Expérimentation numérique

Dans cette partie, nous allons étudier la faisabilité de la méthode, c'est à dire tester sa capacité à optimiser correctement les paramètres. Le principe est d'obtenir par une simulation directe un jeu de données qui correspond au jeu de paramètres à tester, et ensuite, par inversion de tenter de les retrouver. Pour cela, naturellement, on devra proposer des paramètres initiaux différents, et suffisamment éloignés de la solution. Cette partie ne comportera donc que des résultats d'optimisations réalisées sur des données synthétiques.

2.1. Matériels et méthodes

2.1.1. Description de l'expérience

L'expérience consiste en une infiltration depuis la surface plane du sol, sur une aire circulaire (8 cm de diamètre) avec une pression d'eau négative (Figure 2). Les points d'injection (électrodes) sont disposés tous les 5 centimètres. Les mesures électriques sont obtenues en injectant un courant électrique via 2 électrodes et en mesurant le champ électrique induit via 2 autres électrodes. Les lieux d'injection et de mesure du potentiel (électrodes) sont, dans notre modèle, positionnés sur des nœuds du maillage. Le protocole d'acquisition comprend un mélange de mesures gradient et dipôle-dipôle, incluant des mesures directes et des mesures réciproques (Tableau 1). Les mesures dipôle-dipôle permettent d'obtenir une profondeur d'investigation verticale importante et une bonne sensibilité sous les électrodes, alors que dispositif gradient possède une très bonne sensibilité sous les électrodes de mesure.

a) **b)**

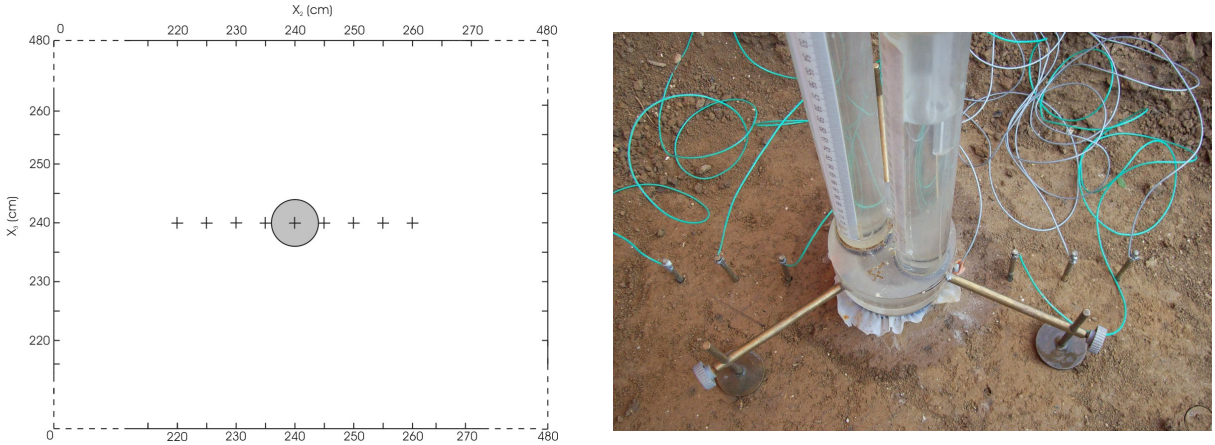


Figure 2. a) Vue apicale du domaine de simulation, avec les coordonnées du système et la position de l'infiltromètre (cercle) et des 9 électrodes (croix). b) Photo de l'infiltromètre et des électrodes disposées en ligne. L'électrode centrale se trouve sous le centre de l'infiltromètre. La simulation numérique imite en tous points une expérience réelle d'infiltration couplée avec des mesures électriques.

Tableau 1. Disposition des 54 quadripôles (9 électrodes espacées de 5cm)

Electrodes d'injection (numérotation de gauche à droite)		Electrodes de mesure	
1-2		3-4	
2-3		4-5 ; 5-6 ; 6-7	
3-4		1-2 ; 5-6 ; 6-7 ; 7-8 ; 1-9 ; 2-8	
4-5		6-7 ; 7-8 ; 1-9 ; 2-8 ; 3-7 ; 2-3	
5-6		2-3 ; 3-4 ; 7-8 ; 1-9 ; 2-8 ; 3-7	
6-7		8-9 ; 1-2 ; 2-3 ; 3-4 ; 4-5	
7-8		1-2 ; 2-3 ; 3-4 ; 4-5 ; 5-6	
8-9		1-2 ; 2-3 ; 3-4 ; 4-5 ; 5-6 ; 6-7	
1-9		3-4 ; 4-5 ; 5-6 ; 6-7 ; 2-8 ; 3-7 ; 4-6	
2-8		3-4 ; 4-5 ; 5-6 ; 6-7 ; 1-9 ; 3-7 ; 4-6	
3-7		4-5 ; 5-6 ; 4-6 ; 2-8 ; 1-9	

2.1.2. Modélisation hydraulique

Les flux d'eau dans un milieu poreux variablement saturé sont décrits par l'équation de Richards (1931) (équation 3). L'équation est résolue numériquement par le code SWMS_3D (Simunek et al., 1995) pour les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$\theta(x_1, x_2, x_3, t) = \theta_i(x_1, x_2, x_3, 0) \tag{45}$$

$$h(x_1, x_2, x_3, t) = h_0(0, x_2, x_3, t) \qquad x_2^2 + x_3^2 \leq r^2 \tag{46}$$

$$\frac{\partial h(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} = -1 \qquad x_1 = 0 \quad x_2^2 + x_3^2 \geq r^2 \tag{47}$$

où θ_i [L^3 L^{-3}] est la teneur en eau volumique initiale, h_0 [L] est le potentiel auquel l'infiltration est réalisée, et r [L] est le rayon du disque d'infiltration. Les équations (46) et (47) spécifient respectivement une condition de potentiel imposé pour les nœuds placés en surface du sol sous l'infiltromètre, et une condition de flux nul pour les nœuds de surface qui ne sont pas sous l'infiltromètre (pas d'évaporation envisagée). Des conditions de flux nul, similaires à l'équation (47), ont été appliquées aux faces latérales et dans le fond du domaine de simulation, en faisant l'hypothèse que l'évaporation, le drainage ou les transports latéraux hors du domaine sont négligeables pendant l'infiltration. Des dimensions du domaine de simulation très larges ont été choisies afin de s'affranchir d'effets de bords, et une discrétisation spatiale très fine (85731 nœuds) a été choisie pour obtenir une bonne précision sur les calculs (Tableau 2).

Tableau 2. Discrétisation spatiale et dimensions des domaines de simulation

	Discrétisation (cm)			Dimension du domaine (cm)		
	Δx_1	Δx_2	Δx_3	L_1	L_2	L_3
Flux d'eau 3-D	1	1	1	50	40	40
Flux électriques 3-D	1-2	1-10	1-10	200	480	480

* L'incrément est constant dans la zone centrale (égal à 1 cm) et augmente en s'éloignant de la zone centrale

Le modèle unimodal de Mualem-van Genuchten (Mualem, 1976 ; van Genuchten, 1980) a été choisi pour décrire les propriétés hydrauliques du sol (équations 6 et 7).

2.1.3. Modélisation électrique

Le champ de potentiel électrique dans le profil de sol résultant de l'injection du courant électrique par un dipôle d'électrodes a été calculé en résolvant l'équation de Poisson suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma_b\left(x_i,t_j\right)\frac{\partial \varphi_n\left(x_i,t_j\right)}{\partial x_i}\right)=I\delta\left(x-x_n\right)-I\delta\left(x-x_c\right) \tag{48}$$

où φ_n est le champ de potentiel électrique [V] du à l'injection du courant à l'électrode n au temps t_j [T], δ est la fonction Dirac, x_n et x_c [L] sont respectivement les positions de l'électrode n et de l'électrode puits virtuelle (placée au centre du domaine), I [A] est l'intensité du courant, et σ_b [A V^{-1} L^{-1}] est la conductivité électrique volumique du sol. L'équation (48) a été résolue en utilisant des conditions aux limites de flux nuls. Afin d'éviter des effets de bords, les limites du domaine de simulation électrique ont été placées à une distance largement supérieure à celle du domaine utilisé pour l'hydraulique (Tableau 2). Le domaine électrique comprend ainsi $8{,}5\times10^5$ nœuds arrangés dans un maillage écossais (accroissement des distances entre les nœuds au fur et à mesure de l'éloignement du centre). En raison de l'analogie qui existe entre le potentiel hydraulique et le potentiel électrique, l'équation (48) a été résolue, elle aussi, avec le code SWMS_3D (Annexe).

Pour évaluer la précision de la solution numérique, une solution analytique a été calculée pour un champ uniforme de σ_b grâce à l'équation suivante qui donne la différence de potentiel électrique ΔV entre deux électrodes de potentiel P_1 et P_2 pour une injection réalisée entre les électrodes C_1 et C_2, (respectivement l'électrode source et l'électrode puits) :

$$\Delta V=\frac{I}{2\pi\sigma_b}\left[\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)-\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}\right)\right] \tag{49}$$

où r_1 [L] est la distance entre C_1 et P_1, r_2 [L] est la distance entre C_2 et P_1, r_3 [L] est la distance entre C_1 et P_2, et r_4 [L] est la distance entre C_2 et P_2. La différence entre les solutions numériques et analytiques a été trouvée toujours inférieure à 2 %.

Selon le modèle de Rhoades et al. (1976), la conductivité électrique du sol peut être prédite par :

$$\sigma_b = \left(A\theta^2 + B\theta\right) \times \sigma_w + \sigma_s \tag{50}$$

où σ_b [A V^{-1} L^{-1}] est la conductivité électrique du sol, σ_w [A V^{-1} L^{-1}] est la conductivité électrique de l'eau, σ_s [A V^{-1} L^{-1}] est la conductivité électrique de surface des minéraux, et A et B (sans dimension) sont des paramètres qui dépendent principalement de la texture du sol. En faisant l'hypothèse que σ_s est négligeable devant σ_w, le modèle de Rhoades et al. (1976) s'écrit :

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_w} = A\theta^2 + B\theta \tag{51}$$

Il est connu que la validité de cette hypothèse est d'autant plus assurée que la quantité d'argile est faible.

2.1.4. Unicité et stabilité de la solution

Comme l'a observé Russo et al. (1991), l'optimisation d'un nombre important de paramètres de Mualem-van Genuchten peut mener vers une non-unicité de la solution et vers une instabilité de la solution inverse. Ces auteurs reportent que, lors d'une infiltration 1D d'eau à saturation, la courbe d'infiltration cumulée au cours du temps n'apporte pas assez d'information pour obtenir un jeu unique de paramètres. Des résultats similaires ont été obtenus pour des expériences d'infiltration à une dimension lorsque les données d'infiltration étaient utilisées seules pour l'inversion des paramètres (van Dam et al., 1992, 1994 ; Eching et Hopmans 1993 ; Toorman et al., 1992). Dans le cas d'une infiltration à disque, Simunek et van Genuchten (1996) ont montré que la courbe de volume d'eau infiltré en fonction du temps ne contient pas assez d'information pour déduire une solution unique dans l'espace à 3 dimensions (α, n, K_s).

Il est généralement recommandé, pour tester l'unicité de la solution, de résoudre le problème direct en partant de différentes estimations des paramètres initiaux. Pour vraiment s'assurer

de l'unicité de la solution, il est fort utile de calculer la topographie de la fonction objective. Cependant, pour notre problème, la fonction objective est à 5 dimensions (autant que de paramètres) et, pour une raison de temps de calcul, il est impossible de calculer la valeur de la fonction objective sur l'ensemble du domaine des paramètres. On peut opter dans ce cas pour une solution intermédiaire, qui est de calculer les valeurs de la fonction objective dans des plans du domaine des paramètres, c'est-à-dire en ne faisant varier que 2 paramètres, les autres étant fixés à la valeur exacte (les plans contiennent la solution). De telles analyses de surface de la fonction objective donnent des indications sur l'unicité de la solution, mais ne peuvent permettre de s'en assurer complètement.

Pour tester la stabilité de la solution, il est courant de réaliser des scénarios avec une contamination des données par un bruit aléatoire, en faisant l'hypothèse que l'erreur peut être représentée par une loi normale de type $N(\mu,\sigma)$.

2.1.5. Paramétrisation

Pour des raisons de non-unicité, il est préférable de ne pas optimiser des paramètres de Mualem-van Genuchten qui ne jouent pas un rôle majeur dans la description des courbes de teneur en eau et de conductivité hydraulique en fonction du potentiel matriciel de l'eau, ou qui peuvent être mesurés facilement avec une bonne précision.

De même que Simunek et van Genuchten (1996) ou Lambot et al. (2004), nous avons décidé de ne pas optimiser θ_s, lors des expérimentations numériques, pour les raisons suivantes :

- On peut mesurer ce paramètre directement.
- La saturation du milieu n'est pas atteinte par définition lors de l'infiltration avec le tensiomètre à disque (le paramètre correspond à un état physique non atteint lors de l'infiltration).

Le paramètre θ_r peut être décrit comme le contenu en eau du sol pour une succion infinie. Mais, comme il n'y a pas de raison qu'une eau adsorbée soit présente dans le sol pour une succion infinie, ce paramètre n'a probablement aucun sens physique. C'est un paramètre d'ajustement, et son existence semble plutôt relever d'une fonctionnalité pratique qui permet pour certaines expériences de décrire avec une meilleure précision les mesures. De plus ce paramètre est très sensible au type d'expérience utilisé pour son estimation. Par exemple, certains auteurs ont montré que l'estimation de θ_r à partir de courbe de rétention en eau et de

fonction de pédo-transfert pouvaient mener vers des valeurs négatives, qui n'ont pas de sens physique (Haverkamp et al., 2005), ou vers des valeurs très élevées (autour de 0,2) pour lesquelles, comme le souligne Nimmo (1991), aucune preuve de la prétendue immobilité de l'eau n'a été apportée. Cependant il apparaît très probable que l'eau fortement liée aux constituants soit immobile à l'échelle de temps considérée lors de l'infiltration contrôlée. Ce paramètre ne sera donc pas ajusté lors de la procédure inverse, du moins dans le cadre des expérimentations numériques. Dans le cas des expérimentations réelles, on pourra l'estimer par inversion ou le laisser fixé à 0. En ce qui concerne l, il a été choisi, afin de simplifier le processus d'inversion et d'éviter la non-unicité de la solution, de ne pas l'optimiser. Sa valeur a été fixée à 0,5. Finalement, notre procédure d'estimation concerne les 3 paramètres K_s, α et n.

Des valeurs typiques pour différents types de sols ont été choisies (Tableau 3) en se référant à la base de données de Carsel et Parrish (1988). Des valeurs des paramètres pétrophysiques de la relation de Rhoades issus de la littérature (Rhoades et al., 1976 ; Amente et al., 2000) ont été rapportées également (Tableau 4) et ont permis d'envisager l'ensemble du domaine possible pour les valeurs de ces paramètres. Les paramètres initiaux ont été choisis au milieu de l'espace des paramètres (Tableau 5). On a choisi de travailler sur 2 types de sol : un sol sablo-limoneux et un sol limoneux. Les paramètres hydrauliques retenus pour nos 2 sols sont ceux de Carsel et Parrish (1988).

Tableau 3. Valeurs typiques des paramètres hydrodynamiques selon Carsel et Parrish (1988)

Texture du sol (USDA)	θ_r (cm^3 cm^{-3})	θ_s (cm^3 cm^{-3})	K_s (cm min^{-1})	α (cm^{-1})	n
sableux	0,045	0,43	0,4950	0,1450	2,68
sablo-limoneux	0,065	0,41	0,0750	0,0750	1,89
limoneux	0,078	0,43	0,0173	0,0360	1,56
argilo-limoneux	0,10	0,41	0,0043	0,0190	1,31
argileux	0,068	0,38	0,0033	0,0173	1,09

La condition initiale a été choisie en terme de contenu en eau pour des raisons de facilité de mesure. En effet, il est beaucoup plus aisé de mesurer la teneur en eau volumique (par exemple par prélèvement d'un cylindre de sol ou par mesure TDR) que de mesurer le potentiel hydrique (pour cela un tensiomètre est nécessaire). Une faible valeur de teneur en eau initiale (θ_i=0,07 cm^3 cm^{-3}) a été choisie pour ces expériences numériques afin de couvrir

la plus large gamme possible de contenu en eau durant l'infiltration. Cette valeur, bien que basse, semble réaliste pour une expérimentation réelle.

Pour les expériences numériques, on peut considérer que le fluide d'infiltration a la même conductivité électrique que le fluide présent initialement dans le sol, ou bien que ces conductivités électriques sont différentes. Si l'on désire s'affranchir de cette hypothèse, et donc, dans le second cas, il convient de prendre en compte le phénomène de dispersivité. En effet la différence de conductivité électrique de l'eau, provient d'une différence de force ionique.

Tableau 4. Granulométrie et valeurs des paramètres de Rhoades pour 5 sols

Sol	Type	Sable %	Limon %	Argile%	Total %	A	B
Pachappa fsl *	sablo-limoneux	49,0	37,8	11,2	98,0	1,382	-0,093
Indio vfsl *	sablo-limoneux	42,2	51,6	6,2	100,0	1,287	-0,116
Waukena l *	limoneux	41,3	39,0	19,7	100,0	1,403	-0,064
Domino cl *	argilo-limoneux	29,3	41,4	29,3	100,0	2,134	-0,245
Verndale **	sableux	96,5	2,5	1,0	100,0	1,21	0,132

* extrait de Rhoades et al. (1976)
** extrait de Amente et al. (2000)

Tableau 5. Paramètres initiaux et paramètres réels

Expérience	K_s (cm min^{-1})	α (cm^{-1})	n	A	B
Cas du sol sablo-limoneux					
initial	0,0173	0,0360	1,560	1,672	-0,1130
réel	0,0750	0,0750	1,890	1,000	-0,0500
Cas du sol limoneux					
initial	0,0920	0,0812	1,885	1,672	-0,1130
réel	0,0173	0,0360	1,560	1,403	-0,0640

2.1.6. Fonction objective

Le problème d'identification des paramètres consiste à trouver le vecteur des paramètres $\mathbf{b}=(\alpha, n, K_s)^T$ ou $\mathbf{b}=(\alpha, n, K_s, A, B)^T$ qui minimise les différences entre observations et prédictions. Ces différences sont calculées au sein d'une fonction objective (FO) qui somme pour chaque jeu de données le carré de l'écart normalisé entre les valeurs observées et prédites. La question de la pondération des jeux de données est assez délicate, car peu d'information est disponible à ce sujet. Il semble qu'il est d'usage de donner le même poids aux différents jeux de données. C'est ce que font par exemple Kool et al. (1985) et Gribb (1996) qui utilisent deux jeux de données de natures différentes à savoir des données de potentiel et des données de flux d'infiltration avec le système «one-step outflow» et le pénétromètre respectivement. En suivant leur exemple, et donc en donnant le même poids aux deux jeux de données, on peut écrire la fonction objective ainsi :

$$O(b) = N\sum_{i=1}^{M}\left[\frac{1}{ert_{i^*}}(ert_{i^*} - ert_i(b))\right]^2 + M\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{N}{\sum_{j=1}^{N} q_{j^*}}(q_{j^*} - q_j(b))\right]^2 \qquad (52)$$

où N et M représentent le nombre de données d'infiltration cumulée et de données électriques respectivement, ert_i^* et ert_i sont respectivement les valeurs mesurées et calculées de la $i^{\text{ème}}$ donnée électrique (c'est-à-dire la différence de potentiel électrique entre les deux électrodes de mesure divisée par l'intensité du courant R= ΔV/I), et q_j^* et q_j sont respectivement les valeurs mesurées et calculées de la $j^{\text{ème}}$ donnée d'infiltration cumulée.

Il a été choisi de pondérer différemment les valeurs des 2 jeux de données. Les valeurs du jeu de données électriques sont pondérées par une valeur relative, de telle sorte que des valeurs ayant des ordres de grandeur différents (ce qui est le cas lorsqu'on utilise différents types d'arrangements d'électrodes, comme gradient et dipôle-dipôle par exemple) ont un poids similaire dans le jeu de données.

Le facteur de pondération utilisé est inversement proportionnel à la valeur de la mesure, ce qui revient à faire l'hypothèse d'une erreur proportionnelle à la mesure. Ceci est équivalent à l'usage d'une transformation logarithmique des valeurs. Comme les résistances mesurées dans les études de tomographie de résistivité électrique (ERT) varient souvent de plusieurs ordres de grandeur, et comme les erreurs de mesures ou incertitudes sont proportionnelles à la valeur

de la résistance, on utilise classiquement des valeurs log-transformées pour l'inversion des données ERT. Ce choix de pondération est ainsi en accord avec l'usage classique des données électriques inversées.

Les valeurs du jeu de données d'infiltration cumulée au cours du temps sont quant à elles pondérées par l'inverse de la moyenne des mesures. C'est un facteur de pondération absolu. On attend en effet une erreur systématique de lecture sur l'infiltromètre.

On a choisi de calculer les valeurs de la FO pour deux cas différents. Dans un cas, la courbe d'infiltration ne comporte que 3 données qui correspondent aux 3 instants où les mesures électriques sont réalisées. Dans le second cas, une courbe d'infiltration complète est utilisée (20 données reparties de façon plus importante au début de l'infiltration qu'à la fin), afin d'utiliser pleinement l'information relative à la sorptivité du sol. En effet, c'est au début de l'infiltration que la décroissance du taux d'infiltration en fonction du temps est la plus importante (Figure 3).

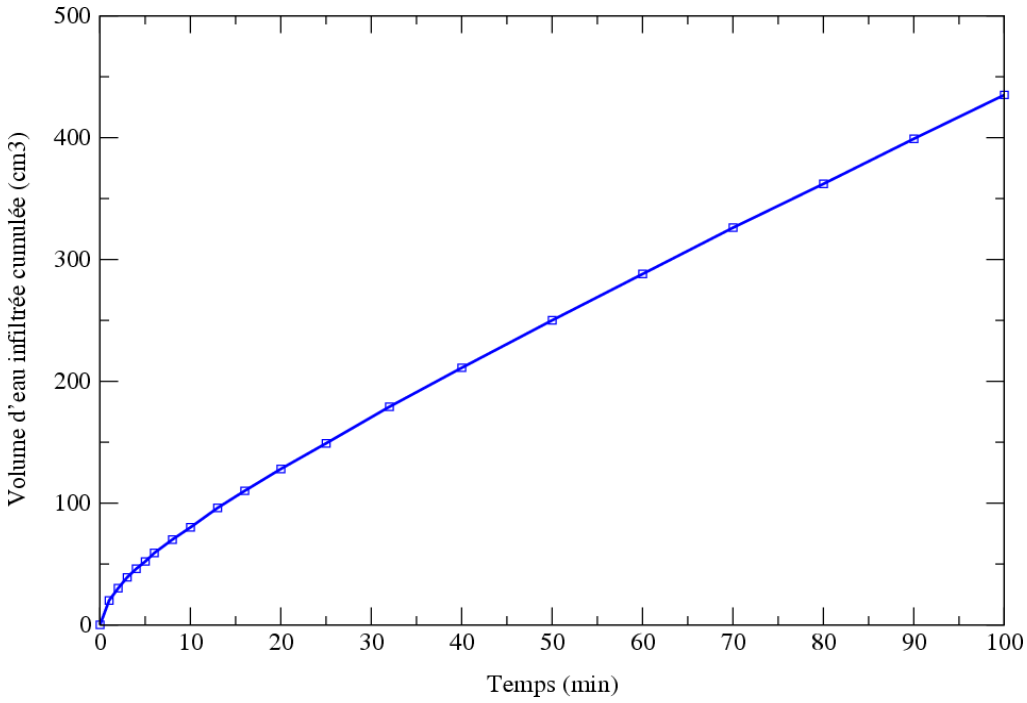


Figure 3. Courbe théorique d'infiltration cumulée en fonction du temps, simulée par SWMS_3D (Simunek et al., 1995). Les carrés représentent les données utilisées dans le calcul de la fonction objective.

Cette courbe d'infiltration théorique (calculée avec SWMS-3D) de 100 minutes montre que le taux d'infiltration décroît progressivement au cours du temps. Le régime permanent n'est pas atteint au bout de 100 minutes. En 1000 minutes, il ne l'est pas non plus. Par comparaison entre les cas 1 et 2, on aura une idée de l'apport que procure un nombre plus important de mesures dans la partie précoce de l'infiltration.
En terme de données électriques, 54 données sont simulées (Tableau 1) et pondérées selon l'équation (52).

2.1.7. Ajout de bruit sur les données

Les données sont bruitées de la façon suivante:

- Les données électriques sont multipliées par un facteur bruit calculé par le biais d'une fonction de loi normale inverse, qui renvoie, pour un nombre tiré aléatoirement dans l'intervalle (0-1), la valeur d'une variable aléatoire suivant une loi normale (moyenne de 1, écart type de 0,05).
- On additionne un facteur bruit aux données de volume cumulé qui est tirée aléatoirement selon une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. En effet, à une imprécision de 0,1 cm sur la lecture de la hauteur d'eau correspond une imprécision sur le volume de ~1 mL (le diamètre du tube d'alimentation de l'infiltromètre vaut 32 mm).

2.1.8. Scénarios

On a testé la méthode d'inversion avec 4 scénarios différents sur les 2 types de sols retenus. Les scénarios sont les suivants :

- Scénario 1. On tente d'inverser les paramètres α, n et K_s, les paramètres pétrophysiques A et B étant parfaitement connus. Les données sont idéales.
- Scénario 2. Même inversion de paramètres que pour le scénario 1. Les données sont bruitées.
- Scénario 3. On tente d'inverser les paramètres hydrodynamiques α, n et K_s, ainsi que les paramètres pétrophysiques A et B. Les données sont idéales.
- Scénario 4. Même inversion de paramètres que pour le scénario 3. Les données sont bruitées.

2.2. Résultats – Discussion

2.2.1. Représentations de la fonction objective

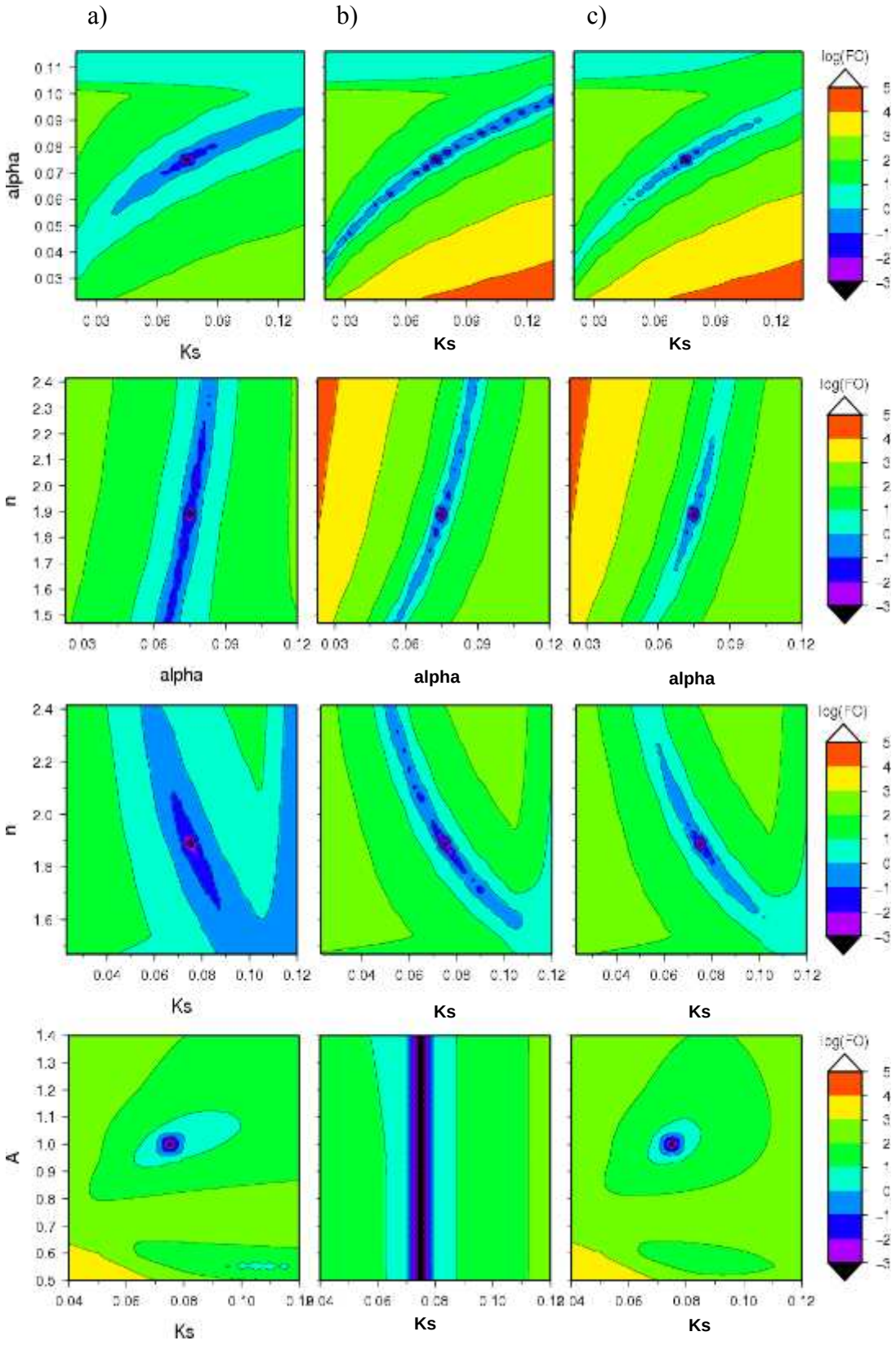
Les représentations de la FO dans le cas n°1 sont présentées sur la Figure 4. Il s'agit des 10 combinaisons de 2 paramètres. Pour chaque combinaison de paramètres, sont représentées la contribution à la FO des données électriques (a), la contribution des données d'infiltrométrie (b), et la somme des deux (c).

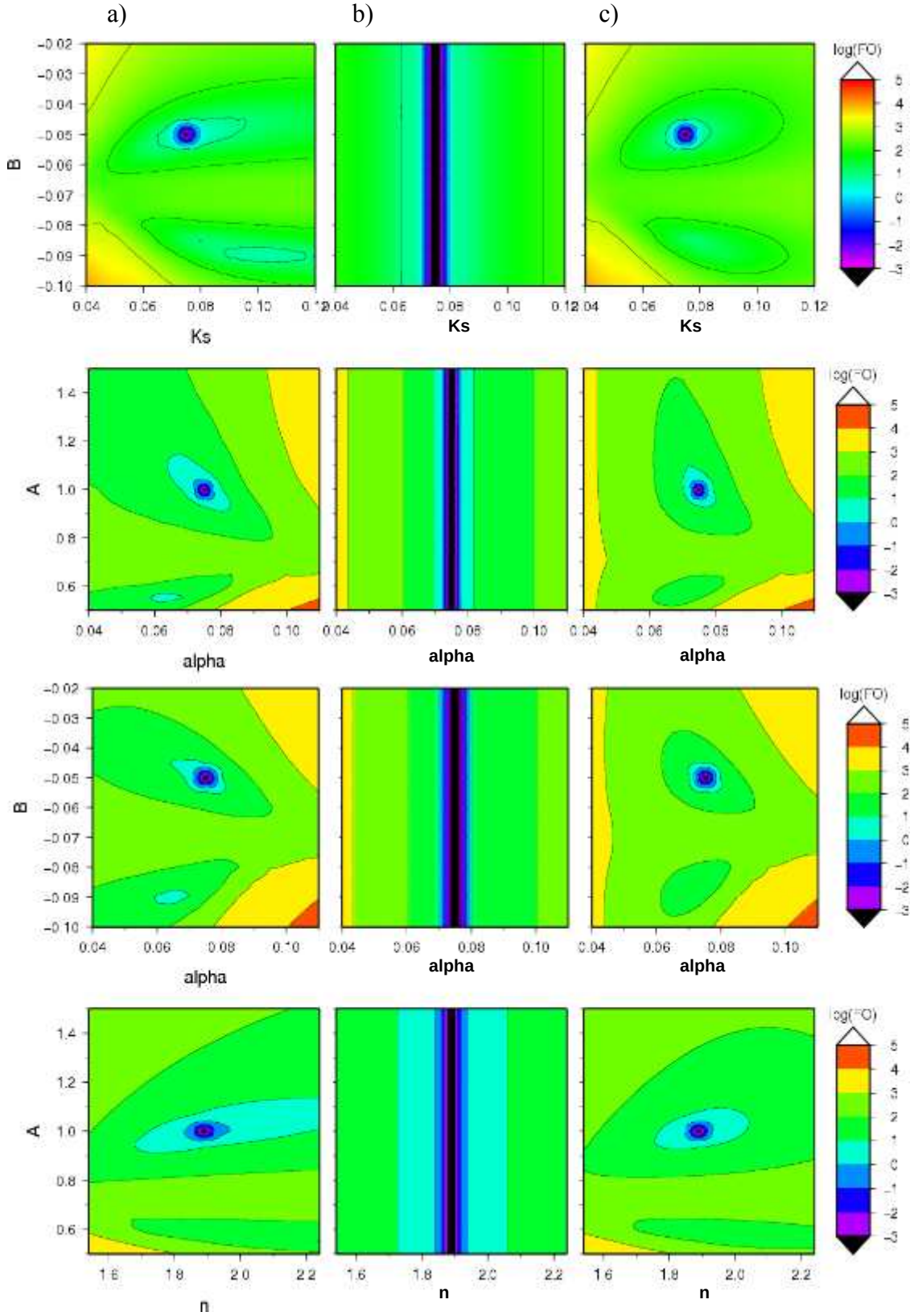
Il apparaît très clairement que tous les minimums de la FO pour des paramètres pris deux à deux sont bien définis et uniques, excepté pour le plan (A-B) qui montre une corrélation quasi parfaite. Les paramètres de Rhoades A et B sont bien identifiables dans les plans qui les impliquent avec un paramètre hydrodynamique, c'est-à-dire pour (A-K_s), (B-K_s), (A-n), (A-α) (B-α) et (B-n), bien qu'un minimum local soit présent en plus du minimum global. La représentation du plan (A-B) montre qu'il n'existe pas un minimum global mais un ensemble de minimums alignés linéairement. Ceci indique qu'il est fort possible que les deux paramètres ne puissent pas être inversés indépendamment.

Si la dimension et la forme des vallées ne sont pas équivalentes sur les graphiques des contributions des données d'infiltration et des données électriques, en revanche la position des vallées et leur direction sont équivalentes. De ce point de vue, ces résultats sont décevants, car des vallées qui auraient été sécantes auraient indiqué une excellente complémentarité des informations (électriques et d'infiltration). Cependant, si l'on examine l'addition des 2 types de données au sein d'une même fonction objective, on observe une réduction notoire de la taille des vallées ce qui indique une meilleure définition du problème.

En observant ces représentations dans le détail, il apparaît de très intéressantes complémentarités entre les deux jeux de données. Par exemple, ainsi que l'ont observé Simunek et al. (1996), une augmentation simultanée de K_s et α conduit à des valeurs très proches de la FO. Il apparaît lors du calcul du flux d'infiltration sous l'infiltromètre que celui-ci dépend du rapport K_s / α. C'est pourquoi il n'est pas étonnant que le plan (α -K_s) montre une vallée assez longue témoignant d'une corrélation importante entre ces paramètres. En utilisant uniquement les données d'infiltration, la corrélation entre ces deux paramètres est très importante. En revanche, l'ajout des données électriques réduit sur le plan (α-K_s) considérablement la corrélation.

De façon générale, l'addition des deux types de données permet d'aboutir à des minimums très bien définis.


a)
b)
c)
alpha
Ks
n
A
log(FO)


a)
b)
c)
log(FO)
B
Ks
A
alpha
n

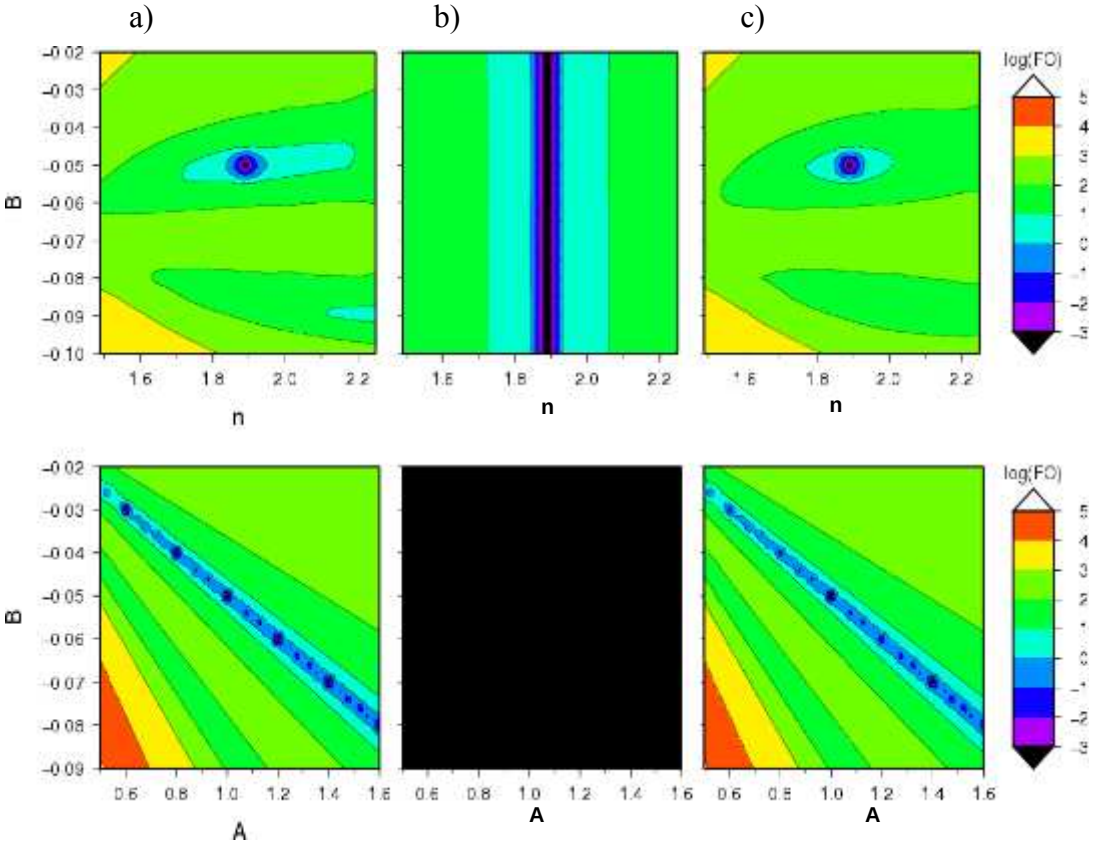
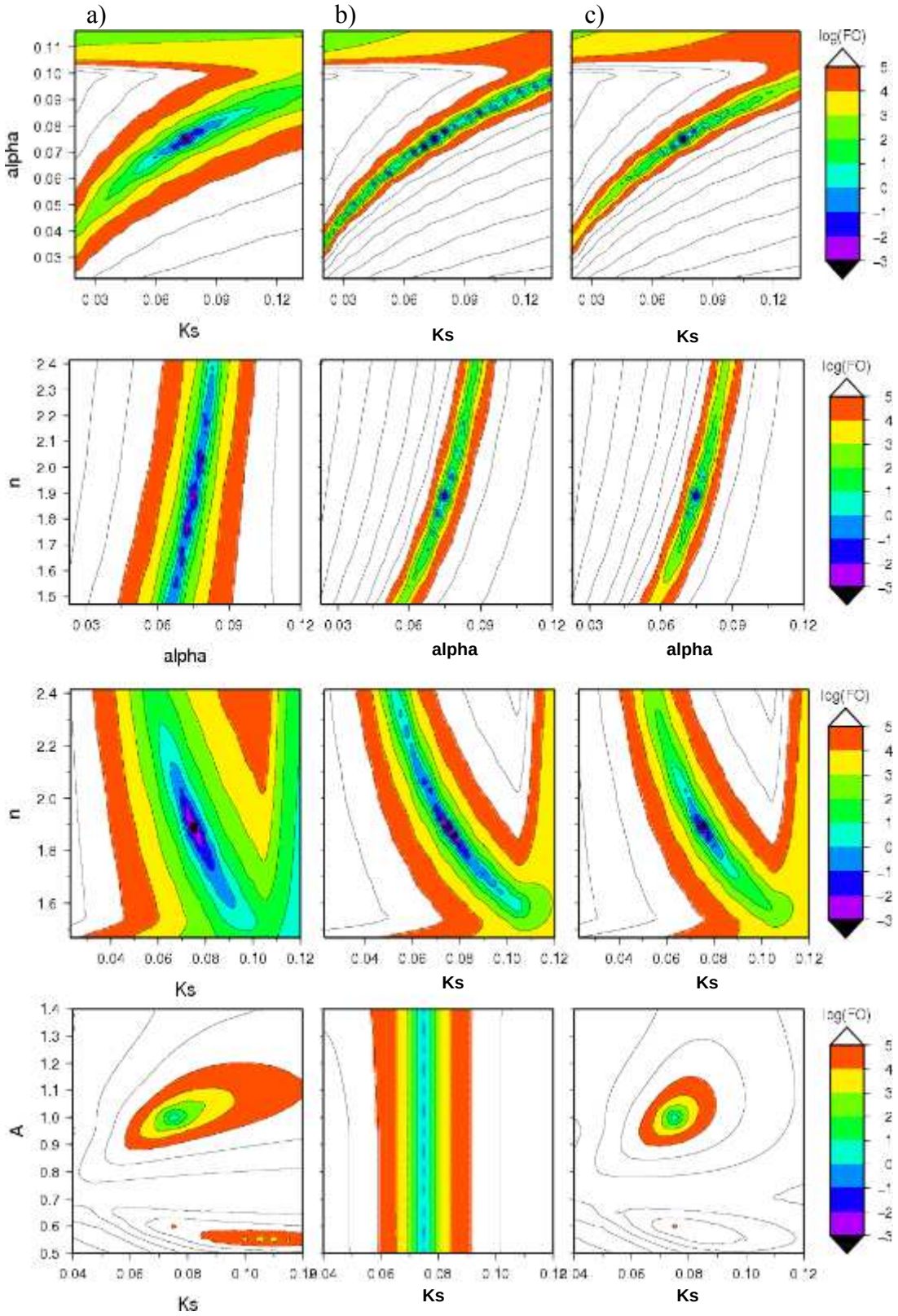
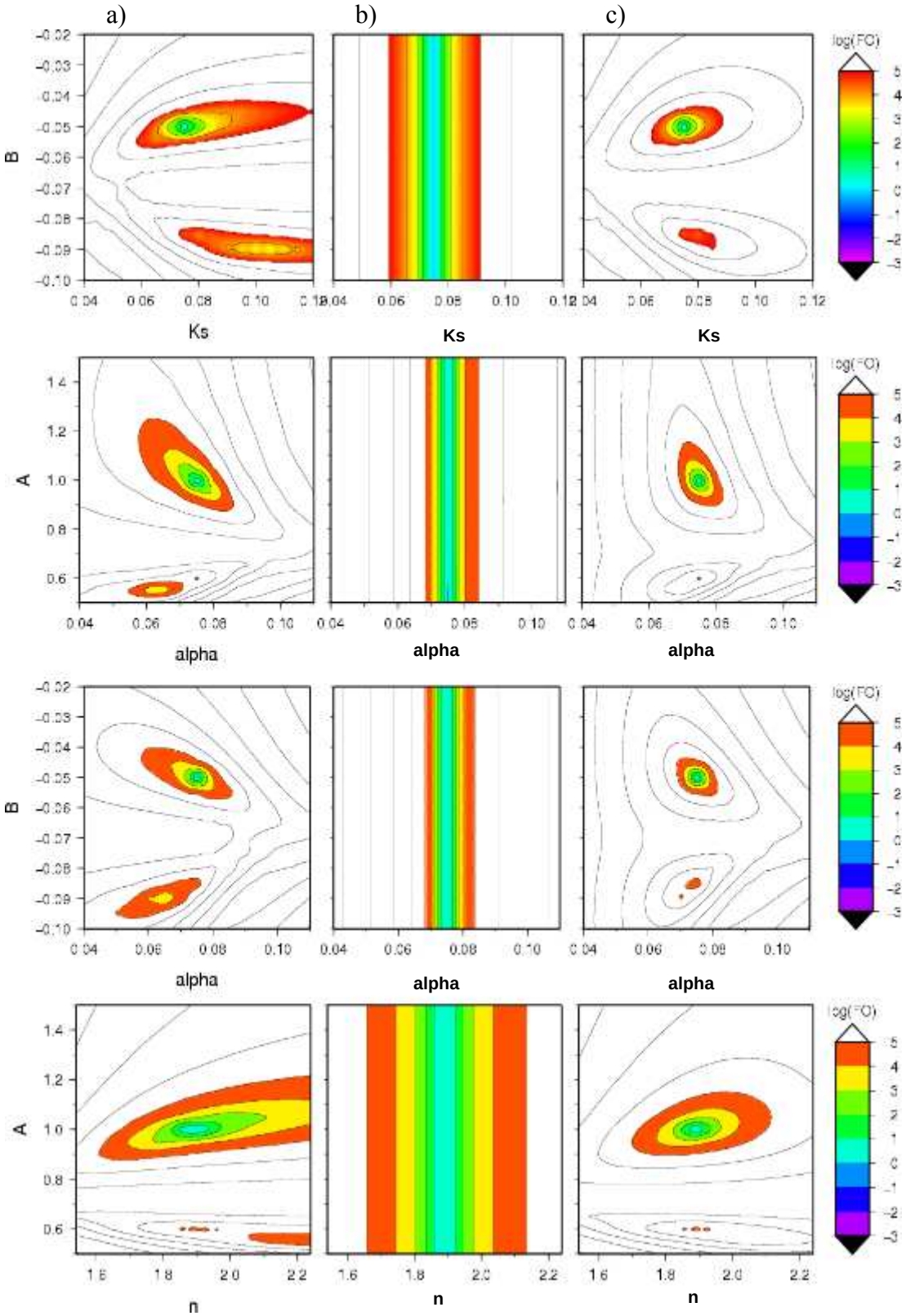


Figure 4. Contours de la fonction objective pour les données électriques (a), les données de volumes infiltrés (b), et la somme des deux (c). Cas d'une courbe d'infiltration à 3 mesures. Unités : K_s (cm min^{-1}), alpha (cm^{-1}), n (sans unité), A (sans unité), B (sans unité).

Les représentations de la FO dans le cas n°2 montrent des allures assez similaires à celles du cas n°1 (Figure 5). Cependant les pentes des vallées sont beaucoup plus raides. De même que dans le cas n°1, l'ajout des 2 types de données conduit à une meilleure définition du minimum. En choisissant de montrer les représentations de la FO avec 3 données d'infiltration, on a vu qu'il existait un minimum bien défini et unique pour tous les couples de paramètres, à l'exception du couple (*A*-*B*), ce qui indique qu'il ne devrait pas y avoir de difficultés à obtenir par inversion les paramètres hydrodynamiques. Avec les représentations de la FO lors du cas où la courbe complète d'infiltration est utilisée, on a vu que les minimums étaient encore mieux définis.


a)
b)
c)
log(FO)
alpha
Ks
n
alpha
n
Ks
A
Ks


a)
b)
c)
B
Ks
A
alpha
n
log(FO)

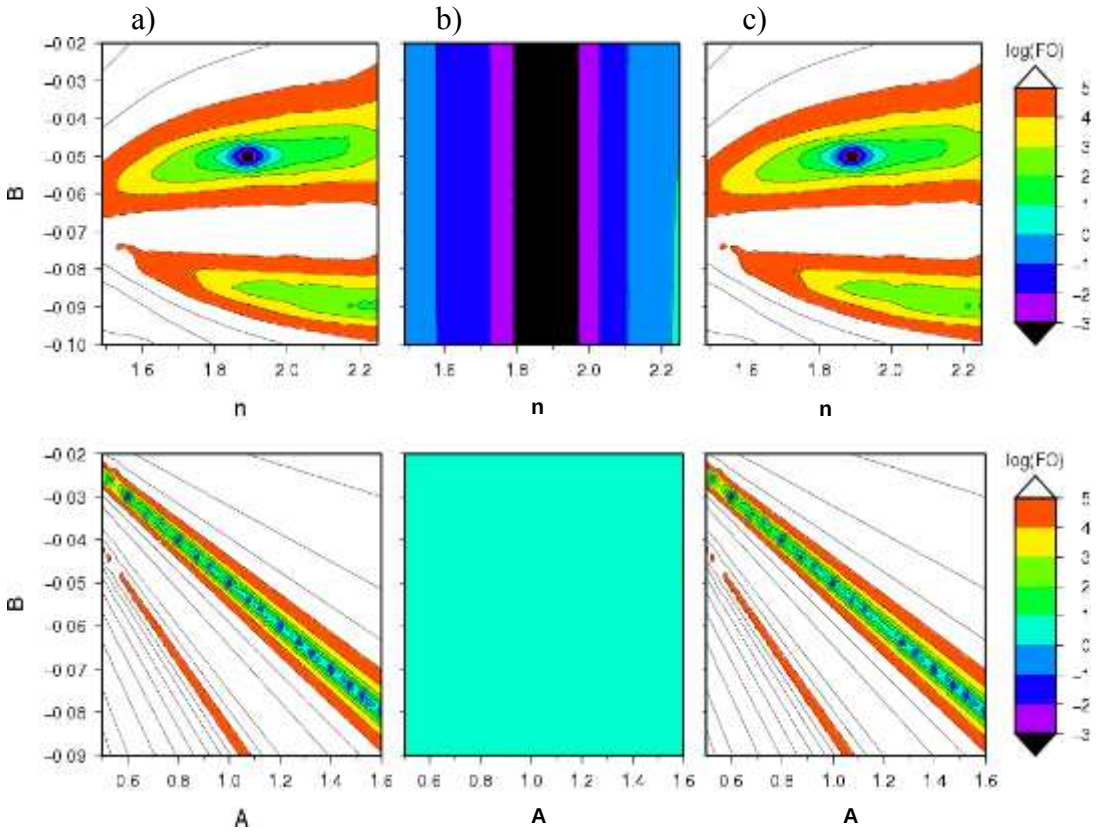


Figure 5. Contours de la fonction objective pour les données électriques (a), les données de volumes infiltré (b), et la somme des deux (c). Cas d'une courbe d'infiltration à 20 mesures. Unités : K_s (cm min^{-1}), alpha (cm^{-1}), n (sans unité), A (sans unité), B (sans unité).

2.2.2. Scénarios

2.2.2.1. Sol sablo-limoneux, optimisation de 3 paramètres

Ces inversions sont réalisées avec des courbes d'infiltration ne comprenant que 3 données d'infiltration, l'objectif étant de montrer l'intérêt de l'ajout de données électriques.

La première inversion, qui concerne un sol sablo-limoneux, montre des résultats quasi-parfaits (Tableau 6, Figure 6b). Après 20 itérations, les 3 paramètres sont presque parfaitement ajustés. La contribution des observations de résistivité électrique domine la FO lors des 7 premières itérations. Entre les itérations 7 et 11, les contributions des 2 jeux de données sont équivalentes. Après l'itération 11, la FO est à nouveau dominée par les observations de résistivité électrique jusqu'à l'itération 19 où l'importance des contributions s'inverse alors. (Figure 6a).

Tableau 6. Résultats des estimations pour les 4 scénarios du sol sablo-limoneux

Valeur des paramètres et intervalle de confiance à 95%						FO	RMSE (%)
Scénario	α (cm^{-1})	n	K_s (cm min^{-1})	A	B		
Réel	0,07500	1,8900	0,0750	1,000	-0,0500		
Initial	0,03600	1,5600	0,0173	1,672	-0,1130		
Scénario 1	0,07354	1,8889	0,07220	-	-	2,67E-03	0,199
Limite inf.	0,07337	1,8869	0,07181	-	-		
Limite sup.	0,07371	1,8908	0,07263	-	-		
Scénario 2	0,06948	1,8780	0,0651	-	-	3,52E-01	4,29
Limite inf.	0,06721	1,8593	0,0605	-	-		
Limite sup.	0,07183	1,8967	0,0700	-	-		
Scénario 3	0,07299	1,8927	0,0709	1,657	-0,0827	1,27E-03	0,126
Limite inf.	0,07287	1,8908	0,0706	1,623	-0,0844		
Limite sup.	0,07310	1,8945	0,0712	1,690	-0,0810		
Scénario 4	0,06663	1,8957	0,0590	1,655	-0,0822	3,33E-01	4,22
Limite inf.	0,06362	1,8689	0,0528	1,212	-0,1042		
Limite sup.	0,06977	1,9225	0,0660	2,098	-0,0602		

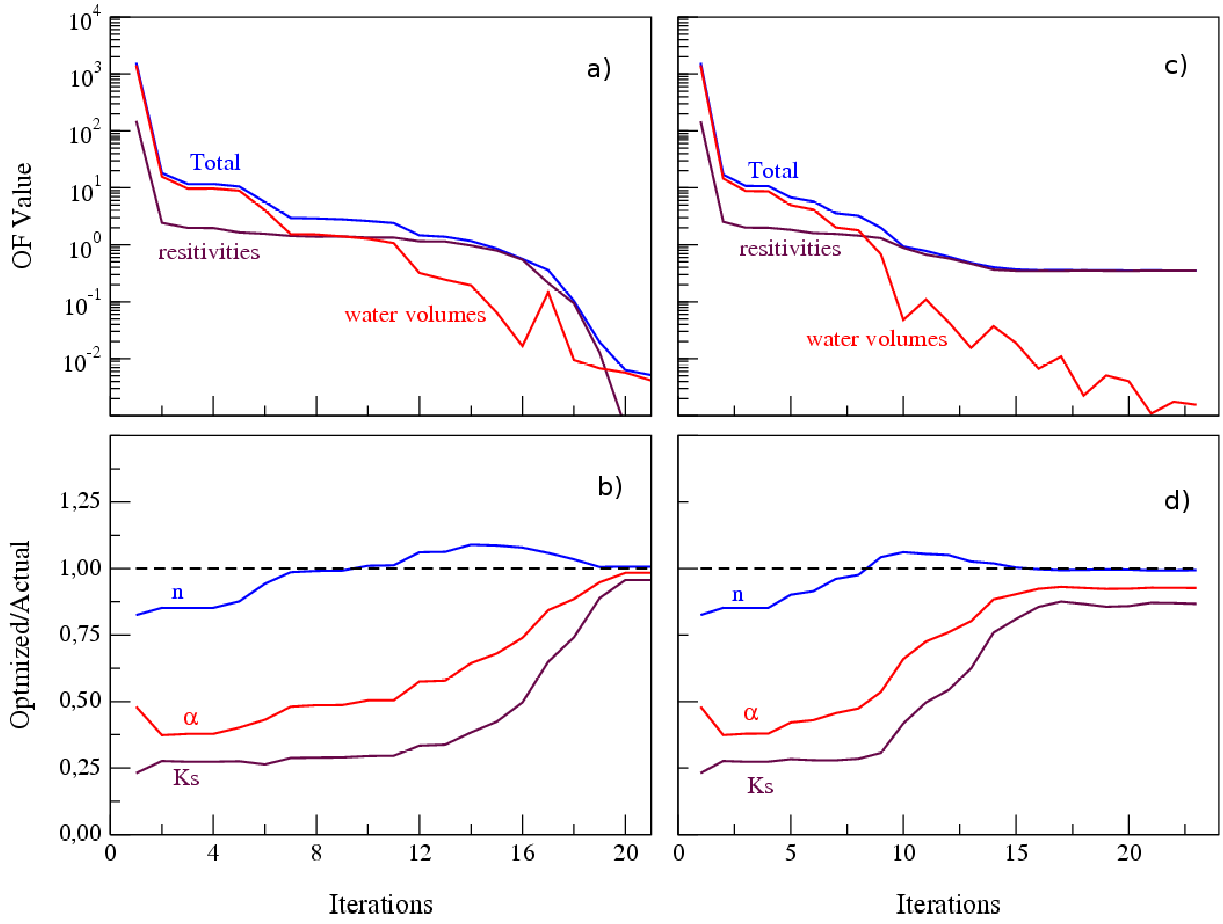


Figure 6. Évolution de la fonction objective et de la valeur des paramètres pour le sol sablo-limoneux. Les paramètres pétrophysiques (A, B) sont connus. a) Fonction objective pour le scénario 1 (données idéales). b) Évolution du ratio des valeurs des paramètres pour le scénario 1 (données idéales). c) Fonction objective pour le scénario 2 (données bruitées). d) Évolution du ratio des valeurs des paramètres pour le scénario 2 (données bruitées).

La même optimisation, réalisée cette fois avec des données électriques bruitées (scénario 2), montre également une domination de la contribution des observations de résistivité électrique dans les premières itérations, puis une inversion des contributions (Figure 6c). Cette alternance est la garantie que chacun des deux jeux d'observation contraint l'évolution de la valeur des paramètres durant l'inversion et ce jusqu'à la solution finale.

Les résultats de l'optimisation pour le scénario 2 sont moins précis que dans le cas du scénario 1 (Figure 6d). Le paramètre n est parfaitement ajusté alors que les paramètres α et K_s montrent des erreurs d'ajustement de 10 et 20 % respectivement. Ceci s'explique par la haute

corrélation entre ces 2 paramètres (coefficient de corrélation égal à 0,975, voir Tableau 7). En fin d'optimisation, la FO est 100 fois plus élevée que pour le cas du scénario 1. A partir de l'itération 14, la valeur de la FO, qui est dominée par les données électriques, continue de baisser d'itération en itération mais avec un taux très faible (Figure 6c). La contribution des données de volume cumulé dans la FO est de plus en plus faible au cours du processus d'inversion (à partir de l'itération 10), et c'est alors les données de résistivité électrique qui permettent l'optimisation correcte des paramètres.

Tableau 7. Matrice des coefficients de corrélation (sol sablo-limoneux)

		α (cm^{-1})	n	K_s (cm min^{-1})	A	B
Scénario 1	α (cm^{-1})	1	-0,520	0,964	-	-
	n	-0,520	1	-0,729	-	-
	K_s (cm min^{-1})	0,964	-0,729	1	-	-
Scénario 2	α (cm^{-1})	1	-0,366	0,975	-	-
	n	-0,366	1	-0,564	-	-
	K_s (cm min^{-1})	0,975	-0,564	1	-	-
Scénario 3	α (cm^{-1})	1	-0,653	0,956	-0,120	0,113
	n	-0,653	1	-0,846	0,107	-0,104
	K_s (cm min^{-1})	0,956	-0,846	1	-0,126	0,120
	A	-0,120	0,107	-0,126	1	-0,9999
	B	0,113	-0,104	0,120	-0,9999	1
Scénario 4	α (cm^{-1})	1	-0,746	0,988	-0,026	0,012
	n	-0,746	1	-0,839	0,034	-0,024
	K_s (cm min^{-1})	0,988	-0,839	1	-0,029	0,015
	A	-0,026	0,034	-0,029	1	-0,9998
	B	0,012	-0,024	0,015	-0,9998	1

On a représenté sur la Figure 7 les résultats d'un scénario supplémentaire où les paramètres sont inversés à l'aide seulement des données d'infiltration. Il apparaît clairement que, bien que la FO arrive en fin d'optimisation à des valeurs basses, les paramètres optimisés sont faux. Dans ce cas, il semble que c'est une sous-détermination qui empêche l'optimisation correcte des problèmes. La comparaison de ces résultats avec ceux du scénario 1 montre clairement que l'utilisation de données de résistivité électrique est pertinente.

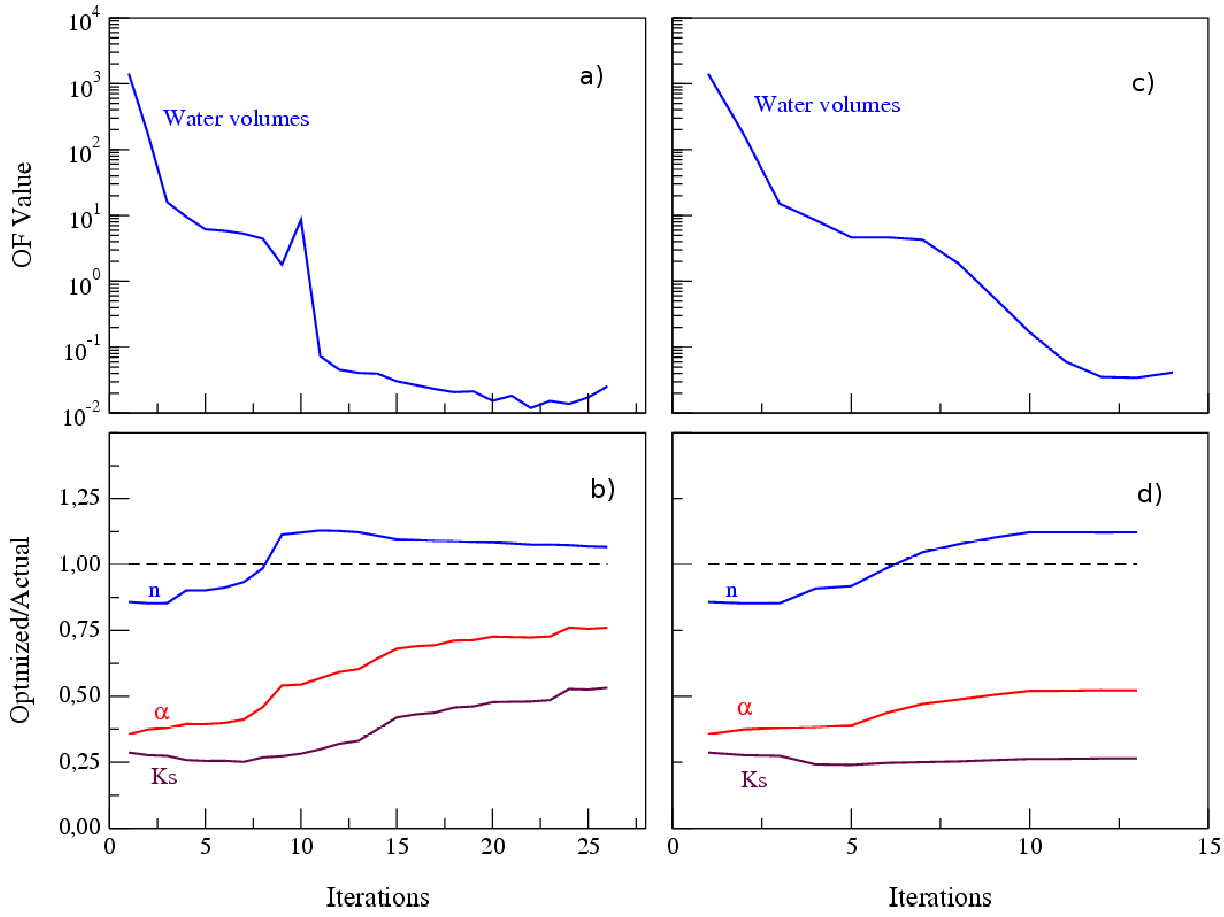


Figure 7. Évolution de la fonction objective et de la valeur des paramètres pour le sol sablo-limoneux avec uniquement des données d'infiltration. a) Fonction objective pour le scénario 1 (données idéales). b) Évolution du ratio des valeurs des paramètres pour le scénario 1 (données idéales). c) Fonction objective pour le scénario 2 (données bruitées). d) Évolution du ratio des valeurs des paramètres pour le scénario 2 (données bruitées).

2.2.2.2. Sol sablo-limoneux, optimisation de 5 paramètres

L'inversion des paramètres hydrodynamiques et pétrophysiques de manière conjointe avec des données idéales monte une estimation parfaite des paramètres hydrodynamiques, alors que dans le cas de données bruitées, les paramètres hydrodynamiques sont estimés moins précisément (Tableau 6, Figures 8b, 8d). En revanche, les paramètres pétrophysiques sont estimés de façon incorrecte dans les 2 cas, et d'ailleurs leur valeur n'évolue presque plus à partir de l'itération 4. Pour les scénarios 3 et 4, la FO est dominée par la contribution des

données d'infiltration jusqu'à l'itération 6, et dès lors, le poids des contributions s'inverse (Figures 8a, 8c).

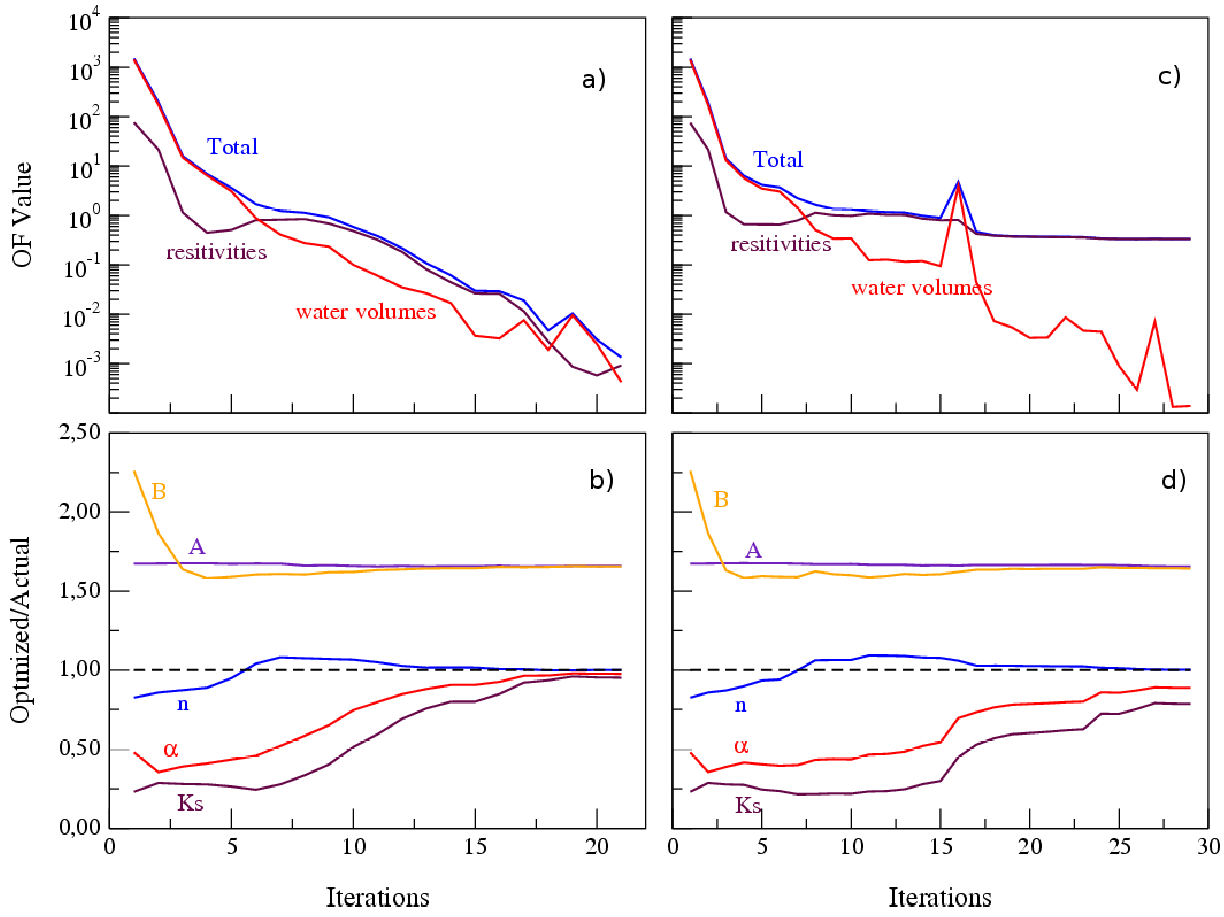


Figure 8. Évolution de la fonction objective et de la valeur des paramètres pour le sol sablo-limoneux. a) Fonction objective pour le scénario 3 (données idéales). b) Évolution du ratio des valeurs des paramètres pour le scénario 3 (données idéales). c) Fonction objective pour le scénario 4 (données bruitées). d) Évolution du ratio des valeurs des paramètres pour le scénario 4 (données bruitées).

Bien que les paramètres pétrophysiques ne sont pas correctement inversés, la valeur de la FO est très basse (même valeur que pour le scénario 1). Ceci suggère clairement que la FO

possède plusieurs minimums peu différents du minimum global (à supposer qu'il soit unique). La corrélation quasi-parfaite entre les 2 paramètres pétrophysiques empêche qu'ils soient correctement inversés (Tableau 7). Ce résultat est tout à fait en accord avec la représentation de la FO dans le plan (*A*-*B*) qui montre une corrélation très étroite entre les 2 paramètres.

Le scénario 4 montre des résultats très proches du scénario 3 (données idéales), c'est-à-dire que les paramètres hydrodynamiques sont correctement inversés. Comme dans le cas du scénario 2, la FO reste en fin d'optimisation à une valeur voisine de 10.

Il est important de remarquer que les intervalles de confiance à 95 %, calculés par PEST, ne contiennent, à l'exception du paramètre *n*, jamais la valeur réelle du paramètre (Tableau 6). Ceci est vraisemblablement dû à la fois à la non-linéarité du problème et aux corrélations de paramètres. PEST estime cet intervalle en se basant sur une hypothèse de linéarité qui n'est pas valable. Ces intervalles calculés par PEST sont approximatifs, cependant il n'est pas possible, à notre connaissance, de les calculer de façon exacte.

2.2.2.3. Sol limoneux, optimisation de 3 paramètres

Le scénario 1, dans le cas d'un sol limoneux montre, comme dans le cas du sol sablo-limoneux, d'excellents résultats (Tableau 8, Figure 9b). La solution est quasi-parfaite en dépit à nouveau d'une forte corrélation entre α et K_s (coefficient de corrélation égal à 0,927) (Tableau 9).

On observe également une alternance dans la domination des observations électriques et d'infiltration au cours de l'inversion (Figure 9a). La FO en fin d'inversion a une valeur plus faible que celle du scénario 1 du sol sablo-limoneux (10^{-3} contre 10^{-2}).

Dans le cas de données bruitées (scénario 2), les valeurs optimisées des paramètres sont très proches des solutions exactes (Figure 9d). Comparativement à ceux du scénario 1, ces résultats sont meilleurs. A nouveau, l'intervalle de confiance à 95% ne contient pas le plus souvent la valeur réelle du paramètre (Tableau 8).

On a simulé, comme pour le cas du sol sablo-limoneux, le cas d'une inversion qui n'utilise que des données d'infiltration. A nouveau, la FO arrive en fin d'optimisation à des valeurs basses, mais les paramètres optimisés sont faux (Figure 10).

Tableau 8. Résultats des estimations pour les 4 scénarios du sol limoneux

Valeur des paramètres et intervalle de confiance à 95%						FO	RMSE (%)
Scénario	α (cm^{-1})	n	K_s (cm min^{-1})	A	B		
Réel	0,03600	1,5600	0,0173	1,403	-0,0640		
Initial	0,08115	1,8900	0,0920	1,672	-0,1130		
Scénario 1	0,03617	1,5590	0,01745	-	-	4,71E-04	0,09
Limite inf.	0,03613	1,5585	0,01741	-	-		
Limite sup.	0,03621	1,5595	0,01749	-	-		
Scénario 2	0,03704	1,5265	0,0193	-	-	4,64E-01	2,77
Limite inf.	0,03551	1,5102	0,0177	-	-		
Limite sup.	0,03847	1,5427	0,0210	-	-		
Scénario 3	0,04996	1,4817	0,0340	1,673	-0,0777	1,07E-01	0,98
Limite inf.	0,04901	1,4748	0,0326	1,492	-0,0862		
Limite sup.	0,05093	1,4886	0,0354	1,854	-0,0692		
Scénario 4	0,03201	1,5507	0,0148	1,804	-0,0814	4,51E-01	2,66
Limite inf.	0,03003	1,5370	0,0133	1,551	-0,0928		
Limite sup.	0,03412	1,5645	0,0164	2,056	-0,0700		

Tableau 9. Matrice des coefficients de corrélation (sol limoneux)

		α (cm^{-1})	n	K_s (cm min^{-1})	A	B
Scénario 1	α (cm^{-1})	1	-0,441	0,927	-	-
	n	-0,441	1	-0,745	-	-
	K_s (cm min^{-1})	0,927	-0,745	1	-	-
Scénario 2	α (cm^{-1})	1	-0,527	0,947	-	-
	n	-0,527	1	-0,772	-	-
	K_s (cm min^{-1})	0,947	-0,772	1	-	-
Scénario 3	α (cm^{-1})	1	-0,548	0,952	0,010	-0,018
	n	-0,548	1	-0,776	0,013	-0,016
	K_s (cm min^{-1})	0,952	-0,776	1	0,003	-0,008
	A	0,010	0,013	0,003	1	-0,9997
	B	-0,018	-0,016	-0,008	-0,9997	1
Scénario 4	α (cm^{-1})	1	-0,307	0,972	0,110	-0,127
	n	-0,307	1	-0,523	-0,240	0,237
	K_s (cm min^{-1})	0,972	-0,523	1	0,158	-0,173
	A	0,110	-0,240	0,158	1	-0,9990
	B	-0,127	0,237	-0,173	-0,9990	1

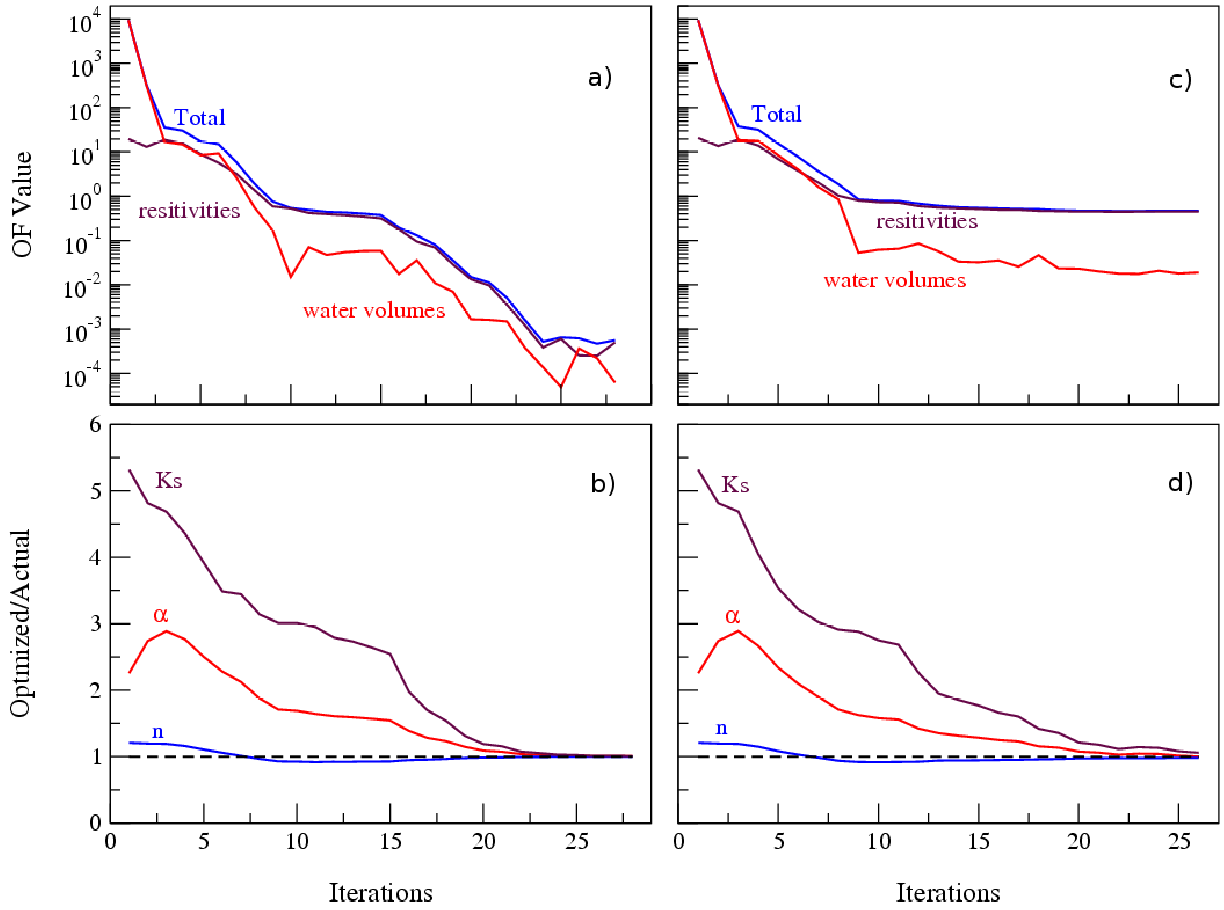


Figure 9. Évolution de la fonction objective et de la valeur des paramètres pour le sol limoneux. Les paramètres pétrophysiques (A, B) sont connus. a) Fonction objective pour le scénario 1 (données idéales). b) Évolution du ratio des valeurs des paramètres pour le scénario 1 (données idéales). c) Fonction objective pour le scénario 2 (données bruitées). d) Évolution du ratio des valeurs des paramètres pour le scénario 2 (données bruitées).

2.2.2.4. Sol limoneux, optimisation de 5 paramètres

Le scénario 3 montre une optimisation des paramètres hydrodynamiques assez décevante (Figure 11b). Les valeurs optimisées de K_s et α sont respectivement 1,97 et 1,39 fois trop élevées. La corrélation entre A et B est extrême (coefficient de corrélation égal à 0,9997).

L'optimisation du scénario 4 montre des résultats meilleurs que ceux du scénario 3. Les valeurs optimisées de K_s et α sont égales respectivement à 0,856 et 0,889 fois leur valeur réelle (Figure 11). On remarque que A et B ne sont pas correctement optimisés, et ce comme dans le cas du sol sablo-limoneux. Le paramètre A n'a pas évolué durant l'optimisation, l'ajustement se faisant sur le paramètre B.

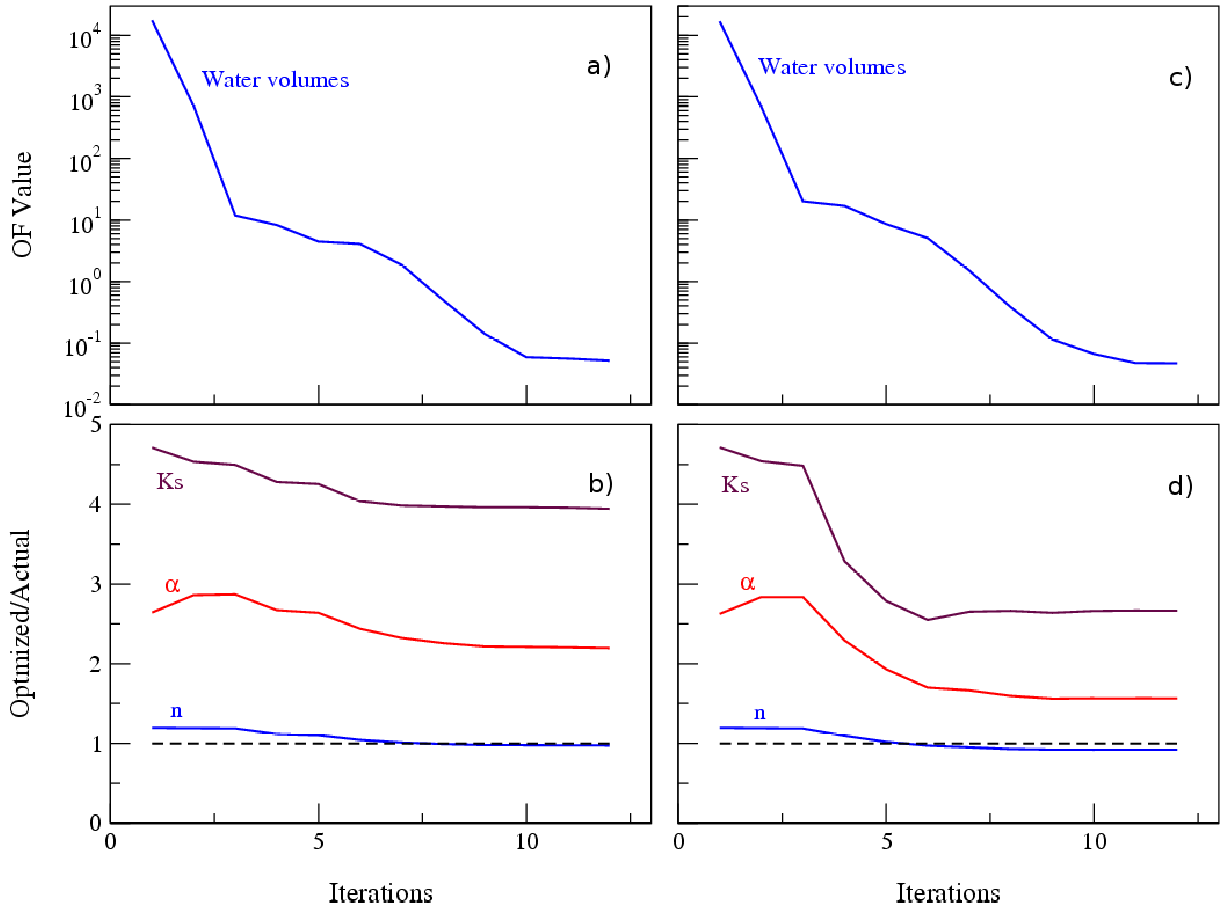


Figure 10. Évolution de la fonction objective et de la valeur des paramètres pour le sol limoneux avec uniquement des données d'infiltration. a) Fonction objective pour le scénario 1 (données idéales). b) Évolution du ratio des valeurs des paramètres pour le scénario 1 (données idéales). c) Fonction objective pour le scénario 2 (données bruitées). d) Évolution du ratio des valeurs des paramètres pour le scénario 2 (données bruitées).

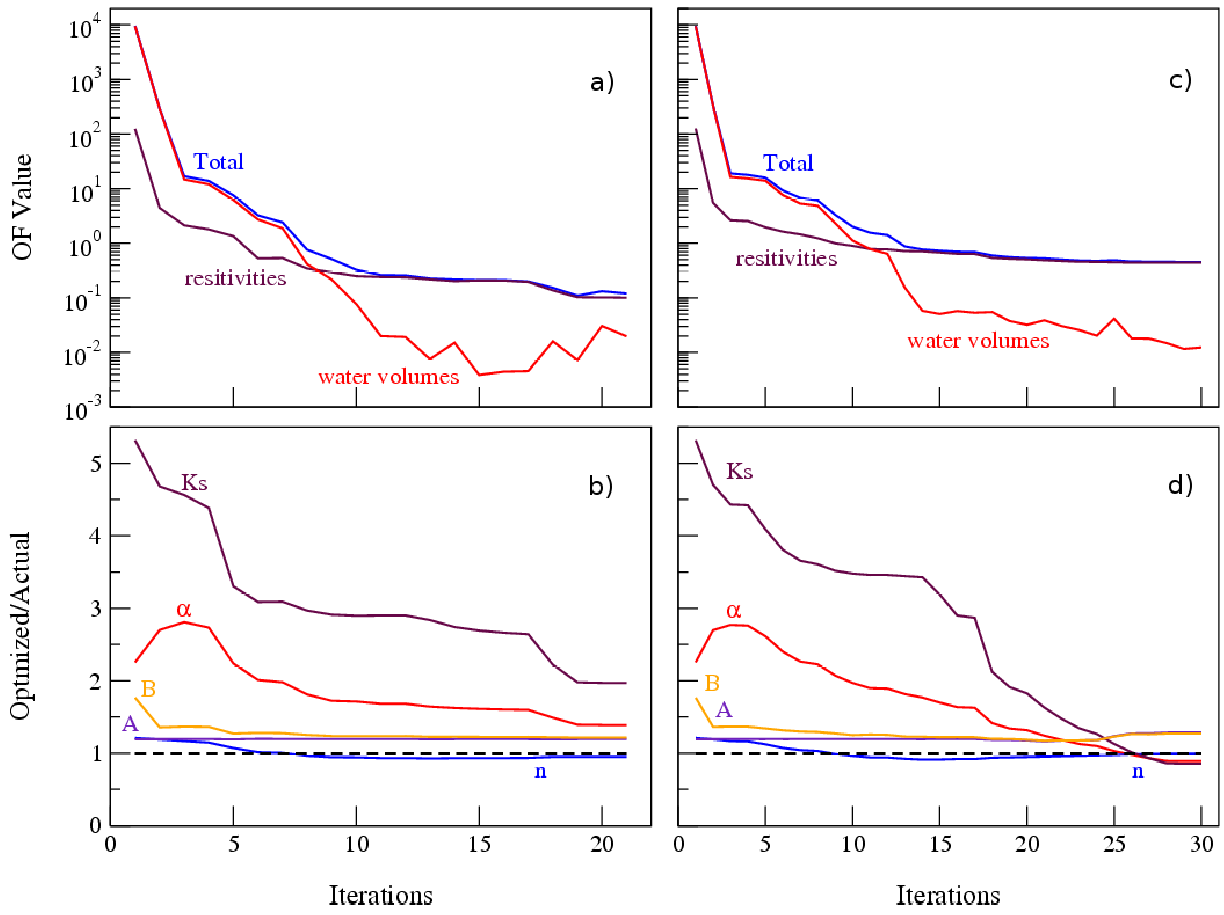


Figure 11. Évolution de la fonction objective et de la valeur des paramètres pour le sol limoneux. a) Fonction objective pour le scénario 3 (données idéales). b) Évolution du ratio des valeurs des paramètres pour le scénario 3 (données idéales). c) Fonction objective pour le scénario 4 (données bruitées). d) Évolution du ratio des valeurs des paramètres pour le scénario 4 (données bruitées).

Il est étonnant que les données bruitées conduisent à une meilleure précision de la solution que les données idéales (Figures 11b, 11d). Ceci pourrait être lié aux données électriques qui sont acquises en sens normal et inverse : quand on inverse les électrodes d'injection et de retrait, dans le cas de données parfaites, les deux valeurs mesurées dans le cas direct et dans le cas inversé sont identiques, alors que si l'on adjoint un bruit aléatoire, les mesures directes et inverses sont différentes, ce qui rajoute de l'information. La solution parfaite n'est pas trouvée

dans le cas des données idéales car l'inversion s'arrête quand un critère d'arrêt est atteint, ce critère étant un abaissement de la FO trop faible depuis un certain nombre d'itération ou un changement relatif ou absolu de la valeur des paramètres entre deux itérations successives trop faible. Mis à part cette observation surprenante au premier abord, on constate que la FO n'évolue que lentement à partir des itérations 11 et 14 pour les scénarios 3 et 4 respectivement, et ce jusqu'à la fin, sous contrainte totale des données électriques. Pendant toute cette phase de l'inversion la valeur des paramètres évolue, indiquant une fois de plus la pertinence des données électriques.

2.2.3. Discussion - Conclusions

Cette étude numérique a permis de mettre en lumière les points fondamentaux suivants :

1. La courbe d'infiltration ou les données électriques peuvent contenir une information suffisante pour inverser K_s, α et n. C'est le résultat révélé par les représentations de la FO sur des graphiques 2D des paramètres qui montrent des minimums bien définis. L'addition des deux types de données améliore sensiblement la définition du problème.

2. L'étude des différents scénarios a montré que, si les paramètres pétrophysiques sont connus, l'obtention par inversion des paramètres hydrodynamiques est réalisable, et ce même avec des données bruitées. Dans le cas où les paramètres pétrophysiques ne sont pas connus, les résultats sont plus mitigés et montrent une bonne optimisation des paramètres hydrodynamiques et une mauvaise optimisation des paramètres pétrophysiques.
Cependant, pour les scénarios où les paramètres pétrophysiques sont optimisés conjointement aux paramètres hydrodynamiques, le problème semble sous-déterminé, et l'optimisation des paramètres (hydrodynamiques et pétrophysiques) est imparfaite. La méthode semble de ce point de vue adaptée à l'inversion des paramètres hydrodynamiques, mais pas à l'inversion des paramètres pétrophysiques.
Il apparaît donc au terme de cette étude numérique qu'il n'est pas possible de déterminer lors de l'inversion conjointement A et B. Bien que l'objectif principal soit d'estimer les paramètres hydrodynamiques, et que la mauvaise estimation des paramètres pétrophysiques ne porte pas préjudice à cet objectif principal, on pourrait soit tenter de déterminer A et B au laboratoire par des mesures réalisées sur échantillon, soit utiliser pour la modélisation et l'inversion une

relation pétrophysique différente, qui ne contienne qu'un paramètre (Friedman 1995, ou Archie, 1942).
Cependant il paraît aussi raisonnable d'utiliser cette relation, tout en sachant qu'elle ne peut être calibrée de cette façon, mais que cet inconvénient ne nuit pas à l'obtention correcte des paramètres hydrodynamiques. De plus il se pourrait que, lors des expériences de terrain, la corrélation entre les paramètres soit moins forte et qu'une optimisation correcte des paramètres soit envisageable.

3. Il a été remarqué que les paramètres hydrodynamiques obtenus dans le cas du sol limoneux sont meilleurs que ceux obtenus dans le cas du sol sablo-limoneux. Ce résultat pourrait s'expliquer par les différences d'allure des courbes de rétention de ces deux types de sol. En effet, la courbe de rétention en eau des sols fins étant moins raide au niveau de son point d'inflexion que celle des sols grossiers, la gamme des potentiels matriciels intermédiaires entre les 2 paliers proches de la saturation et proche du dessèchement est plus large (Figure 12). Ainsi, lors de l'infiltration, le gradient des teneurs en eau dans le bulbe d'infiltration est plus faible ($\Delta\theta/\Delta x$), et l'utilisation de mesures électriques afin de mesurer le champ de teneur en eau est plus efficace.

A ce stade de notre travail, il s'agit maintenant de réaliser des expériences sur le terrain et des inversions numériques associées, et d'obtenir :
- Une confrontation des ordres de grandeurs des valeurs de la FO après optimisation avec les valeurs obtenus lors des tests numériques. Une attention particulière sera portée aux coefficients de corrélations. Par ailleurs, des critères statistiques seront utilisés pour juger de la pertinence des modèles.
- Une confrontation des valeurs des paramètres optimisés avec ceux obtenus par d'autres méthodes (infiltration multipotentielle et presses de Richards).

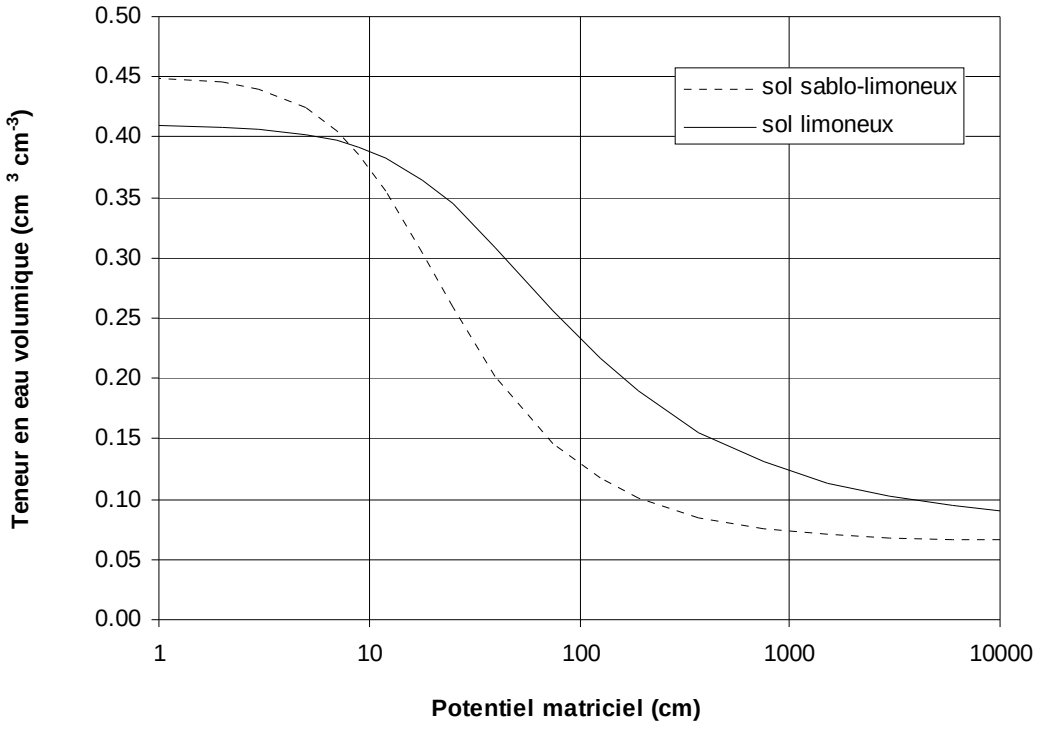


Figure 12. Courbes de teneur en eau volumique du sol sablo-limoneux et du sol limoneux. La pente de la courbe du sol limoneux est plus douce, ce qui induit que la gamme de potentiel incluse entre deux teneurs en eau volumique données est plus grande pour le sol limoneux.