
Prétopologie Traitement d'Images Et Structure Pyramidale

Dans ce chapitre nous présentons d'abord des exemples d'utilisation de la Prétopologie dans le domaine du traitement d'images qui est le deuxième grand axe de la Reconnaissance des Formes après la Classification. Ces présentations porteront aussi bien sur les traitements "uni-échelle" (un seul niveau de perception) que sur les traitements multi-échelles (plusieurs niveaux de perception).

Ensuite, nous proposons une modélisation prétopologique des structures pyramidales qui sont souvent utilisées dans les traitements multi-échelles des données, et en particulier en traitement multirésolutionnel des images à niveaux de gris.

I. PRETOPOLOGIE EN TRAITEMENT D'IMAGES

1.1 SAPIN : l'introduction de la prétopologie en traitement d'image [Lamure-87]

Certains algorithmes, par exemple celui de HILDITCH sur la squelettisation ou celui de CHASSERY sur le suivi de contour, relèvent naturellement d'une approche topologique mais n'utilisent pas en réalité ces concepts au sens mathématique.

Dans leur fonctionnement, d'autres algorithmes mettent en jeu, de fait, des opérateurs qui à défaut d'être topologiques relèvent évidemment d'une version affaiblie de la topologie. Par exemple, l'"Expand Algorithm" qui consiste à dilater une image binaire, selon une règle bien définie, fait fortement penser à la fonction d'adhérence topologique.

En vertu de telles remarques faites sur les méthodes classiques de traitement d'images, M. LAMURE exprime la nécessité de pouvoir disposer d'un langage de type topologique "adapté à la situation" qui soit également un outil débouchant sur des procédures informatiques en accord total avec les concepts théoriques avancés.

Il introduit donc pour la première fois la prétopologie en traitement et analyse d'images binaires et à niveaux de gris [Lamure-87].

M. LAMURE propose un système nommé SAPIN (Système d'Analyse Prétopologique des Images Numérisées) contenant des opérateurs informatiques qui sont l'exacte traduction des opérateurs prétopologiques définis a priori. Ces opérateurs possèdent des propriétés précisément connues qui permettent d'en évaluer les performances non seulement en termes de rapidité et de complexité mais aussi en termes de résultats ; ils partagent tous la propriété remarquable de fournir un résultat indépendant du mode de balayage de l'image traitée.

Les opérateurs présentés sont des applications mathématiques de $P(E)$ dans $P(E)$ où E est un sous ensemble de Z^2 qui représentent le support de l'image à traiter. Dans ce cas l'image a été digitalisée au moyen d'une grille carrée.

A chaque x de E on associe un voisinage, $B(x)$, qui est un sous ensemble de ces huit voisins. Soit A une partie quelconque de E , on construit les opérateurs suivants ; sur $P(E)$:

- l'adhérence a :

$$a(A) = \{x \in E, B(x) \cap A^c \neq \emptyset\}$$

cet opérateur est utilisé pour dilater les formes dans l'image

- le bord b :

$$b(A) = \{x \in A, B(x) \cap A^c \neq \emptyset\}$$

cet opérateur délimite la semi-frontière intérieure des objets

- l'intérieur i :

$$i(A) = \{x \in E, B(x) \subset A\}$$

pour la recherche de l'intérieur des objets comme son nom l'indique

- l'orle o :

$$o(A) = \{x \in A^c, B(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

cet opérateur délimite la semi-frontière extérieure des objets

- la frontière f :

$$f(A) = \{x \in E, B(x) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x) \cap A^c \neq \emptyset\}$$

il calcule un contour épais des formes

- le dérivé d :

$$d(A) = \{x \in E, (B(x) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}$$

c'est le dilaté de A auquel on a extrait les points isolés (ceux qui n'ont aucun voisin)

- la cohérence c :

$$c(A) = \{x \in A, \{B(x) - x\} \cap A \neq \emptyset\}$$

cet opérateur calcul les points de A qui ne sont pas isolés

- l'extérieur e :

$$e(A) = \{x \in E, B(x) \subset A^c \neq \emptyset\}$$

l'extérieur de A donne le négatif (au sens photographique) de a(A).

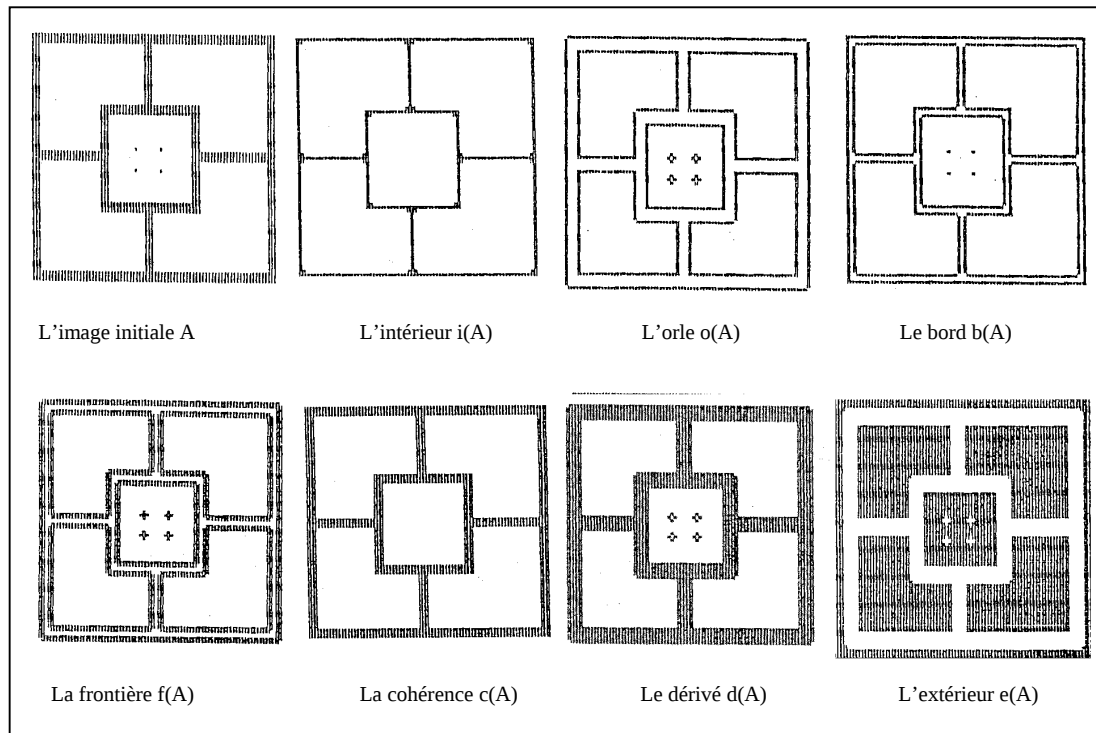


Figure IV.1 : Exemple d'opérateurs prétopologiques pour le traitement d'images binaires [Lamure-87]

L'auteur étend l'utilisation de SAPIN aux images à niveaux de gris en les assimilant à des 'sous ensembles à niveaux' qu'il définit d'une manière formelle et redéfinit les concepts de structures prétopologiques et d'espaces prétopologiques, pour les adapter à cette nouvelle situation. Cette extension est basée sur l'idée de considérer qu'une image à niveaux de gris correspond à huit niveaux suivant l'écriture binaire des niveaux de gris de l'image. Ainsi, une transformation d'images à niveaux de gris revient à huit transformations d'images binaires.

I.2 Les lignes de crête dans les images à niveaux de gris [Selmaoui-92]

Les prétopologies associées à des relations binaires occupent une place importante car elles sont basées sur la notion de relation locale entre des données c'est un concept important dans l'élaboration des algorithmes pratiques en reconnaissance des formes.

Nous trouvons dans [Selmaoui-92] une utilisation intéressante des prétopologies des ascendants d'ordre 1 et des descendants d'ordre 1 en analyse d'image. Pour des raisons de simplification nous faisons une présentation de cette utilisation un peu différente de celle de l'auteur, tout en gardant l'esprit de sa méthode.

L'algorithme utilisé par N. SELMAOUI dans la recherche des ligne de crête et des talwegs est inspiré de l'algorithme de groupement par propagation présenté en Classification Automatique.

Partant de l'ensemble E représentant les pixels de l'image à traiter, on construit deux relations binaires à partir de la différence des niveaux de gris (NG) entre les pixels voisins de la façon suivante :

$$\forall p, q \in E, p R_1 q \Leftrightarrow \{ q=p \text{ ou } q \text{ est l'un des 8-voisins de } p \text{ tel que } NG(p) \leq NG(q) \}$$

$$\forall p, q \in E, p R_2 q \Leftrightarrow \{ q=p \text{ ou } q \text{ est l'un des 8-voisins de } p \text{ tel que } NG(p) \geq NG(q) \}$$

ces deux relations binaires engendrent naturellement les adhérences prétopologiques associées ad_{R_1} et ad_{R_2} :

$$\forall A \subset E, ad_{R_i}(A) = \{x \in E, \exists y \in A, y R_i x\} \quad i=1 \text{ ou } 2$$

Grâce à ces deux adhérences l'auteur propose un algorithme qui peut détecter des lignes de crête et des talwegs (vallées) sur l'image analysée.

Le déroulement de l'algorithme se fait grossièrement suivant les étapes suivantes :

- on part d'une partie A (respectivement B) constituée des pixels vérifiant le minimum (respectivement le maximum) local en niveau de gris
- on procède à des adhérences successives des points de A grâce à l'application ad_{R_2} (respectivement ad_{R_1})
- ce processus itératif s'arrête lorsque pour tout x de A il existe un n tel que l'adhérence $(n+1)$ -ième est identique à l'adhérence n -ième de x
- à cette étape de l'algorithme on se retrouve avec des régions disjointes dont les « noyaux » sont les points de A (respectivement de B)
- la fin de l'algorithme est marquée par la détermination des crêtes (respectivement les talwegs) qui sont définies par les frontières communes de ces régions.

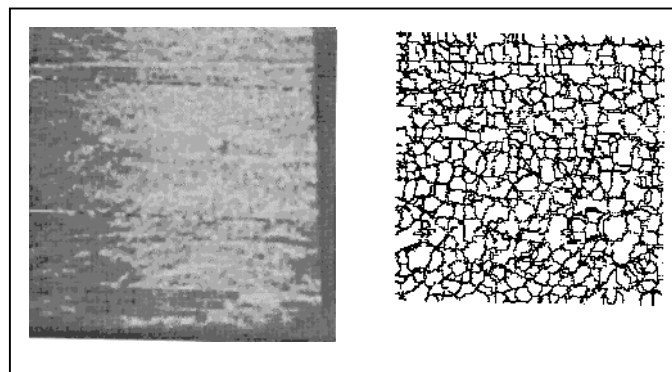


Figure IV.2 : détection des lignes de crêtes par l'algorithme de propagation prétopologique [Selmaoui-92]

I.3 Détection des bassins versant par l'algorithme de PIEGAY [Piegay-97]

L'image est assimilée à un relief dont l'altitude correspond aux niveaux de gris des pixels. Le but est de chercher les concavités (ou les bassins versants) du relief. Le support de la méthode est l'algorithme de PIEGAY que nous avons déjà présenté pour la classification automatique (cf : Chapitre III). Ici l'algorithme utilise des paramètres adaptés aux images à niveaux de gris.

Les paramètres de l'algorithme pour le traitement d'images :

Graphe de voisinage :

Chaque pixel de l'image est muni d'un niveau de gris, d'un voisinage (ses 8-voisins), d'une fonction structurante (valeur 0 au centre, 2 pour les 4-voisins et 3 pour les 8-voisins diagonaux).

Régions noyaux de hauteur h :

Ce sont des composantes connexes formées de pixels d'altitude h, dont tous les pixels de contour extérieur ont une altitude strictement supérieure à h.

Coût d'agrégation d'un pixel à un bassin :

Il est évalué sur le chemin que le bassin a parcouru depuis sa région noyau jusqu'à ce pixel. Ce coût est basé sur le calcul de l'altitude maximale du chemin (la dénivelée) et de la distance parcourue depuis le maximum a été atteint.

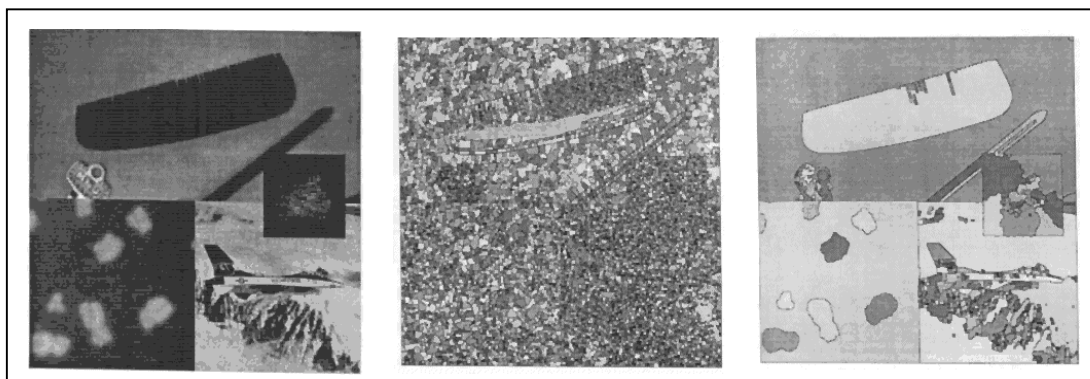


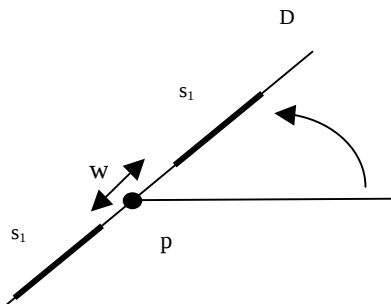
Figure IV.3 : détection des bassins versants dans une image par l'algorithme de PIEGAY [Piegay-97]

La propagation des bassins, comme en classification, est effectuée par des adhérences prétopologiques successives. Tout pixel x (classé ou non classé) voisin d'un bassin B peut y être agrégé. Il changera de bassin si un nouveau bassin lui propose un coût d'agrégation plus faible.

L'application directe de l'algorithme sur une image donne un résultat sursegmenté, donc non interprétable. Pour surmonter cette difficulté l'auteur propose de fusionner les bassins qui vérifient un certain critère qui est fonction du voisinage, de l'altitude et du maximum de la fonction coût.

I.4 Extraction de l'écriture du fond des chèques [Mammass-98]

Les auteurs proposent d'extraire les lignes d'écriture des chèques, par une approche itérative basée sur un formalisme prétopologique de croissance de régions qui inclue un critère d'homogénéité évaluée à partir d'une mesure de filiformité. Les lignes d'écriture sont définies comme des parties fermées de l'image. La fonction adhérence est définie à partir de la mesure de filiformité ainsi que du niveau de gris de l'image.



L'indice de filiformité $\mu(x)$ est calculé sur toutes les directions D .

$$\mu(x) = \text{Max}\{\text{Min}(\eta(s_1), \eta(s_2)) - \eta(x)\} \quad \text{où} \quad \eta(s_i) = \text{Max}\{\eta(p), p \in s_i\}.$$

L'adhérence d'un point x est donnée par les 8-voisins de x qui vérifient un certain critère ψ calculé à partir de l'indice de filiformité μ .

L'algorithme initie un germe comme le point de l'image susceptible de faire partie d'une ligne d'écriture. L'agrégation à partir de ce germe aboutit à une partie fermée de l'image composée par une ligne d'écriture.

Algorithme

- Initialiser CE, le complémentaire de E, à toute l'image.
- Boucle : Tant que CE n'est pas vide, faire:
 - {
 - 1-Choix d'un germe initial :
 - Prendre de CE, le point de l'image qui présente la valeur maximum de ψ .
 - Si cette valeur est inférieure au seuil S , aller à Fin.
 - Sinon: Initialiser une nouvelle classe d'équivalence CG avec ce germe.
 - 2- Agrégation :
 - Tant que le cardinal de CG change, faire:
 - {
 - Considérer les points de CE qui ont pour voisin un des points de CG.
 - Définir les candidats comme ceux qui vérifient $\psi > S$.
 - Prendre ceux qui vérifient le critère d'homogénéité et les intégrer à CG
 - Redéfinir le complémentaire CE, en lui soustrayant la classe CG
 - }
 - }
 - }
 - Fin : Afficher toutes les classes d'équivalence.

L'évaluation de l'algorithme effectuée sur 60 chèques, montre 92% de bons résultats. Cette approche se distingue des méthodes directes par son aspect dynamique et un résultat évolutif faisant apparaître d'abord les lignes les plus sombres pour ensuite laisser apparaître les lignes les plus claires.

II. LE TRAITEMENT MULTI-ECHELLE DES IMAGES A NIVEAUX DE GRIS

Plusieurs techniques de Reconnaissance de Formes reposent sur l'idée de pouvoir représenter l'espace des représentations sur plusieurs niveaux.

En traitement d'image, dans l'approche multirésolutionnel, l'image traitée sera représentée suivant plusieurs niveaux de détails ; ceci forme un empilement d'images $\{I_0, I_1, \dots, I_k\}$ de hauteur k . On peut différencier deux types d'utilisation de cette approche :

- Dans la recherche des primitives de l'image pour obtenir une *esquisse initiale (primal sketch)* [Marr-80]). Les primitives ainsi recueillies peuvent servir comme une base d'information pour un traitement ultérieur.
- Dans la recherche d'entité particulière dans l'image, sachant que cette entité peut être détectée à un certain niveau de résolution [Jolion-94].

En classification automatique, l'approche dite hiérarchique repose sur l'idée d'associer à l'espace E , des populations à traiter, une hiérarchie de partitions $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ ordonnées par inclusion décroissante. P_0 étant l'ensemble des singletons de E et P_n étant composée d'un seul élément : E tout entier. Cela permet d'étudier plus en détail la structure de l'ensemble E [Faure-90].

La structure de données la mieux adaptées à ce genre de méthodes de RF est généralement une structure de type pyramidale.

Avant de donner les idées principales de deux travaux qui ont utilisé des structures prétopologiques avec des pyramides, nous faisons une introduction formelle de ces structures. Plus loin dans ce chapitre, nous proposerons une formalisation prétopologique générale des structures pyramidales.

II.1 Structure pyramidale¹

Le modèle pyramidale est caractérisé par une tessellation du plan image, un ensemble de processus élémentaires et par une communication hiérarchique entre les processus

Les deux modèles de pyramides les plus couramment utilisés sont la pyramide quaternaire (nécessairement quatre fils) et la pyramide irrégulière (nombre de fils non fixé). La pyramide quaternaire peut être sans recouvrement (un fils a un seul père) ou avec recouvrement (.plusieurs pères pour un fils).

Pour la commodité de la présentation nous nous restreignons ici aux pyramides régulières sans recouvrement.

¹ Pour plus d'informations sur les pyramides voir [Jolion-94]

Les éléments d'une pyramide régulière sans recouvrement

Une telle pyramide est généralement caractérisée par les éléments suivants :

- Image : $I = X \times Y$ où, $X = Y = \{0,1,...,2^N-1\}$.
- Pixel : tout couple $(x,y) \in X \times Y$ (souvent on affecte une valeurs numérique à un pixel suivant sa couleur ou son niveau de gris)
- Pyramide : Une pile d'images $\{I_0, I_1, \dots, I_N\}$ telles que
 $\forall k \in \{0, \dots, N\}, I_k = X_k \times Y_k$ où : $X_k = Y_k = [0, 2^k-1] \cap \mathbb{N}$.
 I_0 est l'image d'origine I appelée *base de la pyramide* $I_0 = I$.
 I_N est le sommet de pyramide appelé *apex* , généralement composé d'une seule cellule
 N est la *hauteur* de la pyramide
- Cellule (ou noeud) : Un élément (x,y,k) de la pyramide caractérisé par :
 (x,y) : le pixel de l'image I_k , k est dit le niveau de l'image I_k
Ainsi la pyramide Π devient : $\Pi = \cup (I_k \times \{k\})$, $k=0,...,N$

Définition :

Nous appellerons sous pyramide de niveau k , la pyramide Π_k définie par :

- $\Pi_k = \cup (I_i \times \{i\})$, $i = k,...,N$

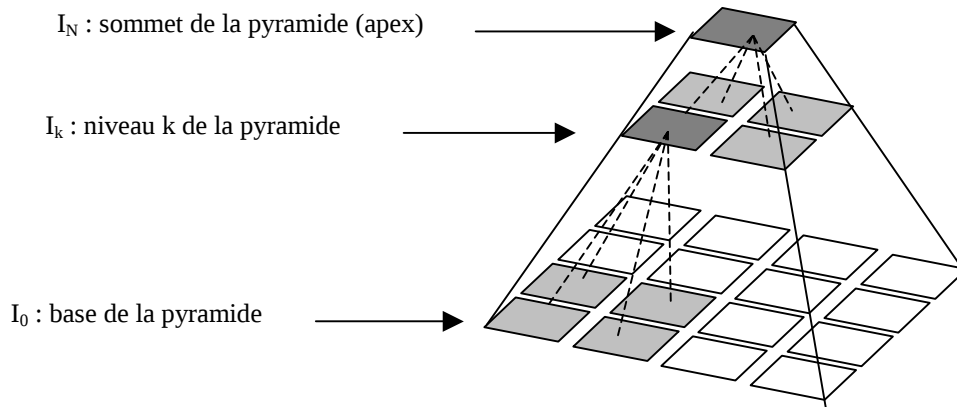


Figure IV.4 : pyramide régulière quaternaire sans recouvrement

Ainsi, on a les propriétés suivantes :

- $\Pi_0 = \Pi$
- $k \in \{1,...,N\}, \Pi_k \subset \Pi_{k-1}$.
- $\Pi_N = \{\text{Apex}\}$

soit la chaîne : $\{\text{Apex}\} \subset \Pi_N \subset \dots \subset \Pi_k \subset \Pi_{k-1} \subset \dots \subset \Pi_0 = \Pi$.

Réseau de communication dans une pyramide sans recouvrement

Soit Π une pyramide $\Pi = \cup (I_k \times \{k\})$ ($k=0,...,N$). Soit (x,y,k) un élément de la pyramide Π , avec $(x,y) \in X \times Y$ et $k \in \{0,1,...,N\}$.

A- Communication intra-niveau :

On appelle :

- *4-Frère* (ou *4-voisin*) de (x,y,k) une des cellules 4-connexes à (x,y,k) , c'est à dire un des éléments, quand il existe, de $Frères_4(x,y,k) = \{(x-1,y,k), (x+1,y,k), (x,y-1,k), (x,y+1,k)\}$
- *8-Frère* (ou *8-voisin*) de (x,y,k) une des cellules 8-connexes à (x,y,k) , c'est à dire un des éléments, quand il existe, de $Frères_8(x,y,k) = Frères_4(x,y,k) \cup \{(x-1,y-1,k), (x+1,y-1,k), (x-1,y+1,k), (x+1,y+1,k)\}$

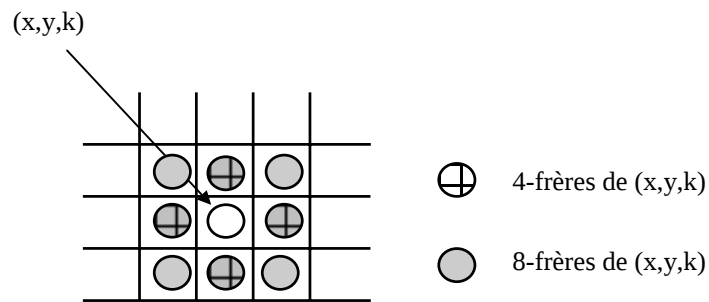


Figure IV.5 : communication intra-niveau

Lorsque la 4-connexité ou la 8-connexité n'est pas spécifiée on parle simplement de *frère* au lieu de 4-frère ou de 8-frère.

On construit alors la relation binaire N symétrique, non réflexive suivante :

$$\forall A, B \in \Pi, N(A,B) \Leftrightarrow B \text{ est frère de } A$$

B- Communication descendante :

Pour $k \neq 0$ on appelle *Fils* de (x,y,k) l'un des éléments, de niveau $k-1$, de l'ensemble $Fils(x,y,k) = \{(2x,2y,k-1), (2x+1,2y,k-1), (2x,2y+1,k-1), (2x+1,2y+1,k-1)\}$

On construit la relation binaire Σ non symétrique et non réflexive suivante :

$$\forall A, B \in \Pi, \Sigma(A,B) \Leftrightarrow B \text{ est fils de } A$$

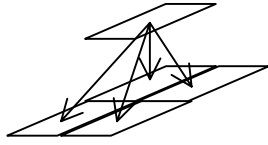
C- Communication ascendante :

Pour $k \neq N$ on appelle *Père* de (x,y,k) l'élément de niveau $k+1$ suivant :

$$Père(x,y,k) = (E(x/2), E(y/2), k+1) \text{ où } E \text{ désigne la partie entière}$$

On construit la relation binaire Φ non symétrique et non réflexive suivante :

$\forall A, B \in \Pi, \Phi(A,B) \Leftrightarrow B$ est père de A



La relation binaire Σ



La relation binaire Φ

II.2 Segmentation des images par croissance de régions [Archoun-93]

ARCHOUN dans [Archoun-93] propose un algorithme de segmentation des images à niveaux de gris par croissance de régions, l'algorithme repose sur une notion de « bon voisin » qu'il définit comme un voisin qui vérifie un certain critère C . La présentation que nous en faisons ici est très succincte, elle est adaptée à nos notations.

Choix du critère C :

Soient $A=(x,y,k)$ et $B=(x',y',k)$ deux cellules d'un même niveau k , alors

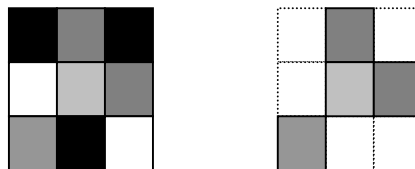
$C(A,B)=V$ (vrai) si et seulement si $|f(A) - f(B)| < \varepsilon$

(ε est une seuil convenablement choisi).

On construit alors l'adhérence de type V_S suivante : si A est une cellule alors :

$$ad(\{A\}) = \{ B, B \text{ est 8-voisin et } C(A,B)=V \}.$$

Dans l'exemple ci-dessous, les cellule blanches et noires sont écartées de l'adhérence (8-voisins) de la cellule centrale car elles ne vérifient pas le critère C pour un ε donné (le contraste est trop élevé).



L'adhérence du pixel central selon le critère C

Les fermetures prétopologiques pour l'adhérence ad forment alors, à chaque niveau k , des régions connexes (relativement au critère C) de I_k . Ces régions recevront les niveau de gris moyens de toutes les cellules qui les constituent. Le passage d'un niveau à un niveau

supérieur dans la pyramide se fera en ne gardant qu'une cellule par région connexe. La pyramide ainsi construite est *adaptive* car elle est conditionnée par des critères locaux. La pyramide ainsi construite représente à chaque niveau l'image initiale avec différentes résolutions.

II.3 Approche multirésolutionnelle de détection et délimitation de bassins [Piegay-97]

La méthode de *détection et délimitation* exposée par E. PIEGAY permet de détecter rapidement les objets "principaux" dans une image, tout en gardant une bonne précision de leurs contours. Cette méthode repose sur une structure pyramidale dont la base est l'image traitée, et dont le niveau le plus haut correspond au niveau de résolution où les objets recherchés sont le plus "perceptibles".

Cette technique est basée sur la méthode prétopologique de détection des bassins versants présentée plus haut. Le processus de recherche des objets dans l'image est constitué :

- d'une détection des bassins versants dans l'image à basse résolution ;
- d'une relocalisation de ces bassins par un parcourt vertical des niveaux de résolution dans la pyramide.

La méthode est initialisée par une recherche des bassins versants sur le niveau k de la pyramide qui correspond à la résolution où les objets sont le plus perceptibles. Le résultat de cette segmentation est projeté sur le niveau $k-1$ de la pyramide ce qui permet de repositionner les lignes de crêtes séparant les bassins au niveau $k-1$. Cette relocalisation permet de calculer les régions noyaux qui vont se propager par des adhérences successives pour former les nouveaux bassins versants au niveau $k-1$. Le processus s'arrête au niveau de plus haute résolution.

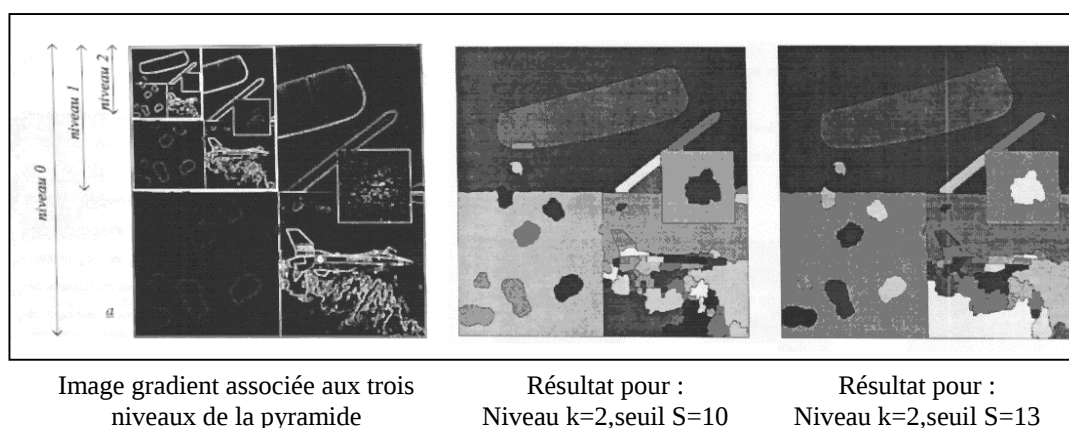


Figure IV.6 : Utilisation de la prétopologie en multirésolution [Piegay-97]

III. STRUCTURE PRETOPOLOGIQUE DE TYPE PYRAMIDAL

Dans cette section nous présentons un formalisme prétopologique général de construction des structures pyramidales. Nous commençons par les structures pyramidales logiques, c'est à dire les pyramides dans lesquelles les cellules ne sont pas valuées.

Les structures prétopologiques que nous allons définir sont issues des relations binaires N , Σ et Φ de communication dans une pyramide et définies plus haut.

Soit une pyramide logique Π définie comme dans la paragraphe II.1.

III.1 Prétopologie descendante

On définit la prétopologie (Π, ad_Σ) descendante qui permet la communication inter-niveau descendante suivante :

$$\forall k \in \{1, \dots, N\}, \forall A = (x, y, k) \in \Pi, ad_\Sigma(A) = \{A\} \cup \{B \in \Pi, \Sigma(A, B)\}$$

$$\text{pour } k=0, \forall A = (x, y, 0) \in \Pi, ad_\Sigma(A) = \{A\}$$

$$\text{et } \forall P \subset \Pi, ad_\Sigma(P) = \cup ad_\Sigma(\{A\}) \text{ pour tous les } A \text{ de } P$$

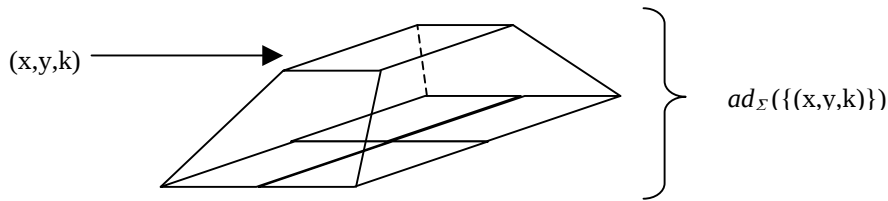


Figure IV.6 : l'adhérence descendante d'une cellule ne se trouvant pas à la base de la pyramide

Propriétés :

On a les propriétés suivantes pour cette prétopologie

- ad_Σ est par construction de type² V_S .
- $\forall k \in \{1, \dots, N\}, ad_\Sigma(\Pi_k) = \Pi_{k-1}$
- $\forall k \in \{0, \dots, N\}, \Pi_k = ad_\Sigma^k(\{Apex\})$, en particulier on a : $\Pi = ad_\Sigma^N(\{Apex\})$
- $\Pi = F_\Sigma(\{Apex\})$ où F_Σ est la fermeture prétopologique associée à ad_Σ .
- Le passage du niveau $k \neq 0$ au niveau $k-1$ se fait par la germination de propagation [Emptoz-83] suivante :

$$\Gamma_\Sigma : P(\Pi) \rightarrow P(\Pi), \forall P \subset P(\Pi), \Gamma_\Sigma(P) = ad_\Sigma(P) - P.$$

$$\forall k \in \{1, \dots, N\}, \Gamma_\Sigma(I_k \times \{k\}) = \Gamma_\Sigma(\Pi_k) = I_{k-1} \times \{k-1\}$$

² voir la définition dans le deuxième chapitre

- Une cellule $A = (x,y,h) \in \Pi$, sera descendante d'une cellule $B = (x',y',k) \in \Pi$, si et seulement si : $h < k$ et il existe un chemin prétopologique $(A_0=A, A_1, \dots, A_{k-h}=B)$ de longueur $l=k-h$, associé à ad_Σ qui relie A à B , c'est à dire : $\forall i \in \{1, \dots, l\}, A_i \in ad_\Sigma(\{A_{i-1}\})$.

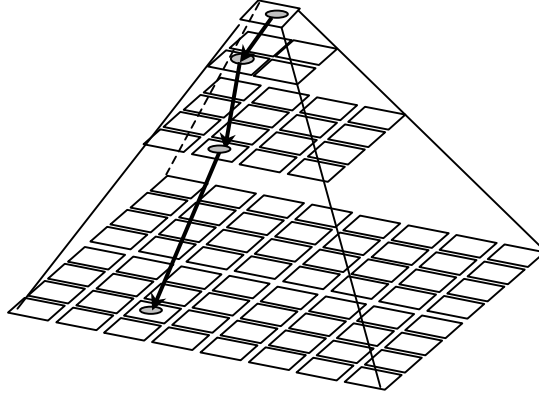


Figure IV.7 : un chemin prétopologique descendant (si on inverse le sens des flèches on aura un chemin prétopologique ascendant – voir le paragraphe suivant)

III.2 Prétopologie ascendante

On définit la prétopologie (Π, ad_Φ) ascendante qui permet la communication inter-niveau ascendante comme suit :

$$\forall k \in \{0, \dots, N-1\}, \forall A=(x,y,k) \in \Pi, ad_\Phi(A) = \{A\} \cup \{B \in \Pi, \Phi(A,B)\}$$

$$\text{pour } k=N, ad_\Phi(\text{Apex}) = \{\text{Apex}\}$$

$$\text{et } \forall P \subset \Pi, ad_\Phi(P) = \cup ad_\Phi(\{A\}) \text{ pour tous les } A \text{ de } P$$

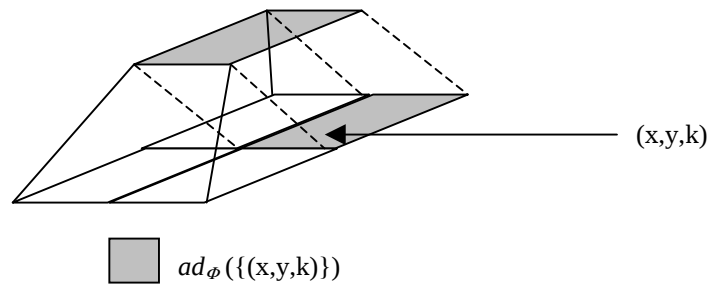


Figure IV.8 : adhérence ascendante d'une cellule

Propriétés :

On a les propriétés suivantes pour cette prétopologie

ad_Φ est par construction de type V_S

$$\forall k \in \{1, \dots, N\}, ad_\Phi(\Pi_{k-1}) = \Pi_k$$

$$\forall k \in \{0, \dots, N-1\}, ad_\Phi^k(I_0) = \Pi \setminus \Pi_{k-1}, \text{ et } ad_\Sigma^N(I_0) = \Pi$$

$\Pi = F_\Phi(\{I_0\})$ où F_Φ est la fermeture prétopologique associée à ad_Φ .

Le passage du niveau $k \neq N$ au niveau $k+1$ se fait par la germination de propagation suivante :

$$\Gamma_\Phi : P(\Pi) \rightarrow P(\Pi), \forall P \subset P(\Pi), \Gamma_\Phi(P) = ad_\Phi(P) - P.$$

$$\forall k \in \{0, \dots, N-1\}, \Gamma_\Phi(I_k \times \{k\}) = \Gamma_\Phi(\Pi \setminus \Pi_k) = I_{k+1} \times \{k+1\}$$

Une cellule $A = (x, y, h) \in \Pi$, sera ascendante (ou ancêtre) d'une cellule $B = (x', y', k) \in \Pi$, si et seulement si :

- $h > k$
- et il existe un chemin prétopologique $(A_0=A, A_1, \dots, A_{h-k}=B)$ de longueur $l=h-k$, associé à ad_Φ qui relie A à B , c'est à dire : $\forall i \in \{1, \dots, l\}, A_i \in ad_\Phi(\{A_{i-1}\})$.

III.3 Prétopologie intra-niveau

On appelle prétopologie intra-niveau toute structure prétopologique ad définie sur Π telle que pour tout k de $\{0, \dots, N\}$ $ad(I_k) \subset I_k$. Cette prétopologie peut être définie comme sur n'importe quelle image carrée selon le besoin du traitement à faire, et peut être différente d'un niveau à l'autre. Néanmoins, on peut distinguer deux prétopologies intéressantes car beaucoup utilisées en analyse d'image, il s'agit de celles des 4-voisins et des 8-voisins. Ces deux prétopologies peuvent être définies grâce à la relation binaire N comme suit :

$$\forall A \in \Pi, ad_N(\{A\}) = \{A\} \cup \{B \in \Pi, N(A, B)\}$$

et $\forall P \subset \Pi, ad_N(P) = \cup ad_N(\{A\})$ pour tous les A de P

La définition d'une telle prétopologie présente une certaine singularité en l'apex de la pyramide et aux bords de chaque image I_k . Cette singularité peut être levée en définissant $ad_N(I_N) = I_N$, et en se restreignant aux voisins internes des cellules du bord.

Remarques importantes :

Toutes les adhérences définies plus haut ne dépendent pas du type de la pyramide utilisée, du fait quelles soient définies juste à partir des relations de communication intra-niveau et inter-niveau. De ce fait elles sont tout à fait valables dans d'autres structures pyramidales, par exemple, binaires ou irrégulières.

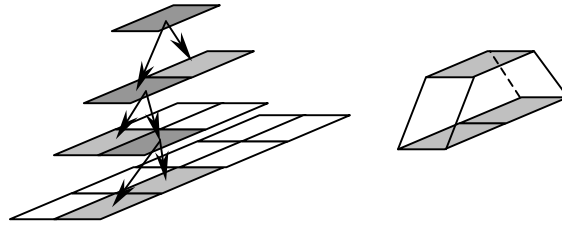


Figure IV.9 : pyramide binaire et adhérence descendante binaire

Le formalisme que nous venons de présenter est de nature structurelle logique, c'est à dire qu'il ne dépend pas des données effectivement contenues dans les cellules, alors que pratiquement la structure pyramidale n'a d'intérêt que si les cellules sont affectées de valeurs numériques qui guident le traitement telles que le niveau de gris dans une image ou la densité de points en classification automatique. C'est la raison pour laquelle nous présentons le paragraphe suivant dans lequel nous nous intéressons aux pyramides que nous appellerons *valuées*.

IV PRETOPOLOGIE DANS LES PYRAMIDES VALUEES

Dans cette section nous supposons que chaque cellule (x,y,k) de la pyramide est munie d'une valeur réelle $f(x,y,k)$. Dans le traitement multirésolutionnel d'une image à niveau de gris $f(x,y,k)$ peut être par exemple un niveau de gris dans $\{0,1,...,255\}$. Dans le cas de l'utilisation des pyramides en classification $f(x,y,k)$ peut être la densité des points contenus dans la cellule (x,y,k) donnée par le rapport du nombre de points dans la cellule à la surface de la cellule.

L'utilisation de la prétopologie dans de telles considération ne diffère pas beaucoup de ce que nous avons présenté pour les structures pyramidales logiques. Ce qui change c'est surtout la définition des relation de communications inter-niveau et intra-niveau. Ces relations seront soumises à certains critères. Un frère par exemple d'une cellule (x,y,k) ne sera pas tout simplement un 8-voisin (x',y',k) mais sera un 8-voisin qui vérifiera un certain critère C fonction de $f(x',y',k)$, par exemple : $C = (f(x,y,k) < f(x',y',k))$.

IV.1 Formalisation.

Soit Π une pyramide valuée dans le sens où à chaque cellule (x,y,k) est affectée une valeur $f(x,y,k)$.

Changement de notation :

Puisque chaque cellule $A_k = (x,y,k)$ de Π aura une valeur affectée $f(A_k)$, la cellule A_k sera notée $(A_k, f(A_k))$.

Comme nous avons vu dans les exemples précédents le traitement se fait en respectant un certains nombre de critères en fonction des valeurs da la fonction f . Soient alors :

X_h un critère de communication horizontale

X_a un critère de communication ascendante

X_d un critère de communication descendante

En utilisant la notation : $(A_k, f(A_k)) \downarrow X$ qui signifie que la cellule $(A_k, f(A_k))$ vérifie le critère X , on peut définir les prétopologies de type V_S suivantes :

$$\begin{aligned} \forall (A_k, f(A_k)) \in \Pi, \quad ad_h(\{(A_k, f(A_k))\}) &= \{(B_l, f(B_l)), B_l \in ad_N(\{A_k\}) \text{ et } (B_l, f(B_l)) \downarrow X_h\} \\ ad_a(\{(A_k, f(A_k))\}) &= \{(B_l, f(B_l)), B_l \in ad_\Phi(\{A_k\}) \text{ et } (B_l, f(B_l)) \downarrow X_a\} \\ ad_d(\{(A_k, f(A_k))\}) &= \{(B_l, f(B_l)), B_l \in ad_\Sigma(\{A_k\}) \text{ et } (B_l, f(B_l)) \downarrow X_d\} \end{aligned}$$

et $\forall i \in \{h, a, d\} \forall P \subset \Pi, ad_i(P) = \cup ad_i(\{(A_k, f(A_k))\})$ pour tous les $(A_k, f(A_k))$ de P .

Exemples :

1/ Si $(A_k, f(A_k))$ est une cellule de référence, on peut considérer le critère X_h suivant :

$(B_l, f(B_l)) \downarrow X_h \Leftrightarrow B_l$ est 8-voisin de A_k et $|f(A_k) - f(B_l)| < \varepsilon$, alors ad_h devient l'adhérence utilisée dans [Archoun-93] et présentée plus haut.

2/ Soit Π une pyramide régulière sans recouvrement à N niveaux, telle que $f(\text{Apex}) = 1$, et soit X_d le critère défini par :

$(\text{Apex}, f(\text{Apex})) \downarrow X_d$ (vrai sans conditions)

$\forall k \neq N$, si $A_k = (x, y, k)$, soit $B_{k+1} = (x' = E(x/2), y' = E(y/2), k+1)$ le père de A_k alors :

$$\begin{aligned} (A_k, f(A_k)) \downarrow X_d \Leftrightarrow & \quad 1/ \text{ si } f(B_{k+1}) = 1 \text{ alors } - \text{ si } x = 2x' \text{ alors } f(A_k) = 1 - (y - 2y') \\ & \quad - \text{ si } x = 2x' + 1 \text{ alors } f(A_k) = (y - 2y') \\ & \quad 2/ \text{ si } f(B_{k+1}) = 0 \text{ alors } - \text{ si } x = 2x' \text{ alors } f(A_k) = 0 \\ & \quad - \text{ si } x = 2x' + 1 \text{ alors } f(A_k) = 1 \end{aligned}$$

Alors l'adhérence ad_d définie grâce à ce critère donne une pyramide dont la base forme une image fractale.

3/ Soit Π une pyramide régulière sans recouvrement à N niveaux, telle que la base est définie par une image à niveau de gris considérée alors comme $I = \{0, 1, \dots, 2^N - 1\} \times \{0, 1, \dots, 2^N - 1\}$ où chaque cellule $(x, y, 0)$ est munie d'un niveau de gris $f(x, y, 0)$.

Soit le critère X_a de communication ascendant suivant :

$\forall A_0$ cellule de la base de Π , $(A_0, f(A_0)) \downarrow X_a$ (c'est à dire que les cellules de la base sont supposées vérifier le critère X_a)

$\forall k \neq 0$, soit $A_k = (x, y, k) \in \Pi$ alors : $(A_k, f(A_k)) \downarrow X_a \Leftrightarrow f(A_k) = f(2x, 2y, k-1)$

Ainsi l'adhérence $k^{\text{ième}}$ de l'image I_0 par ad_a associée au critère X_a donne une représentation multirésolutionnel à l'ordre k de cette image comme sur la figure (fig. 8).

4/ La pyramide Gaussienne [Jolion-94]

Pour établir une adhérence ascendante permettant de construire une pyramide gaussienne il suffit de construire le bon critère pour communication ascendante. Dans ce cas ce critère est basé sur la notion de convolution avec un masque gaussien.

Soit Π une pyramide régulière sans recouvrement à N niveaux, telle que la base est définie par une image à niveau de gris considérée alors comme $\{0,1,...,2^N-1\} \times \{0,1,...,2^N-1\}$ où chaque cellule $(x,y,0)$ est munie d'un niveau de gris $f(x,y,0)$.

Soit le critère X_a de communication ascendant suivant :

$\forall A_0$ cellule de la base de Π , $(A_0, f(A_0)) \lhd X_a$ (c'est à dire que les cellules de la base sont supposées vérifier le critère X_a).

$\forall k \neq 0$, soit $A_k = (x,y,k) \in \Pi$ alors :

$$(A_k, f(A_k)) \lhd X_a \Leftrightarrow f(A_k) = \sum_{p,q=1}^M w(p,q).f(2x+p-z, 2y+q-z, k-1)$$

où w est un masque gaussien de dimension M , $z = \text{PartieEntière}((M+1)/2)$

Exemple de masque gaussien de dimension $M = 4$:

$$w = \begin{bmatrix} 0.0169 & 0.0481 & 0.0481 & 0.0169 \\ 0.0481 & 0.1369 & 0.1369 & 0.0481 \\ 0.0481 & 0.1369 & 0.1369 & 0.0481 \\ 0.0169 & 0.0481 & 0.0481 & 0.0169 \end{bmatrix}$$

L'utilisation d'une telle pyramide en traitement d'images permet la construction d'une représentation multirésolutionnelle d'une image comme dans la figure 2.8 mais avec une perte d'information minimale lors de passage d'un niveau à l'autre comparativement aux autres structures pyramidale.



Figure IV.11 : Représentation multirésolutionnelle d'une image

V CONCLUSION

Nous avons commencé dans ce chapitre par présenter des exemples de méthodes prétopologiques pour le traitement des images binaires ou à niveaux de gris. Nous avons ensuite donné d'autres exemples de méthodes prétopologiques, mais, cette fois, spécifiques aux traitements multi-échelles (plusieurs niveaux de perception). Nous avons enfin proposé une modélisation prétopologique des structures pyramidales qui sont les structures de données les mieux appropriées au dernier type de traitement.

Nous n'avons, en outre, pas fait de comparaisons avec les méthodes classiques de traitement d'images, surtout avec la morphologie mathématique qui est considérée comme l'outil maître dans ce domaine. Cette omission est volontaire de notre part car nous avons réservé le chapitre suivant pour aborder plus amplement cette question.