PIEZO-ELECTRICITE ET NOTATIONS

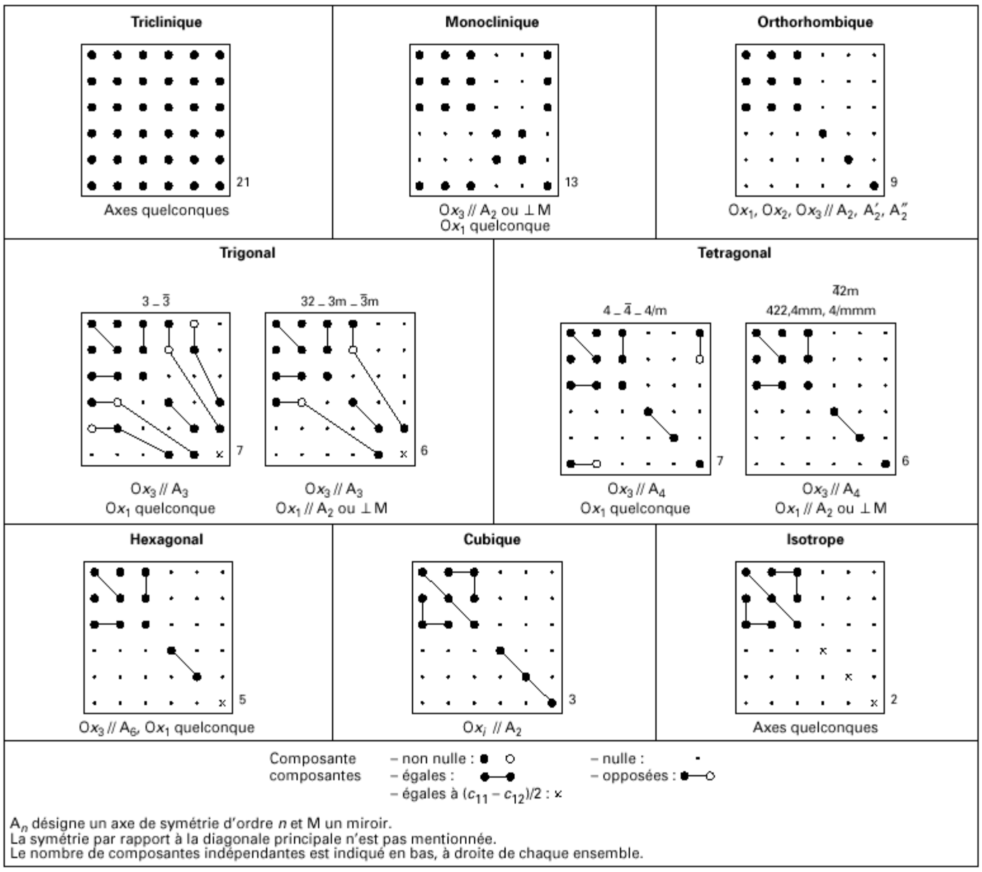
Cette première annexe est consacrée à l'introduction des différentes grandeurs (élastiques, et électrique) et leurs notations qui seront régulièrement utilisées dans le document. A travers le couplage entre ces deux types de grandeurs, la piézo-électricité et les relations correspondantes sont également introduites. Enfin, on définira de façon détaillée les différents couplages électromécaniques [1] en particulier celui lié au mode épaisseur.

A1.1 Rappels sur l'élasticité des milieux continus

A1.1.1 Notions de cristallographie

Il existe 7 systèmes cristallins résultant du classement des réseaux suivant leur symétrie (monoclinique, triclinique, orthorhombique, trigonal, tétragonal, hexagonal et cubique). De ces différents systèmes cristallins résultent 32 classes de symétrie ponctuelle des cristaux. Des tenseurs vont être définis en vue d'établir la loi d'élasticité linéaire (hypothèse de petites déformations) de la mécanique du solide appelée loi de Hooke, ainsi que les équations constitutives de la piézo-électricité linéaire. La première loi établit une relation de proportionnalité directe entre contrainte et déformation, tandis que la seconde établit les liens entre les grandeurs mécaniques et électriques. Ces équations font intervenir les tenseurs d'élasticité et de piézo-électricité, dont le nombre de coefficients indépendants dépend de la classe de symétrie du matériau.

Le nombre de constantes de rigidité impliquées dans la loi de Hooke dépend de la classe de symétrie du matériau. Comme illustré par le *Tableau A1.1*, plus le nombre de symétries est important plus il existe de liens entre les différentes constantes, simplifiant ainsi l'écriture tensorielle. Il en est de même pour le nombre de constantes piézo-électriques indépendantes, comme le décrit la norme IEEE [1].



<u>Tableau A1.1 :</u> *Systèmes cristallins et classes de symétrie [2].*

A1.1.2 Tenseur des contraintes

Considérant un cube de volume élémentaire appartenant à un solide déformable infini et un repère orthonormé $(\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$, les composantes du tenseur des contraintes sont représentées sur ses différentes faces. L'équilibre établi entre le milieu extérieur et l'élément de volume considéré se traduit par des efforts exercés sur chacune des faces. Ces efforts, ramenés par unité de surface sont appelés contraintes.

Chacune des composantes T_{ij} du tenseur de contrainte T est la contrainte exercée parallèlement à l'axe $\vec{x_i}$ sur la surface normale à l'axe $\vec{x_j}$ (*Figure A1.1*). Ces neuf composantes $(i, j) \in [\![1;3]\!]^2$ constituent le tenseur des contraintes (de rang 2). La tension mécanique exercée sur une surface de normale $\vec{n}$ s'écrit $T_i = \sum_{j=1}^{j=3} T_{ij} n_j = T_{ij} n_j$, si la sommation implicite des indices répétés est utilisée (notation d'Einstein).

Le tenseur des contraintes est symétrique, $T_{ij} = T_{ji}$ (les rotations ne sont pas prises en compte). Nous avons alors 6 composantes indépendantes, réparties pour moitié entre les composantes normales T_{ii} et tangentielles T_{ij}.

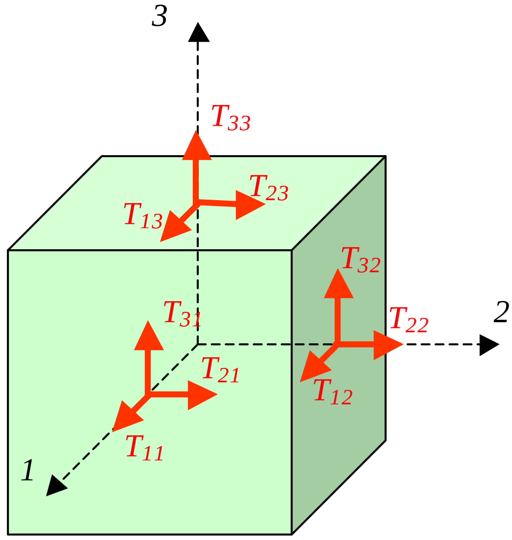


Figure A1.1 : Notation des contraintes sur un volume élémentaire.

A1.1.3 Tenseur de déformations

Considérant un solide de forme quelconque au repos, et M et N deux points de ce solide infiniment proches l'un de l'autre. La position du point M est donnée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$, où O est l'origine du repère $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$. Dès lors qu'une contrainte est appliquée au solide, le segment MN subit une élongation, mais aussi une rotation. Après déformation, le point M est déplacé en M', repéré par le vecteur $\overrightarrow{OM}' = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM}'$, où $\overrightarrow{MM}'$ traduit le déplacement de M. Si on note également $\overrightarrow{NN}'$ le déplacement de N après déformation, on peut écrire :

$$\overrightarrow{NN}' = \overrightarrow{MM}' + d\vec{u} \qquad \text{avec} \qquad d\vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} dx_i \text{ pour de petites déformations.}$$

Pour chacune des composantes, on peut aussi écrire la relation suivante :

$$du_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i \tag{A1.1}$$

La dérivée partielle $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ est appelée gradient des déplacements. Ce tenseur de rang 2 peut être décomposé en une partie antisymétrique notée W_{ij} et une partie symétrique noté S_{ij} telles que :

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad \text{et} \quad S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad \text{(A1.2)}$$

La partie antisymétrique W_{ij} représente la rotation et la partie symétrique la déformation pure. En effet, elle est nulle pour tout mouvement d'ensemble, de translation ou de rotation. La partie symétrique S_{ij} est le tenseur des déformations, symétrique, et de rang 2. De même que pour le tenseur des contraintes, le nombre de composantes indépendantes est réduit à 6. Les déformations sont de 2 types : les composantes diagonales (S_{11}, S_{22}, S_{33}) qui décrivent un allongement dans chacune des directions des axes principaux, et les composantes non diagonales (S_{12}, S_{13}, S_{23}) qui décrivent un mouvement de cisaillement.

A1.1.4 Loi de Hooke

En régime élastique, le milieu satisfait la loi de Hooke qui exprime la proportionnalité entre contrainte et déformation, d'où la formulation :

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} \qquad \text{(A1.3)}$$

La loi de Hooke (A1.3), établie dans le cadre des équations de la mécanique linéaire, résulte d'un développement de Taylor de l'expression de la contrainte en fonction de la déformation au premier ordre, valide pour des petites déformations.

Le tenseur de rigidité élastique c_{ijkl} qui relie celui des contraintes T_{ij} à celui des déformations S_{ij} est de rang 4. Compte tenu des relations de symétrie des tenseurs T_{ij} et S_{kl}, le tenseur de rigidité élastique peut être décrit par 36 composantes indépendantes. Pour simplifier l'écriture, une notation contractée des indices est adoptée :

ij ou *kl*	*p* ou *q*
11	1
22	2
33	3
23 ou 32	4
13 ou 31	5
12 ou 21	6

<u>*Tableau A1.2 :*</u> *Notation matricielle.*

Les notations tensorielles sont réduites à une notation matricielle pour c_{ijkl} qui devient c_{pq} et vectorielle pour T_{ij} et S_{kl} qui deviennent T_p et S_q ($S_q = S_{kl}$ si $k = l$ et $S_q = 2S_{kl}$ si $k \neq l$).

L’écriture de la loi de Hooke se résume alors à un produit matriciel :

$$[T]=[c][S] \quad \Leftrightarrow \quad [S]=[s][T] \tag{A1.4}$$

La matrice des rigidités est symétrique par rapport à la diagonale principale, ce qui porte à 21 le nombre de composantes indépendantes. Selon la classe de symétrie, ce nombre de coefficients peut être encore réduit. Pour un solide isotrope, la matrice de rigidité est entièrement décrite par un couple de constantes : le module d’Young et le coefficient de Poisson (E, n) ou bien les coefficients de Lamé (l, m) selon l’écriture considérée (A1.4) pour la loi de Hooke [2].

A1.2 Propriétés électriques

De façon similaire aux grandeurs mécaniques, le déplacement électrique D_i et le champ électrique E_j sont reliés par le tenseur de permittivité e_{ij}.

$$[D]=[e][E] \tag{A1.5}$$

Ce tenseur de rang 2 est symétrique, et comporte donc 6 composantes indépendantes. En prenant en compte la classe de symétrie du matériau, ce nombre de constantes peut-être réduit ; dans le cas d’un solide isotrope, une seule constante suffit.

A1.3 Equations constitutives de la piézo-électricité

En prenant le cas d’une maille cristalline piézo-électrique, l’équilibre électrostatique est observé au repos, car les positions des barycentres des charges positives et négatives coïncident. Dès lors qu’une force est appliquée sur l’une des faces de la maille, l’équilibre électrostatique est perturbé, et un dipôle électrique est induit par la non coïncidence des barycentres des charges positives et négatives. La polarisation ainsi générée est l’effet piézo-électrique direct. Réciproquement pour l’effet indirect, l’application d’un potentiel fait apparaître une contrainte interne, entraînant une déformation régie par la loi de Hooke (A1.4).

Découvert en 1880 par Pierre et Jacques Curie, l’effet piézo-électrique est décrit par un système d’équations liant les grandeurs mécaniques (contraintes et déformations) et les grandeurs électriques (déplacement et champ électrique). L’analogie entre les grandeurs mécaniques et électriques (*Tableau A1.3*) permet de les regrouper dans une même écriture matricielle, avec les coefficients adéquats.

Mécanique			Electrique
Force	F	f	Potentiel
Déplacement	u	q	Charge
Contrainte	T	E	Champ électrique
Déformation	S	D	Déplacement électrique

Tableau A1.3 : Analogie électro-mécanique.

A1.3.1 Equations et grandeurs constitutives

Les relations élastique (A1.4) et électrique (A1.5) définies précédemment sont liées par l'effet piézo-électrique, défini par des contantes du même nom. Suivant les variables indépendantes choisies, 4 systèmes d'équations peuvent être établis :

$$\begin{bmatrix} T \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^E & -e^t \\ e & e^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ E \end{bmatrix} \quad \text{(A1.6)} \qquad \begin{bmatrix} S \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^E & d^t \\ d & e^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ E \end{bmatrix} \quad \text{(A1.7)}$$

$$\begin{bmatrix} T \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^D & -h^t \\ -h & b^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ D \end{bmatrix} \quad \text{(A1.8)} \qquad \begin{bmatrix} S \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^D & g^t \\ -g & b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ D \end{bmatrix} \quad \text{(A1.9)}$$

avec :

$[T] = [T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{23}, T_{13}, T_{12}]^t$, le vecteur contrainte,

$[S] = [S_{11}, S_{22}, S_{33}, 2S_{23}, 2S_{13}, 2S_{12}]^t$, le vecteur déformation,

$[E] = [E_1, E_2, E_3]^t$, le vecteur champ électrique,

$[D] = [D_1, D_2, D_3]^t$, le vecteur déplacement électrique,

$[c]$ et $[s]$, les matrices de coefficients élastiques,

$[e]$ et $[b]$, les matrices de coefficients diélectriques,

$[d]$, $[e]$, $[g]$ et $[h]$, les matrices de coefficients piézo-électriques.

Les exposants E, D, T et S accolés aux termes dans la matrice indiquent la grandeur considérée constante pour la détermination de cette variable.

A l'aide de considérations thermodynamiques, les relations permettant d'établir la correspondance entre les différentes contantes considérées (*Tableau A1.4*) sont établies [2].

Constantes élastiques et diélectriques	
$\left[c^E\right]\left[s^E\right]=\left[c^D\right]\left[s^D\right]=I_6$ (A1.10)	
$\left[b^S\right]\left[e^S\right]=\left[b^T\right]\left[e^T\right]=I_3$ (A1.11)	
Constantes élastiques et diélectriques modifiées	**Constantes piézo-électriques**
$\left[c^D\right]=\left[c^E\right]+\left[e\right]^t\left[h\right]$ (A1.12)	$\left[e\right]=\left[d\right]\left[c^E\right]$ (A1.16)
$\left[s^D\right]=\left[s^E\right]-\left[d\right]^t\left[g\right]$ (A1.13)	$\left[d\right]=\left[e^T\right]\left[g\right]$ (A1.17)
$\left[e^T\right]=\left[e^S\right]+\left[d\right]^t\left[e\right]$ (A1.14)	$\left[g\right]=\left[h\right]\left[s^D\right]$ (A1.18)
$\left[b^S\right]=\left[b^T\right]-\left[g\right]^t\left[h\right]$ (A1.15)	$\left[h\right]=\left[b^S\right]\left[e\right]$ (A1.19)

<u>Tableau A1.4 :</u> *Correspondance entre les différentes constantes [2].*

A1.3.2 Définition des pertes mécaniques, piézo-électriques et diélectriques

Les notations matricielles des différents tenseurs ont été décrites pour des matériaux sans pertes. Ces dernières ont été introduites sous la forme d'un angle de perte sur les constantes mécaniques (A1.20), piézo-électriques et diélectriques (A1.21).

Ainsi, pour les contantes élastiques à champ électrique constant :

$$s^E = \left|s^E\right| e^{jj_{m,s^E}} = s^E\,' - js^E\,'' = s^E\,'(1-jd_{m,s^E}) \qquad \text{(A1.20)}$$

avec $\tan j_{m,s^E} = \dfrac{s^E\,''}{s^E\,'} = d_{m,s^E}$

Holland [3], et plus récemment *Mezheritsky [4]*, ont défini et énoncé les conditions de satisfaction des lois de la thermodynamique, pour les pertes sur le second système d'équations (A1.7) :

$$\begin{cases} s^E = s^E\,' - js^E\,'' \\ d = d' - jd'' \\ e^T = e^T\,' - je^T\,'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s^E = s^E\,'(1-d_{m,s^E}) \\ d = d'(1-d_{p,d}) \\ e^T = e^T\,'(1-d_{e,e^T}) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} d_{m,S^E} = s^E\,''/\,s^E\,' \\ d_{p,d} = d''/\,d' \\ d_{e,e^T} = e^T\,''/\,e^T\,' \end{cases} \qquad \text{(A1.21)}$$

Par commodité, la correspondance entre les pertes définies par (A1.21) et celles utilisées par *Lethiecq et al.* [5] pour le premier système d'équations (A1.6) est établie :

- Pour les contantes élastiques :

$$c^E = \frac{1}{s^E} = \frac{1}{s^E\,' - js^E\,''} = \frac{s^E\,' + js^E\,''}{\left|s^E\right|} = c^E\,'(1+jd_{m,c^E})$$

avec $$d_{m,c^E} = \frac{s^{E''}}{s^{E'}} = d_{m,s^E} = d_m \qquad \text{(A1.22)}$$

➢ Pour les contantes piézo-électriques :

$$e = dc^E = d'c^{E'}(1 - jd_{p,d})(1 + jd_m) = e'(1 + jd_{p,e})$$

avec $$d_{p,e} = \frac{d_m - d_{p,d}}{1 + d_m d_{p,d}}$$

et réciproquement :

$$d_{p,d} = \frac{d_m - d_{p,e}}{1 + d_m d_{p,e}} \qquad \text{(A1.23)}$$

➢ Pour les contantes diélectriques :

$$e^S = e^T - d^t dc^E = e^{T'}(1 - jd_{e,e^T}) - d'^t d'c^{E'}(1 - jd_{p,d})^2(1 + jd_m) = e^{S'}(1 - jd_{e,e^S})$$

avec $$d_{e,e^S} = \frac{e^{T'}d_{e,e^T} - d'^t d'c^{E'}(2d_{p,d} - d_m(1 + d_{p,d}^2))}{e^{T'} - d'^t d'c^{E'}(1 + d_{p,d}^2 + 2d_{p,d}d_m)}$$

et réciproquement :

$$d_{e,e^T} = d_{e,e^S} + \frac{d'^t d'c^{E'}}{e^{T'}}(2d_{p,d} - d_m(1 + d_{p,d}^2) - d_{e,e^S}(1 + d_{p,d}^2 + 2d_{p,d}d_m)) \qquad \text{(A1.24)}$$

A1.3.3 Réduction du nombre de coefficients de pertes

En pratique, l'identification des termes de pertes se fait sur le système d'équation (A1.6) et se limite aux constantes mécaniques et diélectriques : on considère $d_{p,e}$ = 0 [6, 7]. La correspondance des termes de pertes entre les systèmes d'équations (A1.6) et (A1.7) se réduit donc :

$$d_{p,d} = d_m$$

$$d_{e,e^S} = \frac{e^{T'}d_{e,e^T} - d'^t d'c^{E'}(d_m - d_m^3)}{e^{T'} - d'^t d'c^{E'}(1 + 3d_m^2)} = \frac{e^{T'}d_{e,e^T} - d'^t d'c^{E'}(d_m - d_m^3)}{e^{S'}} = d_e \qquad \text{(A1.25)}$$

Le coefficient de pertes sur les constantes élastiques à déplacement électrique constant c^D est donné par d :

$$c^D = c^E + \frac{e^t e}{e^S} = c^{E'}(1 + jd_m) + \frac{e^{t'}e'(1 + jd_e)}{e^{S'}(1 + d_e^2)} = c^{D'}(1 + jd)$$

$$d = \frac{c^{E'}d_m + \dfrac{e^{t'}e'd_e)}{e^{S'}(1 + d_e^2)}}{c^{D'}} \qquad \text{(A1.26)}$$

A1.4 Couplage électro-mécanique

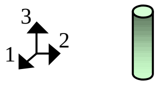
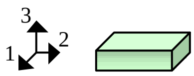
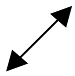
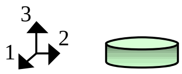
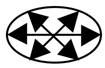
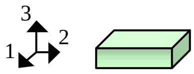
Un matériau piézo-électrique est caractérisé dynamiquement par son coefficient de couplage, c'est-à-dire son aptitude à transformer l'énergie électrique en énergie mécanique et réciproquement [8].

$$k = \frac{E_m}{\sqrt{E_e E_d}}$$

où E_m, E_e et E_d représentent respectivement les énergies mutuelle d'interaction élastique-électrique, élastique et diélectrique.

A1.4.1 Coefficients de couplage

Différents coefficients de couplage sont privilégiés ou non selon la polarisation et la configuration géométrique. Les principaux cas pratiques sont décrits dans le *Tableau A1.5* qui suit, avec une direction de polarisation toujours selon l'axe 3 :

Forme de l'échantillon	Mode de résonance	Direction de vibration	Coefficient de couplage
	*Barreau*		$k_{33} = \frac{d_{33}}{\sqrt{e^T_{33} s^E_{33}}}$
	*Transverse*		$k_{31} = \frac{d_{31}}{\sqrt{e^T_{33} s^E_{11}}}$
	*Radial*		$k_p = k_{31}\sqrt{\frac{2}{1-n^p}}$
	*Epaisseur*		$k_t = \frac{e_{33}}{\sqrt{c^D_{33} e^S_{33}}}$
$n^p = -s^E_{12} / s^E_{11}$ est le coefficient de Poisson plan ([1], p.35)			

<u>Tableau A1.5 :</u> *Couplages électro-mécaniques en fonction de la forme de l'échantillon.*

A1.4.2 Couplage épaisseur

Si on considère un échantillon de dimensions latérales grandes devant l'épaisseur, la plaque vibre selon l'axe de l'épaisseur, usuellement noté axe *3*. Le champ électrique E_3 appliqué dans cette direction entraîne une vibration longitudinale, et une vitesse particulaire selon cette même direction. L'hypothèse d'une vibration unidimensionnelle est vérifiée dans le cadre des spécifications du standard IEEE sur la piézo-électricité [1].

Dans ce cas, on définit les grandeurs utiles à la caractérisation du mode épaisseur : coefficient de couplage, pertes et vitesse longitudinale notamment.

- Par définition, le coefficient de couplage selon le mode épaisseur est donné par :

$$k_t = \frac{e_{33}}{\sqrt{c_{33}^D e_{33}^S}} \tag{A1.27}$$

avec $c_{33}^E = c_{33}^D - \frac{e_{33}^2}{e_{33}^S} = c_{33}^E\,'(1+jd_m)$

Par identification des parties réelles, on détermine :

$$c_{33}^E\,' = c_{33}^D\,'(1-k_t^2\,') \tag{A1.28}$$

avec $k_t^2\,' = \frac{e_{33}^2\,'}{c_{33}^D\,' e_{33}^S\,'}\frac{1}{1+d_e^2}$

- Par identification des parties imaginaires, on en déduit l'expression des pertes sur le coefficient élastique à déplacement constant selon la direction *3* :

avec $c_{33}^D = c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{e_{33}^S} = c_{33}^D\,'(1+jd)$

$$d = \left(1-k_t^2\,'\right)d_m + k_t^2\,'d_e \tag{A1.29}$$

- La vitesse des ondes longitudinales et les pertes relatives sont données par :

$$c_l = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{r}} = c_l\,'(1+jd_c)$$

Par identification des parties réelle et imaginaire, on détermine la partie réelle et les pertes sur la vitesse des ondes longitudinales ainsi que leur expression usuelle au premier ordre [1] :

$$c_l\,' = \sqrt{\frac{c_{33}^D\,'}{r}}\sqrt{\frac{\sqrt{1+d^2}+1}{2}} \simeq \sqrt{\frac{c_{33}^D\,'}{r}} \tag{A1.30}$$

et
$$d_c = \sqrt{\frac{\sqrt{1+d^2}-1}{\sqrt{1+d^2}+1}} \simeq \frac{d}{2} \tag{A1.31}$$