
Etude phénoménologique du réseau résonnant d'ordre zéro

Avant de placer un réseau résonnant sur le chemin d'une impulsion laser femtoseconde nous allons nous doter des moyens de représenter l'effet de l'élément résonnant sur cette dernière et, pour cela, en décrire le comportement spectral. Ce chapitre est une étude du réseau résonnant d'ordre zéro par approche phénoménologique des modes couplés. Nous présentons tout d'abord le principe de cette approche. L'étude plus spécifique du coefficient de réflexion sur une telle structure est ensuite menée en fonction de la fréquence spatiale de l'onde excitatrice. Enfin, les différents cas sont étudiés conduisant aux différents profils d'amplitude et de phase observables pour une réflexion autour de la résonance.

3.1 Approche phénoménologique des modes couplés de la résonance

Actuellement la principale méthode permettant de traiter les réseaux résonnants est basée sur la matrice de diffraction. Cet outil, que nous venons de présenter dans le chapitre précédent, est une traduction mathématique du problème physique. Les champs diffractés sont alors donnés par un produit matriciel de la matrice \mathbf{S} caractérisant la structure par le vecteur-champ incident. Nous avons vu que les pôles k_p de cette matrice sont les pôles de tous les éléments et correspondent à

des modes guidés dans le réseau résonnant. Chacun de ces éléments s'écrit sous la forme d'un pôle de premier ordre multiplié par un zéro de premier ordre d'après l'expression (2.21) présentée au paragraphe 2.5 du chapitre 2. Cependant, ce pôle et ces zéros n'ont aucune signification physique évidente. Celle-ci peut être apportée à l'aide de l'approche phénoménologique des modes couplés. La résonance du guide d'onde est alors modélisée par un nombre restreint de paramètres décrivant physiquement le phénomène, mais difficilement quantifiables à partir des paramètres opto-géométriques de la structure. Cette approche est, comme nous le verrons, une combinaison de deux visions complémentaires du réseau résonnant : la vision diffractive et la vision modale. Considérons donc une onde plane monochromatique excitant une telle structure suivant ces deux visions.

a. Vision diffractive

Dans cette approche, l'effet de couplage dans le guide d'onde n'est pas pris en compte. On considère simplement un onde plane ayant un champ A_g dans la structure, et non pas un mode qui se propage. Deux efficacités de diffraction peuvent être définies en fonction des champs transmis A_c dans le superstrat et A_s dans le substrat comme étant :

$$\eta_c = \frac{A_c}{A_g} \quad (3.1)$$

dans le superstrat et :

$$\eta_s = \frac{A_s}{A_g} \quad (3.2)$$

dans le substrat .

Il est à noter que ces efficacités de diffraction diffèrent des efficacités du réseau à une simple interface puisque les réflexions à la deuxième interface du guide d'onde doivent être considérées.

b. Vision modale

Dans cette approche, le réseau de diffraction est simplement pris en compte par un terme de pertes caractérisé par le coefficient de rayonnement α comme le montre la figure 3.1. Ce

coefficient traduit la "vitesse" à laquelle le champ modal fuit le guide d'onde au long de sa propagation par unité de longueur.

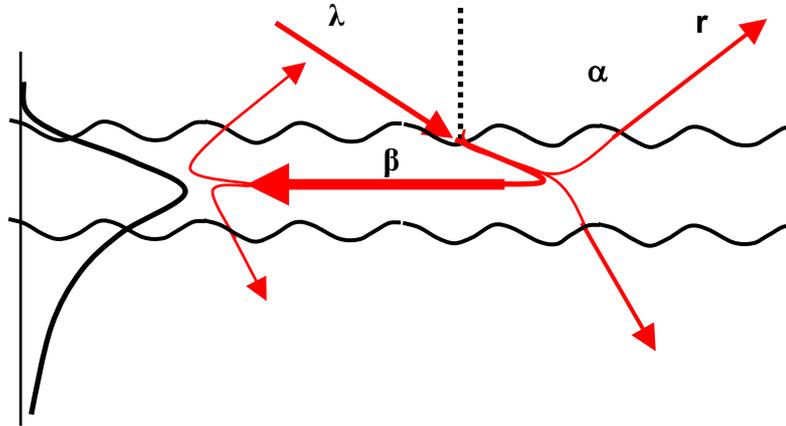


Figure 3.1 : principe du réseau résonnant suivant l'approche phénoménologique des modes couplés.

La méthode consiste à étudier le guide d'onde plan par le biais de l'optique guidée. Appelons $A_g(x)$ l'amplitude du mode dans le guide d'onde où x est la direction de propagation du mode. Sans excitation extérieure du guide, la variation du champ modal est simplement égale aux pertes accumulées le long de la propagation suivant x . Ceci peut s'écrire sous forme d'une équation différentielle :

$$\frac{\partial A_g}{\partial x} = -\alpha A_g, \text{ et la solution de cette équation est de la forme : } A_g(x) = A_{g0} \cdot e^{-\alpha x}.$$

Si le guide est excité par une onde plane de profil spatial $f_0(x)$ et désynchronisée en phase relativement au mode d'une quantité $e^{i(k-\beta)x}$, alors la variation du champ modal est égale à la somme des pertes de propagation et de la fraction de champ incident couplée au mode. L'équation différentielle correspondante devient alors :

$$\frac{\partial A_g}{\partial x} = -\alpha A_g + \kappa_i f_0(x) e^{i(k-\beta)x} \quad (3.3)$$

où κ_i est une constante complexe traduisant le couplage de l'onde incidente provenant du milieu i avec le mode guidé et β la constante de propagation de ce mode. Le terme exponentiel

imaginaire traduit le désaccord de phase entre l'onde excitatrice et l'onde guidée. Ce déphasage dépend de la fréquence spatiale k , correspondant à la projection à l'interface du vecteur d'onde propagé dans le guide. La condition de synchronisme est vérifiée à l'excitation du mode, c'est à dire lorsque $k = \beta$. Prenons le cas simple d'un faisceau infiniment étendu d'amplitude constante A_i ($f_0(x) = A_i$). L'équation différentielle (3.3) devient :

$$\frac{\partial A_g}{\partial x} = -\alpha A_g + \kappa_i A_i e^{j(k-\beta)x} \quad (3.4)$$

La solution à l'équation différentielle (3.4) est de la forme :

$$A_g(x) = \frac{\kappa_i}{j(k-\beta) + \alpha} \cdot A_i \cdot e^{j(k-\beta)x}$$

Posons $a_i = -j\kappa_i$ et $k_p = \beta + j\alpha$. Le champ modal s'écrit :

$$A_g(x, k) = \frac{a_i}{k - k_p} A_i e^{j(k-\beta)x} \quad (3.5)$$

On obtient, en écrivant l'expression (3.5) à la résonance ($k=\beta$), une propriété importante du mode propagé dans un guide d'onde couplé par réseau. L'amplitude A_g du mode guidé atteint son maximum $A_{g_{max}}$ à la résonance avec :

$$A_{g_{max}} = \frac{j\kappa}{\alpha} A_i \quad (3.6)$$

c. Champs diffractés par le réseau résonnant

D'après l'expression de l'approche diffractive (3.1) ou (3.2), suivant le milieu extérieur q considéré, la quantité de champ A_q de champ guidé (3.5) diffracté dans ce milieu s'écrit :

$$A_q(x, k) = \eta_q \frac{a_i}{k - k_p} A_i e^{j(k-\beta)x} = \frac{-j\kappa_i \eta_q}{k - k_p} A_i e^{j(k-\beta)x}$$

Maintenant, le coefficient de transmission t_{Gq} du mode dans le milieu extérieur q s'écrit comme étant le rapport entre le champ diffracté dans ce milieu A_q et le champ incident $A_i e^{j(k-\beta)x}$, soit :

$$t_{Gq}(k) = \frac{-j\kappa_i \eta_q}{k - k_p} \quad (3.7)$$

Dans le cas d'un faisceau infiniment étendu et d'amplitude constante, les coefficients de réflexion et de transmission ne dépendent plus de la variable x : les faisceaux réfléchis et transmis ne sont pas spatialement modulés. Le coefficient de transmission (respectivement de réflexion) total de la structure est donc égal à la somme de la transmission du champ guidé t_{Gq} de l'expression (3.7) et de la transmission (respectivement la réflexion) des champs des différents ordres propagés m dans la structure. En notant i le milieu d'incidence et q le milieu d'émergence, on peut exprimer les coefficients t_{iq} de réflexion et de transmission en fonction de la projection du vecteur d'onde propagé k :

$$t_{iq}(k) = t_{Gq}(k) + \sum_{m=0}^{+\infty} t_m(k - k_p)^m \quad (3.8)$$

La partie non polaire variant très peu au voisinage de la résonance, elle peut être assimilée à une constante complexe t_{iq0} équivalente à une réflexion ou transmission de Fresnel. L'expression (3.8) du coefficient de transmission (ou réflexion) devient alors :

$$t_{iq}(k) = t_{iq0} + \frac{a_{iq}}{k - k_p} = t_{iq0} - j \frac{\kappa_i \eta_q}{(k - \beta) - j\alpha} \quad (3.9)$$

d. Des paramètres phénoménologiques aux paramètres polaires

Nous allons ici faire le lien entre l'approche phénoménologique et l'approche polaire de la résonance dans un réseau résonnant. Ce lien permettra de mieux appréhender l'évolution des paramètres polaires (pôle k_p et zéros k_{Ziq}) en fonction des paramètres optogéométriques. De plus, ces deux approches sont complémentaires. L'étude de la matrice de diffraction dans l'approche polaire aboutit par exemple à des propriétés intéressantes [Popov 1986] sur les zéros des éléments dans le cas d'une symétrie dans la structure : zéros de transmission égaux et réels dans le cas d'une symétrie axiale verticale, zéros en transmission égaux et réels tout comme les zéros en réflexion dans le cas d'une symétrie axiale horizontale et zéros en réflexion égaux et réels dans le cas d'une symétrie centrale [Fehrembach 2003]. La conservation d'énergie implique plus généralement que les zéros en transmission sont complexes conjugués tout comme les zéros en réflexion. L'approche phénoménologique par modes couplés apporte donc une compréhension

physique de la résonance alors que l'approche polaire permet d'obtenir des propriétés simplificatrices dans certains cas de structures qui généralement possèdent une symétrie axiale verticale (réseaux rectangulaires). Il est donc nécessaire de lier les différents paramètres des deux approches.

En comparant les deux mêmes expressions du coefficient de réflexion ou transmission t_{iq} de la matrice de diffraction suivant l'approche polaire (2.22) et de l'approche phénoménologique (3.9), on obtient l'égalité suivante :

$$t_{iq}(k) = t_{iq0} \frac{k - k_{z_{iq}}}{k - k_p} = t_{iq0} - j \frac{\kappa_i \eta_q}{(k - \beta) - j\alpha}$$

Soit encore :

$$t_{iq0} \frac{k - k_p + (k_p - k_{z_{iq}})}{k - k_p} = t_{iq0} - j \frac{\kappa_i \eta_q}{(k - \beta) - j\alpha}$$

Le coefficient de découplage a_{iq} de l'approche phénoménologique peut donc s'écrire en fonction du zéro $k_{z_{iq}}$ de l'approche polaire comme suit :

$$a_{iq} = -j\kappa_i \eta_q = t_{iq0} (k_p - k_{z_{iq}}) \quad (3.10)$$

Il devient donc possible d'exprimer le pôle k_p et les zéros $k_{z_{iq}}$ de l'approche algébrique polaire dépourvus de sens physique à l'aide de paramètres phénoménologiques décrivant la résonance dans un réseau résonnant : constante de propagation du mode β , coefficient de rayonnement α , coefficient de couplage κ_i d'une onde excitatrice provenant du milieu i au mode guidé, coefficient de diffraction η_q de l'onde guidée vers le milieu q et réflexion ou transmission de "Fresnel" t_{iq0} de l'onde provenant du milieu i et émergeant dans le milieu q . On peut donc écrire :

$$k_{z_{iq}} = \beta + j \left(\alpha + \frac{\kappa_i \eta_q}{t_{iq0}} \right) \quad (3.11)$$

$$k_p = \beta + j\alpha$$

Maintenant que les coefficients de transmissions et réflexions à partir d'une excitation provenant du superstrat ou du substrat sont physiquement exprimés, il est possible de faire le lien avec la matrice de diffraction \mathbf{S} de la structure totale. Considérons une double excitation du guide via le superstrat et le substrat. Chacune de ces deux ondes se couple plus ou moins avec le même mode

caractérisé par sa constante de propagation β et son coefficient de rayonnement α . Ces couplages vont donc se traduire par deux coefficients différents κ_c et κ_s suivant respectivement une excitation depuis le superstrat et depuis le substrat. D'après les considérations du chapitre précédent (paragraphe 2.5), les éléments s_{iq} de la matrice de diffraction peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
 s_{cc}(k) &= t_{cc}(k) \\
 s_{cs}(k) &= \sqrt{\frac{\gamma_c}{\gamma_s}} t_{cs}(k) \\
 s_{sc}(k) &= \sqrt{\frac{\gamma_s}{\gamma_c}} t_{sc}(k) \\
 s_{ss}(k) &= t_{ss}(k)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

où le premier indice représente le milieu de provenance l'onde incidente, et le deuxième indice représente le milieu de fuite de l'onde émergente (c pour le superstrat et s pour le substrat). Cet ensemble d'équations (3.12) peut encore s'écrire sous forme matricielle à partir de l'expression de l'approche phénoménologique des modes couplés (3.9) :

$$\mathbf{S}(k) = \begin{bmatrix} r_{c0} - \frac{j\kappa_c \eta_c}{(k-\beta) - j\alpha} & \sqrt{\frac{\gamma_s}{\gamma_c}} \left(t_{s0} - \frac{j\kappa_s \eta_c}{(k-\beta) - j\alpha} \right) \\ \sqrt{\frac{\gamma_c}{\gamma_s}} \left(t_{c0} - \frac{j\kappa_s \eta_c}{(k-\beta) - j\alpha} \right) & r_{s0} - \frac{j\kappa_s \eta_s}{(k-\beta) - j\alpha} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

en rappelant que $\gamma_c = n_c k_0 \cos\theta_i$ et $\gamma_s = k_0 \sqrt{n_s^2 - n_c^2 \sin^2\theta_i}$, κ_c et κ_s sont les constantes de couplages pour une onde provenant respectivement du superstrat et du substrat, η_c et η_s les efficacités de diffractions de l'onde guidée respectivement vers le superstrat et le substrat, β la constante de propagation du mode guidé, α le coefficient de rayonnement de la structure, r_{c0} et r_{s0} les réflexions hors résonances et t_{c0} et t_{s0} sont les transmissions hors résonance de la structure. On constate donc que les paramètres de découplage $a_{iq} = -j\kappa_i \eta_q$ sont liés. Ainsi on peut écrire que :

$$a_{sc} = \frac{a_{cc} a_{ss}}{a_{cs}} \tag{3.14}$$

Cette égalité est une conséquence de la théorie basée sur l'approche phénoménologique par modes couplés des réseaux résonnants. Elle est logique puisque les coefficients de découplages a_{cc} , a_{cs} , a_{sc} et a_{ss} sont liés aux deux constantes de couplages κ_c et κ_s au mode pour des ondes respectivement incidentes du superstrat et du substrat ainsi qu'aux coefficients de diffractions η_c et η_s de l'onde guidée dans ces deux milieux.

Dans le but de démontrer ce lien entre les quatre paramètres de découplage a_{iq} de la matrice de diffraction d'un réseau résonnant et ainsi confirmer l'approche phénoménologique par modes couplés des réseaux résonnants, considérons numériquement l'exemple de la figure 3.2. Une couche diélectrique d'indice de réfraction $n_g = 2$ et d'épaisseur $w_g = 330$ nm est déposée sur un substrat d'indice $n_s = 1,5$. Un réseau de diffraction rectangulaire de profondeur $\sigma = 100$ nm et de pas $\Lambda = 360$ nm est alors gravé. La structure est ensuite excitée via l'air ($n_c = 1$) par une onde plane monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 800$ nm polarisée transverse électrique en incidence classique de $\theta_i = 20^\circ$.

Cette configuration est étudiée à l'aide d'un programme spécialement développé pour l'étude des réseaux résonnants par N. Lyndin [Lyndin 2006]. Il est basé sur la méthode modale vraie, c'est à dire sur le calcul analytique des modes du réseau de diffraction puis par le calcul de la matrice S totale [Botten 1981, Foresti 2006].

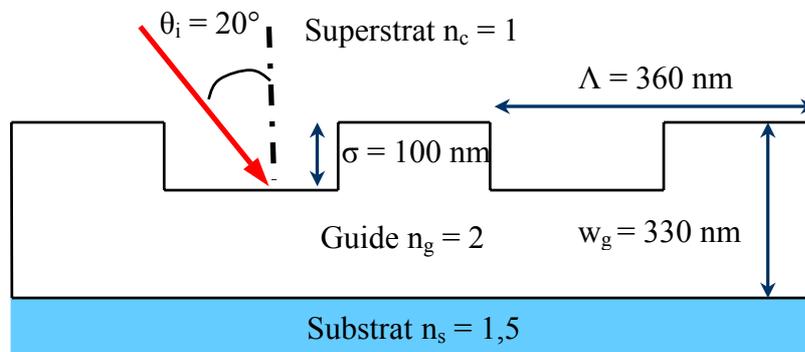


Figure 3.2 : schéma de la structure simulée numériquement.

Ce programme donne donc le pôle et les zéros de chaque élément de la matrice de diffraction. Le pôle vaut $k_p = (13,990 + 0,036j) \mu\text{m}^{-1}$. Les valeurs des coefficients de Fresnel et des zéros données par le programme pour chaque élément de la matrice S sont regroupés dans le tableau 3.1.

Coefficients de Fresnel	Zéros (en μm^{-1})
$r_{c0} = 0,37e^{-2,96j}$	$k_{z_{cc}} = 14,006 + 0,077j$
$t_{c0} = 0,92e^{-1,51j}$	$k_{z_{cs}} = 13,955 - 0,012j$
$t_{s0} = 0,94e^{-1,51j}$	$k_{z_{sc}} = 13,955 - 0,012j$
$r_{s0} = 0,36e^{3,09j}$	$k_{z_{ss}} = 13,903 + 0,078j$

Tableau 3.1 : valeurs des coefficients de Fresnel et des zéros donnés par le programme de N. Lyndin pour la structure présentée dans la figure 3.2.

Les coefficients de découplages a_{iq} sont donc calculables d'après l'équation (3.10). Leurs valeurs sont données dans le tableau 3.2. On constate bien que le raisonnement physique est confirmé par cet exemple numérique : l'égalité (3.14) est vérifiée.

coefficient de découplage (en μm^{-1})	produit $\kappa_i\eta_q$ (en μm^{-1})
$a_{cc} = 0,027e^{1,121j}$	$\kappa_c\eta_c = j0,027e^{1,121j}$
$a_{cs} = 0,034e^{0,384j}$	$\kappa_c\eta_s = j0,034e^{0,384j}$
$a_{sc} = 0,035e^{0,382j}$	$\kappa_s\eta_c = j0,035e^{0,382j}$
$a_{ss} = 0,042e^{-2,355j}$	$\kappa_s\eta_s = j0,042e^{-2,355j}$

Tableau 3.2 : coefficients de découplages et produits $\kappa_i\eta_q$ calculés pour chaque éléments de la matrice S.

Nous venons de développer une approche physique de la résonance dans un réseau résonnant. Cette approche se trouve être complémentaire à l'approche polaire. Elle explique la réponse d'un réseau résonnant à une excitation électromagnétique à l'aide de paramètres phénoménologiques physiquement intelligibles : la constante de propagation du mode, le coefficient de rayonnement de la structure, les constantes de couplages et les efficacités de diffractions du champ modal dans les superstrat et substrat. Grâce à l'approche phénoménologique, un sens physique a été donné au pôle et aux zéros de la matrice de diffraction d'un réseau résonnant en les liant aux paramètres phénoménologiques. Le lien physique entre les quatre éléments de la matrice dans le cas d'un réseau résonnant d'ordre zéro a été démontré. De plus, grâce aux paramètres phénoménologiques, il devient plus facile d'appréhender l'évolution de la réponse d'une structure en fonction de ses paramètres optogéométriques.

Dans la partie suivante, nous allons nous intéresser plus spécifiquement à la réflexion d'un réseau résonnant d'ordre zéro subissant une excitation via le superstrat.

3.2 Etude mathématique du coefficient de réflexion

L'objectif est ici d'étudier les caractéristiques en amplitude et en phase de la réponse d'un réseau résonnant suivant une excitation de fréquence spatiale k variable. Dans le cadre d'une application à la mise en forme temporelle d'impulsions lasers femtosecondes, la réponse considérée sera spectrale. Elle sera développée dans le chapitre 4 à partir de l'étude suivante.

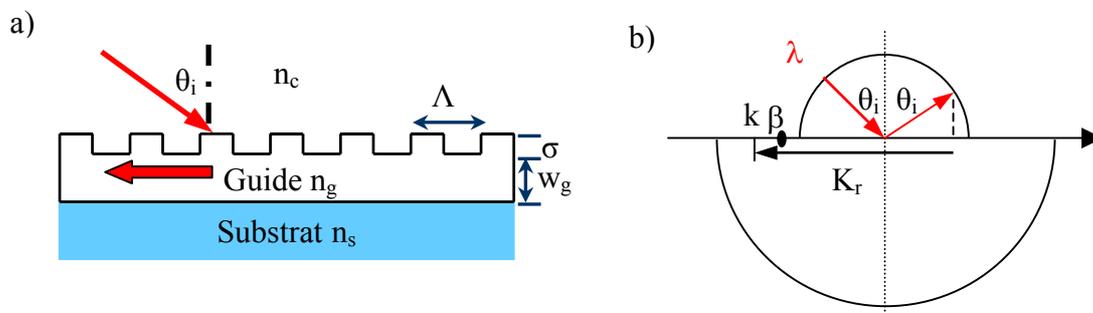


Figure 3.2 : a) schéma du réseau résonnant et b) représentation dans l'espace réciproque.

Le travail présenté ci-après [Pietroy 2007] repose sur l'étude de la fonction complexe $r(k) = s_{cc}(k)$ où le premier indice indique le milieu d'incidence et le deuxième indice le milieu d'émergence (c pour superstrat et s pour substrat). Nous nous intéressons donc à l'onde émergeant dans le milieu excitateur : la réflexion. Par analogie, cette étude pourra être étendue aux autres paramètres de la matrice de diffraction. Le cas simplifié considéré est donc le réseau résonnant d'ordre zéro excité via une onde plane monochromatique en provenance du superstrat visible sur la figure 3.2. Le mode guidé est couplé par l'intermédiaire de l'ordre -1 diffracté dans le guide.

L'onde réfléchiée par un réseau résonnant peut donc être vue comme étant la somme de deux contributions : le champ issu de la réflexion de Fresnel r_0 et le champ r_g piégé dans le guide puis rayonné. Le coefficient de réflexion d'une telle structure peut alors s'écrire en fonction de la projection sur l'interface-réseau du vecteur d'onde propagé notée k :

$$r(k) = r_0 + r_g(k) \quad (3.15)$$

$$\text{avec } k = \frac{2\pi n_c \sin \theta_i}{\lambda} - \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (3.16)$$

d'après la formule des réseaux en transmission (2.9). La résonance étant un phénomène localisé dans le spectre, la réflexion de Fresnel peut être considérée comme constante dans son voisinage. Comme nous venons de le voir dans la partie précédente à travers l'expression (3.7), la contribution correspondant au champ guidé r_g peut s'exprimer sous la forme :

$$r_g(k) = \frac{a_k}{k - k_p} \quad (3.17)$$

où a_k est la constante de découplage représentant l'amplitude complexe du champ guidé transmis dans le superstrat à la résonance et k_p le pôle de la structure pouvant s'écrire sous la forme $k_p = \beta + j\alpha$ (β est la constante de propagation du mode et α est le coefficient de rayonnement de la structure). Afin de comprendre la réponse d'un réseau résonnant lors d'une variation du paramètre k , nous allons étudier mathématiquement cette fonction complexe.

a. Etude mathématique de la contribution modale au coefficient de réflexion

Dans l'expression du coefficient de réflexion d'un réseau résonnant d'ordre zéro, la contribution modale $r_g(k)$ prend des valeurs complexes. L'étude de sa représentation graphique dans le plan

complexe est donc intéressante. Il faut alors chercher parties réelle et imaginaire de la fonction. Pour ce faire, posons $\text{Re} = \text{Re}(a_k)$ et $\text{Im} = \text{Im}(a_k)$:

$$r_g(k) = \frac{\text{Re} + j \cdot \text{Im}}{(k - \beta) - j\alpha} = \frac{[\text{Re} \cdot (k - \beta) - \text{Im} \cdot \alpha] + j[\text{Im} \cdot (k - \beta) + \text{Re} \cdot \alpha]}{(k - \beta)^2 + \alpha^2}$$

Il est connu en mathématiques que les fonctions polaires sont représentées par un cercle dans le plan complexe. Si la représentation mathématique de la fonction $r_g(k)$ dans le plan complexe est un cercle alors il existe une constante complexe z_0 , centre du cercle et indépendante de k , telle que le module du complexe $r_g(k) - z_0$ est constant et que sa phase décrit une variation continue de 2π suivant k . Si l'on pose $r_g(k) = x + jy$, on devrait donc vérifier que :

$$(x - \text{Re}(z_0))^2 + (y - \text{Im}(z_0))^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 = R^2 - |z_0|^2 + 2[x \cdot \text{Re}(z_0) + y \cdot \text{Im}(z_0)]$$

Pour ce faire, dérivons les deux membres de l'égalité par rapport à k avec les variables R , a_k et z_0 indépendantes de k :

$$\frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial k} = 2 \frac{\partial(x \cdot \text{Re}(z_0) + y \cdot \text{Im}(z_0))}{\partial k}$$

$$\frac{\partial \left[\frac{|a_k|^2}{(k - \beta)^2 + \alpha^2} \right]}{\partial k} = 2 \frac{\partial \left[\frac{(\text{Re} \cdot \text{Re}(z_0) + \text{Im} \cdot \text{Im}(z_0))(k - \beta) + (\text{Re} \cdot \text{Im}(z_0) - \text{Im} \cdot \text{Re}(z_0)) \cdot \alpha}{(k - \beta)^2 + \alpha^2} \right]}{\partial k}$$

Ainsi, nous en déduisons les expressions suivantes :

$$-|a_k|^2(k - \beta) = \left\{ \begin{array}{l} (\text{Re} \cdot \text{Re}(z_0) + \text{Im} \cdot \text{Im}(z_0))((k - \beta)^2 + \alpha^2) \\ -2[(\text{Re} \cdot \text{Re}(z_0) + \text{Im} \cdot \text{Im}(z_0))(k - \beta) + (\text{Re} \cdot \text{Im}(z_0) - \text{Im} \cdot \text{Re}(z_0))\alpha](k - \beta) \end{array} \right\}$$

$$|a_k|^2(k - \beta) = \left\{ \begin{array}{l} [\text{Re} \cdot \text{Re}(z_0) + \text{Im} \cdot \text{Im}(z_0)](k - \beta)^2 \\ + [2(\text{Re} \cdot \text{Im}(z_0) - \text{Im} \cdot \text{Re}(z_0))\alpha](k - \beta) \\ - [\text{Re} \cdot \text{Re}(z_0) + \text{Im} \cdot \text{Im}(z_0)]\alpha^2 \end{array} \right\} \quad (3.18)$$

Une égalité de deux polynômes du second degré en $(k-\beta)$ est obtenue. Elle doit être vérifiée pour toute fréquence spatiale k : il y a égalité des coefficients des deux polynômes. La fonction $r_g(k)$ sera donc décrite par un cercle dans le plan complexe à condition qu'une constante complexe z_0 vérifie le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \text{Re} \cdot \text{Re}(z_0) + \text{Im} \cdot \text{Im}(z_0) = 0 \\ 2(\text{Re} \cdot \text{Im}(z_0) - \text{Im} \cdot \text{Re}(z_0))\alpha = |a_k|^2 \end{cases}$$

afin d'assurer d'une part l'annulation des termes d'ordres 2 et 0 du second membre, puis l'égalité des termes d'ordre 1 des deux membres de l'expression (3.18). Ceci nous conduit au système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \text{Re}(z_0) = -\frac{\text{Im}}{\text{Re}} \text{Im}(z_0) \\ 2\frac{|a_k|^2}{\text{Re}}\alpha \text{Im}(z_0) = |a_k|^2 \end{cases}$$

En résolvant ce système, nous obtenons par conséquent :

$$\text{Re}(z_0) = \frac{-\text{Im}}{2\alpha} \text{ et } \text{Im}(z_0) = \frac{\text{Re}}{2\alpha}$$

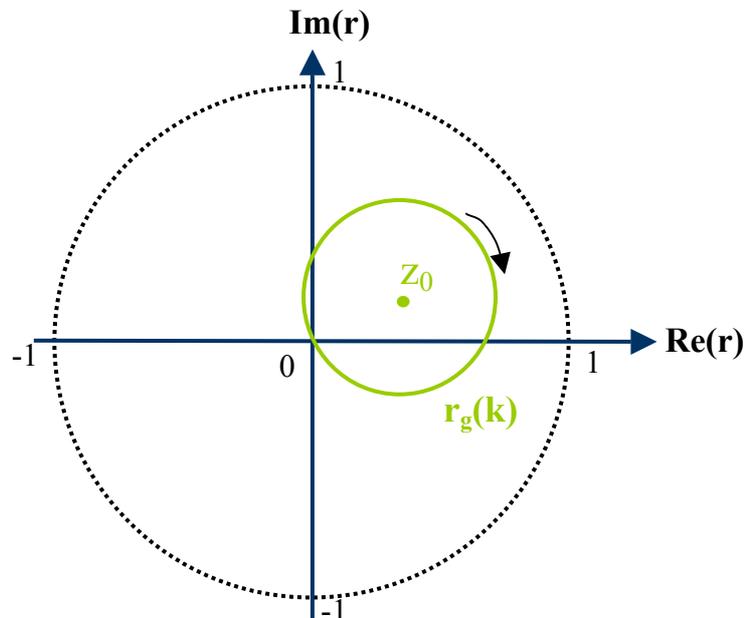


Figure 3.3 : représentation dans le plan complexe de la contribution modale de la réflexion par un réseau résonnant

Comme le montre la figure 3.3, il vient d'être démontré qu'il existe une constante complexe $z_0 = j\frac{a_k}{2\alpha}$ telle que l'expression $|r_g(k) - z_0|$ est toujours constante. Ce résultat implique que la représentation dans le plan complexe du coefficient r_g est au moins un arc de cercle centré sur le point complexe z_0 . D'après l'expression (3.17) de la contribution modale à la réflexion r_g , le complexe $(r_g(k) - z_0)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} r_g(k) - z_0 &= a_k \left[\frac{1}{(k - \beta) - j\alpha} - \frac{j}{2\alpha} \right] \\ &= a_k \frac{2\alpha(k - \beta) + j((k - \beta)^2 + \alpha^2)}{(k - \beta)^2 + \alpha^2} \\ &= -j \frac{a_k}{(k - \beta)^2 + \alpha^2} (\alpha - j(k - \beta))^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, sa phase vaut :

$$\varphi_g(k) = \varphi_k - \frac{\pi}{2} - 2 \arctan\left(\frac{k - \beta}{\alpha}\right)$$

où φ_k est la phase de la constante de découplage a_k .

Lorsque le nombre d'onde varie de $-\infty$ à $+\infty$, la phase du complexe $r_g(k)$ effectue, de façon continue et dans le sens anti-trigonométrique, un tour complet (2π) dans le plan complexe autour du point z_0 alors que son module reste constant : la représentation dans le plan complexe de la quantité $r_g(k)$ est bien un cercle centré sur le complexe $z_0 = j\frac{a_k}{2\alpha}$.

De plus, nous constatons que $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} r_g(k) = 0$. Ce résultat est la traduction mathématique du fait que l'onde n'est pas couplée hors résonance dans le guide. Cela implique que le cercle doit passer par l'origine du repère complexe. En conséquence, son rayon R est tout simplement égal au module de z_0 , c'est à dire $R = \frac{|a_k|}{2\alpha}$. Nous pouvons également noter que, suivant une variation vers les nombres d'ondes croissants, la phase diminue. L'apex du coefficient de réflexion tourne donc sur ce cercle dans le sens direct. Si la longueur d'onde λ varie, le sens de parcours sur le cercle sera inversé.

b. Réflexion par un réseau résonnant

Si la réflexion de Fresnel r_0 est constante au voisinage de la résonance, le coefficient de réflexion dans le plan complexe sera tout simplement la fonction $r_g(k)$, décrivant la partie résonnante de la réflexion, translatée de la quantité r_0 . Le coefficient de réflexion $r(k)$ s'écrit donc :

$$r(k) = r_0 + \frac{a_k}{k - k_p} \quad (3.19)$$

La représentation graphique sera toujours un cercle de rayon $R = \frac{|a_k|}{2\alpha}$ mais centré sur le point complexe $C = r_0 + z_0$. De plus, ce point C doit impérativement être contenu dans le cercle unité puisque le module du coefficient de réflexion ne peut être supérieur à 1. Il doit également atteindre cette valeur pour la réflexion anormale au voisinage de la résonance. Ces deux limitations impliquent que le cercle représentant le coefficient de réflexion doit être tangent au cercle unité. Ce dernier point caractérise la réflexion anormale r_M . Les deux cercles étant théoriquement tangents, leurs diamètres passant par ce point sont confondus. Par conséquent, le point de réflexion anormale, le centre du cercle de réflectivité et l'origine du plan complexe sont alignés.

La représentation du coefficient de réflexion d'un réseau résonnant dans le plan complexe est un cercle de rayon $R = \frac{|a_k|}{2\alpha} \leq 1$, centré sur le point $C = r_0 + j\frac{a_k}{2\alpha}$, et passant par le point de réflexion de Fresnel r_0 correspondant à des valeurs de coefficient de réflexion hors résonance (k tend vers $\pm\infty$). Ce cercle est également tangent au cercle unité à la réflexion anormale r_M , c'est à dire lorsque $k = k_M$. Cette caractéristique implique que le rayon du cercle unité joignant l'origine du repère complexe au point de tangence est aussi porteur d'un rayon du cercle de réflexion. Le centre C de ce cercle est par conséquent compris entre le point tangent r_M et l'origine O du repère. La phase φ_M induite à la réflexion anormale est donc la même que celle du centre du cercle de réflexion : $\varphi_M = \arg[C]$. De plus, si le point de réflexion anormale r_M est le point le plus éloigné de l'origine du repère complexe, alors le point qui lui est diamétralement opposé sur la représentation graphique du coefficient de réflexion est la position la plus proche de l'origine du repère. Ce point noté r_m correspond donc à un minimum de réflexion avec la condition d'excitation $k = k_m$. Les points r_M et r_m ont donc la même phase modulo π . Ils sont des extrémités d'un diamètre du cercle de réflexion :

$$C = \frac{r_M + r_m}{2} \quad (3.20)$$

Le coefficient de réflexion à la résonance r_β , cas particulier où $k = \beta$, est également intéressant dans le but de déterminer les différents paramètres de la fonction. Nous obtenons alors un coefficient de réflexion valant :

$$r_\beta = r(\beta) = r_0 + \frac{a_k}{-j\alpha} = r_0 + j\frac{a_k}{\alpha} = 2C - r_0$$

On peut alors remarquer que $r_0 - C = C - r_\beta$. Les points r_0 et r_β sont donc diamétralement opposés sur le cercle de réflexion et par conséquent symétriques par rapport à C . On obtient donc également l'expression suivante pour le centre du cercle :

$$C = \frac{r_0 + r_\beta}{2} \quad (3.21)$$

La figure 3.4 schématise la représentation du coefficient de réflexion à la résonance sur un réseau résonnant.

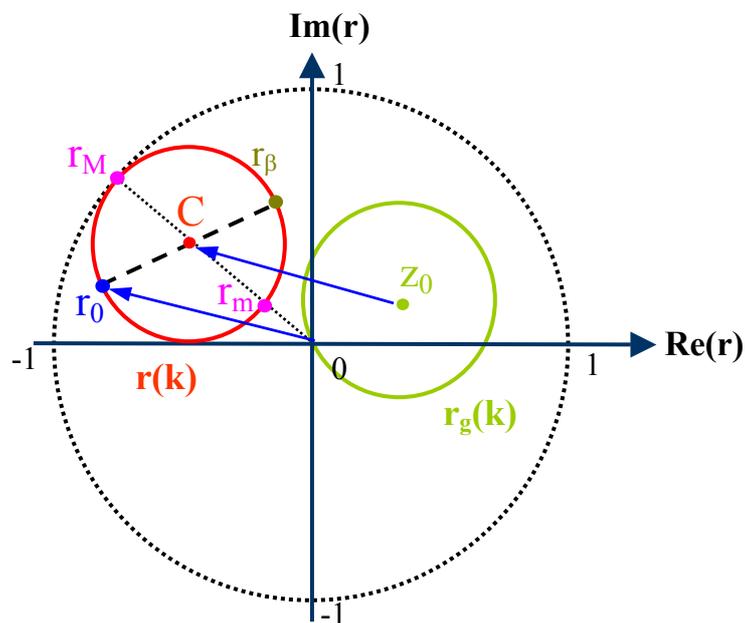


Figure 3.4 : représentation du coefficient de réflexion d'un réseau résonnant dans le plan complexe

Dans le cas particulier de réseaux de faibles profondeurs, la phase à la résonance φ_M est connue comme étant π . La réflexion anormale est caractérisée par un coefficient de réflexion

$r(k_M) = r_M = -1$. Le cercle étant tangent en ce point au cercle unité, le centre C de la représentation de $r(k)$ est donc un réel purement négatif : $C = \frac{|a_k|}{2\alpha} - 1$.

Cette étude considère une structure parfaite sans perte. Cependant, dans la réalité, un réseau résonnant subit toujours des pertes par diffusion aux interfaces ou encore par absorption d'un matériau, notamment dans le cas métallique. Il en résulte tout d'abord une légère diminution de la réflexion de Fresnel théorique r_0 . Mais la principale conséquence est une augmentation de la partie imaginaire du pôle k_p de la matrice de diffraction, jusqu'ici assimilée au coefficient de rayonnement α . $\text{Im}(k_p)$, qui représente le taux de fuite de l'onde guidée hors du réseau résonnant, est donc en réalité la somme du coefficient de rayonnement α et d'un facteur de pertes de la structure α_{abs} . Au niveau de sa représentation dans le plan complexe, le coefficient de réflexion du réseau résonnant avec pertes est toujours un cercle de rayon $R = \frac{|a_k|}{2\text{Im}(k_p)}$ inférieur à celui

de la même structure sans perte. Ces pertes induisent également une réflexion anormale dont le module est inférieur à 1. Le cercle de réflexion dans le cas d'un réseau résonnant à perte est donc un cercle contenu dans le cercle unité et de rayon diminué par rapport au cercle théorique.

Nous avons donc montré que le coefficient de réflexion de tout réseau résonnant d'ordre zéro est de la forme (3.19). Il a également été démontré que sa représentation graphique dans le plan complexe est un cercle tangent au cercle unité. Cependant, les profils d'amplitude et de phase du coefficient de réflexion d'une telle structure dépendront de la position de l'origine du repère complexe par rapport à ce cercle. C'est ce que nous allons voir dans la partie suivante.

3.3 Réponses en amplitude et en phase d'un réseau résonnant en réflexion

Nous avons vu que, hors résonance, le coefficient de réflexion n'est pas affecté par le guide et doit donc tendre vers la réflexion de Fresnel : la variation du coefficient de réflexion n'est que locale. Trois cas de dépendance spectrale de phase sont envisageables suivant le rayon du cercle représentant le coefficient de réflexion d'un réseau résonnant dans le plan complexe. Ils diffèrent suivant la position de l'origine du plan complexe par rapport à ce cercle. La condition limite est

lorsque le cercle passe par l'origine du repère, c'est à dire que son rayon vaut $R = \frac{|a_k|}{2\alpha} = \frac{1}{2}$.

D'après l'équation (3.6), on peut écrire cette condition de manière plus physique :

$$|\eta_c A_{g_{MAX}}| = |A_i|$$

Ainsi, le cercle contiendra l'origine du repère si le maximum du champ modal diffracté dans le superstrat est en module supérieur au champ incident.

Dans chaque cas, un exemple de structure monomode est simulé numériquement à l'aide de la méthode modale vraie [Lyndin 2006]. Les résultats montrent les profils de phase et d'amplitude obtenus pour le champ électrique polarisé TE, excitant le mode fondamental du réseau résonnant, ainsi que la représentation du coefficient de réflexion dans le plan complexe.

a. $R < 1/2$: le cercle exclut l'origine du plan complexe ($|a_k| < \alpha$)

Considérons le cas où l'origine du plan complexe est à l'extérieur du cercle de réflexion. Ce cas correspond à un cercle de réflexion de rayon inférieur à $1/2$ et l'amplitude du champ modal diffracté dans le superstrat est inférieure au module du champ incident. La variation de phase induite par la résonance n'est alors qu'une oscillation autour d'une valeur constante (phase de la réflexion de Fresnel, hors-résonance). L'allure de la variation d'amplitude dépend de la position sur le cercle de la réflexion de Fresnel par rapport au maximum et au minimum de réflexion.

La structure de la figure 3.5 est simulée numériquement à titre d'exemple. Le paramètre d'étude est la longueur d'onde, ce qui implique que l'on tourne dans le sens trigonométrique lors d'une augmentation de ce paramètre. Les réponses en amplitude et en phase ainsi que la représentation du coefficient de réflexion dans le plan complexe sont données sur cette même figure. On observe bien un maximum et un minimum au niveau de l'amplitude. Le premier rencontré sur la courbe étant le minimum, la réflexion de Fresnel est comprise suivant le sens trigonométrique entre la réflexion anormale et le minimum de réflexion sur le cercle. La phase est, quant à elle, conforme aux prédictions : une légère oscillation autour de la phase de la réflexion de Fresnel est observée.

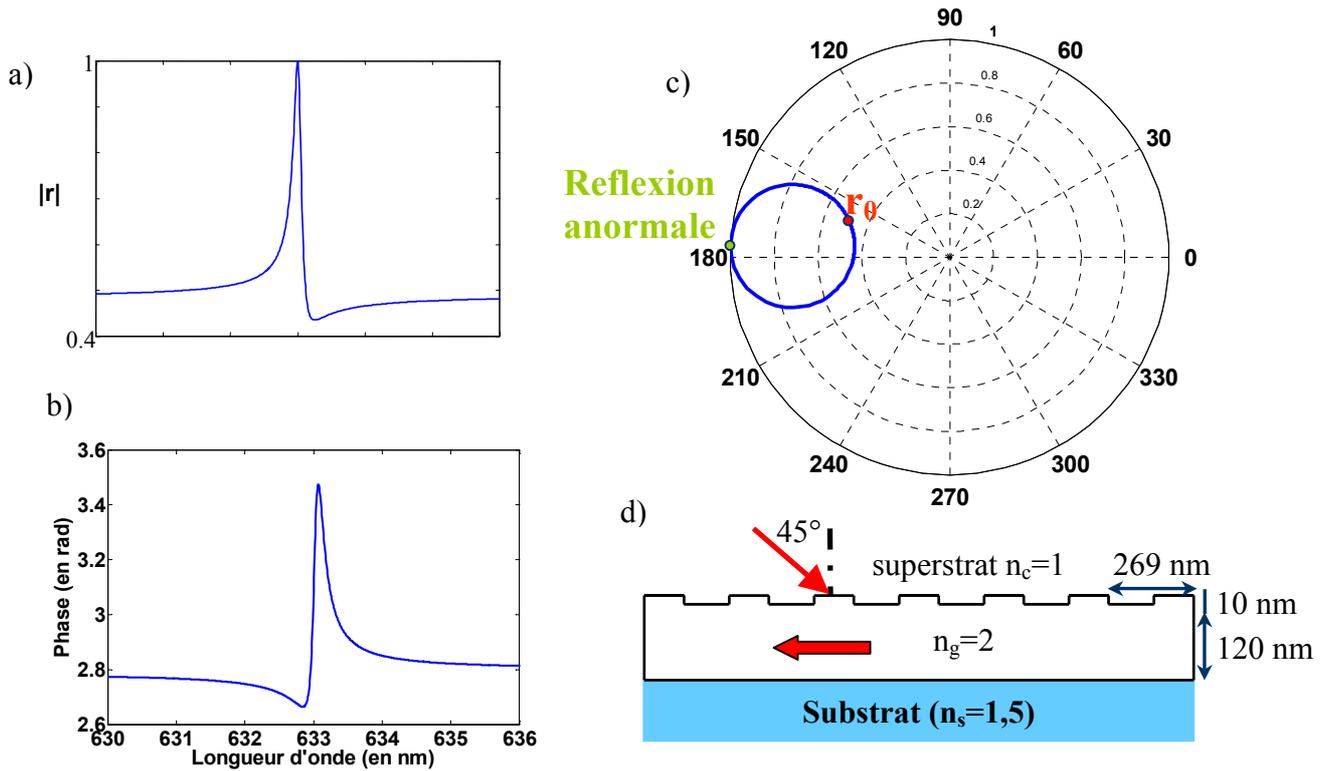


Figure 3.5 : exemple de structure dont le cercle de réflexion exclut l'origine du repère complexe.
 a) réponse spectrale en amplitude, b) réponse spectrale en phase, c) représentation dans l'espace complexe, d) schéma de la structure.

b. $R = 1/2$: le cercle passe par l'origine du plan complexe ($|a_k| = \alpha$)

Considérons le cas où le cercle de réflexion passe par l'origine du plan complexe. Ce cas correspond à un cercle de réflexion dont le rayon est égal à $1/2$ et l'amplitude du champ modal diffracté dans le superstrat est égale au module du champ incident. Les profils d'amplitude et de phase obtenus autour de la résonance dépendent alors de la réflexion de Fresnel. Si celle-ci est nulle, la phase induite à travers la résonance sera continue et monotone, variant de $\pi/2$ à $3\pi/2$. Si la réflexion de Fresnel est non-nulle, la phase induite sera caractérisée par une "discontinuité" lors du passage de $3\pi/2$ à $\pi/2$.

L'exemple suivant donne les caractéristiques spectrales obtenues en module et en phase pour la structure de la figure 3.6. Le paramètre d'étude est la longueur d'onde, ce qui implique que l'on tourne dans le sens trigonométrique lors d'une augmentation de ce paramètre. Le guide d'onde est équivalent à une lame demi-onde séparant deux milieux de même indice de réfraction. Ce cas particulier correspond à une réflexion de Fresnel nulle. Par conséquent, le minimum de réflexion

et la réflexion de Fresnel sont confondus. Ce minimum est donc rejeté à l'infini sur la courbe d'amplitude et la réponse n'est caractérisée que par un maximum de réflexion. La phase est, quant à elle, une fonction continue et monotone d'amplitude π . Elle prend une forme semblable à une fonction arctangente.

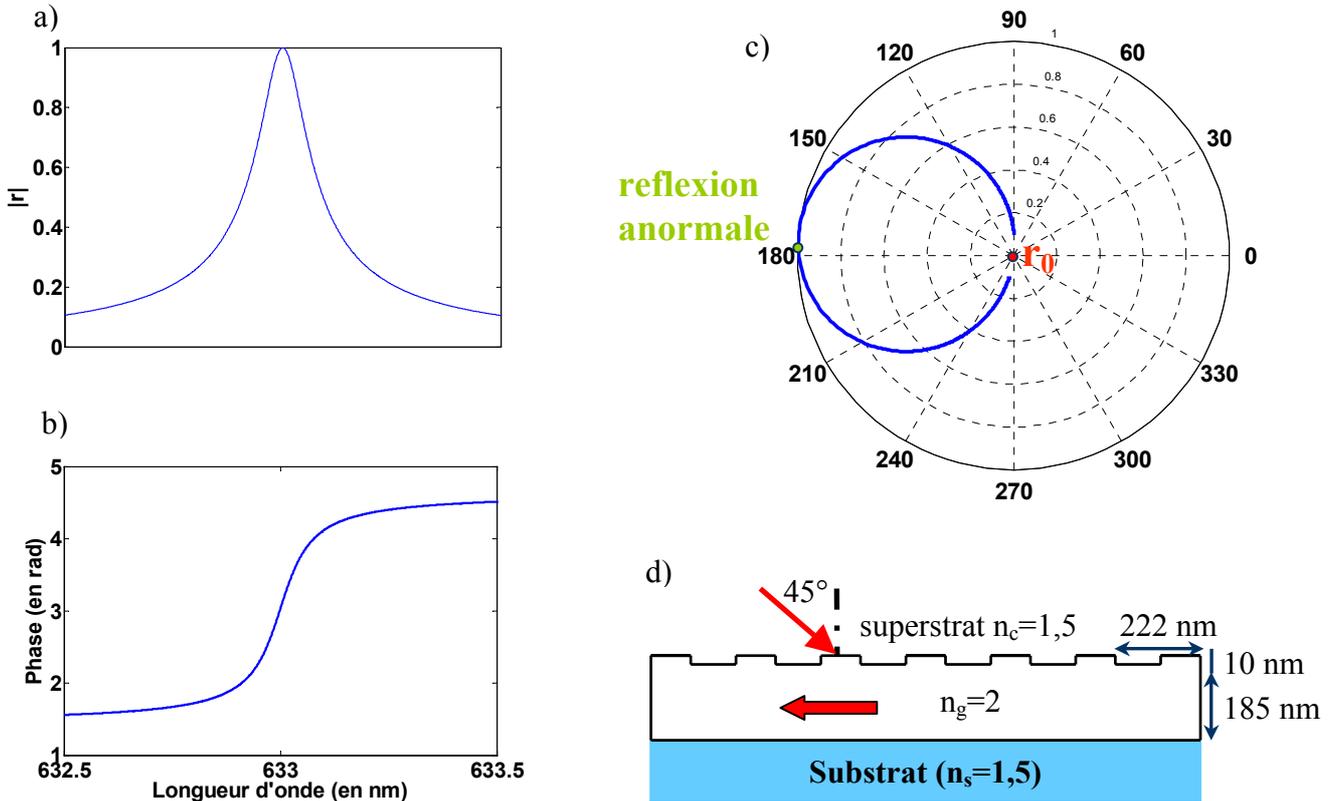


Figure 3.6 : exemple de structure dont le cercle de réflexion passe par l'origine du repère complexe. a) réponse spectrale en amplitude, b) réponse spectrale en phase, c) représentation dans l'espace complexe, d) schéma de la structure.

c. $R > 1/2$: le cercle inclut l'origine du plan complexe ($|a_k| > \alpha$)

Enfin, considérons le cas où l'origine du plan complexe est à l'intérieur du cercle de réflexion. Ce cas correspond à un cercle de réflexion dont le rayon est supérieur à $1/2$: l'amplitude du champ modal diffracté dans le superstrat est alors supérieure au module du champ incident. Dans ce cas, le passage à travers la résonance implique que la phase du coefficient de réflexion décrit un tour complet dans le plan complexe. Cette phase variera donc de 2π de façon continue et monotone.

La structure de la figure 3.7 est simulée numériquement à titre d'exemple. Les réponses en amplitude et en phase ainsi que la représentation dans le plan complexe sont données sur cette même figure. On observe toujours un maximum et un minimum au niveau de l'amplitude. La phase est, quant à elle, assimilable à une fonction arctangente d'amplitude 2π . Remarquons toutefois que le réseau de diffraction est profond, ce qui explique une phase à la résonance φ_M différente de π .

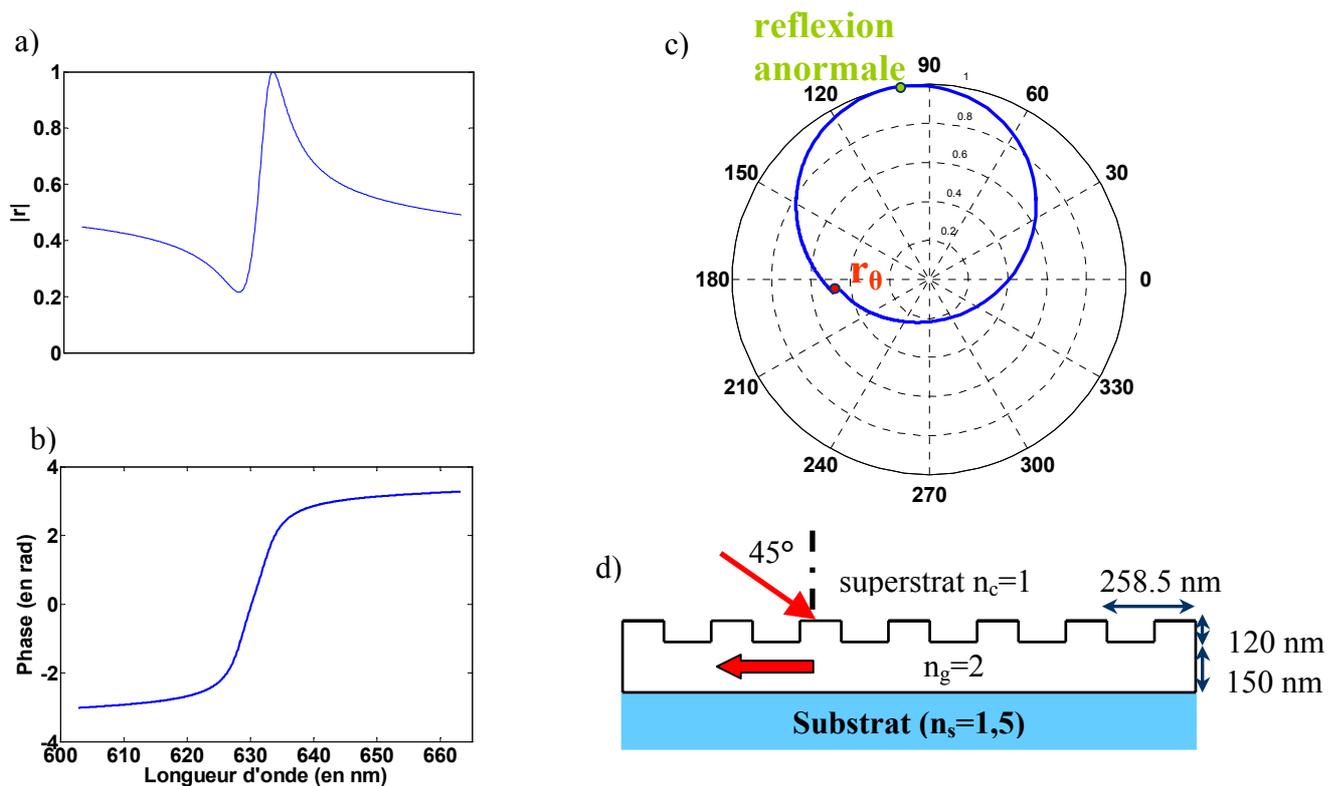


Figure 3.7 : exemple de structure dont le cercle de réflexion inclut l'origine du repère complexe.

a) réponse spectrale en amplitude, b) réponse spectrale en phase, c) représentation dans l'espace complexe, c) schéma de la structure.

3.4 Conclusion

L'étude des coefficients de réflexion et transmission d'un réseau résonnant dans l'ordre zéro a été menée. Ils peuvent s'écrire sous la forme d'une partie complexe constante correspondant à la

réflexion ou transmission hors résonance ajoutée à une partie polaire introduite par la résonance elle-même. Un lien a été fait entre les deux différentes approches existantes : *l'approche mathématique polaire* et *l'approche physique phénoménologique des modes couplés*. Les différents paramètres polaires ont été exprimés à l'aide des paramètres phénoménologiques. Une meilleure compréhension de l'évolution de ces premiers en fonction des paramètres opto-géométriques est donc apportée par cette étude.

L'étude plus particulière de la fonction mathématique caractérisant le coefficient de réflexion a montré que ce dernier est représenté dans le plan complexe par un cercle. Quatre points sont remarquables sur ce cercle :

- la réflexion de Fresnel r_0 correspondant à un coefficient de réflexion hors résonance,
- la réflexion anormale r_M correspondant à un coefficient de réflexion maximal proche de 1,
- la réflexion à la résonance r_β correspondant au coefficient de réflexion lorsque le champ guidé est maximal,
- le minimum de réflexion r_m .

Il est à noter que les réflexions de Fresnel r_0 et à la résonance r_β sont diamétralement opposées sur le cercle de réflexion, tout comme la réflexion anormale r_M et le minimum de réflexion r_m . L'ensemble de ces résultats a été publié dans la référence [Pietroy 2007].

Enfin, trois exemples de réponses d'un réseau résonnant sont donnés en fonction du diamètre du cercle de réflexion. La forme de la phase est le paramètre qui variera le plus d'un cas à l'autre puisqu'elle dépend fortement de la position de l'origine du plan complexe par rapport au cercle de réflexion.

La réponse d'un réseau résonnant est donc connue en terme de fréquence spatiale k . Elle est exprimée à l'aide de paramètres phénoménologiques physiquement compréhensibles. Cependant, en vue d'une application à la mise en forme temporelle d'impulsions laser femtoseconde, cette réponse doit être connue en terme de longueur d'onde λ . En effet, c'est la modulation en amplitude et en phase spectrales qui permettra de moduler temporellement l'impulsion. Le chapitre suivant développe cette étude aboutissant par la même occasion à une méthode globale de caractérisation d'un réseau résonnant.