\partial X_J} - \epsilon_{MPW} \frac{\partial \Phi^0}{\partial X_W}, \end{aligned} \quad (\text{II.81.a-b-c})$$

et comme condition au bord :

$$\left( \bar{\sigma}_{IJ} + t_{JP}^0 \frac{\partial u_I}{\partial X_P} \right) N_J = \Lambda_I^\sigma \text{ sur la surface } S^\sigma. \quad (\text{II.82})$$

$\Lambda_I^\sigma$  est la contrainte surfacique appliquée sur la surface  $S^\sigma$ .

Ici, nous vérifions que le changement de repère ramène la symétrie habituelle sur les constantes élastiques qui était perdue dans l'expression des constantes effectives du système de coordonnées de l'état naturel. Ainsi, dans celui de l'état prédéformé,  $\bar{C}_{IJKL} = \bar{C}_{KLIJ} = \bar{C}_{JIKL} = \bar{C}_{IJLK}$  et  $\bar{e}_{MIJ} = \bar{e}_{MJI}$ .

Nous ne retrouvons pas la symétrie sur  $\bar{\epsilon}_{MP}$ , car  $\epsilon_{MPW} \neq \epsilon_{PMW}$ . Dans le cas où on pourra négliger le terme  $\frac{\partial \Phi^0}{\partial X_W}$ , on retrouvera la symétrie  $\bar{\epsilon}_{MP} = \bar{\epsilon}_{PM}$ .

### II.3 Équations de propagation d'une onde plane dans un matériau piézoélectrique sous contrainte

L'étude se fait à partir des équations du mouvement et constitutives déterminées dans la partie précédente (II.73) et (II.80). Ces équations correspondent à une propagation dans un milieu piézoélectrique contraint. Considérons maintenant une onde plane dans un milieu précontraint de dimensions infinies. Pour une onde plane, tous les points d'un même front d'onde vibrent dans une seule direction avec la même amplitude, et le front d'onde se déplace à vitesse constante dans la direction normale au plan. Seul un milieu homogène admet ce type d'onde. Cela oblige à faire des hypothèses supplémentaires ; le milieu dans lequel les ondes planes se propagent est supposé homogène à l'état naturel et doit posséder des champs de contraintes et de déformations uniformes (prédéformations homogènes).

#### II.3.1 Propagation d'une onde plane dans le système de coordonnées de l'état naturel

En prenant l'équation (II.73.a) développée, nous avons :

$$\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\delta} + \tilde{e}_{\mu\alpha\beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\mu} + \sigma_{\beta\varphi}^0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\varphi} = \rho^0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}, \quad (\text{II.83})$$

que nous pouvons réduire en :

$$\tilde{M}_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial \xi_\delta \partial \xi_\beta} + \tilde{e}_{\mu\alpha\beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_\mu \partial \xi_\beta} = \rho^0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}, \quad (\text{II.84})$$

avec :

$$\tilde{M}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \sigma_{\beta\delta}^0. \quad (\text{II.85})$$

Électriquement, nous développons l'équation (II.67.a) en intégrant l'expression (II.73.c) :

$$\tilde{e}_{\mu\gamma\beta} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial \xi_\mu \partial \xi_\beta} - \tilde{\varepsilon}_{\mu\varphi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_\mu \partial \xi_\varphi} = 0. \quad (\text{II.86})$$

Ce couple d'équations peut être réécrit en supposant que l'onde acoustique est une onde plane se propageant dans une direction définie par le vecteur unitaire  $\mathbf{\eta}$ .  $u_\alpha$  et  $\Phi$  peuvent alors se mettre sous la forme :

$$u_\alpha = \hat{u}_\alpha F\left(t - \frac{\eta_\varphi \xi_\varphi}{\tilde{V}}\right), \quad (\text{II.87.a})$$

$$\Phi = \hat{\Phi} F\left(t - \frac{\eta_\varphi \xi_\varphi}{\tilde{V}}\right), \quad (\text{II.87.b})$$

où  $\tilde{V}$  représente la vitesse de phase et  $\hat{u}_\alpha$  la polarisation de l'onde, c'est-à-dire la direction de déplacement des particules dans le système de coordonnées de l'état naturel.

Le champ électrique est longitudinal également (chaque plan d'onde est équipotentiel) :

$$E_\varphi = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\varphi} = \frac{\eta_\varphi}{\tilde{V}} \hat{\Phi} \frac{\partial F}{\partial \xi_\varphi}. \quad (\text{II.88})$$

La substitution des équations (II.87) dans (II.84) et (II.86) conduit au système :

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma} \hat{u}_\gamma + \tilde{\gamma}_\alpha \hat{\Phi} = \rho^0 \tilde{V}^2 \hat{u}_\alpha, \\ \tilde{\gamma}_\gamma \hat{u}_\gamma - \tilde{\varepsilon} \hat{\Phi} = 0 \end{cases}, \quad (\text{II.89.a-b})$$

avec

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma} = \tilde{M}_{\alpha\beta\gamma\delta} \eta_\beta \eta_\delta, \quad (\text{II.90.a})$$

$$\tilde{\gamma}_\alpha = \tilde{e}_{\mu\alpha\beta} \eta_\mu \eta_\beta, \quad (\text{II.90.b})$$

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_{\mu\varphi} \eta_\mu \eta_\varphi. \quad (\text{II.90.c})$$

En éliminant le potentiel  $\hat{\Phi}$ , le système devient :

$$\rho^0 \tilde{V}^2 \hat{u}_\alpha = \left( \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma} + \frac{\tilde{\gamma}_\alpha \tilde{\gamma}_\gamma}{\tilde{\varepsilon}} \right) \hat{u}_\gamma. \quad (\text{II.91})$$

Les polarisations  $\hat{u}_\alpha$  des ondes élastiques planes et les vitesses de phase  $\tilde{V}$  sont déterminées par le calcul des vecteurs propres et valeurs propres respectivement, du tenseur de rang deux :

$$\Delta_{\alpha\gamma} = \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma} + \frac{\tilde{\gamma}_\alpha \bar{\gamma}_\gamma}{\tilde{\epsilon}}, \quad (\text{II.92})$$

appelé tenseur de Christoffel, ici généralisé au cas d'un matériau piézoélectrique sous contrainte dans le système de coordonnées de l'état naturel.

### II.3.2 Propagation d'une onde plane dans le système de coordonnées de l'état prédéformé

En reprenant une démarche analogue, développant l'équation (II.80.a) :

$$\bar{C}_{IJKL} \frac{\partial^2 u_K}{\partial X_J \partial X_L} + \bar{e}_{MIJ} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_J \partial X_M} + t_{JP}^0 \frac{\partial^2 u_I}{\partial X_J \partial X_P} = \rho^s \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}, \quad (\text{II.93})$$

que nous réduisons en :

$$\bar{M}_{IJKL} \frac{\partial^2 u_K}{\partial X_J \partial X_L} + \bar{e}_{MIJ} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_J \partial X_M} = \rho^s \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}, \quad (\text{II.94})$$

avec :

$$\bar{M}_{IJKL} = \bar{C}_{IJKL} + \delta_{IK} t_{JP}^0. \quad (\text{II.95})$$

Nous développons l'équation électrique (II.76.a) en intégrant l'expression (II.80.c) :

$$\bar{e}_{MKJ} \frac{\partial^2 u_K}{\partial X_M \partial X_J} - \bar{\epsilon}_{MP} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_M \partial X_P} = 0. \quad (\text{II.96})$$

En réécrivant cette fois ce couple d'équations au travers d'une onde plane se propageant dans une direction définie par le vecteur unitaire  $\mathbf{N}$ , nous réécrivons  $u_I$  et  $\Phi$  sous la forme :

$$u_I = \hat{u}_I F \left( t - \frac{N_P X_P}{\bar{V}} \right), \quad (\text{II.97.a})$$

$$\Phi = \hat{\Phi} F \left( t - \frac{N_P X_P}{\bar{V}} \right), \quad (\text{II.97.b})$$

où  $\bar{V}$  représente la vitesse de phase et  $\hat{u}_I$  la polarisation de l'onde dans ce système de coordonnées.

Le champ électrique est longitudinal également (chaque plan d'onde est équipotentiel) :

$$E_p = -\frac{\partial \Phi}{\partial X_p} = \frac{N_p}{V} \hat{\Phi} \frac{\partial F}{\partial X_p}. \quad (\text{II.98})$$

La substitution des équations (II.97) dans (II.94) et (II.96) conduit au système :

$$\begin{cases} \bar{\Gamma}_{IK} \hat{u}_K + \bar{\gamma}_I \hat{\Phi} = \rho^s \bar{V}^2 \hat{u}_I, \\ \bar{\gamma}_K \hat{u}_K - \bar{\varepsilon} \hat{\Phi} = 0 \end{cases}, \quad (\text{II.99.a-b})$$

avec

$$\bar{\Gamma}_{IK} = \bar{M}_{IJKL} N_J N_L, \quad (\text{II.100.a})$$

$$\bar{\gamma}_K = \bar{e}_{MKJ} N_M N_J, \quad (\text{II.100.b})$$

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{MP} N_M N_P. \quad (\text{II.100.c})$$

En éliminant le potentiel  $\hat{\Phi}$ , le système devient :

$$\rho^s \bar{V}^2 \hat{u}_I = \left( \bar{\Gamma}_{IK} + \frac{\bar{\gamma}_I \bar{\gamma}_K}{\bar{\varepsilon}} \right) \hat{u}_K. \quad (\text{II.101})$$

Les polarisations  $\hat{u}_I$  des ondes élastiques planes et les vitesses de phases  $\bar{V}$  sont déterminées par le calcul des vecteurs propres et valeurs propres respectivement, du tenseur de rang deux :

$$\Delta_{IK} = \bar{\Gamma}_{IK} + \frac{\bar{\gamma}_I \bar{\gamma}_K}{\bar{\varepsilon}}, \quad (\text{II.102})$$

appelé tenseur de Christoffel, ici généralisé au cas d'un matériau piézoélectrique sous contrainte dans le système de coordonnées de l'état statique (prédéformé).

### II.3.3 Différence entre les vitesses exprimées dans chacun des systèmes de coordonnées

Ayant défini les équations dans deux systèmes de coordonnées, il faut bien remarquer que les longueurs vont différer, comme l'illustre la figure II.5.

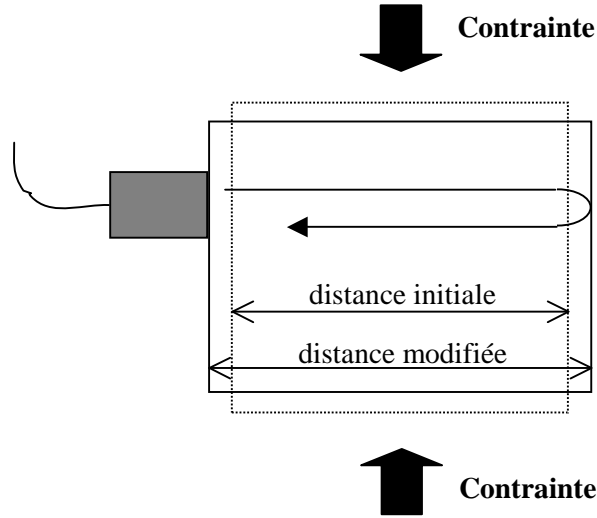


Figure : II.5 : Représentation des variations de longueur de parcours de l'onde acoustique lors d'une mesure sous contrainte statique [Duquennoy1997].

Par définition de sa métrique, les vitesses définies dans le système de coordonnées de l'état naturel sont calculées par rapport à la distance initiale de l'échantillon. Inversement, les vitesses calculées dans le système de coordonnées de l'état précontraint sont calculées par rapport à la distance modifiée. C'est pourquoi les vitesses calculées seront différentes d'un système de coordonnées à un autre.

Dans le but de bien comprendre l'écart entre les vitesses sous contraintes définies dans chacun des systèmes de coordonnées, nous avons développé une relation simple, issue de différentes approximations mécaniques [Pao1984], étendue ici cas du niobate de lithium sous précontrainte mécanique et électrique [Annexe I]. Ainsi, nous réduisons l'étude précédente à une contrainte mécanique appliquée dans la direction  $\xi_3$  avec une onde possédant une direction de propagation parfaitement parallèle à cet axe ( $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = 0$ ,  $\eta_3 = 1$ ). Négligeant l'écart relatif entre le tenseur de Cauchy et le deuxième tenseur de Piola-Kirchoff 2, considérant que l'écart entre les déformations exprimées dans les deux systèmes de coordonnées est faible, que  $u_{1,1}^0 = u_{2,2}^0 \ll u_{3,3}^0$ , que la variation du Jacobien, des tenseurs et des déformations entre les différents systèmes de coordonnées ainsi que les produits de déformations sont négligeables, nous exprimons la différence de vitesse :

$$\bar{V}_L - \tilde{V}_L \cong u_{3,3}^0 V_L^0, \quad (\text{II.103.a})$$

$$\bar{V}_{T_1} - \tilde{V}_{T_1} \cong u_{3,3}^0 V_{T_1}^0, \quad (\text{II.103.b})$$

$$\bar{V}_{T_2} - \tilde{V}_{T_2} \cong u_{3,3}^0 V_{T_2}^0, \quad (\text{II.103.c})$$

avec  $V_L$ ,  $V_{T_1}$  et  $V_{T_2}$  les vitesses sous contrainte correspondant aux modes longitudinaux, transversaux 1 et transversaux 2 respectivement, dans chacun des systèmes de coordonnées, et  $V_L^0 = \sqrt{\frac{C_{33} + e_{33}^2/\epsilon_{33}}{\rho^0}}$ ,  $V_{T_1}^0 = \sqrt{\frac{C_{55}}{\rho^0}}$  et  $V_{T_2}^0 = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho^0}}$  les vitesses des modes longitudinal, transverse 1 et 2 en l'absence de contrainte.

Ainsi, dans ce plan de coupe, l'écart entre les vitesses définies dans les deux systèmes de coordonnées est directement proportionnel à la prédéformation  $u_{3,3}^0$  et à la vitesse en mode libre pour chaque mode de propagation. Malgré nos approximations, nous verrons dans le chapitre suivant qu'elles sont réalistes et valables dans n'importe quel plan de coupe. Cette relation met en avant le fait que la principale différence entre les vitesses définies dans les deux systèmes de coordonnées est liée à la déformation  $u_{3,3}^0$  et donc au phénomène qui l'induit.

## II.4 Calcul du coefficient de couplage dans un matériau piézoélectrique contraint

Ayant défini précédemment le coefficient de couplage en mode plaque (II.47), nous évaluons maintenant ce coefficient dans les deux systèmes de coordonnées.

### II.4.1 Coefficient de couplage sous contrainte dans le système de coordonnées du repère naturel

Par analogie au calcul de l'équation de propagation sous contrainte, le coefficient de couplage sous contrainte prend en compte la contrainte initiale. Ainsi, les constantes du matériau à prendre en compte sont les constantes effectives calculées précédemment. De plus, nous prenons en compte la précontrainte associée au système de coordonnées comme proposé par Auld [Auld1990], soit :

$$\tilde{k}_t^2 = \frac{\tilde{e}_{33}^2}{\tilde{\epsilon}_{33} \tilde{C}_{33}^{D(\sigma_0)}}, \quad (\text{II.104})$$

avec  $\tilde{e}_{33}$ , et  $\tilde{\epsilon}_{33}$  les constantes effectives définies dans le système de coordonnées de l'état naturel (II.74.b-c) et  $\tilde{C}_{33}^{D(\sigma_0)}$  la constante élastique de raideur sous contrainte mécanique définie par :

$$\tilde{C}_{33}^{D(\sigma_0)} = \tilde{C}_{33} + \frac{\tilde{e}_{33}^2}{\tilde{\epsilon}_{33}} + \sigma_{33}^0, \quad (\text{II.105})$$

où  $\tilde{C}_{33}$  est la constante élastique de raideur définie dans le système de coordonnées de l'état naturel (II.74.a).

#### II.4.2 Coefficient de couplage sous contrainte dans le système de coordonnées du repère statique

Nous calculons de la même manière le coefficient de couplage sous contrainte dans le système de coordonnées statique en faisant appel aux constantes effectives correspondantes et à la précontrainte définie dans ce repère, soit :

$$\bar{k}_t^2 = \frac{\bar{e}_{33}^2}{\bar{\epsilon}_{33} \bar{C}_{33}^{D(\sigma_0)}}, \quad (\text{II.106})$$

avec  $\bar{e}_{33}$ , et  $\bar{\epsilon}_{33}$  les constantes effectives définies dans le système de coordonnées de l'état naturel (II.81.b-c) et  $\bar{C}_{33}^{D(\sigma_0)}$  la constante élastique de raideur sous contrainte mécanique définie par :

$$\bar{C}_{33}^{D(\sigma_0)} = \bar{C}_{33} + \frac{\bar{e}_{33}^2}{\bar{\epsilon}_{33}} + t_{33}^0, \quad (\text{II.107})$$

où  $\bar{C}_{33}$  est la constante élastique de raideur définie dans le système de coordonnées de l'état prédéformé (II.81.a).

#### II.4.3 Différence entre les coefficients de couplage exprimés dans chacun des systèmes de coordonnées

Par analogie au calcul de la différence entre les expressions des vitesses définies dans les deux systèmes de coordonnées, nous faisons le calcul de la différence entre coefficient de couplage dans le niobate de lithium sous les mêmes approximations, soit :

$$\bar{k}_t \cong \tilde{k}_t. \quad (\text{II.108})$$

Ainsi, la différence entre coefficients de couplage exprimés dans les deux systèmes de coordonnées semble négligeable. Nous verrons dans le second chapitre que cette approximation est valable dans tous les plans de coupe du niobate de lithium.



## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les grandeurs mécaniques utiles à notre étude et décrit les différentes expressions des tenseurs de déformations et contraintes dans les deux systèmes de coordonnées. Nous avons développé la relation entre la contrainte et la déformation dans un solide élastique, puis dans un matériau piézoélectrique au second ordre. De plus, nous avons défini le coefficient de couplage d'un matériau piézoélectrique et exprimé ce coefficient en mode plaque.

Dans un deuxième temps, nous avons développé l'équation du mouvement dans un matériau non piézoélectrique sous précontrainte mécanique dans les deux systèmes de coordonnées, au second ordre. Puis, nous avons généralisé par l'expression des équations de la dynamique et des équations constitutives d'un matériau piézoélectrique sous précontrainte statique, de type électrique ou mécanique développées au même ordre. Les équations de propagation d'une onde plane dans un matériau piézoélectrique sous contrainte ont été développées dans les deux systèmes de coordonnées. Nous avons évalué les différences entre les vitesses exprimées dans chacun des systèmes de coordonnées sous précontrainte. L'étude du coefficient de couplage sous contrainte a été faite dans les mêmes conditions et nous avons évalué la différence de coefficient entre les deux systèmes de coordonnées.

Ainsi, les expressions des paramètres électro-acoustiques sous précontrainte statique de type électrique ou mécanique dans un matériau piézoélectrique non hystérétique ont été développées à l'ordre 3. Nous illustrons ce modèle sur le niobate de lithium dans le chapitre suivant.