Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques notions de bases des équations différentielles et des séries de puissances, avec un aperçu sur l'analyse asymptotique qui nous aiderons à comprendre ce mémoire.

1.1 Rappel sur les équations différentielles ordinaires

Une équation différentielle d'ordre n a la forme

$$y^n(x) = F[x, y(x), y'(x), \ldots ..., y^{n-1}(x)], \tag{1.1}$$

où

$$y^k = \frac{d^k y}{dx^k}.$$

L'équation (1.1) est une équation linéaire si F est une fonction linéaire de $y(x)$ et de ses dérivées (la dépendance x explicite de F est toujours arbitraire). Si (1.1) est linéaire, alors la solution générale $y(x)$ dépend de paramètres indépendants appelés constantes d'intégration ; toute solution d'une équation différentielle linéaire peut être obtenue par un choix approprié de ces constantes. Si (1.1) est une équation différentielle non linéaire, alors elle a aussi une solution générale qui contient n constantes d'intégration. Cependant, il existe parfois des solutions supplémentaires spéciales d'équation différentielle non linéaire qui ne peuvent être obtenues à partir de la solution générale pour tout choix des constantes d'intégration. Nous omettons une discussion rigoureuse de ces propriétés fondamentales des équations différentielles mais les illustrons dans les deux exemples suivantes.

Exemple 1.1.1. *Équations séparables : les équations séparables sont les équations différentielles les plus faciles à résoudre. Une équation est séparable si elle est du premier ordre et les dépendances en x et y de F dans le facteur (1.1) sont réparées. L'équation séparable la plus générale est*

$$y'(x) = a(x)b(y). \tag{1.2}$$

L'intégration directe donne la solution générale

$$\int_y \frac{dt}{b(t)} = \int_x a(s)ds + c_1, \tag{1.3}$$

où c_1 est une constante d'intégration. (La notation $\int_x a(s)ds$ représente la primitive de $a(x)$).

Les équations linaires ont une gamme plus simple et plus restreinte de que les équations non linéaires, mais elles constituent une classe importante car elles apparaissent très fréquemment dans la description mathématique des phénomènes physiques. Formellement, une équation différentielle linéaire peut s'écrire

$$Ly(x) = f(x), \tag{1.4}$$

où L est un opérateur différentiel linéaire :

$$L = p_0(x) + p_1(x)\frac{d}{dx} + \ldots ... + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \frac{d^n}{dx^n}. \tag{1.5}$$

Il est classique, bien que non nécessaire, de choisir le coefficient de la dérivée la plus élevée à 1. Si $f(x) = 0$, l'équation différentielle (1.4) est homogène ; sinon, elle est non homogène.

Exemple 1.1.2. *Solution d'une équation linéaire. La solution générale de l'équation linéaire homogène*

$$y'' - \frac{1+x}{x}y' + \frac{1}{x}y = 0 \tag{1.6}$$

est

$$y(x) = c_1(x)e^x + c_2(1+x),$$

ce qui montre la dépendance explicite des deux constantes d'intégration c_1 et c_2. Chaque solution de (1.6) a cette forme.

Les équations non linéaires ont une structure mathématique plus riche que les équations linéaires et sont généralement plus difficiles à résoudre sous forme fermée. Pourtant, la solution de nombreuses équations non linéaires d'apparence difficile est assez courante.

1.1.1 Théorie des équations linéaires homogènes

Dans cette section, nous passons en revue les aspects élémentaires de la théorie élégante des problèmes de valeur initiale et de valeur limite pour les équations différentielles linéaires homogènes.

Indépendance linéaire des solutions

La solution générale d'une équation linéaire homogène d'ordre n

$$y^n + p_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots ... + p_0(x)y = 0 \tag{1.7}$$

a la forme particulièrement simple

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x) \tag{1.8}$$

où les c_j sont des constantes d'intégration arbitraires et $y_j(x)$ est un ensemble de fonctions linéairement indépendantes, chacune satisfaisant (1.7). Il existe toujours exactement n solutions linéairement indépendantes de (1.7) dans toute région où les fonctions de coefficient $p_0(x), p_1(x), \ldots ..., p_{n-1}(x)$ sont continues. (Un ensemble de fonctions $y_j(x)$ est dit linéairement dépendent s'il est possible de trouver un ensemble de nombres c_j qui ne sont pas tous nuls et qui satisfont

$$\sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x) = 0.$$

s'il n'est pas possible de trouver un tel ensemble alors $y_j(x)$ est linéairement indépendant. Le concept d'indépendance linéaire est important car il permet de décider si une solution de la forme (1.8) est bien la solution générale. Si les n fonctions $y_j(x)$ ne sont pas linéairement indépendantes, alors au moins une y_j est une combinaison linéaire des autres et il est nécessaire de rechercher plus de solution de l'équation différentielle. Notez qu'il n'est pas logique de discuter de l'indépendance linéaire en un point ; indépendance linéaire est un concept globale. On dit toujours qu'un ensemble de fonctions est linéairement dépendant ou indépendant sur un intervalle.

Le Wronskian

Il existe un test simple pour la dépendance linéaire ensemble de fonctions différentiables. Le Wronskian $w(x)$ est défini comme le déterminant

$$w(x) = w[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)] \tag{1.9}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & ... & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

$w(x)$ s'annule de façon identique sur un intervalle si et seulement si $y_j(x)$ est un ensemble de fonctions linéairement dépendantes. Si $y_j(x)$ est libre sur un certain intervalle, alors $w(x)$ ne disparait pas, sauf des points isolés.

Exemple 1.1.3. *Indépendance linéaire. Pour vérifier que la solution*

$$y(x) = c_1 e^x + c_2(1 + x)$$

de

$$y'' - y' \frac{1+x}{x} + \frac{y}{x} = 0$$

dans l'exemple (1.1.2) est bien la solution générale, on évalue le Wronskian :

$$w[1 + x, e^x] = xe^x.$$

Notez que xe^x ne s'annule qu'en $x = 0$. Ainsi, pour tout x, $1 + x$, e^x est un ensemble des vecteurs libre.

Les équations linéaires homogènes ont une propriété remarquable : le Wronskian $w(x)$ de tout n solution de (1.7) satisfait l'équation simple du premier ordre

$$w'(x) = -p_{n-1}(x)w(x) \tag{1.11}$$

La solution de (1.11) est

$$w(x) = e^{[-\int_x p_{n-1}(t)dt]}. \tag{1.12}$$

Aussi, nous avons du résultat surprenant que $w(x)$ peut être calculer avant qu'aucune des solutions de l'équation différentielle ne soit connue. L'intégrale indéfinie dans la formule (1.12) signifie que $w(x)$ est déterminé jusqu'à une constante multiplicative arbitraire. Le choix d'un nouvel ensemble de n solutions modifie simplement la constante.

1.1.2 Solutions d'équations linéaires homogènes

Nous passons ici aux aspects plus pratiques de l'équation

$$Ly = 0$$

à savoir, comment le résoudre. Une équation du premier ordre de ce type est facile à résoudre car elle est séparable (voir l'exemple (1.1.1)). Cependant, lorsque l'ordre n est supérieur ou égale à deux, les solutions exactes de forme fermée n'existent que rarement. En mathématiques, une expression est dite être sous forme fermée si elle peut être exprimée de manière analytique en termes de nombre fini de certaines fonctions bien connues.

Équations à coefficient constant

Les équations à coefficient constant sont caractérisées en ce que $p_0, p_1, ..., p_{n-1}$ sont indépendants de x. On cherche des solutions de la forme

$$y(x) = e^{rx}.$$

Substituant cette fonction d'essai dans l'équation différentielle donne

$$L[e^{rx}] = e^{rx}p(r),$$

où

$$p(r) = r^n + \sum_{j=0}^{n-1} p_j r^j$$

est un polynôme au même degré de l'équation. La solution de Ly=0 correspondant à des racines distinctes $r_1, r_2, ...$ de

$$p(r) = 0$$

sont

$$y = e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, ... \tag{1.13}$$

Cependant, s'il y a des racines répétées, (1.13) n'est pas un ensemble complet de solutions. Pour construire les solutions restantes, supposons que r_1 est une racine répétée m fois. Alors

$$L[e^{rx}] = e^{rx}(r - r_1)^m Q(r) \tag{1.14}$$

où Q est un polynôme de degré $n - m$. La fonction entre crochets est une solution de l'équation différentielle si elle fait disparaître le côté droit de (1.14). En effet, laisser

$$r = r_1$$

montre que $e^{r_1 x}$ est une solution. Plus on génère plus de solutions, on prend simplement des dérivées par rapport à r et on fixe

$$r = r_1.$$

Ce processus donne les m solutions

$$y = e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, ..., x^{m-1}e^{r_1 x}. \tag{1.15}$$

Une combinaison linéaire de toutes les solutions en (1.13) et (1.15) constitue une solution générale à l'équation différentielle.

Exemple 1.1.4. *Équations à coefficient constant. (a)la substitution de*

$$y = e^{rx}$$

dans l'équation

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

donne l'équation quadratique

$$(r - 1)(r - 4) = 0$$

qui doit être satisfaite par r. La solution générale est donc

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{4x}.$$

(b) La substitution de

$$y = e^{rx}$$

dans l'équation

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

donne une équation polynomiale cubique pour r avec une racine triple en r=1. La solution générale est donc

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x.$$

Équations équidimensionnelles

Les équations équidimensionnelles (ou d'Euler) sont ainsi désignées parce qu'elles sont invariantes sous le changement d'échelle $x \to ax$. Les coefficients ont la forme

$$p_j(x) = \frac{q_j}{x^{n-j}},$$

où q_j est indépendant de x. Les équations différentielles équidimensionnelles peuvent être résolues en les transformant en coefficients constants en t par le changement de variable

$$x = e^t,$$
$$x\frac{d}{dx} = \frac{d}{dt}.$$

Alternativement, les équations équidimensionnelles peuvent être résolues en substituant directement la fonction d'essai

$$y = x^r$$

dans l'équation différentielle. Cette substitution donne

$$L[x^r]p(r)x^{r-n} \tag{1.16}$$

où $p(r)$ est un polynôme de degré n. Ainsi, les solutions ont la forme

$$y = x^{r_1}, x^{r_2}, ..., \tag{1.17}$$

lorsque $r_1, r_2, ...$ sont des racines distinctes de $p(r)$. Lorsque $P(r)$ a une racine r_1 répétée, un ensemble complet de solutions est dérivé en différenciant la relation

$$L[x^r] = p(r)x^{r-n}$$

par rapport à r, puis en définissant

$$r = r_1.$$

Un ensemble complet de solutions à la forme

$$y = x^{r_1}, x^{r_1}lnx, x^{r_1}(lnx)^2, ..., \tag{1.18}$$

lorsque r_1 est une racine répétée de p(r). Les racines de p(r) sont appelées exposants indicatifs.

Exemple 1.1.5. *Équation équidimensionnelle. Si nous substituons*

$$y = x^r$$

dans l'équation équidimensionnelle

$$y'' + \frac{y}{4x^2} = 0,$$

nous obtenons l'équation polynomiale

$$(r - \frac{1}{2})^2 = 0.$$

La solution générale est donc

$$y(x) = c_1\sqrt{x} + c_2\sqrt{x}lnx.$$

Équations exactes

Une équation exacte est une dérivée d'une équation d'ordre inférieur :

$$Ly = (d/dx)(My) = 0.$$

Cette équation est simplifiée en intégrant par rapport à x :

$$My = c_1.$$

(L'équation résultat n'est plus homogène.)

Exemple 1.1.6. *Équation exacte. L'équation*

$$y'' + xy' + y = 0$$

peut être récrite comme

$$(\frac{d}{dx})(y' + xy) = 0.$$

Ainsi,

$$y' + xy = c_1,$$

qui est facilement résolu :

$$y = (c_1 \int_0^x e^{t^2/2}dt + c_2)e^{-x^2/2}.$$

Un facteur d'intégration est une fonction de x et y qui, en multipliant une équation différentielle, la rend exacte.

Exemple 1.1.7. *Facteur d'intégration. L'équation différentielle*

$$y'' + y'\frac{1+x}{x} + y\frac{x-1}{x^2} = 0$$

n'est pas exacte, mais elle devient exacte lorsqu'elle est multipliée par le facteur d'intégration e^x *:*

$$e^x y'' + (\frac{1+x}{x})(e^x y') + (\frac{x-1}{x^2})(e^x y) = \frac{d}{dx}(e^x y' + (\frac{e^x}{x})y).$$

Ainsi,

$$y' + y_x = c_1 e^{-x},$$

qui est facilement résolu :

$$y(x) = -c_1\frac{(1+x)e^{-x}}{x} + c_2\frac{1}{x}.$$

Réduction de commande

La réduction d'ordre est une technique pour simplifier une équation différentielle linéaire à une équation d'ordre inférieur en factorisant une solution que l'on a eu la chance de trouver. Soit $y_1(x)$ une solution de

$$Ly = 0.$$

On cherche alors d'autres solutions linéairement indépendantes de la forme

$$y(x) = u(x)y_1(x). \tag{1.19}$$

Clairement, substituer cette expression à $y(x)$ dans

$$Ly = 0$$

donne une nouvelle équation pour $u(x)$ de la forme

$$Mu = 0.$$

Le but de cette substitution est que Mu n'a pas de terme de la forme $p_0(x)u$. Ainsi,

$$Mu = 0$$

est une équation linéaire homogène d'ordre $(n-1)$ pour

$$\upsilon(x) = u(x).$$

Exemple 1.1.8. *Réduction de commande. On observe que la somme des coefficients de l'équation différentielle*

$$y'' - y'\frac{1+x}{x} + \frac{y}{x} = 0$$

est égale à 0. *Il s'ensuite qu'une solution est*

$$y_1(x) = e^x.$$

La substitution de

$$y(x) = u(x)e^x$$

donne

$$u'' + u'\frac{x-1}{x} = 0,$$

qui est une équation du premier ordre pour u'(x). La solution générale pour y(x) est donnée dans l'exemple (1.1.2).

1.2 Séries de puissances

Nous donnons un bref résumé sur les résultats pertinents sur les séries de puissances dont nous avons besoin.

1. Une série de puissance $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ est dite convergente en un point x si

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\sum_{n=0}^{m} a_n(x-x_0)^n$$

existe pour ce x. La série converge certainement pour $x = x_0$: elle peut converger pour tout x, ou elle peut converger pour certaines valeurs de x et pas pour d'autre.

2. On dit que la série de puissance $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolument en un point x si la série de puissance associée

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(x-x_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n||(x-x_0)|^n$$

converge.

3. L'un des testes les plus utiles pour la convergence absolue d'une série de puissance est le test de rapport si $a_n \neq 0$, et si pour une valeur fixée de x

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}| = |x-x_0|\lim_{n\longrightarrow\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |x-x_0|L$$

alors la série de puissance converge absolument à cette valeur de x si $|x-x_0|L < 1$ et diverge si $|x-x_0|L > 1$. si $|x-x_0|L = 1$ le rapport de test n'est pas concluant.

4. Si la série de puissance $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge en $x = x_0$. Elle converge absolument pour $|x-x_0| < |x_1-x_0|$ et si elle diverge en $x = x_1$, elle diverge pour $|x-x_0| > |x_1-x_0|$

5. Pour une série de puissance typique, il existe un nombre positif p appelé rayon de convergence, tel que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolument pour $|x-x_0| < p$, et diverge pour $|x-x_0| > p$. L'intervalle $|x-x_0| < p$ est appelé intervalle de convergence. La série peut soit converge, soit diverge lorsque $|x-x_0| = p$. De nombreuses séries de puissance importantes convergent pour toutes les valeurs de x. Dans ce cas, il est habituel de dire que p est infini et que l'intervalle de convergence est toute la ligne réelle. Chaque série de puissance a un rayon de convergence non négatif p, et si $p > 0$ alors il y a un intervalle (fini ou infini) de convergence centré en x_0.

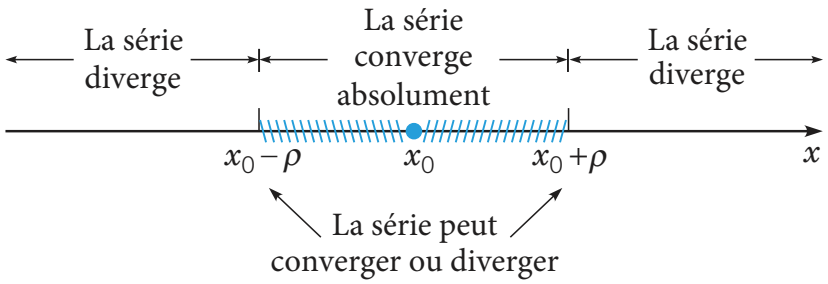

Figure 1.1 – Intervalle de convergence d'une série de puissance.

Supposons que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ convergent vers $f(x)$ et $g(x)$ respectivement pour $|x-x_0| < p$, $p > 0$.

1. Les deux séries puissances de peuvent être ajouté ou soustrait par terme, et

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-x_0)^n$$

la série résultante converge au moins pour $|x-x_0| < p$.

2. Les deux séries peuvent être formellement multipliées, et

$$f(x)g(x) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

où $c_n = a_0b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$. La série résultante converge au moins pour $|x-x_0| < p$, de plus, si $b_0 \neq 0$ alors $g(x_0) \neq 0$ et la série pour $f(x)$ peut être formellement

divisée par la série pour $g(x)$, et

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n$$

Dans la plupart des cas, les coefficients d_n peuvent être obtenus le plus facilement en égalisant les coefficients dans la relation équivalente

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n &= \Big[\sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n\Big]\Big[\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n\Big] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} d_k b_{n-k}\Big)(x - x_0)^n\end{aligned}$$

Dans le cas de la division, le rayon de convergence de la série de puissance résultante peut être inférieur à p.

3. La fonction f est continue a des dérivées de tous les ordres pour $|x - x_0| < p$. $f', f'', ...$ peut être calculé en différenciant la série par terme, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}f'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + ... + na_n(x - x_0)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1} \\ f''(x) &= 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + ... + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + ... \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2},\end{aligned}$$

et ainsi de suite, et chacune des séries converge absolument pour $|x - x_0| < p$.

4. La valeur a_n est donnée par

$$a_n = \frac{f^n(x)}{n!}$$

la série s'appelle la série Taylor pour la fonction f à propos de $x = x_0$.

5. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ pour chaque x dans certains intervalles ouverts de centre x_0, puis $a_n = b_n$ pour $n = 0, 1, 2, 3, ...$ en particulier, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = 0$ pour chacun x puis $a_0 = a_1 = ... = a_n = ... = 0$, Alors $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n = 0$.

Une fonction qui a une extension en série Taylor ou point $x = x_0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

avec un rayon de convergence $p > 0$, est dite analytique en $x = x_0$. Les fonctions de calcul sont analytiques sauf peut être en certains points facilement reconnaissables. Par exemple, $sinx$ et e^x sont analytiques sauf en $x = 0$, et $tanx$ est est analytique sauf en multiples impaires de $\frac{\pi}{2}$. Selon les déclaration 1 et 2, si f et g sont analytiques en x_0, alors $f \pm g, f.g$ (à condition que $g(x_0) \neq 0$) sont également analytiques en x_0.

1.3 Notions d'analyse asymptotique

1.3.1 Relations de comparaisons

On considère une parti D de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) d'intérieur non vide et $x_0 \in \overline{D}$. Soit f, g deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.1. *On dit que f est négligeable devant g, ou bien petit o au voisinage de x_0 si : $\forall \varepsilon > 0, \exists$ V un voisinage de x_0 tels que $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$, $\forall x \in V \cap D$,et on écrit $f(x) \ll g(x)$.*

Définition équivalente : f petit o de g s'il existe un voisinage V et un fonction

$\delta : V \cap D \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \delta(x)g(x).\forall x \in V \cap D$ avec $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \delta(x) = 0$.

S'il existe un voisinage V telle que $g(x) \neq 0, \forall x \in V$.Alors f est petit o de g si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

On écrit $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$

Exemple 1.3.2.

1. $x^p = o(x^q)$ au $V(0)$ si $p > q$.

2. $x^p = o(x^q)$ au $V(\infty)$ si $p < q$.

3. $x^n = o(e^x)$ au $V(\infty)$. $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Définition 1.3.3. *On dit que f est dominée par g ou bien grand O au voisinage de x_0, et on écrit $f(x) \underset{x_0}{=} O(g(x))$ si il existe $M > 0$ et un voisinage V de x_0 tels que $|f(x)| \leq M|g(x)|$, $\forall x \in V \cap D$. Si g ne s'annule pas sur V , alors : $f(x) \underset{x_0}{=} O(g(x)) \Longleftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de x_0.*

Exemple 1.3.4.

1. $sinx = O(1).\forall x.$

2. $sh(x) = O(e^x)$ *au* $V(\infty).$

3. $ax^n = O(x^n)$ *au* $V(\infty), a \neq 0.$

Définition 1.3.5. *On dit que* $f(x)$ *est asymptotiquement équivalente à* $g(x)$ *au voisinage de* x_0*, et on écrit* $f(x) \sim g(x)$ *quand* $x \longrightarrow \infty$ *s'il existe un voisinage* V *de* x_0 *et une fonction* $\delta : V \cap D \longrightarrow R$ *tels que* $f(x) = \delta(x)g(x) \forall x \in V$ *avec* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \delta(x) = 1$

Si g *ne s'annule pas sur* V*. Alors* $f(x) \sim g(x) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$

Par exemple : 1. $sinx \sim x$ *quand* $x \longrightarrow 0$*, puisque*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{sinx}{x} = 1.$$

Aussi, $x + 1 \sim x$ *quand* $x \longrightarrow \infty$*,puisque*

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x} = 1.$$

2. Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ *avec* $a_1 \neq 0$ *alors* $p(x) \sim a_n x^n$ *au V(0)*

Proposition 1.3.6. *La relation* $\sim$ *quand* $x \longrightarrow x_0$ *est une relation d'équivalence sur l'ensemble de toutes les fonctions qui sont nulles près de* x_0*. Autrement dit,*

$f(x) \sim f(x)$ *quand* $x \longrightarrow x_0$

La propriété symétrique :

Si $f(x) \sim g(x)$ *quand* $x \longrightarrow x_0$*, alors* $g(x) \sim f(x)$ *quand* $x \longrightarrow x_0$

et la propriété transitive :

Si $f(x) \sim g(x)$ *et* $g(x) \sim h(x)$ *quand* $x \longrightarrow x_0$*, alors*

$f(x) \sim h(x)$ *quand* $x \longrightarrow x_0$

Proposition 1.3.7. *Si* $f(x) \ll g(x)$ *et* $g(x) \ll h(x)$ *quand* $x \longrightarrow x_0$*,alors* $f(x) \ll h(x)$ *quand* $x \longrightarrow x_0$*.*

Proposition 1.3.8. *Si* $f(x) \sim g(x)$ *quand* $x \longrightarrow x_0$ *alors l'erreur relative entre les fonctions tend vers zéro, c'est-à-dire*

$$f(x) - g(x) \ll g(x)$$

quand $x \longrightarrow x_0$*.*

De même, si $h(x) \ll f(x)$ *quand* $x \longrightarrow x_0$*, alors l'ajout de* $h(x)$ *à* $f(x)$ *produira une fonction asymptotique équivalente à* $f(x)$*. Autrement dit,*

$f(x) \pm h(x) \sim f(x)$ *quand* $x \longrightarrow x_0$*.*

1.3.2 Séries asymptotiques

Définition 1.3.9. *Soit* $(\delta_n(x))$ *une suite asymptotique et* (a_n) *une suite numérique. On dit que la série* $\sum_{n\geq 0} a_n\delta_n(x)$ *est asymptotique si et seulement si*

$\sum_{n\geq 0} a_n\delta_n(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\delta_k(x) + o\delta_m(x), \forall m \geq 0.$

Exemple 1.3.10.

1) Toute série entière est une série asymptotique.

2) $\sum \frac{1}{n!x^n}$ *est asymptotique au voisinage de* ∞*.*

3) $\sum_{n\geq 0}(-1)^n sinx$ *est asymptotique au voisinage de* 0*.*

Définition 1.3.11. *Soit* $\sum a_n\delta_n(x)$ *et* $\sum b_n\sigma_n(x)$ *deux séries asymptotiques au voisinage de* x_0*. Soit* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$*. Alors* $\alpha \sum a_n\delta_n(x) + \beta \sum b_n\sigma_n(x) = \sum(\alpha a_n\delta_n(x) + \beta b_n\sigma_n(x))$ *est asymptotique au voisinage de* x_0*.*

1.3.3 Développement asymptotique des fonctions

Un développement asymptotique est un "développement limite généralisé" dans lequel la partie principale n'est pas nécessairement polynomiale. Il permet d'étudier le comportement d'une suite au voisinage de ∞ ou d'une courbe au voisinage d'un point. On les obtient en utilisant les développements limités en 0 usuels en effectuant éventuellement un changement de variable. Ils permettent : 1. De déterminer un équivalant d'une fonction au voisinage d'un point (éventuellement ∞) ou d'une suite. 2. D'étudier les branches infinies d'une courbe : asymptote éventuelle et position de la courbe par rapport à celle-ci.

Définition 1.3.12. *Soit* f *une fonction définie sur une partie* D *de* $\mathbb{R}$*, et* $x_0 \in D$*, soit* $(\delta_n(x))_{n\in N}$ *une suite asymptotique au* $V(x_0)$*. On appelle développement asymptotique de* f *suivant la suite* $(\delta_n(x))$ *au* $V(x_0)$ *à l'ordre* m*, tout développement de la forme*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\delta_k(x) + o(\delta_m(x))$$

où $(a_n)_{n\in N}$ *une suite métrique. Si f est développable pour tout ordre n, on écrit :*

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{m} a_k \delta_k(x)$$

Exemple 1.3.13. *On a :*

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n x^n$$

posant $x = sint$*, on obtient*

$$\frac{1}{1+sint} = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n sin^n t$$

c'est un développement asymptotique de la fonction

$$g(t) = \frac{1}{1+sint}$$

au $V(0)$*.*

1.3.4 Méthode de l'équilibre dominant

Pour trouver la série asymptotique pour la solution d'une équation, nous devons d'abord déterminer son comportement de premier plan. Parfois, c'est facile mais il s'agit généralement d'un problème non trivial. Dans ces situation une stratégie très efficace est la méthode de l'équilibre dominant. Le principe de l'équilibre dominant est assez simple. S'il y a trois termes ou plus dans une équation, deux des termes seront généralement asymptotique plus grand que les autres, c'est à dire qu'ils domineront les autres termes. De plus, ces termes s'équilibreront, afin que nous puissions former une équation asymptotique avec seulement deux termes. De telles équations sont généralement très facile à résoudre.

Définition 1.3.14. *La méthode de l'équilibre dominant est utilisée pour déterminer le comportement asymptotique des solutions à une équation différentielle ordinaire sans résoudre complètement l'équation.*

Exemple 1.3.15. *Trouver le comportement de la fonction définie implicitement par*

$x^2 + xy - y^3 = 0$ *quand* $x \longrightarrow \infty$*.*

Solution : Puisqu'il y a a trois termes non nuls, il ya trois choix pour une paire de termes. Si nous supposons y^3 *est petit quand* $x \longrightarrow \infty$*, alors nous aurons* $x^2 \sim -xy$*.*

Cela conduit rapidement à $y \sim x$ quand $x \longrightarrow \infty$. Mais alors $y^3 \sim -x^3$, qui n'est pas petit par rapport à un terme que nous avons gardé x^2, quand $x \sim \infty$. Au lieu de cela, nous supposons $x^2 \ll xy$, puis $xy \sim y^3$ et $y \sim \pm\sqrt{x}$. Mais alors $xy \sim \pm x^{\frac{3}{2}}$, donc x^2 est plus grand que $x \longrightarrow \infty$. Cette possibilité est donc exclue.

Le dernier cas à essayer est de supposer que xy est le plus petit terme, puis $x^2 \sim y^3$, ce qui nous dit que $y \sim x^{\frac{2}{3}}$. Pour vérifier si cela est cohérent, nous devons vérifier que $xy \ll x^2$. En effet, $xy \sim x^{\frac{5}{3}}$ qui est plus petit que x^2 quand $x \longrightarrow \infty$. nous avons montré que $y \sim x^{\frac{2}{3}}$ est cohérent mais cela ne prouve pas à lui seul que le comportement dominant est bien $x^{\frac{2}{3}}$. Afin de montrer que c'est le comportement principal correct, nous devons trouver le terme suivant dans la série, et montre qu'il est plus petit que $x^{\frac{2}{3}}$.

Laisser $y = x^{\frac{2}{3}} + g(x)$ nous donne

$$x^2 + x(x^{\frac{2}{3}} + g(x)) = (x^{\frac{2}{3}} + g(x))^3$$

$$x^2 + x^{\frac{5}{3}} + xg(x) \sim x^2 + 3g(x)x^{\frac{4}{3}} + O(x^{\frac{2}{3}}g(x)^2)$$

L'annulation du x, et en gardant les termes d'ordre supérieur, nous obtenons $x^{\frac{5}{3}} \sim 3g(x)x^{\frac{4}{3}}$ qui simplifie en $g(x) \sim \frac{x^{\frac{1}{3}}}{3}$. Ceci est en effet inférieur à $x^{\frac{2}{3}}$ quand $x \longrightarrow \infty$, nous avons donc confirmé le comportement dominant, ainsi que le terme suivant $y \sim x^{\frac{2}{3}} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{3}$.

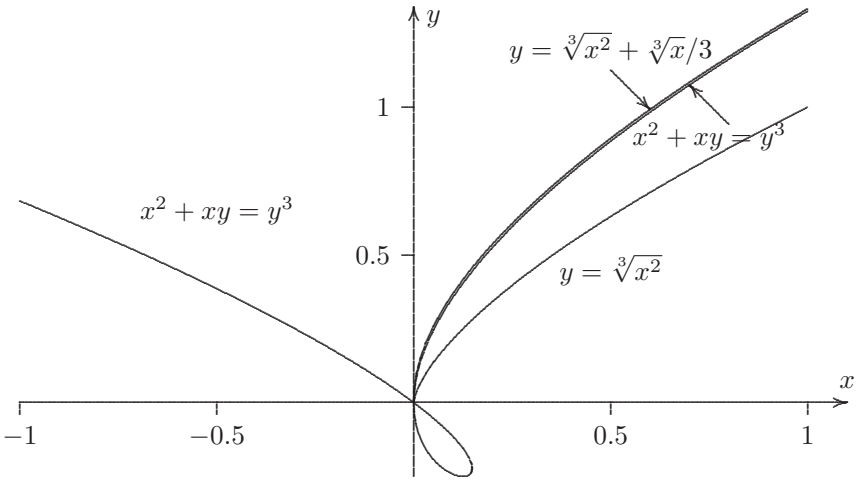

Figure 1.2 – comparaisons de la fonction définie implicitement par $x^2 + xy = y^3$ avec son approximation de second ordre $y = \sqrt[3]{x^2} + \frac{\sqrt[3]{x}}{3}$. Les deux graphiques sont presque indiscernable. L'erreur à $x = 1$ n'est que de 0.6%.

Un résumé des étapes utilisées dans la méthode de l'équilibre dominant :