Cela conduit rapidement à $y \sim x$ *quand* $x \longrightarrow \infty$. *Mais alors* $y^3 \sim -x^3$, *qui n'est pas petit par rapport à un terme que nous avons gardé* x^2, *quand* $x \sim \infty$. *Au lieu de cela, nous supposons* $x^2 \ll xy$, *puis* $xy \sim y^3$ *et* $y \sim \pm\sqrt{x}$. *Mais alors* $xy \sim \pm x^{\frac{3}{2}}$, *donc* x^2 *est plus grand que* $x \longrightarrow \infty$. *Cette possibilité est donc exclue.*

Le dernier cas à essayer est de supposer que xy *est le plus petit terme, puis* $x^2 \sim y^3$, *ce qui nous dit que* $y \sim x^{\frac{2}{3}}$. *Pour vérifier si cela est cohérent, nous devons vérifier que* $xy \ll x^2$. *En effet,* $xy \sim x^{\frac{5}{3}}$ *qui est plus petit que* x^2 *quand* $x \longrightarrow \infty$. *nous avons montré que* $y \sim x^{\frac{2}{3}}$ *est cohérent mais cela ne prouve pas à lui seul que le comportement dominant est bien* $x^{\frac{2}{3}}$. *Afin de montrer que c'est le comportement principal correct, nous devons trouver le terme suivant dans la série, et montre qu'il est plus petit que* $x^{\frac{2}{3}}$.

Laisser $y = x^{\frac{2}{3}} + g(x)$ *nous donne*

$$x^2 + x(x^{\frac{2}{3}} + g(x)) = (x^{\frac{2}{3}} + g(x))^3$$

$$x^2 + x^{\frac{5}{3}} + xg(x) \sim x^2 + 3g(x)x^{\frac{4}{3}} + O(x^{\frac{2}{3}}g(x)^2)$$

L'annulation du x, *et en gardant les termes d'ordre supérieur, nous obtenons* $x^{\frac{5}{3}} \sim 3g(x)x^{\frac{4}{3}}$ *qui simplifie en* $g(x) \sim \frac{x^{\frac{1}{3}}}{3}$. *Ceci est en effet inférieur à* $x^{\frac{2}{3}}$ *quand* $x \longrightarrow \infty$, *nous avons donc confirmé le comportement dominant, ainsi que le terme suivant* $y \sim x^{\frac{2}{3}} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{3}$.

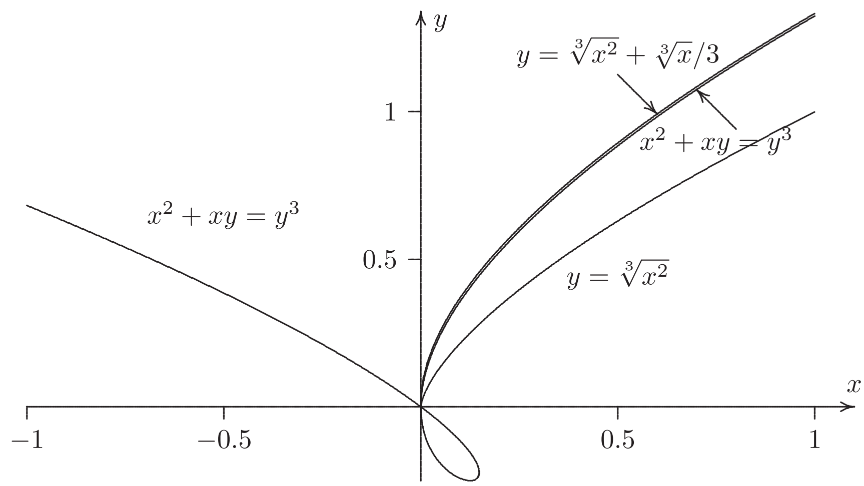

Figure 1.2 – comparaisons de la fonction définie implicitement par $x^2 + xy = y^3$ avec son approximation de second ordre $y = \sqrt[3]{x^2} + \frac{\sqrt[3]{x}}{3}$. Les deux graphiques sont presque indiscernable. L'erreur à $x = 1$ n'est que de 0.6%.

Un résumé des étapes utilisées dans la méthode de l'équilibre dominant :

1) Essayez de deviner quels termes peuvent être négligeables dans la limite.

2) Déposez ces termes pour former une équation plus simple. Résolvez cette équation exactement.

3) Vérifiez que la solution est cohérente avec l'étape 1.

4) Trouvez le terme suivant pour vérifier que le comportement de tête est bien correct. Si cela ressemble à un raisonnement circulaire, c'est parce que ça l'est ! C'est pourquoi l'étape 4 est importante. Ce n'est pas parce que nous trouvons une approximation qui est cohérente avec l'équation qu'il y a une vraie solution à l'équation qui est asymptotique à notre approximation.

Chapitre 2

Comportement local aux points singuliers réguliers des équations linéaires homogènes

2.1 Classification des points singuliers des équations linéaires homogènes

Dans cette section, nous commençons le processus d'analyse locale par classer un point x_0, qui peut être complexe, comme un point ordinaire, un point singulier régulier, ou un point singulier irrégulier d'une équation différentielle linéaire homogène. Cette classification donne la première indication de la nature des solutions à proximité de x_0 et suggère la voie appropriée pour une analyse systématique plus approfondie.

Considérons les équations différentielles linéaires homogènes de la forme suivante :

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)y^{(1)}(x) + p_0(x)y(x) = 0, \tag{2.1}$$

où

$$y^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}y(x).$$

Le schéma de classification que nous allons décrire suppose que p_0, p_1,...,p_{n-1} ont été définis pour les valeurs complexes aussi bien que pour les valeurs réelles de leurs variables.

Définition 2.1.1. *Le point x_0 $(x_0 \neq \infty)$ est appelé un point ordinaire de l'équation* (2.1) *si les fonctions de coefficients $p_0(x)$, $p_1(x)$, ... , $p_{n-1}(x)$ sont toutes analytiques au voisinage de x_0.*

Exemple 2.1.2.

1. *$y''(x) = e^x y(x)$. Tout point $x_0 \neq \infty$ est un point ordinaire.*
2. *$x^5 y^{(3)}(x) = y(x)$. Tout point x_0 sauf pour $x_0 = 0$ et ∞ est un point ordinaire.*
3. *$y'(x) = |x|y(x)$. Il n'y a pas de points ordinaires dans le plan complexe parce que $|x|$ est nulle part analytique.*

Fuchs[1] a prouvé en 1866 que toutes les n solutions linéairement indépendantes de l'équation (2.1) sont analytiques au voisinage d'un point ordinaire. De plus, il a prouvé que si une solution est développée en une série de Taylor au point ordinaire x_0, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, alors le rayon de convergence de cette série est au moins aussi grand que la distance à la singularité la plus proche des fonctions de coefficient dans le plan complexe.

L'emplacement d'une singularité d'une solution doit coïncider avec l'emplacement d'une singularité d'une fonction de coefficient. La solution d'une équation linéaire ne peut avoir de singularités en aucun autre point.

Exemple 2.1.3. *L'équation $(x^2 + 1)y'(x) + 2xy(x) = 0$ a un point ordinaire en 0. La solution $y(x) = c(1 + x^2)^{-1}$ peut être développé en une série de Taylor dont le rayon de convergence est 1 ; c'est la distance aux singularités des coefficients en $x = \pm i$ lorsque l'équation différentielle s'écrit sous la forme de* (2.1).

Définition 2.1.4. *Le point x_0 $(x_0 \neq \infty)$ est appelé un point singulier régulier de l'équation* (2.1) *si les fonctions de coefficients $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_{n-1}(x)$ ne sont pas toutes analytiques au voisinage de x_0 mais les fonctions $(x - x_0)p_{n-1}(x)$, $(x - x_0)^2 p_{n-2}(x)$, ..., $(x - x_0)^{n-1} p_1(x)$, $(x - x_0)^n p_0(x)$ sont analytiques au voisinage de x_0.*

Tout point singulier de l'équation (2.1) *qui n'est pas un point singulier régulier est appelé un point singulier irrégulier de l'équation* (2.1).

Remarque 2.1.5. *Dans le cas où les fonctions de coefficients sont des polynômes, la condition d'analyticité des fonctions $(x - x_0)^k p_{n-k}(x)$, est équivalente à les limites*

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^k p_{n-k}(x),$$

sont finies.

1. **Lazarus Immanuel Fuchs** (1833–1902), mathématicien allemand.

Exemple 2.1.6. *Déterminer les points singuliers de l'équation différentielle*

$$2x(x-2)^2y''(x) + 3xy'(x) + (x-2)y(x) = 0, \tag{2.2}$$

et les classer comme réguliers ou irréguliers.

Solution :

En divisant l'équation (2.2) *par* $2x(x-2)^2$, *nous avons*

$$y''(x) + \frac{3}{2(x-2)^2}y'(x) + \frac{1}{2x(x-2)}y(x) = 0,$$

alors

$$p_1(x) = \frac{3}{2(x-2)^2} \quad et \quad p_0(x) = \frac{1}{2x(x-2)}.$$

Les points singuliers sont $x = 0$ *et* $x = 2$.

Pour $x = 0$ *on a*

$$\lim_{x\to 0} xp_1(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{2(x-2)^2} = 0,$$

et

$$\lim_{x\to 0} x^2p_0(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2(x-2)^2} = 0.$$

Puisque ces limites sont finies, $x = 0$ *est un point singulier régulier.*

Pour $x = 2$ *on a*

$$\lim_{x\to 2}(x-2)p_1(x) = \lim_{x\to 2} \frac{3}{2(x-2)} = \infty.$$

La limite n'est pas finie donc, $x = 2$ *est un point singulier irrégulier.*

Exemple 2.1.7. *Déterminer les points singuliers de l'équation différentielle*

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 y''(x) + (\cos x)y'(x) + (\sin x)y(x) = 0,$$

et les classer comme réguliers ou irréguliers.

Solution :

Le seul point singulier est $x = \frac{\pi}{2}$. *Pour l'étudier, on considère les fonctions*

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)p_1(x) = \frac{\cos x}{x - \pi/2},$$

et

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 p_0(x) = \sin x.$$

A partir de la série de Taylor pour $\cos x$ *au voisinage de* $x = \frac{\pi}{2}$*, on constate que*

$$\frac{\cos x}{x - \pi/2} = -1 + \frac{(x - \pi/2)^2}{3!} + \frac{(x - \pi/2)^4}{5!} + \cdots ,$$

qui converge pour tout x*. De même,* $\sin x$ *est analytique en* $x = \frac{\pi}{2}$*. Par conséquent, nous concluons que* $\frac{\pi}{2}$ *est un point singulier régulier pour cette équation.*

Fuchs a montré qu'il y a toujours au moins une solution de la forme

$$y(x) = (x - x_0)^{\alpha} A(x), \tag{2.3}$$

où α est un nombre appelé exposant indicatif, et $A(x)$ est une fonction qui est analytique en x_0 et qui a une série Taylor dont le rayon de convergence est au moins grand que la distance à la singularité la plus proche des fonctions de coefficient dans le plan complexe.

Si (2.1) est d'ordre $n \geqslant 2$, alors il existe une deuxième solution linéairement indépendante ayant l'une des deux formes possibles :

$$y(x) = (x - x_0)^{\beta} B(x), \tag{2.4}$$

où

$$y(x) = (x - x_0)^{\alpha} A(x) \ln(x - x_0) + C(x)(x - x_0)^{\beta}. \tag{2.5}$$

$B(x)$ et $C(x)$ sont de nouvelles fonctions qui sont également analytiques en x_0 et qui ont des rayons de convergence au moins aussi grands que la distance à la singularité la plus proche des fonctions de coefficient. $A(x)$ est la même fonction qui apparaît dans (2.3).

En général, pour chaque nouvelle solution linéairement indépendante, il existe une nouvelle fonction analytique de x et soit un nouvel exposant indicatif, soit une autre puissance de $\ln(x - x_0)$. Ainsi, la forme de la n[ième] solution est au pire

$$y(x) = (x - x_0)^{\gamma} \sum_{i=0}^{n-1} \big(\ln(x - x_0) \big)^{i} A_i(x),$$

où toutes les fonctions $A_i(x)$ sont analytiques en x_0.

Classification du point $x = \infty$:

Nous avons terminé la classification des points x_0 dans le plan complexe fini, mais il est également utile de classer le point $x_0 = \infty$. Nous faisons cela en transformant analytiquement le point infini à l'origine à l'aide de la transformation d'inversion

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{t}, \\ \frac{d}{dx} &= -t^2 \frac{d^2}{dt}, \\ \frac{d^2}{x^2} &= t^4 \frac{d^2}{dt^2} + 2t^3 \frac{d}{dt}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite, puis classer le point $t = 0$. Le point $x_0 = \infty$ est appelé un point ordinaire, un point singulier régulier ou un point singulier irrégulier si le point $t = 0$ est classé en conséquence.

Exemple 2.1.8. *Considérons l'équation différentielle suivante :*

$$(x^3 - 2x^2)y''(x) + (x+3)y'(x) + (x-2)y = 0. \tag{2.6}$$

En remplaçant

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{t}, \\ y(x) &= y(t), \\ y'(x) &= -t^2 y'(t), \\ y''(x) &= t^4 y''(t) + 2t^3 y'(t), \end{aligned}$$

dans l'équation (2.6) *on obtient*

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{t^3} - \frac{2}{t^2}\right)\left(t^4 y''(t) + 2t^3 y'(t)\right) + \left(\frac{1}{t} + 3\right) - t^2 y'(t) + \left(\frac{1}{t} - 2\right) y(t) = 0 \\ \Longrightarrow\ &(t - 2t^2)y''(t) + (2 - 5t - 3t^2)y'(t) + \left(\frac{1-2t}{t}\right) y(t) = 0. \end{aligned}$$

Si nous mettons la dernière équation sous la forme standard (2.1)*, nous avons*

$$y''(t) + \frac{2 - 5t - 3t^2}{t(1-2t)} y'(t) + \frac{1}{t^2} y(t) = 0. \tag{2.7}$$

Donc

$$p_1(t) = \frac{2 - 5t - 3t^2}{t(1-2t)} \quad et \quad p_0(t) = \frac{1}{t^2} y(t) = 0.$$

Les points singuliers de l'équation (2.7) *sont* $t = 0$ *et* $t = \frac{1}{2}$*, mais nous ne nous intéresserons que du point* $t = 0$*. On a*

$$\lim_{t \to 0} t^2 p_0(x) = \lim_{t \to 0} 1 = 1,$$

et

$$\lim_{t\to 0} tp_1(x) = \lim_{t\to 0} \frac{2-5t-3t^2}{1-2t} = 2.$$

$t = 0$ *est un point singulier régulier de l'équation* (2.7) *alors,* $x = \infty$ *est un point singulier régulier de l'équation* (2.6).

2.2 Comportement local au voisinage d'un point ordinaire

Dans cette section, nous montrons comment représenter le comportement local en termes d'expansions de séries infinies lorsque les solutions exactes sous forme fermée ne sont pas connus. La procédure générale consiste à classer d'abord le point x_0 comme un point ordinaire, un point singulier régulier ou un point singulier irrégulier, puis de sélectionner une forme appropriée pour la série basée sur cette classification.

En général, il est très utile de savoir comment obtenir des réponses à des problèmes difficiles en termes de séries infinies. Ce mode d'attaque peut réduire une analyse autrement difficile à une séquence d'opérations simples pour générer les termes de la série. Les premiers termes de la série sont généralement suffisants pour donner une approximation très précise du comportement local de la solution d'une équation différentielle.

Pour obtenir une solution en série au voisinage d'un point ordinaire, nous substituons la série de Taylor

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

dans l'équation différentielle et déterminons les coefficients a_n, en résolvant une relation de récurrence.

Exemple 2.2.1. *Trouver une série en puissances de* x *solution de l'équation d'Airy*[2] *:*

$$y''(x) - xy(x) = 0, \tag{2.8}$$

au voisinage de $x_0 = 0$.

Solution :

Pour cette équation $p_1(x) = 0$, $p_0(x) = -x$. *Donc le point* $x_0 = 0$ *est un point ordinaire.*

2. **Sir George Biddell Airy** (1801-1892), astronome et mathématicien anglais.

On cherche une solution sous la forme d'une série de puissances au voisinage de $x_0 = 0$

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{2.9}$$

et supposons que la série converge dans un certain intervalle $|x| < \rho$.

En différenciant l'équation (2.9) *terme par terme, on obtient*

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

et

$$y''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n. \tag{2.10}$$

En substituant les séries (2.9) *et* (2.10) *pour* $y(x)$ *et* $y''(x)$ *dans le côté gauche de l'équation* (2.8), *on obtient*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

Ensuite, nous décalons l'indice de sommation dans la deuxième série du côté droit de l'équation précédente en remplaçant n *par* $n-1$ *et en commençant la sommation à* 1 *plutôt qu'à zéro. Ainsi, nous écrivons l'équation* (2.8) *comme*

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0.$$

Pour que cette équation soit satisfaite pour tout x *dans un certain intervalle, les coefficients de puissances similaires de* x *doivent être nuls ; d'où* $a_2 = 0$, *et on obtient la relation de récurrence*

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_{n-1} = 0, \quad \textit{pour } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.11}$$

Puisque a_{n+2} *est donné en termes de* a_{n-1}, *les* a_n *sont déterminés par pas de trois. Ainsi* a_0 *détermine* a_3, *qui à son tour détermine* $a_6, \ldots$; *et* a_2 *détermine* a_5, *qui à son tour détermine* $a_8, \ldots$. *Puisque* $a_2 = 0$, *nous concluons immédiatement que* $a_5 = a_8 = a_{11} = \cdots = 0$.

Pour la séquence $a_0, a_3, a_6, a_9, \ldots$ *on pose* $n = 1, 4, 7, 10, \ldots$ *dans la relation de récurrence* (2.11),

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{a_0}{2\cdot 3}\,, \\ a_6 &= \frac{a_3}{5\cdot 6} = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}\,, \\ a_9 &= \frac{a_6}{8\cdot 9} = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}\,. \end{aligned}$$

Ces résultats suggèrent la formule générale

$$\begin{aligned} a_{3n} &= \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdots(3n-1)(3n)} \\ &= \frac{a_0}{3^{2n}\frac{2}{3}\cdot 1\cdot \frac{5}{3}\cdot 2\cdots(n-\frac{1}{3})n} \\ &= \frac{a_0}{3^{2n}n!\frac{2}{3}(1+\frac{2}{3})\cdots(n-1+\frac{2}{3})} \\ &= \frac{a_0\Gamma(\frac{2}{3})}{3^{2n}n!\Gamma(n+\frac{2}{3})}\,, \quad n \geqslant 1. \end{aligned}$$

car, d'après une propriété élémentaire de la fonction Gamma :

$$\Gamma(\nu+n+1) = (\nu+n)(\nu+n-1)\cdots(\nu+1)\Gamma(\nu+1).$$

Pour la séquence $a_1, a_4, a_7, a_{10}, \ldots$ *on pose* $n = 2, 5, 8, 11, \ldots$ *dans la relation de récurrence* (2.11),

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{a_1}{3\cdot 4}\,, \\ a_7 &= \frac{a_4}{6\cdot 7} = \frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\,, \\ a_{10} &= \frac{a_7}{9\cdot 10} = \frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}\,. \end{aligned}$$

En général, nous avons

$$\begin{aligned} a_{3n+1} &= \frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdots(3n)(3n+1)} \\ &= \frac{a_1}{3^{2n}n!\frac{4}{3}(1+\frac{4}{3})\cdots(n-1+\frac{4}{3})} \\ &= \frac{a_1\Gamma(\frac{4}{3})}{3^{2n}n!\Gamma(n+\frac{4}{3})}\,, \quad n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Ainsi, la solution générale de l'équation d'Airy est

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{9^n n!\Gamma(n+\frac{2}{3})} + a_1\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{9^n n!\Gamma(n+\frac{4}{3})} \\ &= a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \end{aligned} \tag{2.12}$$

où $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont la première et la deuxième série dans l'équation (2.12).

Ayant obtenu ces deux solutions en série, nous pouvons maintenant étudier leur convergence. Il est facile d'utiliser le test de rapport pour montrer que ces deux séries convergent pour tout x. D'autre part leur Wronskien au point $x = 0$ est

$$W(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

et par conséquent y_1 et y_2 sont un ensemble fondamental de solutions.

Dans les Figures 2.1 et 2.2, respectivement, nous montrons les graphiques des solutions y_1 et y_2 de l'équation d'Airy ainsi que les graphiques de plusieurs sommes partielles des deux séries de l'équation (2.12).

Il est classique de définir deux solutions spéciales linéairement indépendantes de l'équation Airy par

$$A_i(x) = 3^{-2/3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{9^n n!\Gamma(n+\frac{2}{3})} - 3^{-4/3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{9^n n!\Gamma(n+\frac{4}{3})}, \tag{2.13}$$

$$B_i(x) = 3^{-1/6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{9^n n!\Gamma(n+\frac{2}{3})} + 3^{-5/6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{9^n n!\Gamma(n+\frac{4}{3})}. \tag{2.14}$$

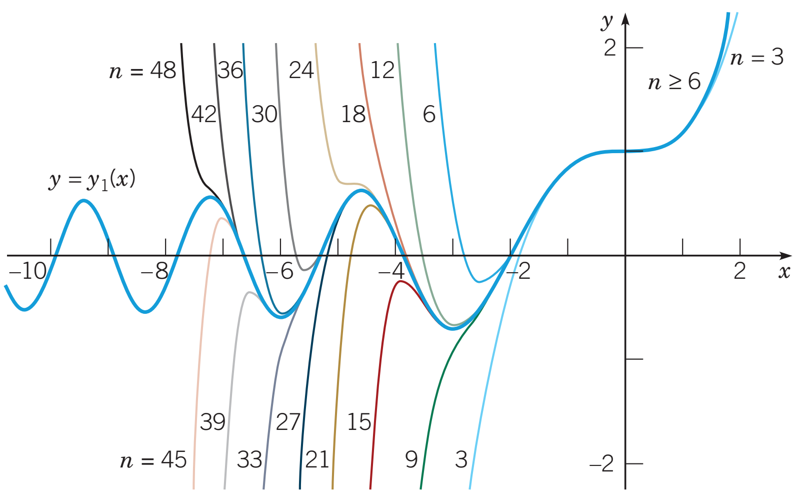

Figure 2.1 – Approximations polynomiales de la solution $y(x) = y_1(x)$ de l'équation d'Airy. La valeur de n est le degré du polynôme approximatif.

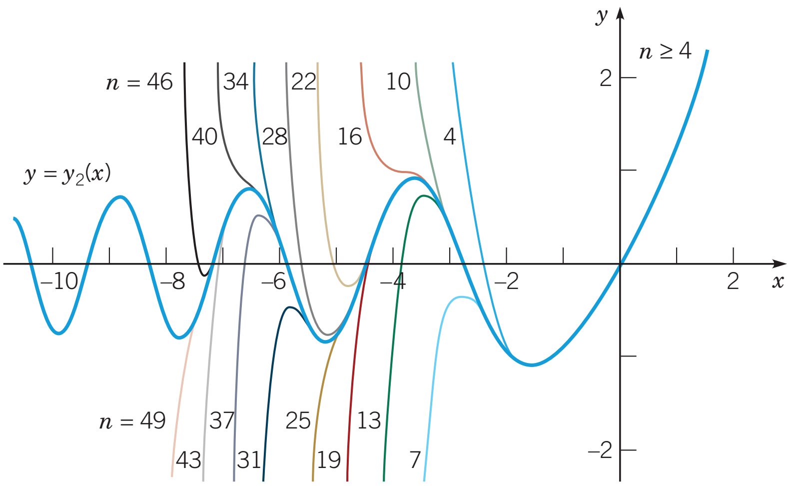

Figure 2.2 – Approximations polynomiales de la solution $y(x) = y_2(x)$ de l'équation d'Airy. La valeur de n est le degré du polynôme approximatif.

2.3 Comportement local au voisinage d'un point singulier régulier

Nous avons vu que les séries de Taylor sont un bon moyen de représenter le comportement local d'une solution d'une équation différentielle au voisinage d'un point ordinaire. Que se passe-t-il si nous essayons de représenter le comportement local d'une solution au voisinage d'un point singulier régulier par une série de Taylor ? Nous discuterons cette question à travers deux exemples.

Exemple 2.3.1. *Si nous cherchons une solution de l'équation*

$$y''(x) + \frac{y(x)}{4x^2} = 0, \tag{2.15}$$

sous la forme d'une série de Taylor au voisinage du point $x_0 = 0$*, qui est un point singulier régulier, la procédure d'expansion formelle qui fonctionne pour les points ordinaires n'est pas fructueuse ici. Autrement dit, si nous substituons la série de Taylor* $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *dans cette équation et différencions terme par terme, nous obtenons la suite d'équations suivante pour* a_n *:*

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

La solution de ces équations est $a_n = 0$ *pour tout* n*. Ainsi, nous n'obtenons que la solution triviale* $y(x) = 0$*. Ce n'est pas un progrès.*

L'expansion des séries de Taylor a échoué dans l'exemple précédent parce que les séries de Taylor ne sont pas assez générales pour décrire le comportement local des solutions au voisinage de points singuliers réguliers.

Heureusement, le résultat de Fuchs énoncé dans la Section 2.1 suggère une structure plus générale que la série de Taylor. En particulier, nous avons appris que si x_0 est un point singulier régulier d'une équation différentielle linéaire homogène, au moins une solution doit avoir la forme (2.3) :

$$y(x) = (x - x_0)^\alpha A(x),$$

où $A(x)$ est analytique ou point x_0.

Puisque $A(x)$ est analytique, il peut être développé en une série de Taylor :

$$y(x) = (x - x_0)^\alpha A(x) = (x - x_0)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{2.16}$$

Nous appelons le côté droit de (2.16) une série de Frobenius [3] et nous appelons le nombre α un exposant indicatif. Il est classique de supposer que $a_0 \neq 0$ dans une série de Frobenius, ce qui est assuré par un bon choix de α. Une série de Taylor est un cas particulier d'une série de Frobenius.

Exemple 2.3.2. *Si nous essayons une série de Frobenius de la forme* (2.16) *avec* $x_0 = 0$ *dans l'équation différentielle* (2.15)

$$y''(x) + \frac{y(x)}{4x^2} = 0,$$

nous trouvons que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n x^{\alpha+n-2} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n-2} = 0, \tag{2.17}$$

donc

$$\Big[(\alpha + n)(\alpha + n - 1) + \frac{1}{4}\Big] a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Puisque nous supposons que $a_0 \neq 0$*, alors pour* $n = 0$ *on a :* $\alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{4} = 0$*, donc* $\alpha = \frac{1}{2}$*. Les équations restantes pour* a_n *donnent* $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = 0$.

Ainsi, la série de Frobenius prend la forme simple $y(x) = a_0\sqrt{x}$*, où* a_0 *est arbitraire. Cette série de Frobenius à un terme est une solution exacte de l'équation différentielle* $y''(x) + \frac{y(x)}{4x^2} = 0$.

3. **Ferdinand Georg Frobenius** (1849–1917) est un mathématicien allemand.

La théorie générale garantit seulement qu'il y ait une solution sous la forme d'une série de Frobenius. Les autres solutions peuvent être légèrement plus compliquées.

2.3.1 Méthode de Frobenius pour les équations du seconde ordre

Si l'équation différentielle

$$y''(x) + \frac{p(x)}{x - x_0} y'(x) + \frac{q(x)}{(x - x_0)^2} y(x) = 0, \tag{2.18}$$

a un point singulier régulier à x_0, alors $p(x)$ et $q(x)$ sont analytiques à x_0. Ainsi, nous pouvons développer $p(x)$ et $q(x)$ en série de Taylor à x_0 :

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n. \tag{2.19}$$

En dérivant la série de Frobenius (2.16) terme par terme on obtient :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+\alpha}, \tag{2.20a}$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha) a_n (x - x_0)^{n+\alpha-1}, \tag{2.20b}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha)(n + \alpha - 1) a_n (x - x_0)^{n+\alpha-2}. \tag{2.20c}$$

En substituant ces développements ainsi les développements (2.19) dans le côté gauche de (2.18) on obtient :

$$\begin{aligned}
y''(x) + \frac{p(x)}{x - x_0} y'(x) + \frac{q(x)}{(x - x_0)^2} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha)(n + \alpha - 1) a_n (x - x_0)^{n+\alpha-2} \\
&\quad + \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^{n-1} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n) a_n (x - x_0)^{n+\alpha-1} \\
&\quad + \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^{n-2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+\alpha} = 0 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha)(n + \alpha - 1) a_n (x - x_0)^{n+\alpha-2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}(k+\alpha)a_k p_{n-k}\Big)(x-x_0)^{n+\alpha-2}\\
&+\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_k q_{n-k}\Big)(x-x_0)^{n+\alpha-2}\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n+\sum_{k=0}^{n}(k+\alpha)a_k p_{n-k}\\
&\qquad+\sum_{k=0}^{n}a_k q_{n-k}\Big)(x-x_0)^{n+\alpha-2}.
\end{aligned}
$$

Alors (2.18) devient

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n+\sum_{k=0}^{n}(k+\alpha)a_k p_{n-k}+\sum_{k=0}^{n}a_k q_{n-k}\Big)(x-x_0)^{n+\alpha-2}=0.$$

En égalisant les coefficients de $(x-x_0)^{n+\alpha-2}$ pour $n=0,1,2,\dots$ on trouve :

$$(x-x_0)^{\alpha-2} \quad : \quad \big[\alpha^2+(p_0-1)\alpha+q_0\big]a_0=0 \tag{2.21a}$$

$$
\begin{aligned}
(x-x_0)^{n+\alpha-2} : \quad &\big[(n+\alpha)^2+(p_0-1)(n+\alpha)+q_0\big]a_n\\
&=-\sum_{k=0}^{n-1}\big[(k+\alpha)p_{n-k}+q_{n-k}\big]a_k, \quad n=1,2,\dots
\end{aligned} \tag{2.21b}
$$

Par hypothèse a_0 est différent de zéro, donc (2.21a) exige que α soit une racine du polynôme indicatif $P(\alpha)$, où

$$P(\alpha)=\alpha^2+(p_0-1)\alpha+q_0. \tag{2.22}$$

Étant donner ces valeurs de α, nous devons alors résoudre la relation de récurrence (2.21b) pour a_n en termes de a_0. La constante a_0 est arbitraire et apparaîtra finalement comme un facteur multiplicatif dans la solution $y(x)$. Cependant, la relation de récurrence (2.21b) ne peut être résolue pour a_n en terme de a_k pour $k<n$ seulement si $P(n+\alpha)\neq 0$ car le côté gauche de (2.21b) est précisément $P(n+\alpha)a_n$. Si cette condition est vraie pour tous les entiers positifs n, alors il peut être démontré que la série (2.16) converge dans un cercle dont le rayon est au moins aussi grand que la distance à la singularité la plus proche de $p(x)$ ou $q(x)$.

Soit α_1 et α_2 les deux racines du polynôme indicatif $P(\alpha)$ qui sont ordonnées de telle sorte que $\Re(\alpha_1)\geqslant\Re(\alpha_2)$. Alors $P(n+\alpha_1)\neq 0$ pour $n=1,2,\dots$ parce que α_2 est la seule autre racine de $P(\alpha)$. Ainsi, la relation de récurrence (2.21b) peut être résolue pour a_n en termes de a_0 pour tout n. Ceci explique pourquoi il y a toujours au moins une solution sous la forme d'une série de Frobenius.

En général, on peut toujours construire une paire de solutions linéairement indépendantes de (2.18) en résolvant la relation de récurrence (2.21b) avec $\alpha = \alpha_1$ et $\alpha = \alpha_2$, à condition que $\alpha_1 - \alpha_2$ ne soit pas un entier.

Exemple 2.3.3. *Équation de Bessel*[4] *d'ordre* ν.

L'équation de Bessel

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \Big(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\Big)y(x) = 0, \tag{2.23}$$

a un point singulier régulier à $x = 0$.

Ici, $p(x) = 1$ *et* $q(x) = x^2 - \nu^2$ *donc,* $p_0 = 1$, $q_0 = -\nu^2$, $q_2 = 1$ *et tous les autres* p_n *et* q_n *sont nuls. Alors, d'après* (2.22) *le polynôme indicatif est*

$$P(\alpha) = \alpha^2 - \nu^2.$$

Par conséquent, $\alpha = \pm\nu$. *On peut supposer que* $\Re(\nu) > 0$ *et noter* $\alpha_1 = +\nu$ *et* $\alpha_2 = -\nu$.

Les relations de récurrence (2.21a) *et* (2.21b) *deviennent*

$$\left.\begin{aligned} x^{\alpha-2} &: \ (\alpha^2 - \nu^2)a_0 = 0, \\ x^{\alpha-1} &: \ \big[(\alpha+1)^2 - \nu^2\big]a_1 = 0, \\ x^{\alpha+n-2} &: \ \big[(\alpha+n)^2 - \nu^2\big]a_n = -a_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

Comme $P(\alpha_1 + n) \neq 0$ *pour* $n = 1, 2, \dots$ *;* $a_1, a_2, a_3, \dots$ *peuvent être facilement déterminés à partir de* (2.24)*. Les résultats sont* $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$ *et*

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{-a_{2n-2}}{2^2 n(\nu+n)} \\ &= \frac{a_{2n-4}}{2^4 n(n-1)(\nu+n)(\nu+n-1)} \\ &= \cdots \\ &= \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n(n-1)\cdots 2\cdot 1(\nu+n)(\nu+n-1)\cdots(\nu+1)} \\ &= \frac{(-1)^n a_0 \Gamma(\nu+1)}{2^{2n} n!\Gamma(\nu+n+1)}, \end{aligned}$$

4. **Friedrich Wilhelm Bessel** (1784-1846), astronome, mathématicien, géodésien et physicien allemand

Donc

$$y_1(x) = a_0\Gamma(\nu+1)x^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \tag{2.25}$$

Habituellement, la constante a_0 reçoit la valeur

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)},$$

le résultat définit une fonction qui est appelée la fonction de Bessel du premier type d'ordre ν et d'argument x

$$J_{\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \tag{2.26}$$

Si $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\nu$ est également non entier alors $P(-\nu+n) \neq 0$ pour tous les entiers positifs n, donc une deuxième solution de l'équation de Bessel peut être obtenue en choisissant $\alpha = -\nu$:

$$y_2(x) = a_0\Gamma(1-\nu)x^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \tag{2.27}$$

Habituellement, la constante a_0 reçoit la valeur

$$a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)},$$

le résultat définit une fonction qui est appelée la fonction de Bessel du premier type d'ordre négatif $-\nu$

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \tag{2.28}$$

La solution $J_{-\nu}(x)$ est clairement linéairement indépendante de $J_{\nu}(x)$ lorsque ν est non entier car leurs séries commencent par des puissances différentes de x. Ainsi la solution de l'équation de Bessel (2.23) *est*

$$y(x) = c_1J_{\nu}(x) + c_2J_{-\nu}(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Si $\alpha_1 = \alpha_2$, la solution obtenue en choisissant $\alpha = \alpha_2$ est identique à la première solution obtenue avec $\alpha = \alpha_1$, à l'exception d'un facteur multiplicatif a_0. Ainsi, pour trouver une deuxième solution nécessite plus d'analyse.

Si $\alpha_1 - \alpha_2 = N$ un entier positif, alors la relation de récurrence (2.21b) avec $\alpha = \alpha_2$ et $n = N$ lit :

$$0a_N = -\sum_{k=0}^{N-1}[(k+\alpha_2)p_{N-k} + q_{N-k}]a_k. \tag{2.29}$$

Il y a maintenant deux possibilités :

1. Si le côte droit de (2.29) est différent de zéro, alors a_N n'existe pas ; donc pour trouver une deuxième solution linéairement indépendante nécessite une analyse plus approfondie.

2. Si le coté droit de (2.29) égale zéro, alors (2.29) se réduit à l'identité $0 = 0$ et ne détermine pas a_N. Il s'ensuite que a_N est une constante arbitraire. La relation de récurrence a réussi a sauté l'obstacle à $n = N$. Nous pouvons maintenant calculer le reste des coefficients $a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \ldots$ en tant que fonctions des deux constantes arbitraires a_0 et a_N et déterminer ainsi une seconde solution linéairement indépendante de l'équation différentielle.

Nous pouvons résumer la discussion ci-dessus comme suit :

Cas I : $(\alpha_1 \neq \alpha_2)$; $\alpha_1 - \alpha_2 \neq$ entier. Il existe deux solutions linéairement indépendantes sous forme de Frobenius.

Cas II : $\alpha_1 - \alpha_2 = N = 0, 1, 2, \ldots$ Ce cas doit être subdivisé en deux :

a) $\alpha_1 = \alpha_2$. Il n'y a qu'une seule solution sous forme de Frobenius. Nous expliquons brièvement comment construire une deuxième solution.

b) $\alpha_1 - \alpha_2 = 1, 2, 3, \ldots$ Ce cas doit être subdivisé en deux :

i) Le coté droite de (2.29) est différent de zéro. Il n'y a q'une seule solution sous forme de Frobenius. Nous expliquons brièvement comment construire une deuxième solution.

ii) Le coté droit de (2.29) est zéro. Il existe deux solutions linéairement indépendantes sous forme de Frobenius.

Discussions du cas II b) ii) : Ce cas est caractérisé par la disparition du côté droit de (2.29). Cela garantit qu'une série de Frobenius avec un exposant indicatif α_2 peut être trouvée.

Exemple 2.3.4. *Équation de Bessel d'ordre $\nu = \frac{1}{2}$.*

Si nous choisissons $\nu = \frac{1}{2}$ dans l'équation de Bessel (2.23), alors les indices α_1 et α_2 diffèrent par un entier : $\alpha_1 - \alpha_2 = 1$.

Pour $\alpha = \nu = \frac{1}{2}$, la solution est donnée par (2.26) :

$$y_1(x) = J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+3/2)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2n}.$$

Or

$$\Gamma\Big(n+\frac{3}{2}\Big) = \Big(n+\frac{1}{2}\Big)\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Big(n-\frac{3}{2}\Big)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi},$$

d'où

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x).$$

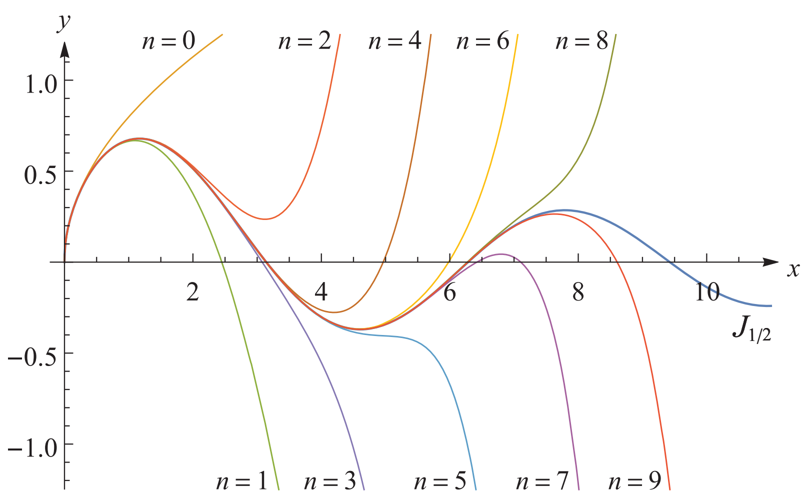

Figure 2.3 – Approximations polynomiales de la fonction de Bessel $J_{1/2}$. La valeur de n est le degré du polynôme approximatif.

Pour $\alpha = -\nu = -\frac{1}{2}$, le coté droit de (2.29) est $-q_1 a_0 = 0$. Ainsi, la deuxième solution a la forme d'une série de Frobenius. La résolution des relations de récurrence

(2.24) *pour* $\alpha = -1/2$ *nous donne :* $a_0,\ a_1$ *arbitraires,*

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= \frac{-a_{2n-2}}{2n(2n-1)} \\
&= \frac{a_{2n-4}}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)} \\
&= \cdots \\
&= \frac{(-1)^n a_0}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots 2\cdot 1} \\
&= \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= \frac{-a_{2n-1}}{(2n+1)(2n)} \\
&= \frac{a_{2n-3}}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)} \\
&= \cdots \\
&= \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots 3\cdot 2} \\
&= \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!},
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= \frac{a_0}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \frac{a_1}{\sqrt{x}}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\
&= \frac{a_0}{\sqrt{x}}\cos(x) + \frac{a_1}{\sqrt{x}}\sin(x).
\end{aligned}$$

La constante a_1 *introduit simplement un multiple de* $y_1(x)$*. La seconde solution de l'équation de Bessel d'ordre un demi est généralement considérée comme la solution pour laquelle* $a_0 = \sqrt{2/\pi}$ *et* $a_1 = 0$*. Elle est notée* $J_{-1/2}$*. Alors*

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x).$$

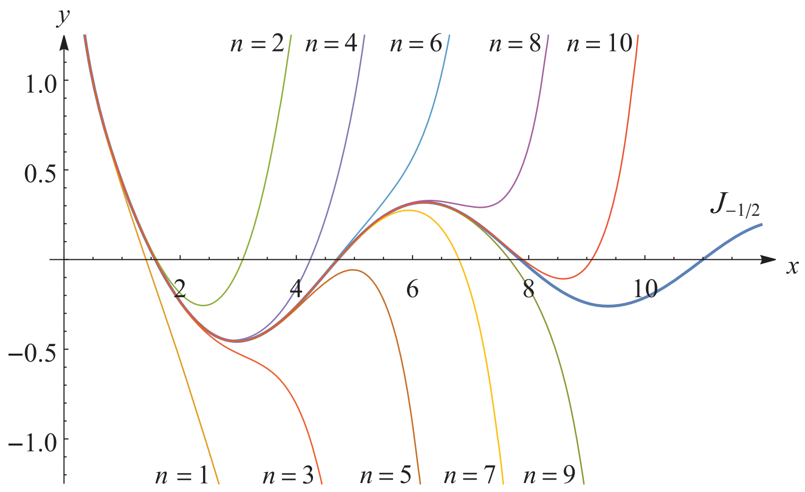

Figure 2.4 – Approximations polynomiales de la fonction de Bessel $J_{-1/2}$. La valeur de n est le degré du polynôme approximatif.

Finalement, la solution de l'équation de Bessel (2.23) *d'ordre* $\nu = \frac{1}{2}$ *est :*

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \big(c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)\big), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dans les cas II a) et II b) i), la deuxième solution n'a pas la forme d'une série de Frobenius, un développement local de la deuxième solution implique la fonction $\ln(x - x_0)$.

Discussions du cas II a) :

Nous trouvons une deuxième solution linéairement indépendante de (2.18) quand $\alpha_1 = \alpha_2$ en différenciant la série de Frobenius (2.16) par rapport à l'exposant indicatif α. Pour préparer la différenciation par rapport à α, nous laissons α arbitraire pour le moment en ignorant (2.21a) et résolvons la relation de récurrence (2.21b) pour a_n en fonction de a_0 et α. Nous désignons la série de Frobenius résultante par $y(x, \alpha)$:

$$y(x, \alpha) = (x - x_0)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha)(x - x_0)^n. \tag{2.30}$$

Bien sur $y(x, \alpha)$ n'est pas une solution de (2.18) sauf si $\alpha = \alpha_1$. Il convient de définir la notation

$$L \equiv \frac{d^2}{dx^2} + \frac{p(x)}{x - x_0}\frac{d}{dx} + \frac{q(x)}{(x - x_0)^2}.$$

Toute solution $y(x)$ de (2.18) vérifie l'équation $Ly(x) = 0$.

Puisque $a_n(\alpha)$ par construction satisfait la relation de récurrence (2.21b), $y(x, \alpha)$ dans (2.30) est presque, mais pas tout à fait, une solution de l'équation différentielle (2.18) lorsque $\alpha \neq \alpha_1$. Au lieu de satisfaire $Ly(x) = 0$, $y(x, \alpha)$ satisfait

$$Ly(x, \alpha) = a_0(x - x_0)^{\alpha-2}P(\alpha). \tag{2.31}$$

Si nous choisissons $\alpha = \alpha_1$ alors le côté droite de (2.31) disparaît ; cela montre que $y(x, \alpha_1)$ n'est que la série de Frobenius solution de $Ly(x) = 0$.

Lorsque $\alpha_1 = \alpha_2$, $P(\alpha) = (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) = (\alpha - \alpha_1)^2$. Donc, si nous différencions les deux côtés de (2.31) par rapport à α et prenons $\alpha = \alpha_1$ on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha} Ly(x, \alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_1} &= \frac{\partial}{\partial\alpha} a_0 \big[(x - x_0)^{\alpha-2}P(\alpha)\big]\Big|_{\alpha=\alpha_1} \\
&= \frac{\partial}{\partial\alpha} a_0 \big[(x - x_0)^{\alpha-2}(\alpha - \alpha_1)^2\big]\Big|_{\alpha=\alpha_1} \\
&= a_0\big[2(\alpha - \alpha_1)(x - x_0)^{\alpha-2} + (x - x_0)^{\alpha-2}(\alpha - \alpha_1)^2 \ln(x - x_0)\big]\Big|_{\alpha=\alpha_1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{\partial}{\partial\alpha} y(x, \alpha)|_{\alpha=\alpha_1}$ est une nouvelle solution de (2.18) parce que

$$L\left[\frac{\partial}{\partial\alpha} y(x, \alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_1}\right] = \frac{\partial}{\partial\alpha} Ly(x, \alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_1} = 0.$$

Si nous différencions (2.30) par rapport à α, on voit que la forme de cette nouvelle solution est celle donnée dans (2.5) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha} y(x, \alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_1} &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big((x - x_0)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha)(x - x_0)^n\Big)\Big|_{\alpha=\alpha_1} \\
&= \ln(x - x_0)(x - x_0)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha)(x - x_0)^n\Big|_{\alpha=\alpha_1} \\
&\quad + (x - x_0)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\alpha} a_n(\alpha)(x - x_0)^n\Big|_{\alpha=\alpha_1} \\
&= y(x, \alpha_1)\ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^{\alpha_1+n},
\end{aligned} \tag{2.32}$$

où

$$b_n = \frac{\partial}{\partial\alpha} a_n(\alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_1}. \tag{2.33}$$