CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASE DE L'ANALYSE COMPLEXE

Dans ce chapitre on va rappeler quelques concepts fondamentaux de l'analyse complexe. Considérons une fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

1.1 Fonctions analytiques

Définition 1.1. *On dit que f est une fonction analytique au point $z_0 \in \mathbb{C}$ si et seulement si f est différentiable sur un voisinage de z_0.*

Remarque 1.1. *On dit qu'une fonction f est entière, si elle est analytique sur $\mathbb{C}$.*

Notation 1.1. *On note $\mathcal{A}(D)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur un ensemble D.*

Définition 1.2. *Soit f une fonction analytique au point z_0. On dit que z_0 est un zéro régulier de f si $f(z_0) = 0$.*

1.1.1 La formule intégrale de Cauchy

Théorème 1.1. *[1] Si f est une fonction analytique sur $D \cup \Gamma$ où Γ est la frontière de D et $z_0 \in D$ alors, on a*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Cette expression est appelée la formule intégrale de Cauchy, qui admet sous les mêmes hypothèses la généralisation suivante :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, n \in \mathbb{N}.$$

Formule de la moyenne

Si Γ est un cercle de centre z_0 et de rayon R_0, alors l'intégrale de Cauchy s'écrit sous la forme

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R_0 e^{i\varphi}) d\varphi.$$

1.1.2 Théorème de Liouville

Théorème 1.2. *[18] Si pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

(i) F est analytique.

(ii) F est bornée.

Alors F est constante sur $\mathbb{C}$.

Preuve. On a d'après la formule intégrale de Cauchy :

$$F^{'}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi, \tag{1.1}$$

où $\Gamma : |\xi - z| = R$ (R est très grand).
Comme F est bornée (i.e $\exists M > 0$ tel que $|F(z)| \leq M$), d'après (1.1), on a

$$\begin{aligned} |F^{'}(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{|f(\xi)|}{R^2} d\xi \\ &\leq \frac{2\pi R M}{2\pi R^2} \\ &\leq \frac{M}{R}. \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand R tend vers $+\infty$, on obtient$|F^{'}(z)| = 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Ce qui implique $F^{'}(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}$. D'où F est constante. $\square$

1.1.3 Principe de maximum

Théorème 1.3. *[7] Soit f une fonction analytique dans le domaine borné D et continue sur $\bar{D} = D \cup \partial D$. Alors, $|f|$ atteint son maximum uniquement sur la frontière ∂D.*

Preuve. On pose $f = u + iv$.
On a $|f(z)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$.
Comme $|f|$ est continue sur $\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$ et $\bar{D}$ est compact, alors $|f|$ atteint son maximum en un point $z_0 \in \bar{D}$ $(z_0 = x_0 + iy_0)$.
On pose

$$M = |f(z_0)| = \max_{z \in \bar{D}} |f(z)|. \tag{1.2}$$

Supposons que z_0 est un point intérieur à D (i.e. $z_0 \in \mathring{D}$).
Comme $\mathring{D}$ est un ensemble ouvert, alors

$$\exists R_0 > 0 \textit{ tel que } \bar{K_0} : |z - z_0| < R_0 \subset D,$$

On pose $z = z_0 + R_0 e^{i\varphi}$.
Alors d'après la formule de la moyenne, on a

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R_0 e^{i\varphi}) d\varphi. \tag{1.3}$$

Donc, à partir de (1.2) et (1.3), on a

$$\begin{aligned} 2\pi M &= 2\pi |f(z_0)| \\ &= |\int_0^{2\pi} f(z_0 + R_0 e^{i\varphi}) d\varphi| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |f(z_0 + R_0 e^{i\varphi})| d\varphi \\ &\leq 2\pi M. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + R_0 e^{i\varphi})| d\varphi = 2\pi M. \tag{1.4}$$

Maintenant, montrons que $|f(\xi)| = M, \forall \xi \in \partial \bar{K_0} : |\xi - z_0| = R_0$
Si $|f(\xi)| = M$, on a $|f(\xi)| \leq M, \forall \xi \in \partial \bar{k_0}$
Par l'absurde, supposons que $\exists \xi_0 \in \partial \bar{K_0}$, tel que :$|f(\xi_0)| < M$
Comme $|f|$ est continue sur K_0, alors

$\exists \varepsilon > 0, \exists [\varphi_1, \varphi_2]$, tel que :$|f(\xi)| \leq M - \varepsilon$ pour $\xi = z_0 + R_0 e^{i\varphi}, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$.
Donc, on a

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{2\pi} |f(\xi)| d\varphi &= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} |f(\xi)| d\varphi + \int\limits_0^{\varphi_1} |f(\xi)| d\varphi + \int\limits_{\varphi_2}^{2\pi} |f(\xi)| d\varphi \\
&\leq (M - \varepsilon)(\varphi_2 - \varphi_1) + M(2\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)) \\
&= 2\pi M - \varepsilon(\varphi_2 - \varphi_1) \\
&< 2\pi M,
\end{aligned}$$

Contradiction avec (1.4).
D'où $|f(\xi)| = M, \forall \xi \in \partial \bar{K}_0 : |\xi - z_0| = R_0$.
De même $|f(\xi)| = M, \forall \xi \in \partial \bar{K}_1 : |\xi - z_0| = R_1 (0 < R_1 < R_0)$.
D'où $|f(\xi)| = M, \forall \xi \in \partial \bar{K}_0 : |\xi - z_0| \leq R_0$.
Soit $z \in D$ et L la courbe qui relie z_0 à z.
On va montrer que $|f(z)| = M, \forall z \in \mathring{D}$.
On a $|f(z_1)| = M$ car
$\exists z_n \in \bar{K}_0$ tel que : $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = z_1$, alors

$$\begin{aligned}
|f(z_1)| &= |f(\lim_{n \to +\infty} z_n)| = |\lim_{n \to +\infty} f(z_n)| \\
&= |\lim_{n \to +\infty} M| \\
&= M.
\end{aligned}$$

D'où, on a

$$|f(\xi)| = M, \forall \xi \in \partial \bar{K}_1 : |\xi - z_1| \leq R_1,$$

après un nombre fini d'opérations, on obtient

$$|f(z)| = M, \forall \xi \in \partial \bar{K}_n : |\xi - z_n| \leq R_n,$$

Donc, $|f(\xi)| = M, \forall \xi \in D$. D'où $|f|$ est constante sur $D = \mathring{D}$, alors $|f|$ ne peut pas atteindre son maximum dans un point intérieur de D. Comme $|f|$ est continue sur $\bar{D}$ alors elle atteint son maximum sur $\bar{D}$. D'où le maximum est atteint sur ∂D.

□

1.2 Fonctions méromorphes

1.2.1 Série de Laurent

Théorème 1.4. *[1] Si f est analytique sur la couronne $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq r < |z - z_0| < R\}$, alors f peut s'écrire sous la forme d'une série de Laurent en tout point z de cette couronne i.e. si $z \in D$ alors on a*

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k (z - z_0)^k \\ &= \sum_{-\infty}^{-1} C_k (z - z_0)^k + \sum_{0}^{+\infty} C_k (z - z_0)^k \end{aligned}$$

où $C_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi$,
où Γ est un conteur fermé contenu dans D et contient z_0 dans son intérieur.

Remarque 1.2.

1. *$\sum\limits_{-\infty}^{-1} C_k (z - z_0)^k$ est dite la partie principale de la série de Laurent.*

2. *$\sum\limits_{0}^{+\infty} C_k (z - z_0)^k$ est dite la partie régulière de la série de Laurent.*

1.2.2 Points singuliers d'une fonction

Définition 1.3. *Si f n'est pas analytique en $z_0 \in \mathbb{C}$, alors z_0 est un point singulier de f.*

Définition 1.4. *Le point singulier $z_0 \in \mathbb{C}$ est isolé s'il existe $r > 0$ tel que $B(z_0, r)$ ne contient pas d'autres points singuliers.*

1.2.3 Classification des points singuliers (selon le développement de Laurent)

Définition 1.5. *Soit f une fonction analytique sur $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq r < |z - z_0| < R\}$ où z_0 est un point singulier de f.*
Si $C_k = 0, \forall -\infty < k < -1$, alors on dit que z_0 est un point singulier eliminable.

Définition 1.6. *On dit que le point singulier isolé z_0 de f est essentiel si la partie principale de la série de Laurent de f au voisinage de z_0 contient un nombre infini de termes.*

Définition 1.7. *On dit que le point singulier isolé z_0 de f est un pôle de f si la partie principale de la série de Laurent contient un nombre fini de termes.*
(i.e. $f(z) = \sum_{k=-n_0}^{+\infty} C_k(z-z_0)^k$ *où* $c_{-n_0} \neq 0$*).*
On dit dans ce cas que z_0 est un pôle de $f(z)$ d'ordre n_0.

Théorème 1.5. *[6] Soit z_0 un point singulier isolé de f, on a l'équivalence entre*
i) z_0 est un pôle d'ordre n de $f(z)$.
ii) z_0 est un zéro d'ordre n de $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$.

Remarque 1.3.

Si le point singulier isolé z_0 est un pôle d'ordre 1, alors on dit que z_0 est un pôle simple.

Exemple 1.1.

La fonction $g(z) = \frac{1}{1+z^2}$ est analytique dans $\mathbb{C}\backslash\{i, -i\}$.
On remarque que i et $-i$ sont des zéros de la fonction $h(z) = \frac{1}{g(z)}$, donc i et $-i$ sont des pôles de g.

Remarque 1.4.

Les fonctions analytiques qui ont uniquement des pôles comme points singuliers sont appelées fonctions méromorphes sur D et on a

$$f \text{ méromorphe sur} D \Leftrightarrow f = \frac{g}{h},$$

où $g, h \in \mathcal{A}(D)$.

1.3 Résidu des fonctions

Soit f une fonction analytique dans la couronne $K : 0 < |z-a| < \rho$, $a \in \mathbb{C}$. Dans K on a

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n,$$

où $C_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$.

Définition 1.8. *On appelle C_{-1} le résidu de f au point $z = a$. On le note $\underset{z=a}{Res} f$ ou $Res(f, a)$ (i.e. $\underset{z=a}{Res} f = C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(\xi) d\xi$).*
où Γ est fermé dans K.

1.3.1 Résidu dans le cas d'un pôle

a) Résidu de f dans le cas d'un pôle simple $z = a$

On a dans ce cas :

$$\underset{z=a}{Res} f = C_{-1} = \lim_{z \to a} (z - a) f(z).$$

b) Résidu de f dans le cas d'un pôle multiple $z = a$ d'ordre m

On a dans ce cas :

$$\underset{z=a}{Res} f = C_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m f(z)).$$

Remarque 1.5.

Si la fonction f peut être représentée dans le voisinage du point z_0 comme le quotient de deux fonctions analytiques

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

de plus, si $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, alors que $\psi^{'}(z_0) \neq 0$, c'est-à-dire si z_0 est un pôle simple de la fonction f, alors

$$Res(f, z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi^{'}(z_0)}.$$

1.3.2 Théorème des résidus de Cauchy

Théorème 1.6. *[13] Si une fonction f est analytique sur la frontière C d'un domaine D et partout à l'intérieur de ce domaine, sauf en un nombre fini de points singuliers $z_1, z_2, ..., z_n$, alors*

$$\int\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{Res} f(z).$$

Preuve. D'après le théorème de Cauchy dans le cas multi-connexe, on a

$$\int\limits_{C \cup C_1^- \cup C_2^- \cup ... \cup C_n^-} f(z)dz = 0.$$

Ce qui implique

$$\int\limits_C f(z)dz + \int\limits_{C_1^-} f(z)dz + \int\limits_{C_2^-} f(z)dz + ... + \int\limits_{C_n^-} f(z)dz = 0,$$

Donc

$$\begin{aligned} \int\limits_C f(z)dz &= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{C_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i C_{-1,k} \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{Res} f(z). \end{aligned}$$

□

Proposition 1.1. *[15] Soient $r > 0$ et f une fonction analytique sur $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$.*
Supposons que f n'a pas de zéros dans D, alors pour tout $z \in int(D)$, on a

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{(r^2 - |z|^2) \log f(\xi)}{(r^2 - \xi\bar{z})(\xi - z)} d\xi. \tag{1.5}$$

Preuve. On distingue deux cas :

1. Si z=0, d'après le théorème de Cauchy, on a

$$\begin{aligned} \log f(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{\log f(\xi)}{\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{(r^2 - |0|^2) \log f(\xi)}{(r^2 - \xi 0)(\xi - 0)} d\xi. \end{aligned}$$

2. Si $z \neq 0$, on pose

$$h(\xi) = \frac{(r^2 - |z|^2) \log f(\xi)}{(r^2 - \xi\bar{z})(\xi - z)},$$

   On a $\xi_0 = z$ est un pôle simple de h car
   $\frac{1}{h(\xi)} = 0 \Leftrightarrow r^2 - \xi\bar{z} = 0$ ou $\xi - z = 0$.
   Mais, on remarque que si $\xi = \frac{r^2}{\bar{z}}$, alors $|\xi| = \frac{r^2}{|\bar{z}|} > r$, d'où $\xi \notin D$, donc $\xi_0 = z$ est le seul pôle simple de h.
   Comme $\xi_0 = z$ est un pôle simple de h, d'après le théorème de Résidu, on obtient

$$\begin{aligned} \int\limits_{|\xi|=r} h(\xi) d\xi &= 2\pi i \lim_{\xi \to z} (\xi - z) h(\xi) \\ &= 2\pi i \lim_{\xi \to z} \frac{(r^2 - z\bar{z}) \log f(\xi)}{(r^2 - \xi\bar{z})} \\ &= 2\pi i \log f(z), \end{aligned}$$

   D'où

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{(r^2 - |z|^2) \log f(\xi)}{(r^2 - \xi\bar{z})(\xi - z)} d\xi.$$

□

Corollaire 1.1. *[15]*

1. *En utilisant la formule* (1.5) *et en posant*

$$\xi = re^{i\varphi} \quad et \quad z = \sigma e^{i\theta},$$

tel que $0 \leq \sigma < r$, *on obtient*

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{(r^2 - \sigma^2) \log f(re^{i\varphi})}{r^2 - 2r\sigma \cos(\varphi - \theta) + \sigma^2} d\varphi. \tag{1.6}$$

2. *En séparant la partie réelle dans la formule* (1.6), *on obtient*

$$\log |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{(r^2 - \sigma^2) \log |f(re^{i\varphi})|}{r^2 - 2r\sigma \cos(\varphi - \theta) + \sigma^2} d\varphi. \tag{1.7}$$

1.3.3 Le résidu logarithmique

Théorème 1.7. *[13] Soient f une fonction analytique dans G à l'exception des pôles et D un sous ensemble borné tel que $D \cup \Gamma \subset G$, où Γ est la frontière de D.*
Si f ne possède ni pôles ni zéros sur Γ alors, on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f^{'}(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

où N est le nombre de zéros de f avec multiplicité et P est le nombre de pôles de f avec multiplicité dans D.

Exemple 1.2. *Soit $f(z) = z^2 - 2z + 1$ une fonction analytique*
On a $z = 1$ est un zéro d'ordre 2 de f, alors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f^{'}(z)}{f(z)} dz = 2.$$

1.3.4 Principe de l'argument

Théorème 1.8. *[13] Soient f une fonction analytique dans G a l'exception des pôles et D un sous ensemble borné tel que $D \cup \Gamma \subset G$, où Γ est la frontière de D.*
Si f ne possède ni pôles ni zéros sur Γ alors, on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f^{'}(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} arg(f(z)) = N - P,$$

où Δ_{Γ} est la variation de l'argument de f quand z par court Γ^{+}.

Preuve. D'après les conditions du théorème, on a
f est analytique et $f(z) \neq 0, \forall z \in \Gamma$.
D'où, il existe un voisinage V de Γ où $f(z) \neq 0$, $\forall z \in V$.
Dans ce voisinage on a, $\log f(z)$ est analytique et $(\log f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}, \forall z \in V$.
D'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d(\log f(z)) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \Delta_{\Gamma}(\log f(z)), \end{aligned} \tag{1.8}$$

D'autre part, on a

$$\log f(z) = \log |f(z)| + i arg(f(z)).$$

Ce qui implique

$$\Delta_{\Gamma} \log f(z) = \Delta_{\Gamma} \log |f(z)| + i\Delta_{\Gamma} arg(f(z)).$$

Comme Γ est fermé alors, on a $\Delta_{\Gamma} \log |f(z)| = 0$. Donc

$$\Delta_{\Gamma} \log f(z) = i\Delta_{\Gamma} arg(f(z)), \tag{1.9}$$

De (1.8) et (1.9), on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} arg(f(z)) = N - P.$$

□

1.3.5 Théorème de Rouché

Théorème 1.9. *[13] Soient f, g deux fonctions analytiques sur un domaine borné D Si $|f(z)| > |g(z)|, \forall z \in \Gamma$, où Γ est la frontière de D. Alors f et $F(z) = f(z) + g(z)$ possèdent le même nombre de zéros dans D.*

Preuve. Comme $|f(z)| > |g(z)| \geq 0, \forall z \in \Gamma$, alors $f(z) \neq 0, \forall z \in \Gamma$.
De même $F(z) \neq 0, \forall z \in \Gamma$, car
$|F(z)| = |f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$, $\forall z \in \Gamma$.
Les conditions du principe de l'argument sont vérifiées pour F, alors

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} arg(F(z)) = N_F,$$

où N_F est le nombre des zéros de F dans D.
On a

$$F(z) = f(z) + g(z) = f(z)\Big[1 + \frac{g(z)}{f(z)}\Big].$$

Alors

$$\Delta_\Gamma arg(F(z)) = \Delta_\Gamma arg(f(z)) + \Delta_\Gamma arg(w(z)),$$

où $w(z) = \Big[1 + \frac{g(z)}{f(z)}\Big]$,
D'autre part, on a

$$|w(z) - 1| = \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1,$$

Alors $w(z)$ ne fait aucune rotation autour de l'origine.
Alors $\Delta_\Gamma arg(w(z)) = 0$.
Donc

$$\Delta_\Gamma arg(F(z)) = \Delta_\Gamma arg(f(z)),$$

D'où

$$N_F = N_f,$$

où N_f est le nombre de zéros de f dans D. □