

Modélisation numérique et optimisation du capteur

Dans cette partie, nous allons présenter l'approche mise en œuvre afin d'optimiser la géométrie du capteur. Dans un premier temps, nous vérifions tout d'abord la pertinence du modèle développé dans le chapitre précédent au travers d'une expérience simple. Nous nous en servons ensuite pour modéliser la réponse du capteur pour enfin parvenir à optimiser sa géométrie.

Le modèle développé permettant la simulation des dispositifs a été mise en œuvre dans un programme (l'annexe C page 149 est un manuel d'utilisation du programme) et permet d'effectuer des modélisations de dispositifs à ondes élastiques de surface.

Rappelons que le capteur que l'on cherche à développer est un capteur de pression à membrane. L'action de la force pressante sur la membrane génère des contraintes au sein de celle-ci, lesquelles vont avoir une influence sur la réponse électrique d'un résonateur placé sur cette membrane. Un schéma du capteur est illustré sur la figure 5.1 de la page 110.

L'optimisation géométrique s'effectue alors en deux temps. Nous faisons tout d'abord un rappel sur la théorie des plaques minces, lequel nous permettra de déterminer des ordres de grandeurs utiles pour son dimensionnement. Ensuite, à partir des modèles présentées dans les deux chapitres précédents et du programme développé, nous montrons la possibilité de définir des configurations géométriques plus favorables que d'autres.

Pour finir, nous montrons quelques applications pratiques du logiciel notamment pour la simulation d'un capteur de force.

4.1 Validation du modèle

4.1.1 Validation logicielle

Le programme permet de simuler bon nombre de dispositifs à ondes élastiques de surface mais également de simuler des dispositifs à ondes élastiques en milieu contraint mécaniquement. Dans ce cas, il est alors nécessaire de connaître les propriétés mécaniques du substrat afin d'en déterminer la sensibilité à la contrainte. Dans un premier temps, on va tout d'abord valider les résultats obtenus par simulation via le programme pour un cas simple.

Pour ce faire, on suppose que l'on dispose d'un résonateur déposé sur un substrat soumis à un champ de contrainte homogène en tout point. On suppose que ces contraintes sont induites par une pression hydrostatique P par exemple. La variation relative v_{rel} de vitesse ainsi induite des ondes est une combinaison linéaire des coefficients du tenseurs des contraintes. Fixons arbitrairement ce coefficient de sensibilité aux contraintes à 1.10^{-10}Pa^{-1} . La variation de fréquence de synchronisme du résonateur est donnée par la relation (voir paragraphe 3.2.0.3) :

$$\Delta F = s_{\alpha_{ij}} \cdot T_{ij} \cdot F \cdot P = v_{rel} \cdot F \cdot P \quad (4.1)$$

Considérons le résonateur dont les propriétés géométriques sont les suivantes :

- 68 paires d'électrodes excitatrices avec un taux de métallisation de 0,7257 et une période mécanique de 3,599 μm ,
- 2 réflecteur de Bragg composés chacun de 270 électrodes avec un taux de métallisation de 0,7257 et une période mécanique de 3,621 μm ,
- l'ouverture acoustique du résonateur est fixée à 350 μm .

La courbe de la figure 4.1 indique la conductance du résonateur lorsqu'il n'est soumis à aucune contrainte. La fréquence de résonance est indiquée par la fréquence correspondant au maximum de la courbe et vaut :

$$f_{res} = 434,047\text{MHz} \quad (4.2)$$

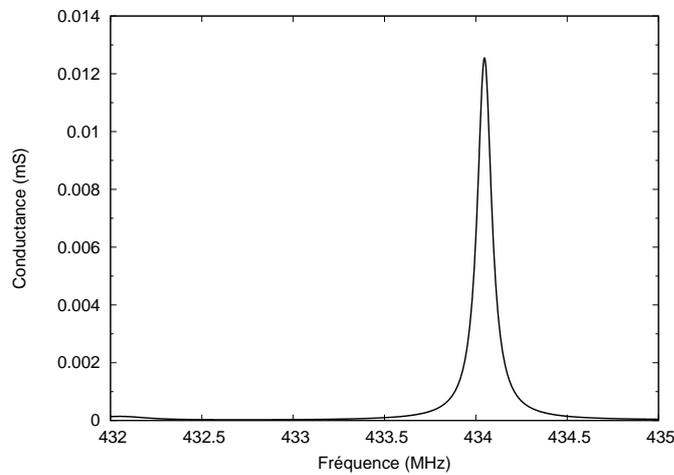


FIGURE 4.1 – Visualisation de la conductance du résonateur sans variation relative de vitesse.

La variation attendue de fréquence de résonance vaut alors :

$$\Delta F = f_{res} \cdot v_{rel} \cdot P \quad (4.3)$$

Pour valider le programme dans ce cas simple, il suffit alors de supposer que chaque cellule élémentaire du dispositif est soumise à cette variation relative de vitesse ; on montre alors que la variation de la fréquence de résonance obtenue par modélisation est la même que celle escomptée. Les courbes de la figure 4.2 montrent la conductance du résonateur en fonction de la fréquence.

La courbe «translation» est obtenue en faisant une translation de la courbe issue du graphique de la figure 4.1 dans l'axe des fréquence d'une valeur de $10^{-10} \cdot \text{MPa} \cdot f_{\text{res}}$ soit dans le cas présent 434047 Hz.

La courbe «10 MPa» est obtenue à partir de la simulation pour ce même dispositif lorsque chaque cellule élémentaire subit une variation relative de vitesse $v_{\text{rel}} \cdot 10 \text{ Mpa} = 10^{-3}$.

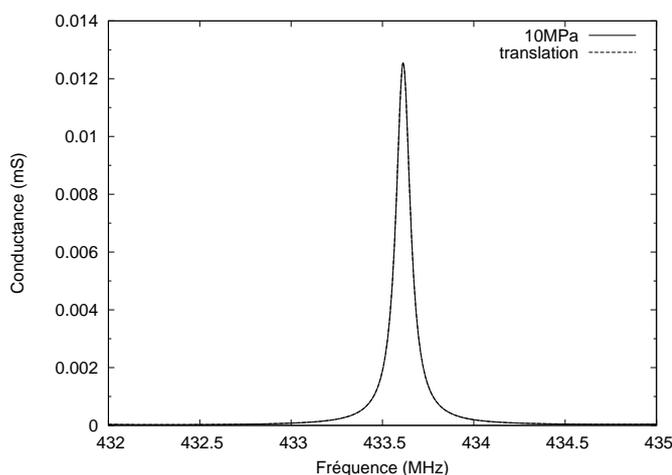


FIGURE 4.2 – Comparaison entre la conductance obtenue à partir du modèle développé et une variation de synchronisme obtenue directement par translation dans l'espace des fréquences. Les 2 courbes sont quasiment confondues.

Ces deux courbes sont très similaires et l'écart relatif de variation de fréquence de résonance induite par la pression est inférieure à 0,1%. Cet écart peut s'expliquer par le fait que les conditions de résonance ont évolué et se trouvent maintenant pour une fréquence différente pour laquelle les paramètres géométriques du résonateur ne sont «apparemment» plus les mêmes. Notons toutefois que les modifications géométriques vues par l'onde pour cette nouvelle fréquence de synchronisme sont du même ordre de grandeur que la variation relative de vitesse soit 10^{-3} . Au vu de ces résultats, nous supposons qu'il est louable de réaliser des modélisations à partir du logiciel développé au moins pour des cas simples.

4.1.2 Validation du modèle

Considérons maintenant le cas plus complexe d'une poutre. Afin d'évaluer la pertinence du modèle dans ce cas, on réalise l'expérience suivante. Un résonateur est déposé sur une poutre en quartz de coupe AT(YX1)/40° soumise à une flexion en trois points comme illustré en figure 4.3[40]. La force appliquée F induit des contraintes au sein du résonateur, lesquelles vont avoir une influence sur la réponse électrique de ce dernier. La force est appliquée via le poids de masselottes de masses connues.

La longueur d'appui de la poutre vaut L et b représente sa largeur. Le résonateur est déposé sur la partie inférieure de la poutre. La figure 4.3 représente un schéma de l'expérience.

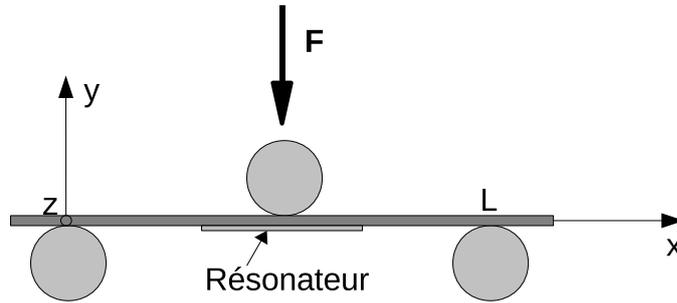


FIGURE 4.3 – Schéma de principe d'une poutre en flexion trois points dans le cas où la force est appliquée au centre de la poutre. Le résonateur est structuré sur la face inférieure de la poutre.

Connaissant le champs de contrainte vu par le résonateur, on peut dès lors simuler son comportement en fonction de la charge F appliquée.

Pour les calculs numériques et l'expérience, on considère une poutre dont les dimensions sont les suivantes :

- la valeur de L est de 9 mm,
- l'épaisseur de la poutre h est de 350 μm ,
- sa largeur vaut 6,28 mm.

Les caractéristiques géométriques du résonateur sont les suivantes :

- 2 réflecteurs de Bragg constitué chacun de 270 électrodes avec la géométrie suivante
 - une période mécanique de 3,57 μm ,
 - une épaisseur de métallisation de 160 nm,
 - un taux de métallisation de 0,76
- 68 paires d'électrodes excitatrices possédant la même géométrie que les électrodes des réflecteurs de Bragg (on parle alors de résonateur synchrone)

Dans un premier temps, on effectue un rappel sur la théorie des poutres. Celui-ci nous permet de mieux appréhender le comportement global de la poutre et nous servira également à réaliser des calculs d'erreur.

Le moment quadratique de la poutre suivant l'axe x , dans l'hypothèse d'un matériau isotrope, vaut [41]

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (4.4)$$

Le moment fléchissant est donné par

$$M_{fz} = \frac{F}{2}x \text{ pour } x < L/2 \text{ et } M_{fz} = \frac{F}{2}(L-x) \text{ pour } x > L/2 \quad (4.5)$$

La contrainte suivant x en tout point de la poutre vaut :

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_{fz}}{I} \cdot y \quad (4.6)$$

et la contrainte au niveau de la surface de la poutre vaut :

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{b} \cdot \frac{3}{h^2} \cdot x \text{ pour } x < L/2 \text{ et } \sigma_{xx} = -\frac{F}{b} \cdot \frac{3}{h^2} \cdot (L-x) \text{ pour } x > L/2 \quad (4.7)$$

Pour les simulations, les contraintes au sein de la poutre sont calculées par la méthode des éléments finis et les problèmes d'élasticité sont résolus à partir du logiciel Modulef développé par l'INRIA et d'autres modules développés par notre équipe de recherche. La figure 4.4 permet d'illustrer le maillage utilisé afin de modéliser les contraintes.

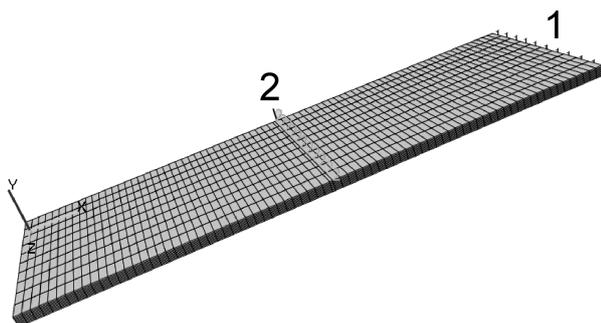


FIGURE 4.4 – Visualisation du maillage utilisé pour la modélisation des contraintes au sein de la poutre. Pour les simulations, on considère que le déplacement suivant l'axe y est nul pour la référence 1 et l'on applique une pression au niveau de la référence 2 (la référence 2 est représentée par la surface au centre de la poutre définie entre les deux lignes. Sa longueur suivant l'axe x vaut 10^{-4} m et sa largeur vaut 6,28 mm. De fait, la pression est appliquée sur une surface de $6,28 \cdot 10^{-7} \text{m}^2$).

Une fois le champ de contrainte déterminé au niveau du résonateur, on peut modéliser sa réponse électrique. Pour les modélisations, on suppose que la répartition des contraintes est linéaire avec la force appliquée sur la poutre (hypothèse de l'élasticité linéaire).

La valeur du tenseur des contraintes en tout point est déterminée et à chaque point de la poutre est associée une variation relative de la vitesse des ondes. Les coefficients de sensibilité aux contraintes sont donnés en annexe B page 145 et ont été obtenues à partir d'analyses numériques développées au laboratoire selon une méthode de perturbation (voir la section 3.2.0.3 page 44). Le champ de contrainte étant continu, nous supposons que par interpolation il est possible de connaître la variation relative de vitesse en tout point du résonateur et ainsi déterminer sa réponse électroacoustique.

Le graphique de la figure 4.5 représente la variation de la vitesse relative sur la partie inférieure de la poutre lorsqu'une pression de un pascal est appliquée sur la référence 2.

Les courbes de la figure 4.6 montrent la variation de fréquence obtenue avec la modélisation lorsqu'on suppose que le résonateur est soumis aux variations relatives de vitesse suivantes :

- La courbe «inh» indique la variation de la fréquence de résonance du résonateur avec la force appliquée en tenant compte de la répartition inhomogène des variations de distribution de vitesse.
- La courbe «max» indique la variation de la fréquence de résonance du résonateur avec la force appliquée si l'on considère que le résonateur est soumis partout à la plus grande variation de vitesse.

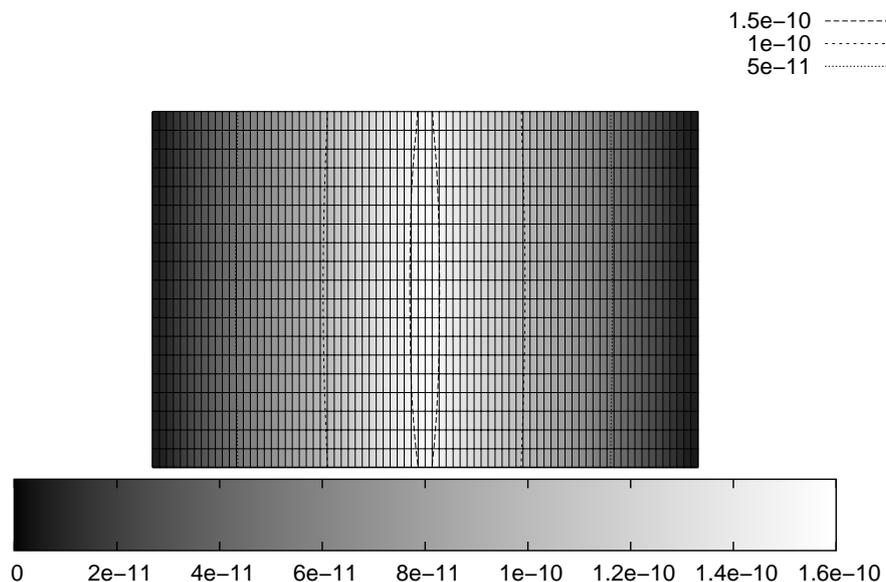


FIGURE 4.5 – Visualisation de la variation de la vitesse relative au sein de la poutre. On suppose que la poutre est vue de dessous. La verticale représente l'axe z et l'horizontale l'axe x . Les valeurs sont obtenues pour une pression de un pascal (1 Pa) appliquée au niveau de la référence deux.

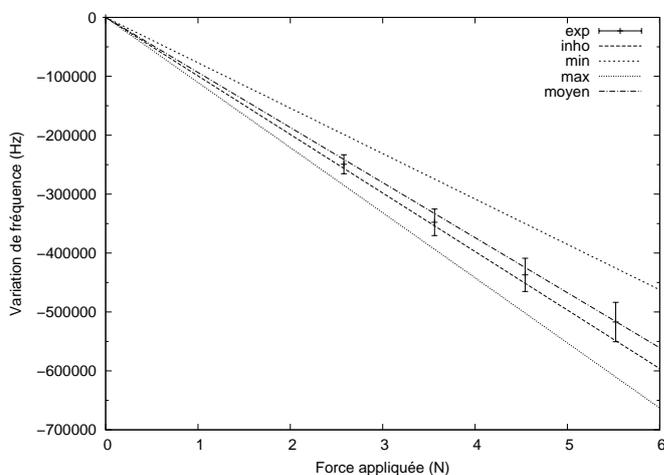


FIGURE 4.6 – Visualisation de la sensibilité obtenue expérimentalement et par modélisation pour un résonateur placé au centre de la poutre sur la face inférieure en fonction de la force appliquée. Les simulations sont effectués pour une force de 6,28 N (soit une pression de 10^7 Pa sur l'unité de référence 2). Une régression linéaire est ensuite effectuée pour cette valeur de contrainte (on suppose que le modèle est linéaire).

- La courbe «min» indique la variation de la fréquence de résonance du résonateur si l'on considère que le résonateur est soumis partout à la plus petite variation de vitesse.
- La courbe «moyen» indique la variation de la fréquence de résonance du résonateur si l'on considère que le résonateur est soumis à la variation moyenne de la vitesse.
- Les points de la courbe «exp» indiquent la variation de la fréquence de résonance obtenue expérimentalement.

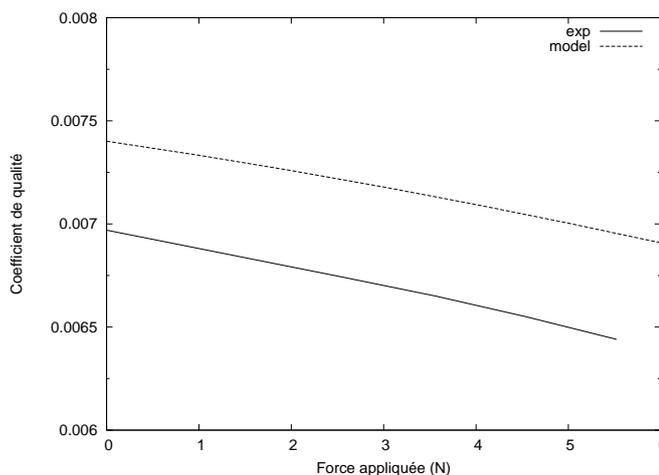


FIGURE 4.7 – Visualisation de l'évolution des conductances obtenues expérimentalement et par modélisation en fonction de la force appliquée.

nue expérimentalement. Le calcul de la barre d'erreur est détaillé ci-après. Ces points sont obtenus lorsqu'on applique différentes masselotes comme indiqué sur la 4.3.

Notons que la proximité des courbes correspondant à la variation relative de vitesse moyenne et à la distribution inhomogène de celle-ci est en accord avec les développements réalisés sur la linéarité dans le chapitre précédent où l'on montrait globalement que le premier ordre de décomposition de la variation de vitesse était le plus influant pour la variation de fréquence et que les ordres supérieurs influaient sur le reste du signal (valeur de la conductance mais aussi évolution du coefficient de qualité).

Pour le moment, le modèle développé ne semble pas plus pertinent qu'une simple variation de synchronisme en considérant la moyenne de la variation de vitesse vue par l'onde, mais il donne lieu cependant à des résultats au moins aussi satisfaisants que cette approche au sens de l'accord théorie expérience compte tenu des incertitudes sur la mesure.

4.1.3 Calcul d'erreur

Afin de déterminer l'erreur sur l'expérience, on évalue les incertitudes pratiques sur les paramètres suivants :

- La position du résonateur n'est pas connue à mieux que 0,05 mm de précision.
- L'épaisseur de la poutre est homogène à 5 μm près.
- La masse de chaque masselotte est supposée connue au gramme près
- La largeur de la poutre n'est précise qu'à 2 μm .
- Incertitude sur l'angle du substrat de quelques minutes d'angle.
- Une connexion électrique avec une soudure au niveau du centre de la plaque qui rigidifie l'ensemble et modifie la distribution de contraintes.
- L'influence de l'onde Rayleigh décroît de manière exponentielle au sein du matériau.

La variation de fréquence relative induite par tous ces paramètres vaut alors :

$$\Delta f_{\text{erreur}} = \Delta f_{\text{epais}} + \Delta f_{\text{larg}} + \Delta f_{\text{pos}} + \Delta f_{\text{masse}} + \Delta f_{\text{angle}} + \Delta f_{\text{connec}} + \Delta f_{\text{onde}} \quad (4.8)$$

Où Δf_{epais} , Δf_{larg} , Δf_{pos} , Δf_{masse} , Δf_{angle} , Δf_{connec} et Δf_{onde} sont respectivement l'écart de variation de fréquence dû à la variation d'épaisseur de la poutre, de sa largeur, de sa position, de la variation de masse des masselottes, de la variation d'angle des substrats, de la variation due aux connexions électriques et des variations dues aux variations de sensibilité sur la profondeur de pénétrations des ondes

Dans le cas d'une poutre isotrope, la variation de contrainte σ au niveau de la membrane est estimée à partir de l'équation 4.7 à :

$$\Delta \sigma = \Delta \left(\frac{F}{bh^2} \cdot x \right) \quad (4.9)$$

Un ordre de grandeur de la variation relative de variation de vitesse $\frac{\Delta v}{v}$ dû aux incertitudes géométriques de la poutre vaut alors :

$$\frac{\Delta v}{v} = \alpha \left(\frac{\Delta b}{b} + 2 \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta x}{x} \right) \quad (4.10)$$

Où α représente le coefficient de sensibilité à la contrainte.

L'influence due aux connexions électriques n'est pas estimée dans ce rapport. Toutefois, elle aurait pu être directement prise en compte dans la modélisation par élément finis.

En ce qui concerne les variations de vitesse dues aux variations de l'angle, on suppose une variation de l'angle ψ et θ de 5° pour ψ et 5° pour θ autour de la position $(0,0,40^\circ)$. On connaît le tenseur des contraintes au niveau de chaque noeud du maillage de la poutre. On sélectionne alors les nœuds au niveau du résonateur et on détermine la variation relative de vitesse moyenne au niveau du résonateur pour chaque angle autour de cette position. Cette approche permet de déterminer un bon ordre de grandeur car la variation relative de résonance en tenant compte d'une distribution inhomogène de variation de vitesse est proche de la variation relative due à la moyenne des variations de vitesse lorsque la contrainte n'est pas distribuée selon l'axe z . Le graphique 4.8 illustre la variation relative de vitesse pour une variation de l'angle ψ et θ . On peut voir que dans la pire des situations, la variation relative de vitesse peut aller de -7% à 1%.

Afin d'estimer la variation de variation de vitesse due à la pénétration de l'onde dans le substrat, nous considérerons que l'onde se comporte comme si elle était soumise à la moyenne des variations de vitesse. On suppose que comme dans le cas d'une poutre isotrope, la contrainte diminue linéairement du dessus de la poutre au dessous de la poutre en s'annulant au niveau de la ligne neutre. Il suffit alors de moyenniser la contrainte avec «l'intensité» de l'onde de Rayleigh. Si l'on suppose en première approximation que l'onde décroît linéairement et s'annule au bout de deux longueurs d'onde la valeur moyenne de variation de vitesse vue par la poutre vaut :

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{2\lambda} \int_0^{2\lambda} \sigma_{\text{surf}} \cdot \left(1 - \frac{y}{2\lambda}\right) \left(1 - y \frac{2}{h}\right) dy \quad (4.11)$$

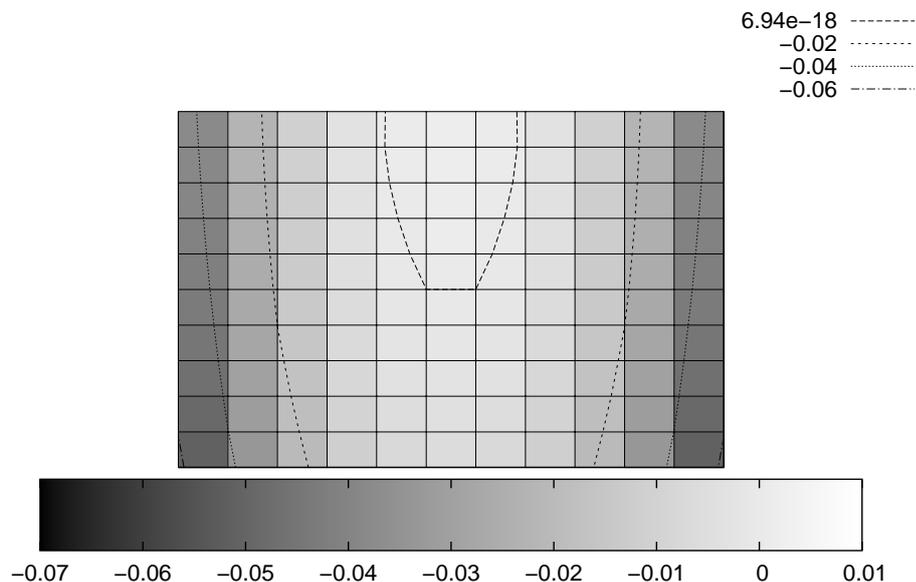


FIGURE 4.8 – Visualisation de la variation relative de vitesse par rapport à la coupe (0,0,40°) pour des variations d'angle de ψ (en abscisse) et θ (en ordonnée). Le graphique est centré sur la coupe (0,0,40°). Le pas de la grille vaut 1° en abscisse comme en ordonnée.

Où $\langle \sigma \rangle$ représente la moyenne de la contrainte que voit l'onde, λ est la longueur d'onde, σ_{surf} est la contrainte à la surface de la poutre et h son épaisseur. Pour $\lambda=3,38 \mu\text{m}$ et $h=340 \mu\text{m}$, $\frac{\langle \sigma \rangle - \sigma_{surf}}{\sigma_{surf}} = 0.04$

Ces ordres de grandeurs permettent de juger de la qualité de l'expérience et montrent au vu des barres d'erreurs de la figure 4.6 la pertinence de l'expérience par rapport au cas où l'on considère la valeur minimale ou maximale des variations de vitesses vues par le résonateur sans toutefois apporter plus de crédit à ce modèle qu'au modèle consistant à considérer la valeur moyenne des variations de vitesse vues par le résonateur.

4.1.4 Évolution de la réponse électroacoustique

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la réponse électroacoustique du résonateur en fonction de différents paramètres. Notons que pour la réalisation des simulations et pour être au plus près des conditions expérimentales, nous associons aux simulations un coefficient de perte (voir notice d'utilisation du logiciel en annexe). Ce coefficient permet principalement de pouvoir ajuster le coefficient de qualité du résonateur. Son origine se trouve d'une part dans les propriétés visco-élastiques des matériaux utilisés, d'autre part dans les pertes ohmiques du transducteur et pour finir dans les effets de rayonnement de l'onde dans le milieu adjacent (l'ensemble étant estimé à quelques 10^{-4} dB/ λ). Tout d'abord, nous étudions l'influence de ce coefficient sur l'évolution du

coefficient de qualité du résonateur.

La figure 4.9 illustre l'évolution du coefficient de qualité du résonateur en fonction du coefficient de perte. Elle montre une convergence du coefficient de qualité lorsque les pertes diminuent.

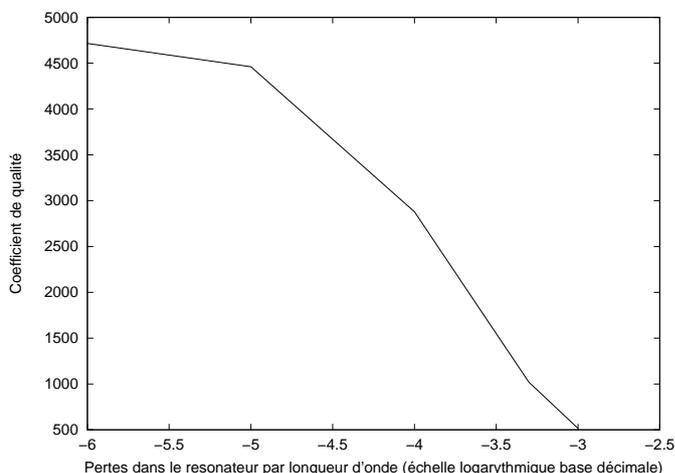


FIGURE 4.9 – Évolution du coefficient de qualité en fonction des pertes utilisées exprimées en décibels par longueur d'onde pour la simulation.

Expérimentalement, on a un coefficient de qualité de 1850. Pour les simulations, on se réfère donc à la figure 4.9 ce qui nous permet de fixer les pertes à $10^{-3,5}$.

La figure 4.10 montre l'évolution du coefficient de qualité en fonction de la force appliquée sur la poutre obtenu par modélisation et expérimentalement. On notera la tendance inverse. Cette inversion de tendance a été observée pour de nombreux dispositifs mais n'est pas expliquée. Expérimentalement, le coefficient de qualité est mesurée via un analyseur de réseau.

La figure 4.11 montre l'évolution relative du coefficient de qualité du résonateur obtenu par modélisation pour différents coefficients de perte en fonction de la pression appliquée. Elle montre que plus le coefficient de qualité initial est grand, plus il est dégradé par la contrainte. Notons toutefois que les variations relatives sont de faible amplitude.

La figure 4.12 montre l'évolution de la sensibilité relative du résonateur obtenu par modélisation en fonction de la force appliquée pour différentes valeurs de perte. Ces courbes montrent que la sensibilité du résonateur dépend de la contrainte appliquée. La variation de fréquence de résonance n'est donc pas linéaire avec la pression. Cependant, on peut voir que sur la figure, le maximum d'écart d'environ 0,2% est obtenu pour 10 Newton ce qui correspond à une contrainte induite dans la plaque de l'ordre de grandeur de la contrainte à la rupture du quartz. On peut donc considérer en première approximation un comportement linéaire de la variation de la fréquence de résonance avec la pression sans de véritable perte de généralité.

On étudie maintenant l'évolution de la conductance en fonction de la charge appliquée. La figure 4.13 montre l'évolution relative de la conductance obtenue par modélisation en fonction de la force appliquée pour différentes pertes. Notons que quelles que soient les pertes, la conductance

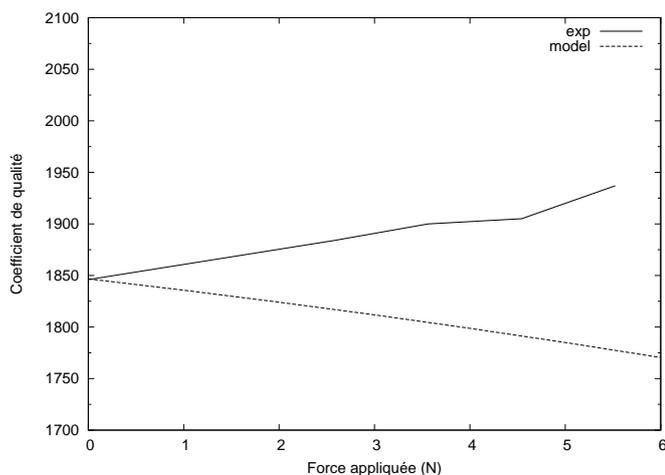


FIGURE 4.10 – Évolution du coefficient de qualité obtenu par modélisation et expérimentalement en fonction de la force appliquée sur la poutre.

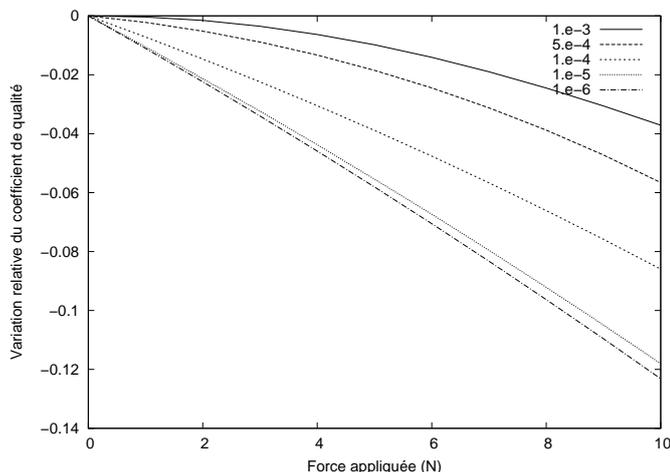


FIGURE 4.11 – Évolution relative du coefficient de qualité en fonction de la force appliquée pour différentes pertes dans la modélisation.

diminue avec la force appliquée et d'autant plus rapidement que les pertes sont faibles.

Cette expérience élémentaire et sa modélisation associée montre la validité du modèle développé pour des cas simples. Nous retiendrons le bon accord de sensibilité théorique avec l'expérience. Notons également que l'évolution de la fréquence de résonance avec la charge appliquée dépend du coefficient de qualité initial. Cependant, les variations sont de très faibles amplitude et l'hypothèse de linéarité n'est pas véritablement remis en cause.

4.2 Théorie des membranes et des plaques minces isotropes

Cette première partie consiste en l'analyse théorique du comportement de membranes soumises à des forces pressantes. Cette analyse sera particulièrement détaillée pour le cas d'une membrane mince circulaire encastrée d'un matériau isotrope. Nous nous servons de ces déve-

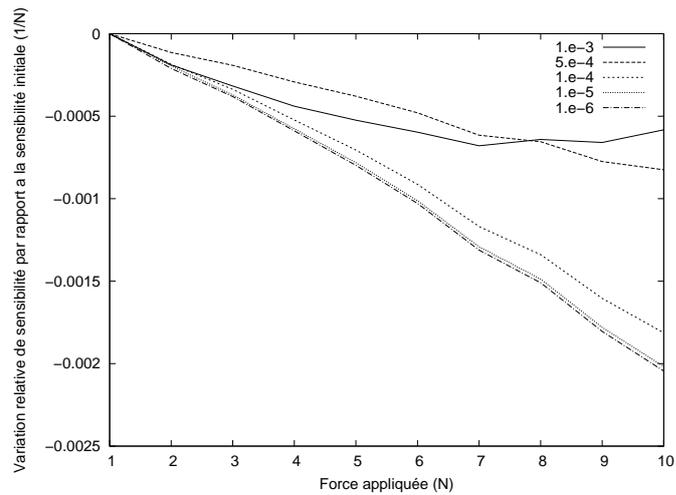


FIGURE 4.12 – Évolution de la sensibilité relative du résonateur en fonction de la charge utilisée.

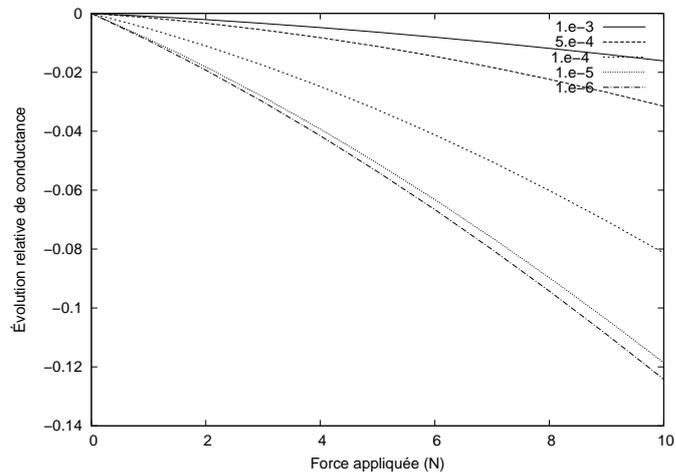


FIGURE 4.13 – Évolution relative de la conductance en fonction de la charge utilisée pour différentes valeurs de pertes.

lancement pour réaliser des calculs d'ordre de grandeur pour le dimensionnement du capteur.

4.2.1 Historique

Les premières expériences sur les plaques minces furent réalisées par Euler en 1766 [42]. Cauchy (1828) et Poisson (1829) développèrent le problème de la déformation de membranes en utilisant la théorie générale de l'élasticité. En 1829, Poisson développa avec succès les bases permettant la compréhension de la déformation de plaques minces soumises à une charge statique. Quelques unes des grandes contributions de la théorie des plaques minces proviennent de la thèse de Kirchhoff parue en 1850 [43]. Il énonça les hypothèses de base permettant le développement mathématique de la théorie, à savoir [44] :

1. le matériau composant la membrane est supposé élastique, homogène et isotrope,
2. la plaque est supposée initialement plate,

3. la déflexion de la plaque (la composante normale du vecteur de déplacement) est petite comparée à l'épaisseur de la plaque. La pente de la surface soumise à une charge est considérée infiniment petite (nous nous plaçons donc loin des régimes non linéaires),
4. la normale à la plaque, initialement normale à la plaque avant déformation, reste normale à la membrane pendant la déformation et ses longueurs caractéristiques restent inchangées pendant la déformation,
5. les contraintes normales à la plaque σ_z sont petites comparées aux autres composantes de la contrainte et peuvent être négligées dans les relations contrainte/déformation,

Ces différents points illustrent les hypothèses communément utilisées dans la théorie des plaques minces.

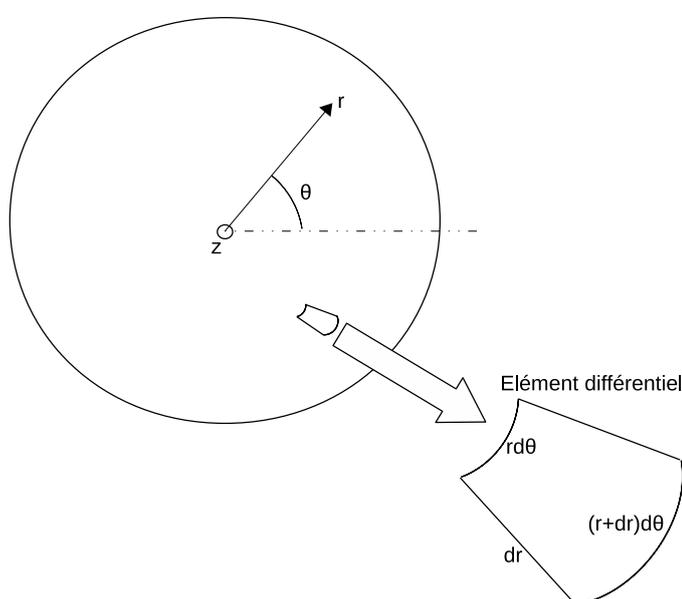


FIGURE 4.14 – Figure illustrant une plaque et la géométrie cylindrique utilisée dans le problème.

4.2.2 Formulation de base du problème de flexion statique de la flexion d'une plaque mince

Les plaques minces sont souvent caractérisées par le rapport a/h , où a représente la longueur de la membrane et h son épaisseur. Lorsque ce rapport est compris entre 8 et 80, on parle alors de théorie des plaques minces et dans l'hypothèse des lois de Kirchhoff, l'équation gouvernant la déflexion de ces plaques mince vérifie alors [45] (se référer à la figure 4.14 qui permet d'illustrer la géométrie utilisée.):

$$D[\nabla^4 w(r, \theta, t)] = \rho h w(r, \theta, t) \quad (4.12)$$

où ∇^4 représente l'opérateur biharmonique de dimension 3 et vaut

$$\nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \quad (4.13)$$

en coordonnées cylindriques, et où w représente la déflexion de la plaque, ρ la masse volumique du matériau et D le module de rigidité du matériau défini par

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.14)$$

avec E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson associé au matériau.

Dans notre problème, nous pouvons considérer en première approximation l'hypothèse d'un encastrement rigide raisonnablement proche du cas réel. La plaque est supposée encadrée sur les bords, ce qui se traduit par les conditions aux limites suivantes afin de résoudre l'équation (4.12). Soit R le rayon de la plaque. La déflexion au bord de la plaque est supposée nulle ainsi que sa pente, ce qui se traduit par :

$$w(r = R) = 0 \quad (4.15)$$

et

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (4.16)$$

La pression est supposée homogène sur l'ensemble de la membrane. La déflexion de la membrane prend alors la forme suivante [41] :

$$w(r) = \frac{p}{64D}(R^2 - r^2)^2 \quad (4.17)$$

où p représente la pression exprimée en Pa.

Les contraintes radiales et tangentielles à une altitude z sont données par les équations [41]

$$\sigma_r = \frac{p}{16} \frac{12}{h^3} (R^2(1+\nu) - r^2(3+\nu))z \quad (4.18)$$

$$\sigma_\theta = \frac{p}{16} \frac{12}{h^3} (R^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu))z \quad (4.19)$$

La contrainte maximale se trouve au niveau de la surface pour $r = 0$ et on a :

$$\sigma_\theta = \sigma_r = \frac{p}{8} \frac{3}{h^2} (R^2(1+\nu)) \quad (4.20)$$

L'épaisseur de la membrane doit donc être telle que :

$$h^2 > p.(1+\nu). \frac{3}{8} \frac{R^2}{\sigma_m}$$

où σ_m représente la limite à la rupture du matériau.

4.2.3 Comportement dynamique

D'un point de vue dynamique, le comportement de la membrane vérifie l'équation suivante [46] :

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4.21)$$

La solution de cette équation peut être décorrélée spatialement et temporellement et peut alors s'écrire sous la forme [46]

$$w_{mn}(r, \theta, t) = w_{mn}(r, \theta)e^{i\lambda_{mn}t} \quad (4.22)$$

Où λ_{mn} est une valeur propre imposant les valeurs de la fréquence de résonance. On obtient alors l'équation caractéristique [46]

$$\begin{aligned} J_m(\lambda_{mn})I_{m+1}(\lambda_{mn}) + I_m(\lambda_{mn})J_{m+1}(\lambda_{mn}) &= 0 \\ m &= 0, 1, 2, \dots \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.23)$$

Où J_m et I_n sont respectivement la fonction de Bessel de premier type d'ordre m et la fonction modifiée de Bessel de second type d'ordre n . Les valeurs solutions des λ_{mn} peuvent être calculées numériquement et sont données dans le tableau 4.1 :

m	n	0	1	2	3
0		3,19	4,61	5,90	7,14
1		6,30	7,79	9,19	10,5
2		9,44	10,9	12,4	13,7
3		12,5	14,1	15,5	17,0

TABLE 4.1: Valeurs numériques des premiers λ_{mn}

Les fréquences de résonance sont alors définies par

$$f_{mn} = \frac{h}{2\pi} \left(\frac{\lambda_{mn}}{R} \right)^2 \sqrt{\frac{E}{12(1-\nu^2)\rho}} \quad (4.24)$$

4.2.3.1 Ordre de grandeur

Dans le cas d'une membrane en quartz (si on suppose un module d'young moyen), les valeurs intrinsèques au matériau sont les suivantes :

- $E=72$ GPa
- $\nu=0,17$
- $\rho=2650$ kg.m⁻³
- $\sigma_m=250 \times 10^6$ Pa [47]

Pour les calculs numériques, on considère une membrane dont le rayon vaut 4 mm et dont l'épaisseur est 100 μ m, la fréquence de résonance de plus basse fréquence est obtenue pour $m = n = 1$

et vaut

$$f=1,8.10^4 \text{ Hz}$$

La déflexion au centre de la membrane pour une pression de 10^5 Pa vaut

$$w_{\max}=60 \text{ }\mu\text{m}$$

Pour une pression de 10^5 Pa l'épaisseur de la membrane doit être supérieure à :

$$h>10 \text{ }\mu\text{m}$$

Pour une membrane de $100 \text{ }\mu\text{m}$, la pression maximale admissible est :

$$p<3,5.10^5 \text{ Pa}=3,5 \text{ Bar}$$

Ces ordres de grandeurs permettront par la suite le dimensionnement de grandeurs caractéristiques de la géométrie du capteur.

4.3 Modélisation et optimisation géométrique

4.3.1 Définition du coefficient d'efficacité

Considérons le résonateur décrit page 64 ainsi que deux distributions de variation de vitesse telle que la matrice décrivant l'état de variation de la vitesse au niveau de la surface du résonateur soit défini par les matrices M_1 et M_2 telles que :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 10^{-9} \\ 0 & 10^{-9} \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 10^{-9} & 10^{-9} \\ 10^{-9} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

défini au sens de NMM en annexe C à la page 153 où une matrice permet de définir entièrement l'état de variation de la vitesse des ondes au sein du résonateur par interpolation quadratique d'une matrice de réels de taille quelconque. Les figures 4.15 et 4.16 illustrent l'évolution de la courbe de conductance pour la distribution correspondant à M_1 et M_2 en fonction de la pression (on parle ici de pression comme d'un coefficient multiplicateur de la variation relative de vitesse). On peut voir qu'en fonction de la distribution de la variation de vitesse, la réponse du résonateur est très différente en fonction de la pression appliquée. Les courbes 4.17 et 4.18 montrent respectivement l'évolution de la sensibilité effective du résonateur (dont l'unité est $[\text{Hz} \cdot \text{Pa}^{-1}]$) pour la distribution M_1 et de son coefficient de qualité en fonction de la pression exercée.

Dans l'application capteur, on cherche des positions tendant à maximiser la sensibilité du résonateur tout en conservant un coefficient de qualité stable avec la pression. Les figures 4.19 et 4.20 illustrent l'évolution du produit de la sensibilité effective par le coefficient de qualité en fonction de la pression appliquée. Bien que ces courbes ne soient pas affines, la tendance décrite par ces courbes nous amène à définir une nouvelle fonction.

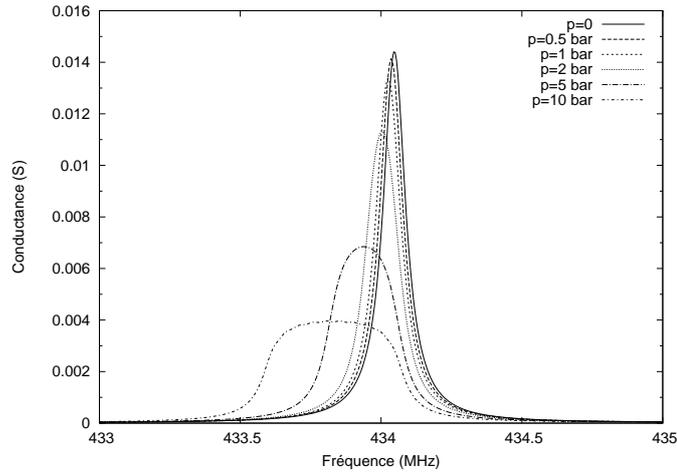


FIGURE 4.15 – Évolution de la conductance du résonateur en fonction de la pression appliquée pour la distribution de variation de vitesse définie par M_1 .

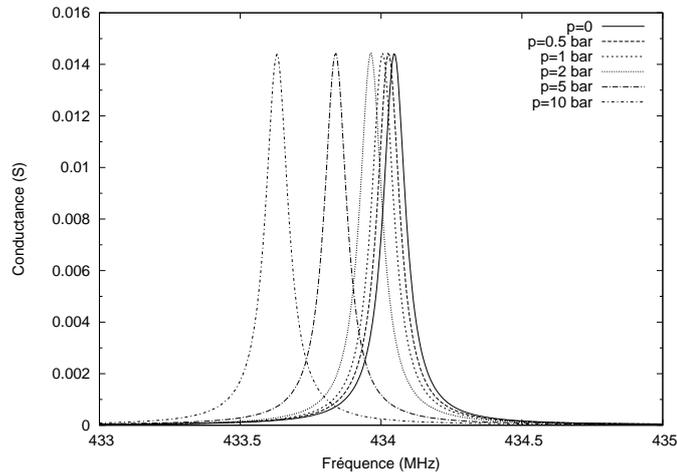


FIGURE 4.16 – Évolution de la conductance du résonateur en fonction de la pression appliquée pour la distribution de variation de vitesse définie par M_2 .

On définira alors la fonction d'efficacité $eff(p)$ par :

$$eff(p) = s(p) \cdot Q(p) \quad (4.26)$$

où

$$s = \frac{f_{res}(0) - f_{res}(p)}{p} \quad (4.27)$$

représente la sensibilité effective du résonateur pour une distribution de variation de vitesse donnée, $Q(p)$ est le coefficient de qualité pour une pression p , $f_{res}(0)$ la fréquence de résonance sans pression et $f_{res}(p)$ la fréquence de résonance avec la pression.

Dans la suite, on appellera coefficient d'efficacité la valeur de la fonction $eff(p)$ pour une valeur de pression donnée. Le coefficient d'efficacité permettra alors de juger de la pertinence d'une position en tenant compte à la fois de la sensibilité effective ainsi que de l'évolution du

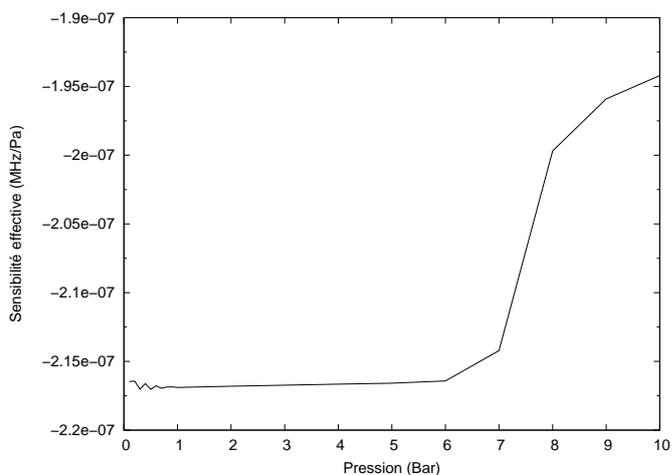


FIGURE 4.17 – Évolution de la sensibilité effective du résonateur pour la distribution M_1 en fonction de la pression appliquée.

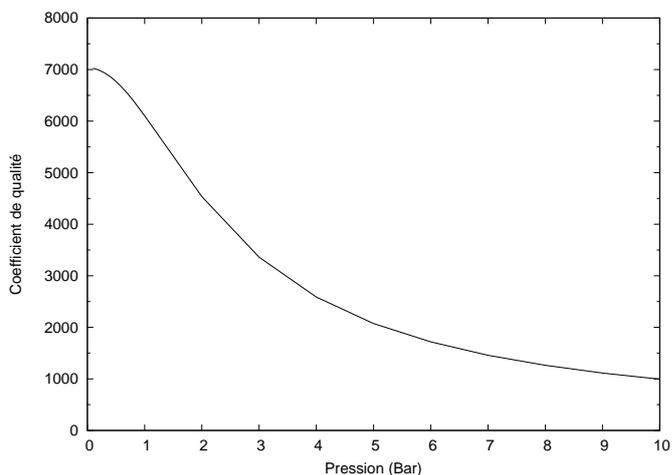


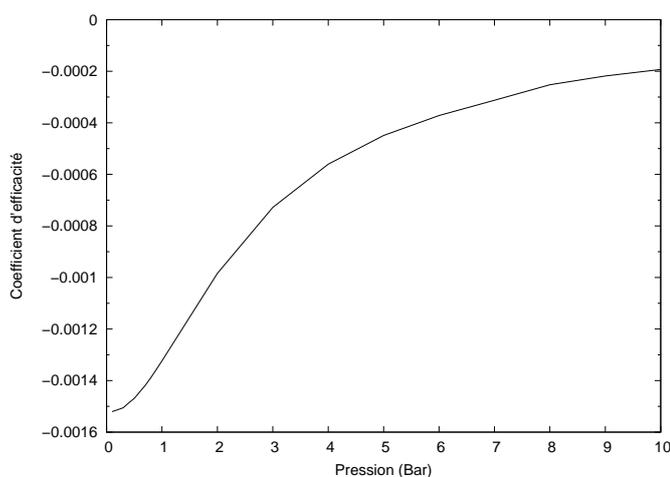
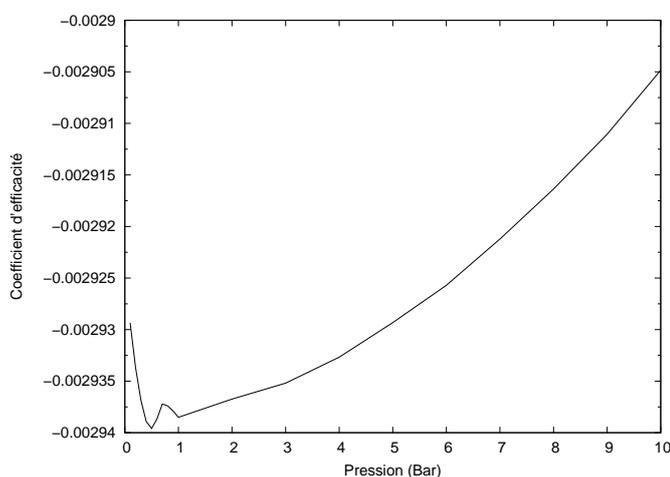
FIGURE 4.18 – Évolution du coefficient de qualité du résonateur pour la distribution M_1 en fonction de la pression appliquée.

coefficient de qualité. A partir de la seule valeur de ce coefficient il est désormais possible de juger de la pertinence d'une position. A partir de distributions de variations de vitesses, lorsque la sensibilité effective des distributions est la même, le coefficient d'efficacité à chacune de ces distributions permet alors de déterminer les distributions les plus intéressantes.

4.3.2 Modélisation de la membrane

La membrane du capteur est constituée d'un matériau anisotrope, le quartz. Afin de connaître les contraintes au niveau de celle-ci, son comportement est modélisé par un logiciel de type éléments finis.

De plus, cette méthode permet de modéliser l'ensemble du capteur et donc s'affranchir des conditions aux limites de la membrane qui sont difficile à décrire analytiquement. Le châssis sur lequel est fixée la membrane se déforme sous l'effet des forces pressantes et cet effet n'est pas pris

FIGURE 4.19 – Évolution du coefficient d'efficacité pour la distribution M_1 en fonction de la pression.FIGURE 4.20 – Évolution du coefficient d'efficacité pour la distribution M_2 en fonction de la pression.

en compte dans le développement analytique (un schéma du capteur est représenté sur la figure 5.1 de la page 110). La figure 4.21 représente un quartier du maillage utilisé pour modéliser les contraintes au sein de la membrane. Le maillage final est obtenu avec 36 rotation de 10° chacune autour de l'axe y .

4.3.3 Modélisation de la position du résonateur

Afin d'étudier le comportement d'un résonateur localisé sur une partie de la surface de la membrane, on ne considère que la distribution de contraintes associée à cette partie. Le maillage au niveau de la surface de la membrane n'est pas régulier et n'est donc pas comptable avec le logiciel NMM développé pour lequel en entrée on doit disposer d'un maillage régulier correspondant à la variation relative de la vitesse (voir notice d'utilisation en annexe C). On réalise alors une interpolation triangulaire de Delaunay [48] de manière à obtenir une matrice régulière représentant l'état de contrainte au niveau de la membrane.

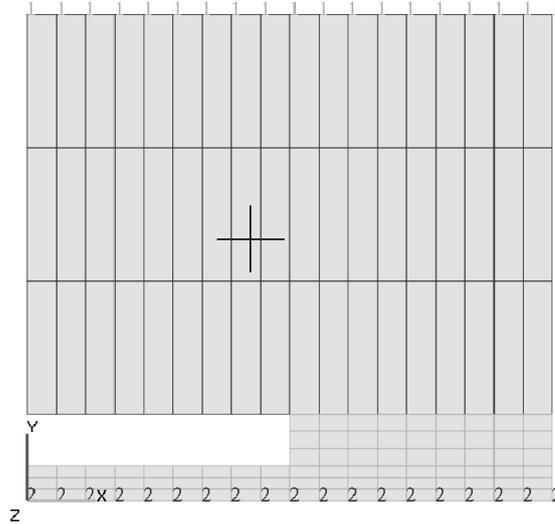


FIGURE 4.21 – Visualisation du maillage en deux dimensions utilisé à engendrer le maillage en trois dimensions pour les modélisations par éléments finis. Les points à la référence 1 voient leur déplacement suivant y nul. Les points et arêtes à la référence 2 subissent une contrainte pressante suivant l'axe y . Le maillage en trois dimensions est obtenu par symétrie cylindrique du maillage en deux dimensions suivant l'axe y .

Dans un premier temps, on cherche à déterminer l'influence de la position du résonateur sur la membrane. Afin de déterminer cette influence, nous modélisons la réponse électrique du résonateur en fonction de la pression appliquée pour différentes positions. Pour le modèle numérique, nous considérons un résonateur dont la conception a été réalisée par la société SENSEOR. Les propriétés géométriques du résonateur sont les suivantes :

- 68 paires d'électrodes excitatrices avec un taux de métallisation de 0,7257 et une période mécanique de $3,599\mu\text{m}$,
- 2 réflecteurs de Bragg composés chacun de 270 électrodes avec un taux de métallisation de 0,7257 et une période mécanique de $3,621\mu\text{m}$,
- l'ouverture acoustique du résonateur est fixée à $350\mu\text{m}$.

Notons dès à présent que la longueur totale du résonateur décrit précédemment est de $2400\mu\text{m}$.

La figure 4.22 illustre la variation de la vitesse au niveau de la membrane. Contrairement au cas de la poutre où la variation de vitesse était homogène le long des électrodes (suivant la direction z de la figure 4.5 page 68), la variation de vitesse est très inhomogène dans le cas de la membrane. Elle est donc très inhomogène le long des électrodes du résonateur ce qui a pour conséquence de modifier grandement la réponse électrique. La figure 4.22 montre également que l'action des forces pressantes se fait ressentir également hors de la membrane, on simulera donc le comportement du résonateur même en dehors de celle-ci. Pour ce faire, le plan contenant la membrane est quadrillé et pour chaque nœud du quadrillage pour lequel le résonateur est soumis aux effets de la pression, on modélise sa réponse électrique (voir figure 4.23).

Dans un premier temps, on considère une membrane de 4 mm de rayon sur laquelle est placé

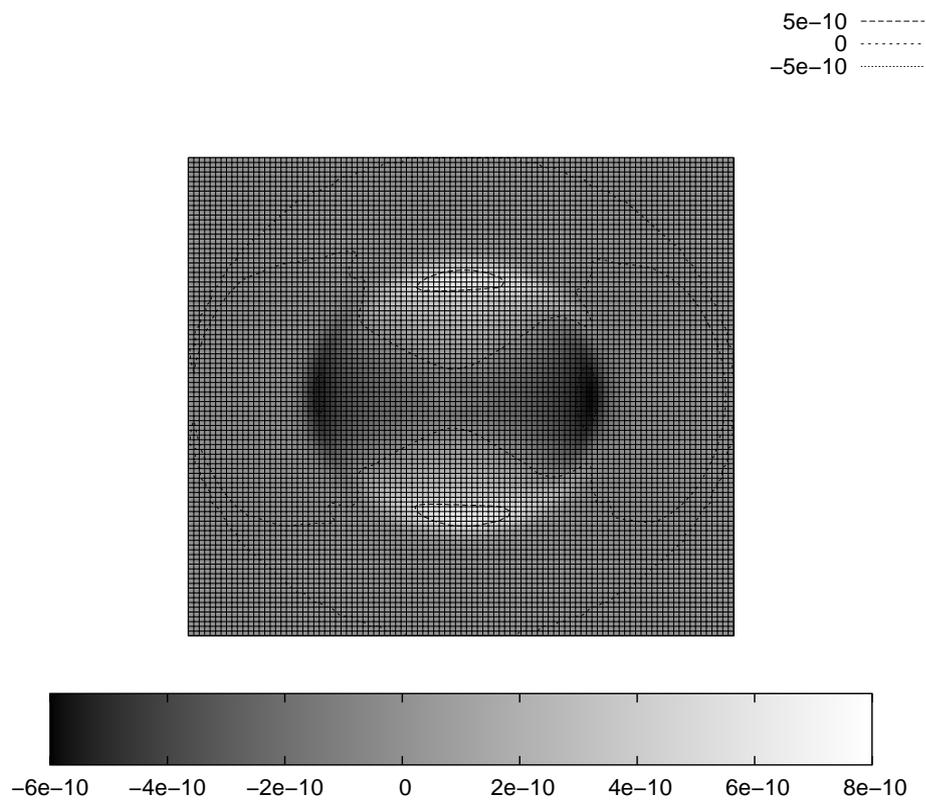


FIGURE 4.22 – Visualisation de la variation de vitesse relative en fonction de la position sur la membrane du résonateur. Le grand cercle de même diamètre que le côté du carré indique la limite du maillage utilisé (rappelons que le maillage a été obtenu par rotation et n'est pas défini en dehors du disque défini par ce cercle). Les valeurs de remplissage sont les mêmes que celles obtenues sur le cercle. Le rapport entre le diamètre de la membrane et le carré est de deux. De fait, on peut noter que l'influence des forces pressantes se fait ressentir jusqu'à environ $6/5$ du rayon de la membrane.

le résonateur. Pour chacun des graphiques, le pas du maillage vaut un dixième du rayon.

La pression d'étude est fixée à 10 Bars et l'on étudie l'évolution des paramètres tels que la sensibilité effective, la conductance à la résonance, le coefficient de qualité du résonateur et le coefficient d'efficacité.

L'évolution de la sensibilité effective, de la conductance, du coefficient de qualité et du coefficient d'efficacité sont respectivement représentées sur les courbes des figure 4.24, 4.25, 4.26 et 4.27.

Sur la figure 4.24, notons la forte variation de la sensibilité effective en fonction de la position du résonateur mais également la présence d'extrema qui correspondent à des zones où la sensibilité effective est la plus élevée. Notons également que deux de ces points se retrouvent également comme extrema sur la courbe de la figure 4.26. C'est à ce niveau que le coefficient d'efficacité prend tout son sens. Il permet de corréler les deux courbes et ainsi de simplifier l'analyse. Les extrema de la figure 4.27 montrent ainsi les positions pour lesquelles le coefficient de qualité

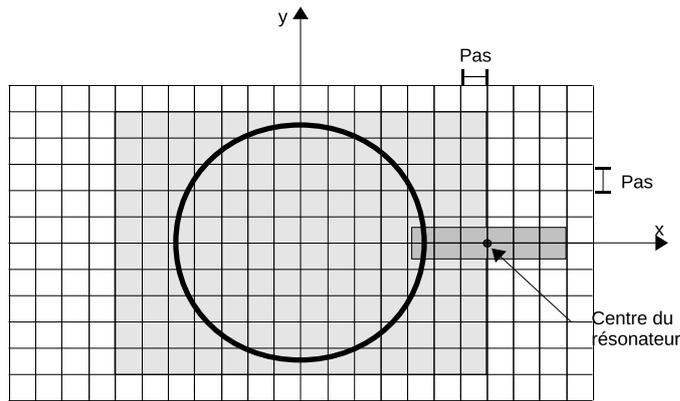


FIGURE 4.23 – Schéma montrant la disposition du résonateur sur la membrane. Pour les modélisations qui suivent, une modélisation est réalisée pour chaque point de la grille sous le rectangle grisé. Le diamètre du cercle représente $6/5$ du diamètre de la membrane et le pas représente $1/10$ du rayon (la densité de la grille sur la figure est plus faible).

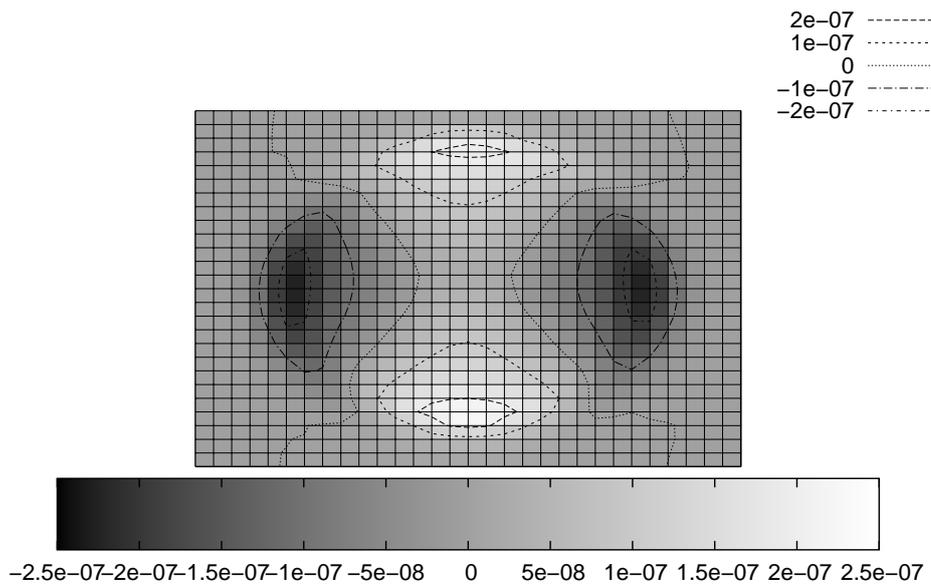


FIGURE 4.24 – Visualisation de la sensibilité effective du résonateur pour une membrane de 4 mm de rayon en fonction de sa position. Le pas du maillage est de 0,4 mm. La membrane est centrée au milieu du rectangle de simulation.

diminue peu avec la pression mais également où la sensibilité est forte. Un résonateur placé au niveau de ces points sera très sensible à la contrainte mais conservera également un coefficient de qualité stable avec la pression appliquée. Ces positions sont donc idéales pour le positionnement de résonateurs sensibles à la pression en vue de la réalisation d'un capteur de pression. D'autre part, remarquons la présence de points pour lesquels le coefficient d'efficacité est nul (l'ensemble de ces points est indiqué par la courbe d'isovaleur nulle sur cette courbe). Le résonateur décrit

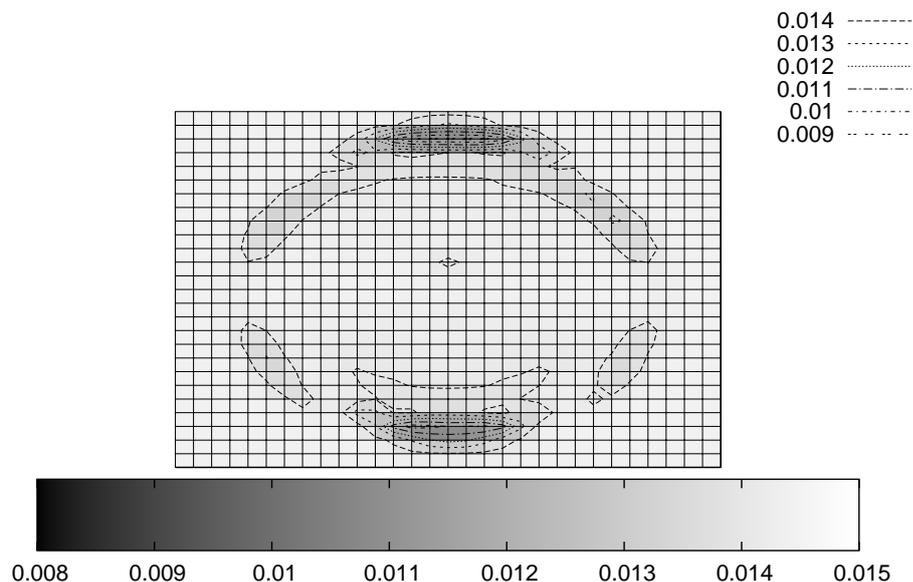


FIGURE 4.25 – Visualisation de la conductance à la résonance du résonateur en fonction de sa position sur une membrane de 4 mm de rayon soumise à la pression P . Le pas du maillage est de 0,4 mm.

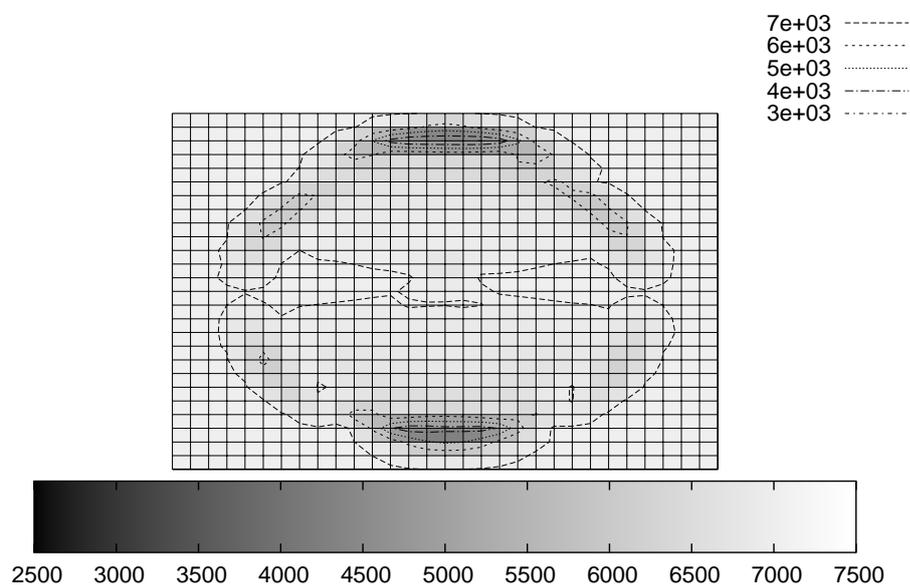


FIGURE 4.26 – Visualisation du coefficient de qualité du résonateur selon sa position sur une membrane de 4 mm de rayon soumise à une pression P en fonction de sa position. Le pas du maillage est de 0,4 mm.

précédemment et considéré pour les simulations est donc insensible à la pression en ces points. Le coefficient de qualité n'étant jamais nul, ces isovaleurs sont les mêmes que pour la courbe de

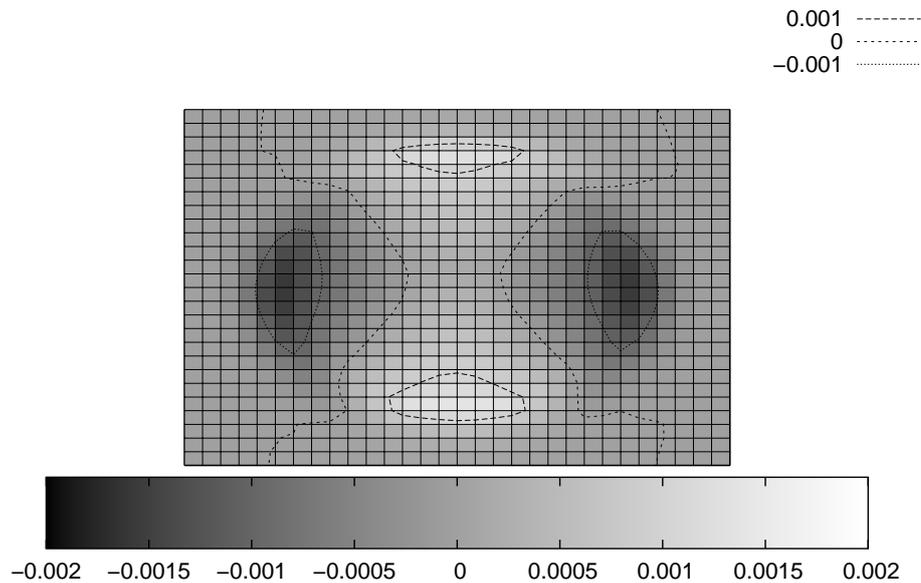


FIGURE 4.27 – Visualisation du coefficient d'efficacité du résonateur pour une membrane de 4 mm de rayon soumise à une pression P . Le pas du maillage est de 0,4 mm.

sensibilité 4.24.

4.3.4 Influence du rayon de la membrane

Plus le rapport entre le rayon de la membrane et les dimensions du résonateur sera important, plus les contraintes vues par celui-ci seront homogènes et moins la réponse du résonateur sera déformée. On cherche donc à déterminer l'influence du rayon de la membrane sur la réponse électrique du dispositif. Dans le paragraphe précédent, on a étudié le cas d'une membrane de 4 mm de rayon avec un rapport rayon épaisseur constant. Désormais, on regarde l'influence du rayon sur la réponse électrique. Pour les modélisations, on conserve le même rapport que précédemment et l'on utilise le même maillage que celui utilisé précédemment. Pour une pression fixée, les contraintes au sein de la surface seront donc identiques. Les figures 4.28 à 4.31 illustrent l'évolution du coefficient d'efficacité en fonction du rayon de la membrane.

Il est intéressant de noter que quel que soit le rayon de la membrane, il existe des points pour lesquelles le coefficient d'efficacité est nul.

Les courbes de la figure 4.32 illustrent l'évolution de la normalisation des extrema du coefficient de sensibilité effective et d'efficacité du résonateur pour différentes positions sur la membrane en fonction du rayon. Le point anguleux de la sensibilité pour le rayon de 4 mm correspond au changement de signe de l'extremum global de sensibilité à partir de ce rayon. Notons que pour des rayons supérieurs à 4 mm, le coefficient de sensibilité est très proche du coefficient d'efficacité, ce qui traduit que le coefficient de qualité varie peu. Ce point est important car il montre que

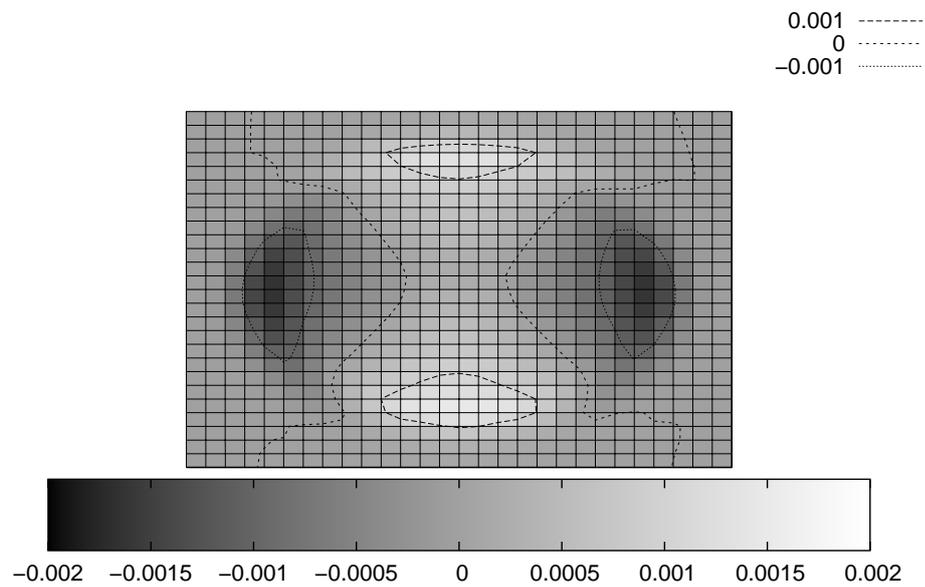


FIGURE 4.28 – Évolution du coefficient d'efficacité du résonateur en fonction de la position sur la membrane du résonateur pour un rayon de 6 mm.

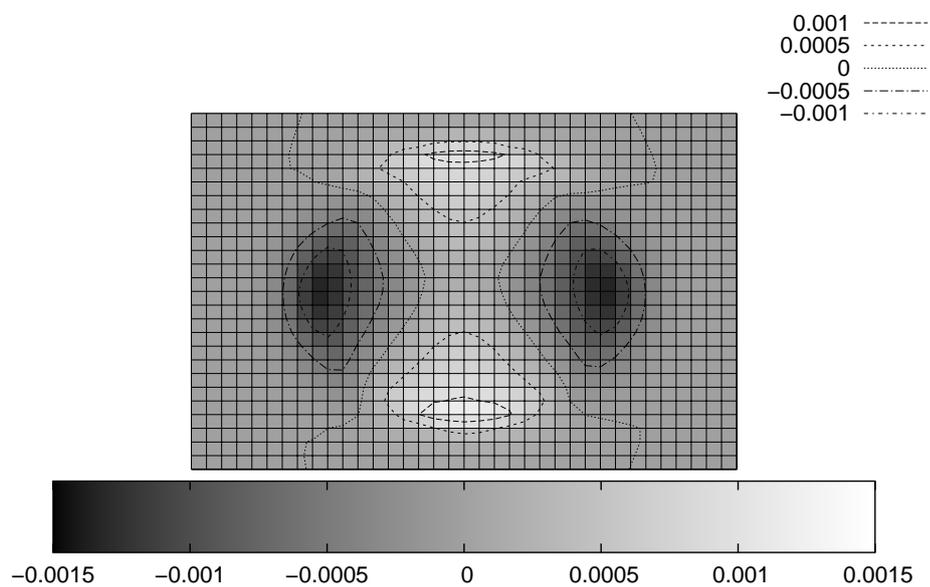


FIGURE 4.29 – Évolution du coefficient d'efficacité du résonateur en fonction de la position sur la membrane du résonateur pour un rayon de 2 mm.

pour une membrane de 4 mm de rayon et pour ce résonateur donné, la distribution de variation de vitesse au sein de la membrane devient suffisamment inhomogène et le modèle développé montre

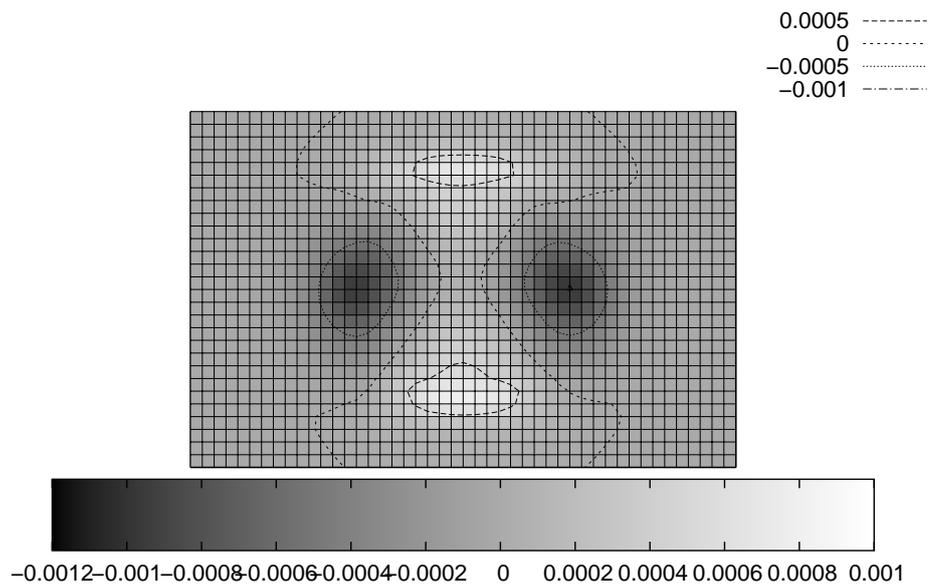


FIGURE 4.30 – Évolution du coefficient d'efficacité du résonateur en fonction de la position sur la membrane du résonateur pour un rayon de 1 mm.

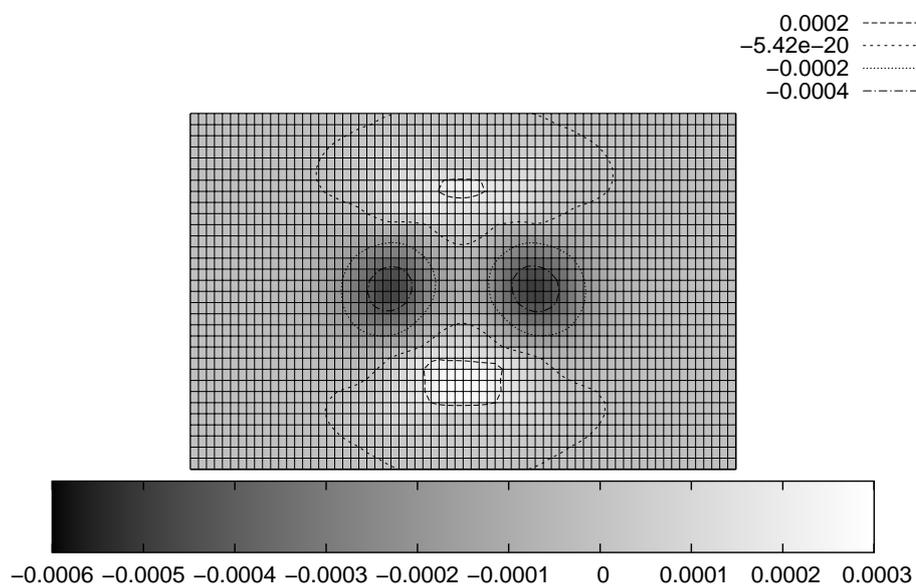


FIGURE 4.31 – Évolution du coefficient d'efficacité du résonateur en fonction de la position sur la membrane du résonateur pour un rayon de 0,5 mm.

alors toute sa pertinence. En première approximation, nous considérerons un rapport taille du résonateur sur rayon de la membrane à partir duquel le modèle développé devient nécessaire. Dans

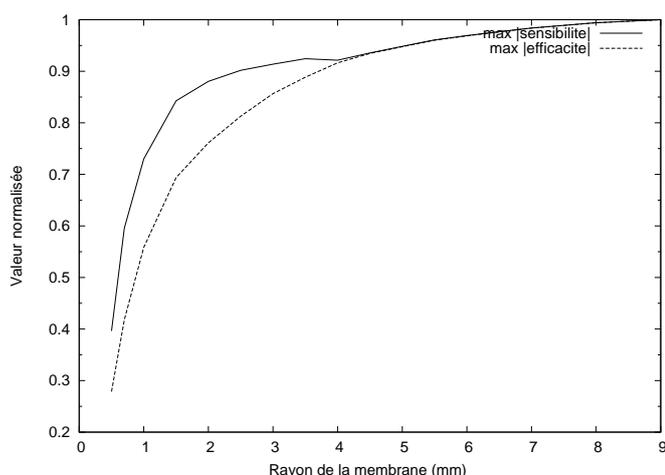


FIGURE 4.32 – Évolution de la valeur absolue de l'extremum global du coefficient de sensibilité effective et d'efficacité en fonction du rayon de la membrane. Le point anguleux pour le rayon de 4 mm correspond à un changement de signe de l'extrema global de la sensibilité. Pour cette même valeur de rayon, le rapport sensibilité effective coefficient d'efficacité n'est plus constant d'où la séparation des courbes.

le cas présent nous retiendrons un rapport longueur du résonateur sur rayon de la membrane de $2,4/4$ soit $0,6$.

La décroissance de la sensibilité avec le rayon montre également que lorsque le rayon diminue, il faut affiner d'autant plus la membrane et le ratio initial rayon sur épaisseur ne peut plus être respecté pour maintenir la sensibilité constante. Si l'on suppose un comportement de la membrane proche du cas isotrope (voir paragraphe 4.2.2), on peut alors estimer l'épaisseur de membrane nécessaire à maintenir la sensibilité effective nominale. Dans le cas où la membrane est infiniment grande par rapport à la dimension du résonateur, on a la relation :

$$s_{\infty} = \alpha \frac{R_{\infty}^2}{h_{\infty}^2} \quad (4.28)$$

Où α est un coefficient de proportionnalité réel, $\frac{R_{\infty}^2}{h_{\infty}^2}$ correspond au rapport rayon sur épaisseur lorsque le premier tend vers l'infini (ratio initial de l'étude) et s_{∞} est la sensibilité asymptotique.

Afin de conserver la sensibilité nominale, la loi d'évolution de l'épaisseur devient alors :

$$h(R) = \sqrt{\frac{|s_{\infty}|}{|s(R)|}} \cdot \frac{h_{\infty} R}{R_{\infty}} \quad (4.29)$$

Où $s(R)$ est la fonction d'évolution de la sensibilité en fonction du rayon de la membrane.

A partir de ces développements, nous avons assez d'éléments pour développer un capteur de pression à membrane. Les études ont montré quelles étaient l'évolution de la sensibilité effective, du coefficient de qualité et donc du coefficient d'efficacité en fonction du rayon de la membrane circulaire. De plus, la connaissance de la loi d'évolution de l'épaisseur de membrane en fonction du rayon permet de pouvoir dimensionner le capteur selon les besoins.

4.3.5 Comparaison avec d'autres modèles

4.3.5.1 Modèle de la variation moyenne

Les modèles antérieurs à celui développé ici ne tenaient pas compte de la distribution complète de variation de vitesse et ne tenaient compte au mieux que de la moyenne des variations de vitesse vues par le résonateur. Afin de montrer la pertinence du modèle développé dans le cadre de cette thèse, nous allons tout d'abord comparer les résultats obtenus précédemment avec des résultats de modélisations obtenus à partir de la moyenne. Le graphique 4.33 illustre la variation du coefficient d'efficacité du résonateur avec la moyenne de la variation de vitesse pour un rayon de 2 mm. Notons que la courbe est assez proche de celle reportée en figure 4.29. Par contre, pour un rayon de 1 mm, la comparaison de la courbe de la figure 4.34 avec celle de la figure 4.30 montre une grande différence. Ce point est important et montre à partir de quel moment le modèle «classique» perd sa pertinence. Nous retiendrons encore une fois le ratio de la longueur du résonateur sur le rayon de la membrane à partir duquel le modèle n'est plus pertinent.

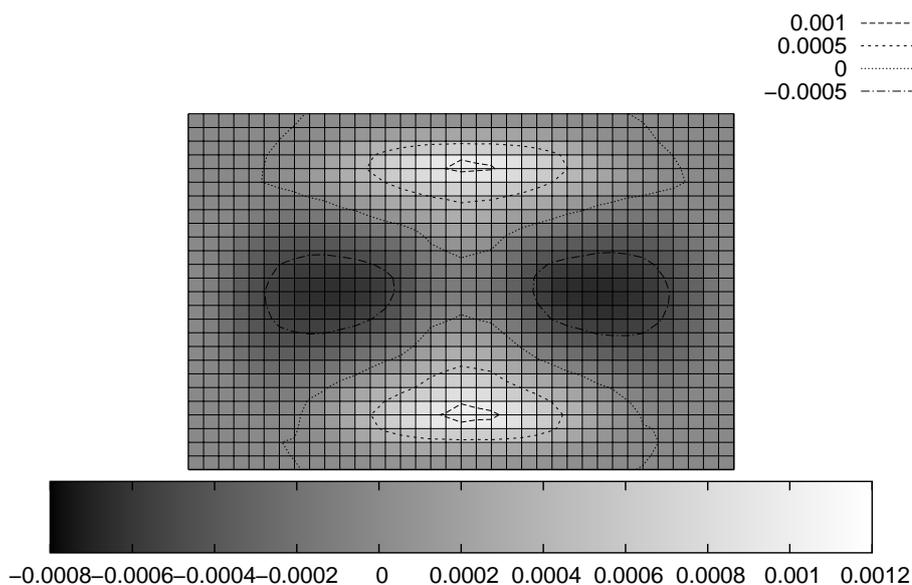


FIGURE 4.33 – Visualisation du coefficient d'efficacité du résonateur en fonction de la position du résonateur sur la membrane pour une membrane de 2 mm de rayon avec la moyenne de la variation de vitesse.

4.3.5.2 Modèle de la linéarité

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que pour de faibles distributions de contraintes le long du résonateur et lorsque la distribution de la contrainte est homogène pour chaque électrode (comme dans le cas de la poutre), la réponse électroacoustique est linéaire avec la distribution complète de contrainte. La tendance semble également montrer que seul les faibles ordres

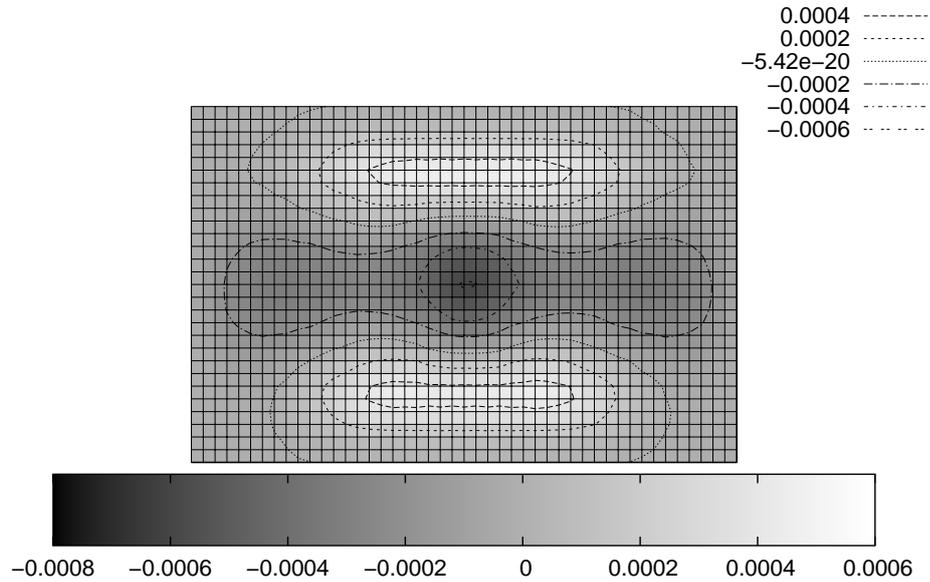


FIGURE 4.34 – Visualisation du coefficient d'efficacité du résonateur en fonction de la position du résonateur sur la membrane pour une membrane de 1 mm de rayon avec la moyenne de la variation de vitesse.

de la décomposition de la distribution de variation de vitesse induisent une forte variation du signal.

A partir de cette hypothèse et pour utiliser le principe de la linéarité même lorsque la contrainte est distribuée le long des électrodes, il suffit alors de reconstruire le signal élémentaire en considérant qu'il est constitué d'une infinité de signaux élémentaires comme illustré sur la figure 3.13 page 59. L'avantage de cette approche est le gain de temps considérable en calcul. Une fois la sensibilité à tout ordre déterminé, le temps nécessaire pour simuler toutes les positions sur la membrane est de une minute contre près d'une journée sinon.

Les variations de conductance et de fréquence de résonance sont déterminées une fois pour toute pour chaque ordre. Pour chaque résonateur infinitésimal, le signal subit une homothétie d'un facteur

$$h_G = \frac{G_{ini} - G_{ordre}}{G_{ini}} \quad (4.30)$$

suivant l'axe de la conductance avec G_{ini} la conductance à la résonance sans contrainte et

$$G_{ordre} = \sum_i p(i) \Delta G(i) \quad (4.31)$$

et $p(i)$ les coefficient de la décomposition à l'ordre i de la décomposition de la variation relative de vitesse dans la base sur laquelle on a projeté la variation relative de vitesse avec $\Delta G(i)$ la variation de la conductance à l'ordre i .

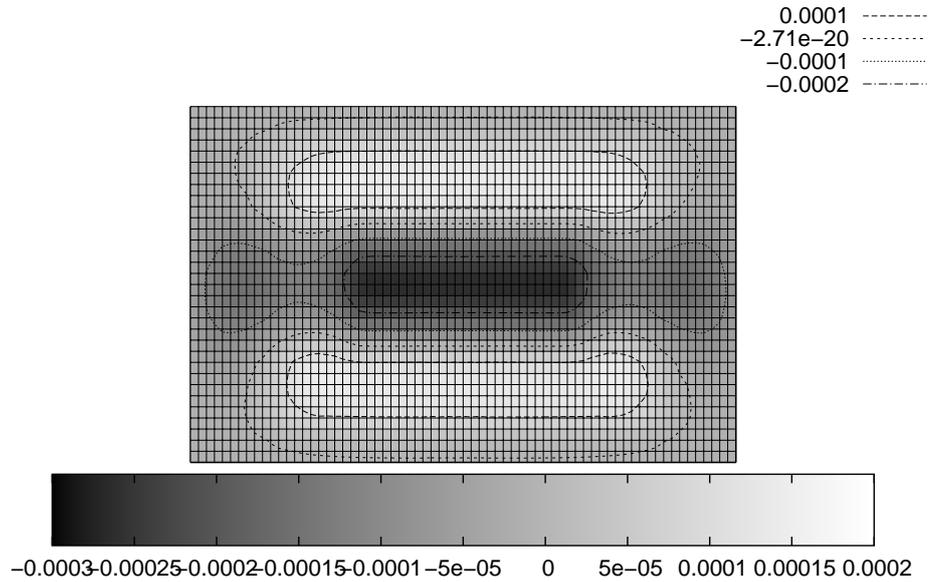


FIGURE 4.35 – Visualisation du coefficient de performance du résonateur en fonction de la position du résonateur sur la membrane pour une membrane de 0,5 mm de rayon avec la moyenne de la variation de vitesse.

De la même manière, le signal subit une homothétie suivant l'axe des fréquences d'un facteur

$$h_f = \frac{f_{ini} - f_{ordre}}{f_{ini}} \quad (4.32)$$

avec f_{ini} la fréquence de résonance sans contrainte et

$$f_{ordre} = \sum_i p(i) \Delta f(i) \quad (4.33)$$

où $\Delta f(i)$ et la variation de fréquence de résonance pour l'ordre i . En pratique, les études sont réalisées sur une faible plage de fréquence et la courbe subit en fait une translation dans l'axe des fréquences.

La figure 4.37 illustre le résultat obtenu pour une membrane de 4 mm de rayon et la figure 4.36 pour une membrane de 1 mm de rayon et toutes deux à l'ordre 0. Les courbes de ces figures sont à comparer avec les résultats des courbes des figures 4.27 et 4.30 de la page 86. La figure 4.38 illustre le résultat lorsque la décomposition polynômiale est réalisée jusqu'à l'ordre 1.

La figure 4.39 illustre l'évolution du coefficient d'efficacité du résonateur selon le principe suivant. Sachant que l'influence du premier ordre ne se fait ressentir que par la valeur du coefficient de décomposition au premier ordre et non par le signe, on considère, dans la décomposition pour les ordres impaires, la valeur absolue des coefficients. De fait, la réponse est symétrique pour les ordres impaires. Notons que la forme est très proche de celle de la courbe de la figure 4.30. Toutefois, les valeurs ne correspondent pas. Nous retiendrons que dans le cas d'une distribution complètement inhomgène, les variations induites entre la modélisation directe et la modélisation à

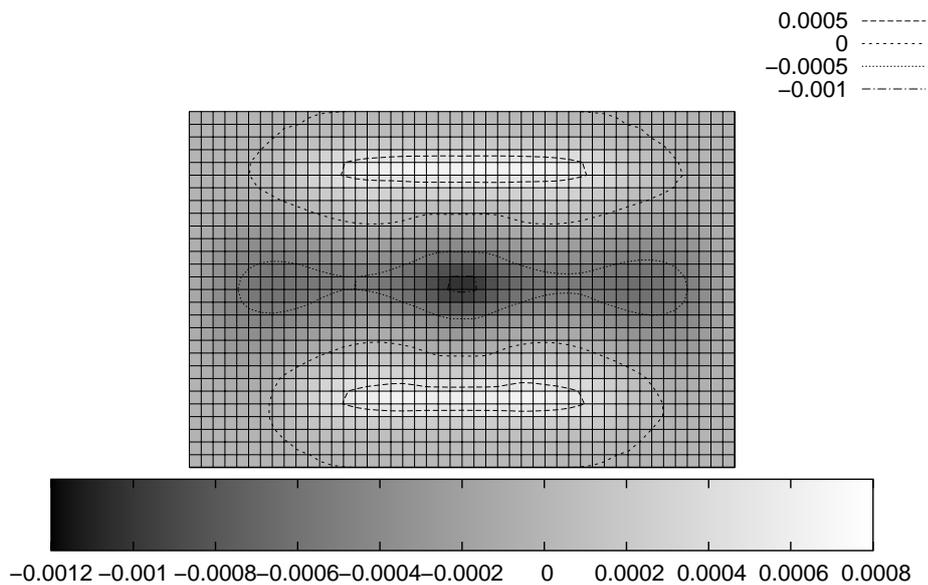


FIGURE 4.36 – Évolution du coefficient d'efficacité en fonction de la position pour une membrane de 1 mm de rayon lorsque l'on utilise le principe de linéarité et en réalisant une translation dans l'espace des fréquences et une homothétie dans l'espace de la conductance à l'ordre 0 pour une pression de 1.10^6 Pa.

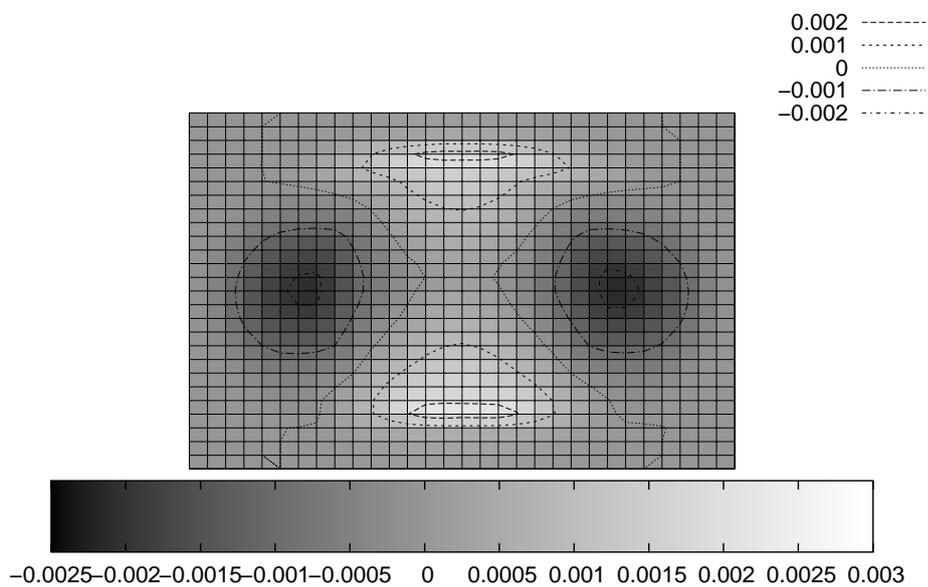


FIGURE 4.37 – Évolution du coefficient d'efficacité en fonction de la position pour une membrane de 4 mm de rayon lorsque l'on utilise le principe de linéarité et en réalisant une translation dans l'espace des fréquences et une homothétie dans l'espace de la conductance à l'ordre 0 pour une pression de 1.10^6 Pa..

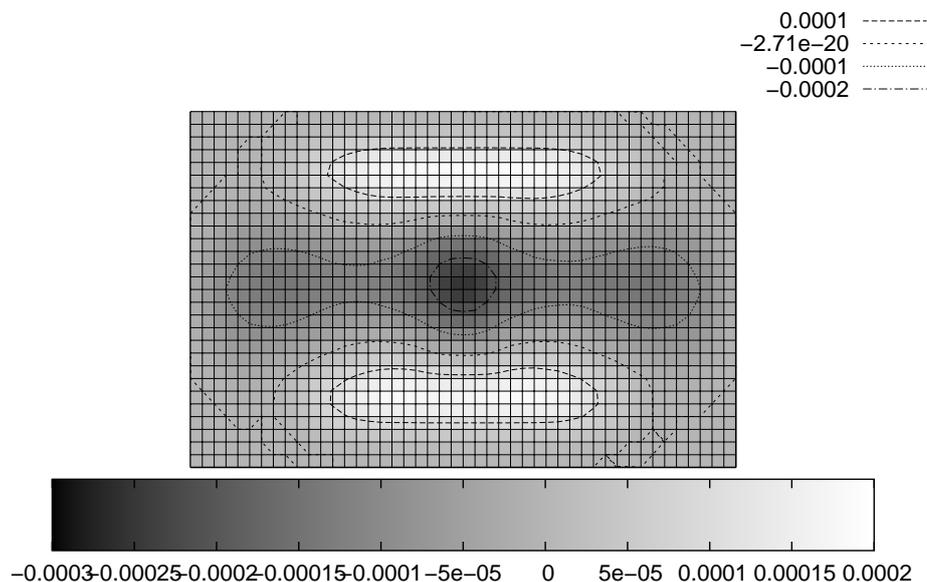


FIGURE 4.38 – Évolution du coefficient d'efficacité en fonction de la position pour une membrane de 1 mm de rayon lorsque l'on utilise le principe de linéarité et en réalisant une translation dans l'espace des fréquences et une homothétie dans l'espace de la conductance à l'ordre 1 pour une pression de 1.10^6 Pa..

partir du principe de la linéarité pour chaque résonateur infinitésimal sont suffisamment importante pour que l'on ne puisse pas appliquée le principe de la linéarité dans ces conditions.

4.3.6 Validation expérimentale pour une membrane

4.3.6.1 Comparaison expérimentale

Pour la vérification expérimentale du modèle, on considère une nouvelle géométrie de résonateur dont les propriétés géométriques sont décrites à la page 114. Le résonateur est localisé sur la partie inférieure de la membrane. On suppose, comme dans le cas d'une plaque isotrope, que la contrainte pour deux points symétriques par rapport à la ligne neutre est opposée. On considéra donc que la variation de vitesse relative est elle même opposée. Dans tous les cas considérés ci-après, le rayon de la membrane considérée est de 4 mm. La dimension du résonateur est également de 4 mm. Le ratio longueur du résonateur/rayon de la membrane nous amène donc dans la zone pour laquelle on ne peut pas considérer la variation de vitesse moyenne vue par le résonateur.

La figure 4.40 montre la variation de la fréquence de résonance du capteur en fonction de la pression appliquée pour une membrane de 450 μm d'épaisseur. Notons la forte corrélation entre l'expérience et la modélisation. On souligne principalement la pertinence du modèle développé par rapport à la variation de fréquence induite par la contrainte moyenne subie par le résonateur.

La figure 4.41 illustre la variation de la fréquence de résonance du capteur en fonction de la pression appliquée dans le cas d'une membrane de 80 μm . Là encore, la pertinence du modèle est

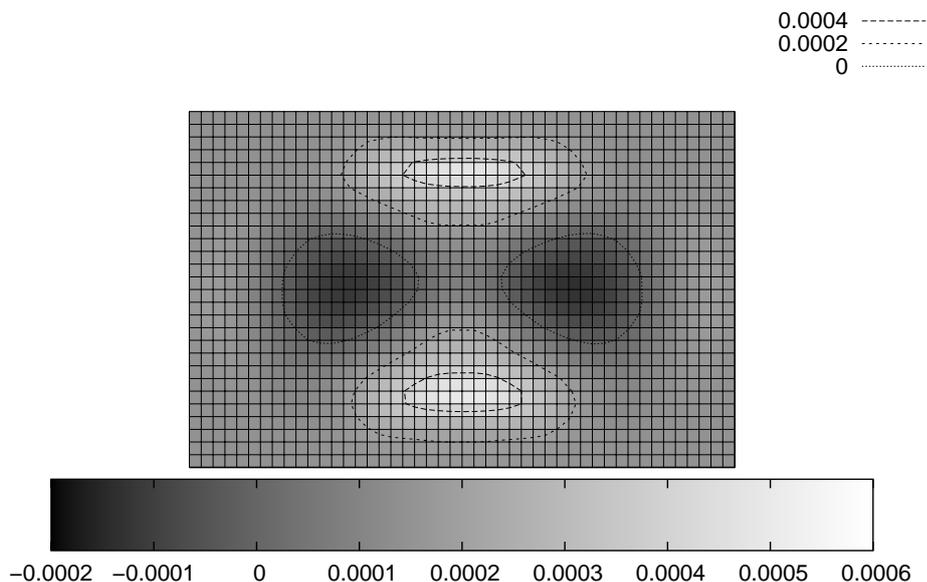


FIGURE 4.39 – Évolution du coefficient d'efficacité en fonction de la position du résonateur pour une membrane de 1 mm de rayon à l'ordre 2 pour une pression de $1 \cdot 10^6$ Pa lorsque l'on utilise le principe de linéarité, en réalisant une translation dans l'espace des fréquences, une homothétie dans l'espace de la conductance, et en considérant la valeur absolue pour l'interpolation des ordres impaires.

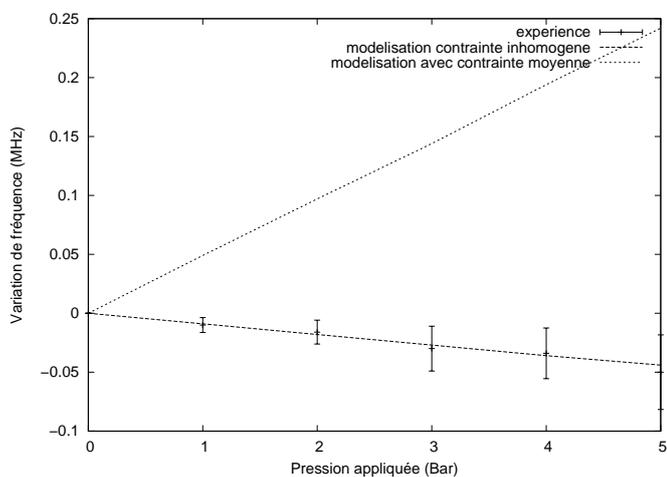


FIGURE 4.40 – Comparaison de la fréquence de résonance du capteur en fonction de la pression appliquée sur la membrane pour une membrane de $450 \mu\text{m}$ d'épaisseur obtenue expérimentalement pour un rayon de 4 mm.

éloquent.

La figure 4.42 illustre l'évolution relative du coefficient de qualité obtenue expérimentalement et par simulation. L'évolution du coefficient de qualité est médiocrement modélisée par la simulation bien que la tendance de l'évolution soit prévue.

Afin de s'affranchir des contraintes induites par les forces générées lors du test de pression et

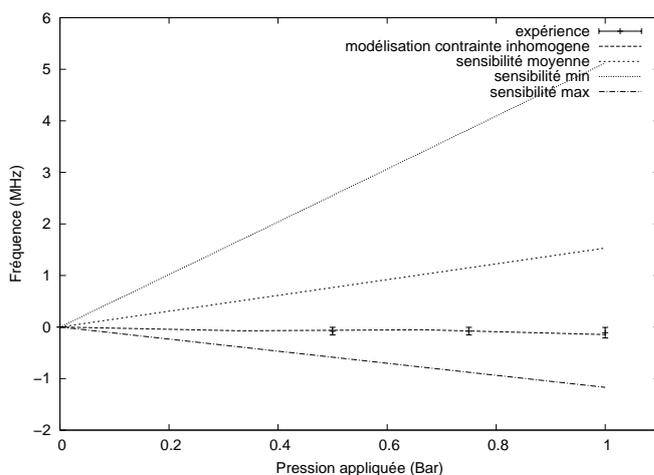


FIGURE 4.41 – Comparaison de la fréquence de résonance du capteur en fonction de la pression appliquée pour une membrane de 80 μm d'épaisseur.

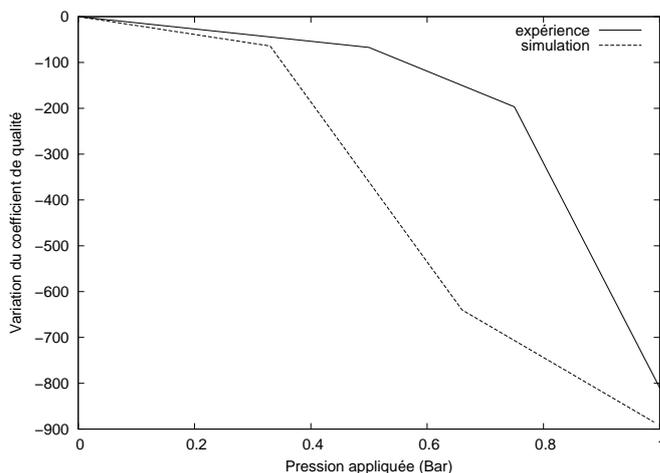


FIGURE 4.42 – Évolution du coefficient de qualité pour une membrane de 80 μm d'épaisseur en fonction de la pression appliquée en bar.

s'éloigner de la modélisation par éléments finis, le capteur est scellé dans une matrice de colle composite (on supposera que cette matrice n'a pas d'effet sur les contraintes mécanique induite lors du durcissement). D'autre part, le capteur est relié à une antenne double brin de 17 cm de longueur (X2) et l'interrogation est réalisée à distance. La figure 5.20 page 125 illustre la variation de fréquence en fonction de la pression appliquée. La figure 4.43 montre l'évolution de la fréquence de résonance pour ce même dispositif ayant une membrane de 150 μm d'épaisseur obtenue expérimentalement et par modélisation. Une fois encore, le modèle s'avère fidèle à l'expérience et rend compte précisément du comportement du capteur.

4.3.6.2 Calcul d'erreur

L'incertitude expérimentale porte sur :

- les incertitudes géométriques

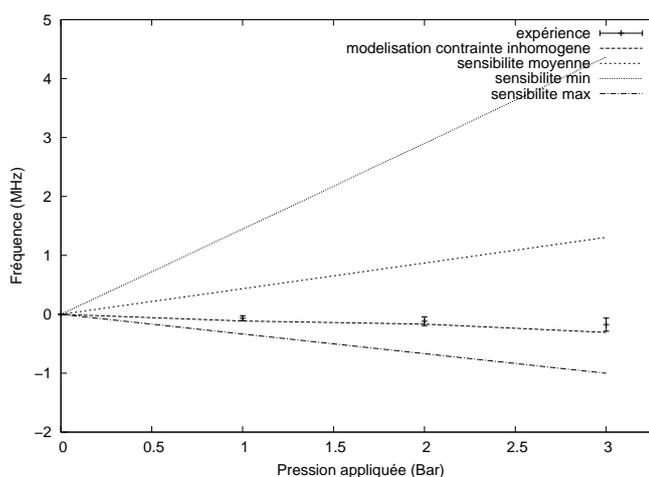


FIGURE 4.43 – Évolution de la sensibilité effective du résonateur pour une membrane de 150 µm d'épaisseur.

- de l'épaisseur de la membrane. Variation de ± 10 µm
- du positionnement du résonateur. ± 30 µm suivant les deux directions du plan
- erreur sur l'angle du substrat
- lors de l'amincissement, il apparaît une inhomogénéité d'épaisseur de membrane comme illustré sur la figure 5.13 page 121. Pour le cas de la membrane de 80 µm, la variation d'épaisseur atteint 20% au centre.
- les incertitudes mécaniques
 - incertitude de lecture sur le robinet manométrique
 - incertitude de l'encastrement au niveau des contacts électriques
 - incertitude sur le comportement de la membrane. On considère pour les simulations que la contrainte est toujours proportionnelle au rapport rayon sur épaisseur au carré.
- les incertitude sur les forces générées lors de l'expérience
 - forces générées par pressage entre le plateau et le joint torique (voir figure 5.18 124)
 - forces générées par les pointes de l'analyseur de réseau
 - les contraintes induites au niveau de l'interface lors du collage

Comme dans le cas de la poutre, on suppose que le comportement de la membrane est proche du cas isotrope afin de déterminer un calcul d'erreur. A partir de l'équation 4.18 de la page 76 on détermine un ordre de grandeur de la variation de fréquence due aux variations géométriques du substrat. Un ordre de grandeur de cette variation est alors donné par :

$$\frac{\Delta f_{\text{géométrique}}}{f} = \alpha \left(\frac{\Delta \sigma}{\sigma} \right) = \alpha \left(2 \frac{\Delta h}{h} + \frac{2r\Delta r(1+3\nu)}{R^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)} \cdot \frac{\Delta r}{\text{longueur}_{\text{res}}} \right) \quad (4.34)$$

Ce calcul d'erreur correspond à la variation de la moyenne de la variation de phase au niveau du résonateur. La variation due à l'épaisseur donne une variation relative de 4 % sur $\Delta f/f$ et la variation due à la position de 0,01 %. Ce résultat est intéressant puisqu'il montre qu'un résonateur positionné au centre de la membrane est peu sensible à l'erreur sur la position.

L'erreur sur l'angle a été mesurée dans le cas de la poutre pour du quartz AT 40°, la coupe correspondant au quartz AT 36° est comprise dans la courbe de la figure 4.8. On conservera l'ordre de grandeur de 5%

L'incertitude liée aux conditions d'encastrement de la membrane et les approximations pour en rendre compte théoriquement est difficile à estimer. Au niveau des contact électriques, une zone de 1,5 mm n'est pas encadrée. Pour le calcul d'erreur on supposera une erreur égale au ratio de la zone non encadrée sur la circonférence de la membrane soit un ratio de $1,5/(2.\pi.R)$ égal à 6 %.

Les contraintes induites lors du collage au niveau de l'interface ne sont pas estimées dans ce rapport. Les forces générées par les pointes de l'analyseur de réseau sont négligées ainsi que les forces générées par le passage du système d'interrogation car nécessitant des développements théoriques hors de propos.

4.3.7 Dimensionnement d'un capteur

4.3.7.1 Géométrie du capteur

Revenons à notre projet initial qui consiste à développer un capteur de pression capable de mesurer une pression artérielle. Pour nos calculs, nous considérons une dynamique de 8 cm de mercure (sphygmomanomètre gonflé de 14 cm de mercure jusqu'à 6 cm). Notons P cette pression. L'objectif est double, on cherche à minimiser la dimension du capteur mais aussi à garder la sensibilité nominale du capteur. La longueur du résonateur à 434 MHz est de 2,4 mm. Considérons un capteur avec une membrane de rayon 1 mm. On choisit alors le point de coordonnées (900 μm , 0) et le point de coordonnées (0, -900 μm). La sensibilité correspondante au premier résonateur vaut s_1 et celle du second vaut s_2 . La variation de sensibilité vaut alors $s_3 = |s_1 - s_2|$ pour le ratio rayon/épaisseur correspondant aux simulations. On souhaite avoir une dynamique totale D . L'épaisseur de la membrane vaut alors :

$$h = \frac{R}{ratio} \left(\sqrt{s_3 \frac{P}{D}} \right) \quad (4.35)$$

Où *ratio* correspond au rapport du rayon de la membrane sur son épaisseur.

Application numérique :

$$s_1 = -1,5 \cdot 10^{-7} \text{ MHz.Pa}^{-1}$$

$$s_2 = 1,8 \cdot 10^{-7} \text{ MHz.Pa}^{-1}$$

$$s_3 = |s_1 - s_2| = 3 \cdot 10^{-7} \text{ MHz.Pa}^{-1}$$

$$D = 100 \text{ kHz}$$

$$P = 10^4 \text{ Pa}$$

$$ratio = 15/3$$

Avec ces valeurs, on obtient une épaisseur $h = 36 \mu\text{m}$.

La figure 4.44 montrent l'évolution de la réponse électroacoustique pour la première position et la figure 4.45 celle de la position 2 pour différentes pressions.

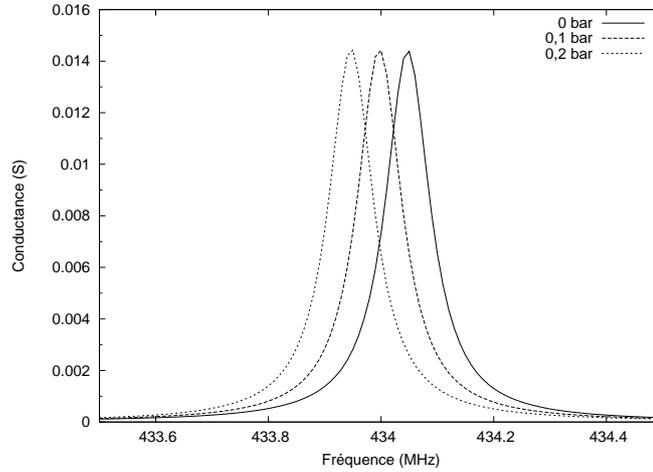


FIGURE 4.44 – Évolution de la conductance avec la pression appliquée pour la position 1 (de 0 à 0,2 Bar).

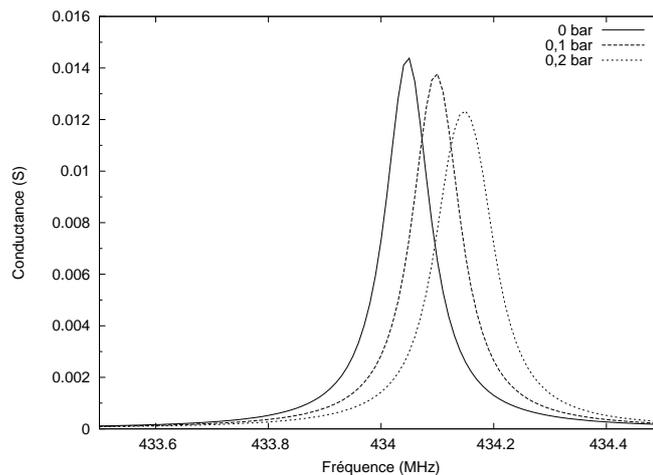


FIGURE 4.45 – Évolution de la conductance avec la pression appliquée pour la position 2 (de 0 à 0,2 Bar).

Les courbes de ces figures ont été réalisées avec 10 dispositifs en parallèle. Cela signifie que l'on considère que la distribution de variation de vitesse est partagée en 10 parties égales sur la largeur du résonateur et la réponse totale vaut alors la somme des réponses de tous les résonateurs. Pour définir le nombre de dispositifs mis en parallèle, on retiendra l'ordre de grandeur suivant qu'il faut respecter dans le cas où chaque mini résonateur présente une dynamique bien différente :

$$N = \frac{s_{max} \cdot P \cdot Q}{f_{res}} \quad (4.36)$$

Où s_{max} est la sensibilité effective maximale vue par le dispositif, P est la pression, Q est le coefficient de qualité du dispositif sans pression et f_{res} est la fréquence à la résonance. La figure 4.46 montre quel genre d'artefacts on peut obtenir avec la simulation. Elle illustre la variation de la conductance pour la position (0,-500) obtenu pour une pression de 0,5 et 1 bar lorsque le nombre

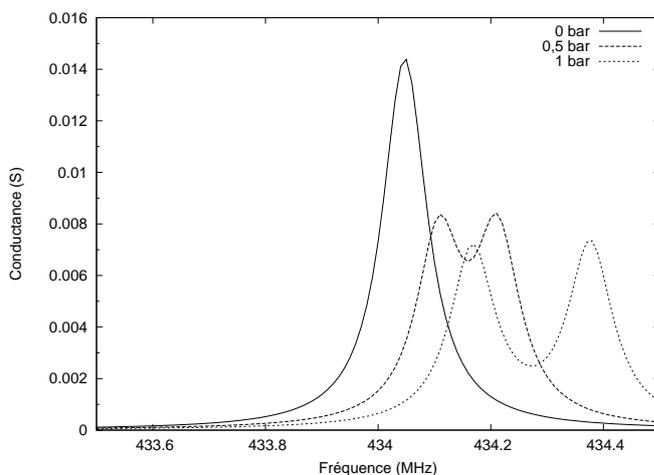


FIGURE 4.46 – Évolution de la conductance avec la pression appliquée pour la position 3. On peut observer des artefact de simulation induit par un nombre trop faible de dispositifs mis en parallèles.

de dispositif mis en parallèle n'est pas adapté. Dans le cas de la figure 4.46, le nombre de dispositifs mis en parallèle est deux et la séparation de la réponse de chacun des dispositifs apparaît clairement. Afin d'éviter ce genre de problème on gardera en tête l'ordre de grandeur du nombre de dispositifs mis en parallèles de manière à éviter cette dispersion. Cependant, le temps de calcul numérique est proportionnel au nombre de dispositifs mis en parallèle et peut vite devenir important. La figure 4.47 illustre le temps de calcul par dispositif mis en parallèle en fonction du nombre de dispositifs mis en parallèles. Cette figure montre que le temps de calcul d'une simulation divisé par le nombre de dispositif converge vers 2,6 secondes par dispositif mis en parallèle.

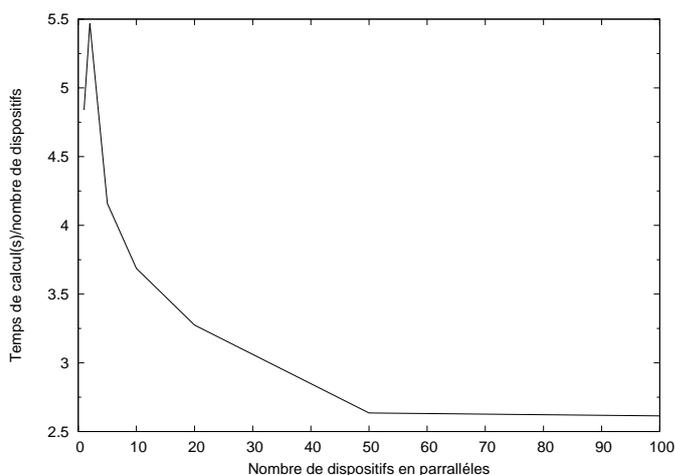


FIGURE 4.47 – Évolution du temps de calcul d'une simulation divisé par le nombre de dispositif mis en parallèle en fonction du nombre de dispositifs mis en parallèle.

4.4 Modélisation d'un capteur de force à membrane

Dans cette partie, on cherche à montrer les potentialités du logiciel au travers de la modélisation d'un capteur de force. En effet, le principal atout du logiciel développé est la connaissance de la sensibilité pour une distribution inhomogène de contrainte. Il est désormais possible de déterminer des positions idéales en fonction de critères mathématiques comme on va le montrer. L'étude des contraintes du système est réalisée par la méthode des éléments finis et le maillage utilisé pour déterminer les contraintes est illustré sur la figure 4.48.

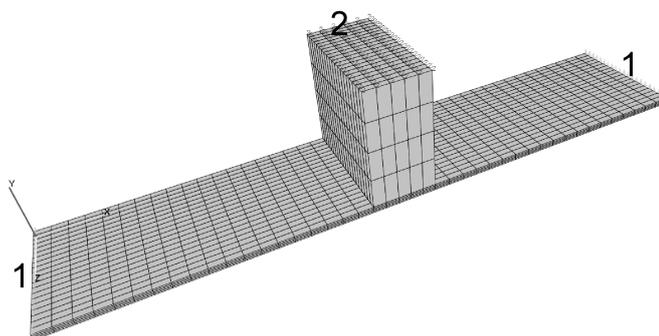


FIGURE 4.48 – Visualisation du maillage utilisé pour la modélisation par élément finis du capteur de force. Pour la référence 1 on suppose que chaque point est fixe. Pour la référence 2 on applique une force sur la surface au bout de la poutre. La longueur totale de l'objet est 11 mm, l'épaisseur de la poutre vaut 100 μm sur les bords et sa hauteur au centre vaut 2 mm. La profondeur de la poutre est également de 2 mm. Le parallélépipède au centre mesure 1 mm suivant l'axe x . Les forces sont appliquées sur la face supérieure de ce parallélépipède (référence 2) et la surface d'application est de 1 mm x 2 mm soit $2 \cdot 10^{-6} \text{m}^2$. Les faces extrémales de x sont supposées clampées. Les résonateurs sont posés sur la face inférieurs du dispositif et la direction des ondes de surfaces est suivant l'axe x .

A partir du tenseur des contraintes obtenu par calcul d'éléments finis pour chaque noeud du maillage en 3 dimensions, la force maximale admissible suivant chaque direction est déterminée. Pour le calcul, on considère que la valeur maximale du tenseur des contraintes ne doit pas dépasser 100 MPa.

La force maximale pour une force suivant x est alors de 1,8 N.

La force maximale pour une force suivant y est alors de 1,4 N.

La force maximale pour une force suivant z est alors de 1,2 N.

Dans l'absolu, on cherche également à déterminer un capteur ayant la même dynamique quelle que soit la direction d'application de la force.

La figure 4.49 illustre la variation relative de la vitesse de propagation des ondes lorsqu'une force est appliquée suivant l'axe z sur la référence 2. L'ordre de grandeur de variation de vitesse étant de 10^{-10} pour une pression de 1 Pa, la pression utilisée pour les modélisations sera de 10^6 Pa. De fait, on modélisera le comportement du résonateur pour une force équivalente à 2 newtons.

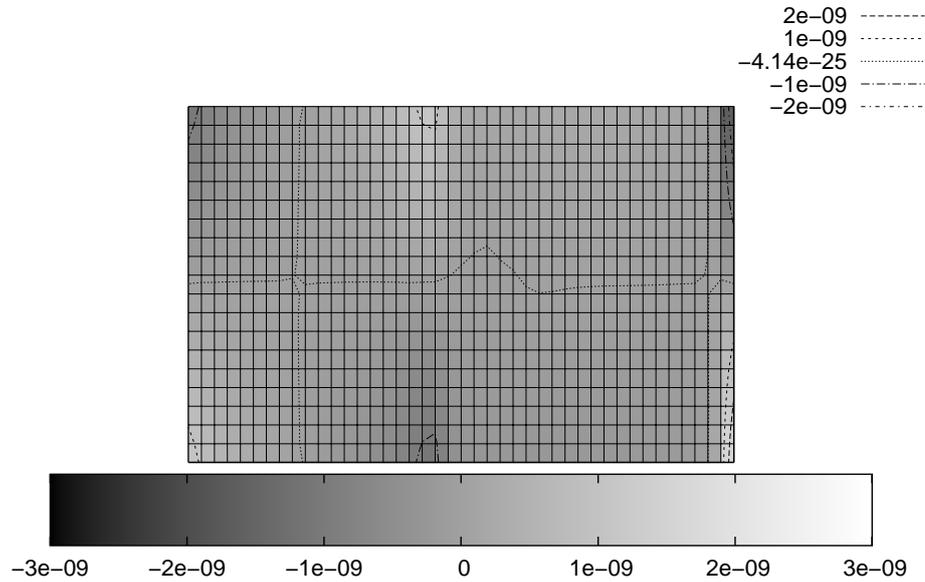


FIGURE 4.49 – Visualisation de la variation relative de vitesse pour les différents points du maillage du dispositif au niveau de la surface lorsqu'on applique une force suivant y sur la référence 2.

La modélisation utilise le même résonateur que celui décrit en page 64.

La réponse électroacoustique du résonateur est simulée en fonction de sa position sur le dispositif.

Les figures 4.50, 4.51, 4.52 illustrent respectivement la sensibilité du résonateur en fonction de la position de son centre sur le dispositif. Notons que la dimension de ces figures est naturellement inférieure à la dimension de la figure 4.49. La variation de largeur correspond à la largeur acoustique du résonateur et la variation de longueur à la longueur du dispositif. La dimension des bus électriques n'a pas été prise en compte.

Comme dans le cas de la membrane, on cherche à déterminer des positions plus favorables que d'autres pour réaliser le capteur. Le capteur est tridimensionnel. Il faut donc connaître les fréquences de résonance d'au moins trois résonateurs afin de résoudre le système d'équations suivant (si l'on considère que la seule information exploitable du résonateur est la fréquence de résonance) :

$$\begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

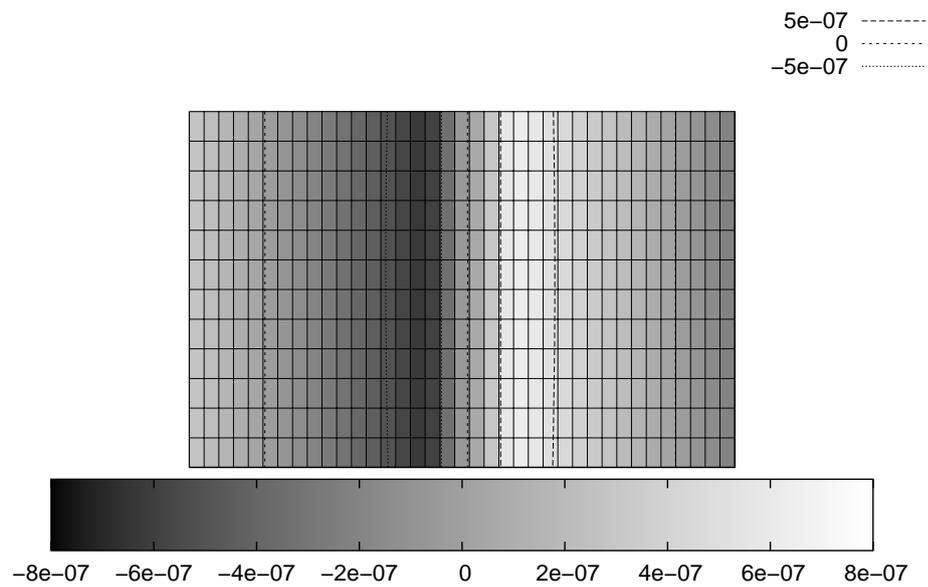


FIGURE 4.50 – Visualisation de la sensibilité du résonateur en fonction de sa position sur le dispositif lorsqu'on applique une pression de 10^6 Pa suivant x au niveau de la référence 2. (force équivalente à 2 N)(MHz/Pa). La verticale descendant représente l'axe z et l'horizontale vers la droite l'axe x

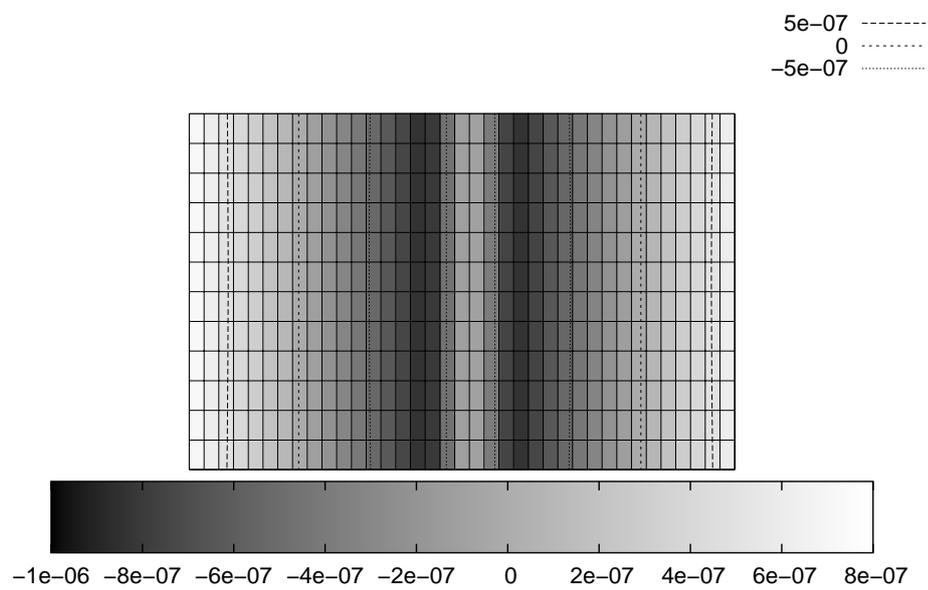


FIGURE 4.51 – Visualisation de la sensibilité du résonateur en fonction de sa position sur le dispositif lorsqu'on applique une contrainte suivant y au niveau de la référence 2 (MHz/Pa).

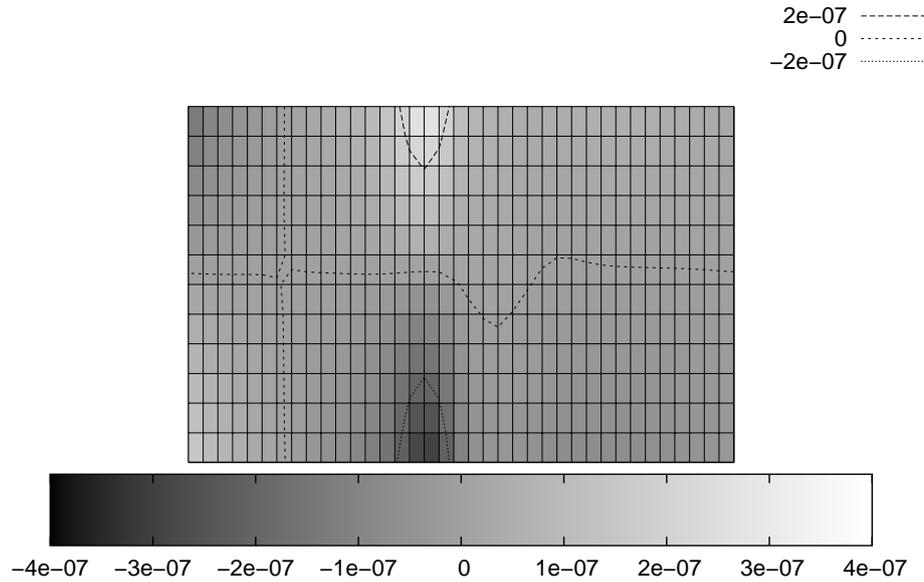


FIGURE 4.52 – Visualisation de la sensibilité du résonateur en fonction de sa position sur le dispositif lorsqu'on applique une contrainte suivant z au niveau de la référence 2 (MHz/Pa).

avec

$$M = \begin{pmatrix} s_x(x_1, z_1) & s_y(x_1, z_1) & s_z(x_1, z_1) \\ s_x(x_2, z_2) & s_y(x_2, z_2) & s_z(x_2, z_2) \\ s_x(x_3, z_3) & s_y(x_3, z_3) & s_z(x_3, z_3) \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

où $s_x(x_i, z_i)$ correspond à la sensibilité du résonateur pour une force f_x appliquée suivant x pour la position (x_i, z_i) , $s_y(x_i, z_i)$ correspond à la sensibilité du résonateur pour une force f_y appliquée suivant y et $s_z(x_i, z_i)$ correspond à la sensibilité du résonateur pour une force f_z appliquée suivant z .

Afin de résoudre ce système et trouver les positions intéressantes, il est nécessaire de définir des critères de sélection et de les formaliser mathématiquement. Il existe une infinité de critères de sélection. Nous retiendrons plus particulièrement les algorithmes suivants :

Dans le cas d'une interrogation à distance, la bande d'interrogation en fréquence est limitée, il peut donc être intéressant d'avoir la plus grande homogénéité de la variation de fréquence pour chaque force. Nous traduirons ce critère de la manière suivante :

- pour chaque triplet de position (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , lorsque la matrice M est inversible, on observe l'évolution de la déviation des coefficients de M^{-1} . Le résultat est un tableau de dimension 6 et les positions retenues correspondent aux coordonnées des points pour lesquels la réponse des 3 résonateurs sera la plus homogène suivant les 3 axes de mesures.

Cette approche est très coûteuse en temps de calcul. Le dispositif présentant la sensibilité la plus

faible pour une force suivant x , afin de réduire le temps de calcul, nous plaçons tout d'abord le résonateur correspondant au niveau du maximum de sensibilité soit la position $(x_1, z_1) = (17, 1)$. On recherche ensuite les couples de position pour les deux résonateurs restant minimisant l'écart type des coefficients de M^{-1}

Les coordonnées déterminées par cette approche sont alors :

$$\begin{aligned}(x_1, z_1) &= (17, 1) \\ (x_2, z_2) &= (23, 6) \\ (x_3, z_3) &= (17, 13)\end{aligned}\tag{4.39}$$

On peut également utiliser le même genre d'étude pour déterminer la plus grande dynamique globale de fréquence. On considérera que les couples de coordonnées solutions sont tels que la déviation de M est maximale.

Les coordonnées déterminées par cette approche sont alors :

$$\begin{aligned}(x_1, z_1) &= (17, 1) \\ (x_2, z_2) &= (23, 13) \\ (x_3, z_3) &= (13, 12)\end{aligned}\tag{4.40}$$

Dans le cas d'un capteur, nous privilégierons l'approche qui consiste à minimiser la déviation de l'inverse de M . Cette approche permet entre autre de minimiser l'écart permettant de déterminer les forces au moins dans le cas où l'on considère que l'incertitude de transcription de fréquence porte sur les variations de fréquences lues. L'équation 4.37 devient alors :

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \Delta f_1 + o(f_1) \\ \Delta f_2 + o(f_2) \\ \Delta f_3 + o(f_3) \end{pmatrix}\tag{4.41}$$

et la minimisation de la déviation des coefficients de M^{-1} assure alors une erreur minimale sur la détermination des forces exercées sur le dispositif.

Pour la position sélectionnée la matrice M vaut alors :

$$M = \begin{pmatrix} -6, 5.10^{-7} & -8, 8.10^{-7} & -3, 3.10^{-7} \\ 6, 5.10^{-7} & -8, 7.10^{-7} & -7, 8.10^{-10} \\ -6, 5.10^{-7} & -8, 8.10^{-7} & 3, 2.10^{-7} \end{pmatrix}\tag{4.42}$$

La figure 4.53 montre l'emplacement final de chaque résonateur et leur encombrement sur le dispositif final.

4.5 Conclusion

Dans cette partie, nous avons montré la validité du modèle de simulation de dispositifs à ondes élastiques de surface soumis à des contraintes mécaniques développé dans le chapitre précédent.

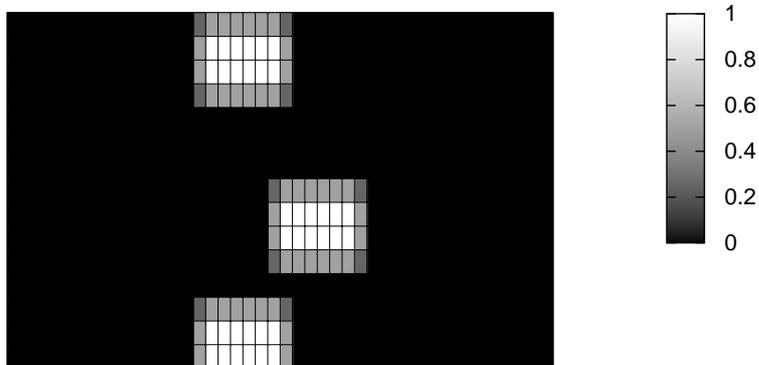


FIGURE 4.53 – Visualisation des positions idéales de résonateurs selon le critère de la déviation minimale. Les surfaces blanches représentent chacune un résonateur avec son encombrement spatial.

Nous avons également pu montrer les limites du modèle notamment en ce qui concerne l'évolution du coefficient de qualité du résonateur. Il semble que concernant ce point, un phénomène nous échappe partiellement. De fait, le coefficient d'efficacité perd de sa pertinence tant que le modèle ne montre pas fidèlement l'évolution du coefficient de qualité avec la pression. Par contre, le modèle n'a pas encore été validé lorsque le ratio rayon dimension du résonateur est faible. Cette situation peut effectivement s'avérer utile pour des mesures de fortes pression afin de permettre une mesure précise tout en maintenant le champ de contrainte loin de la limite de rupture.

Par la suite, nous avons exposé différentes pistes permettant l'optimisation géométrique du capteur. Nous nous sommes principalement intéressés à l'influence de la position du résonateur sur une membrane circulaire.

Grâce au modèle développé nous avons montré qu'il est désormais possible de connaître par simulation la sensibilité effective des résonateurs soumis à une distribution inhomogène de contrainte. L'étude a été restreinte au cas de membranes circulaires mais il serait intéressant de réaliser des simulations avec d'autres formes de membranes.

Une étude préliminaire d'un capteur de force montre par ailleurs tout l'intérêt du modèle développé et ouvre de nouvelles voies pour la thématique capteur d'effets mécaniques.