

MODELISATION TRIDIMENSIONNELLE D'UN TRANSDUCTEUR ULTRASONORE MONO-ELEMENT FOCALISE

Dans ce chapitre, nous allons mettre en œuvre les moyens de modélisation du diagramme de rayonnement d'un transducteur ultrasonore focalisé afin d'améliorer à la fois la sensibilité et la résolution latérale au point focal. L'objet de la modélisation est un transducteur circulaire plan focalisé au moyen d'une lentille acoustique concave. La prise en compte de cette lentille nécessite l'utilisation de modèles 3D tels que la modélisation par éléments finis. Celle-ci permet de prendre en compte la géométrie axisymétrique et les vibrations radiales induites lors de la transduction qui viennent s'ajouter au premier mode de vibration longitudinale recherché. Si les éléments finis permettent de modéliser la transduction dans une structure mécanique de géométrie quelconque, ils sont peu performants pour ce qui est de la propagation dans un milieu fluide homogène. Nous avons donc développé et implémenté sous différentes formes que nous comparerons un code de propagation basé sur l'intégrale de Rayleigh.

I Modélisation par éléments finis

La modélisation par éléments finis consiste à résoudre l'équation de la dynamique sur de petits éléments, de faibles dimensions devant la longueur d'onde d'intérêt. Le découpage usuellement adopté est basé sur des éléments quart d'onde, et doit être adapté et optimisé à la configuration géométrique et à la méthode de résolution. Nous avons utilisé le logiciel ATILA développé par l'ISEN de Lille et commercialisé par la société *CEDRAT TECHNOLOGIES* qui permet d'intégrer la piézo-électricité ainsi que les pertes électriques ou mécaniques dans les matériaux [1]. Dans un premier temps, nous avons ainsi calculé la pression générée à la surface du transducteur ou après propagation sur quelques longueurs d'onde dans le milieu de propagation.

1.1 Equations de résolution par éléments finis

1.1.1 Principe – Equation

La résolution par éléments finis consiste à résoudre l'équation de la dynamique pour des volumes élémentaires élastiques sur lesquels des forces sont appliquées. Ainsi, l'équation de la dynamique se note de façon générale :

$$[M][\ddot{U}] + [C][\dot{U}] + [K][U] = [F] \quad (\text{II.1})$$

où $[M]$ la matrice de masse généralisée,

$[C]$ la matrice d'amortissement généralisée,

$[K]$ la matrice de rigidité généralisée,

$[U], [\dot{U}], [\ddot{U}]$ le vecteur déplacement, ses dérivées temporelles première et seconde,

$[F]$ le vecteur de forces généralisées.

La résolution de l'équation (II.1) sans second membre ($[F] = [0]$) et sans amortissement ($[C] = [0]$) permet de déterminer les modes propres de la structure modélisée.

1.1.2 Prise en compte des pertes

La matrice de rigidité pour un matériau piézo-électrique (Equation A1.7) est constituée de la matrice de rigidité mécanique s^E , la matrice piézo-électrique d , et la matrice diélectrique e^T :

$$\begin{cases} s^E = s^{E'} - js^{E''} \\ d = d' - jd'' \\ e^T = e^{T'} - je^{T''} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{d}_m = -s^{E''} / s^{E'} \\ \mathbf{d}_p = -d'' / d' \\ \mathbf{d}_e = -e^{T''} / e^{T'} \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

1.1.2.1 Pertes constantes

Pour la résolution en régime harmonique, l'amortissement est inclus dans la composante imaginaire du terme de rigidité $[K]$ sous forme d'une fonction linéaire avec la fréquence f :

$$\text{Im}([K]) = \mathbf{w}[C] = 2\mathbf{p}f[C]$$

et induit des pertes indépendantes de la fréquence :

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0$$

1.1.2.2 Pertes dispersives

Pour la résolution en régime transitoire, l'amortissement est inclus dans la composante imaginaire du terme de rigidité $[K]$ sous forme d'une constante :

$$\text{Im}([K]) = \mathbf{w}_0[C] = 2\mathbf{p}f_0[C]$$

et induit des pertes directement linéairement dépendantes de la fréquence :

$$\mathbf{d} = \frac{f}{f_0} \mathbf{d}_0 \quad (\text{II.3})$$

Ces pertes se retrouvent incluses dans le terme de rigidité sous forme de composante imaginaire :

$$[K] = [K'] + j[K''] = [K'] \cdot (1 + j\mathbf{w}[K']^{-1}[C]) = [K'] \cdot (1 + j\mathbf{d}) \quad (\text{II.4})$$

I.1.3 Ecriture généralisée de la matrice de rigidité

L'équation de la dynamique se résume alors à l'équation matricielle qui suit :

$$[M][\ddot{U}] + [C][\dot{U}] + [K'] [U] = [F] \quad (\text{II.5})$$

$$\Leftrightarrow -\mathbf{w}^2 [M] [U] + j\mathbf{w}[C][U] + [K'] [U] = [F]$$

$$\Leftrightarrow ([K] - \mathbf{w}^2 [M]) [U] = [F] \quad \text{avec } [K] = [K'] + j\mathbf{w}[C]$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} [K_{uu}] - \mathbf{w}^2 [M_s] & [K_{u\Phi}] & [K_{uf}] & [K_{ul}] & -[L] \\ [K_{u\Phi}]^t & [K_{\Phi\Phi}] & [0] & [0] & [0] \\ [K_{uf}]^t & [0] & [K_{ff}] & [K_{fl}] & [0] \\ [K_{ul}]^t & [0] & [K_{fl}]^t & [K_{ll}] & [0] \\ -\mathbf{r}^2 c^2 \mathbf{w}^2 [L]^t & [0] & [0] & [0] & [H] - \mathbf{w}^2 [M_f] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \Phi \\ \mathbf{f} \\ I \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ -q \\ -f \\ -f_b \\ \mathbf{r}c^2 \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

avec les scalaires :

\mathbf{r} la masse volumique du fluide (kg/m^3),

c la vitesse dans le fluide (m/s),

\mathbf{w} la pulsation (rad/s),

les vecteurs des valeurs nodales :

U de déplacement,

Φ de potentiel électrique,

\mathbf{f} de potentiel magnétique,

I de courant d'excitation,

P de pression,

F de forces appliquées,

q de charges électriques,

f du flux magnétique réduit au travers des limites du domaine magnétique,

f_b du flux magnétique réduit vu pour le courant induit,

\mathbf{y} de dérivée normale de la pression à la surface de la structure,

et les matrices :

$[K_{uu}]$ de rigidité,

$[K_{u\Phi}]$ de couplage piézo-électrique,

$[K_{uf}]$ de couplage piézo-magnétique,

$[K_{ul}]$ de couplage source-structure,

$[K_{\Phi\Phi}]$ diélectrique,

$[K_{fl}]$ de couplage de source magnétique,

$[K_{ff}]$ de (pseudo-)rigidité magnétique,

$[K_{ll}]$ d'inductance dans le vide,

$[M_s]$ de masse consistante de la structure,

$[H]$ de (pseudo-)rigidité du fluide,

$[M_f]$ de (pseudo-)masse consistante du fluide,

$[L]$ de couplage à l'interface solide-fluide (matrice de connectivité).

1.2 Méthodes de résolution

La résolution de l'équation de la dynamique (II.5) pour la configuration choisie peut se faire soit par une méthode de résolution en régime harmonique, soit par une méthode de résolution en régime transitoire. Dans notre cas, la propagation dans un milieu fluide ne peut se faire en régime harmonique qu'à la condition de disposer des éléments absorbants en champ lointain, ce qui nécessite un maillage très important du milieu fluide. Une résolution en régime transitoire est préférée, ne nécessitant un maillage que sur une distance plus courte, permettant d'éviter les perturbations d'un écho sur le fond du maillage fluide. Le schéma de résolution général reste toujours le même [1, 2], basé soit sur une écriture en différences finies, soit développé en série de Taylor. Ces formalismes de résolution sont basés sur l'hypothèse que la solution exacte et ses dérivées sont continues. Comme l'illustre le schéma *Figure II.1*, la méthode de résolution itérative pour déterminer la solution $[U]$ de l'équation de la dynamique (II.5) est paramétrée en temps par les indices (k, q) et ses dérivées temporelles d'ordre (m, p) en exposant :

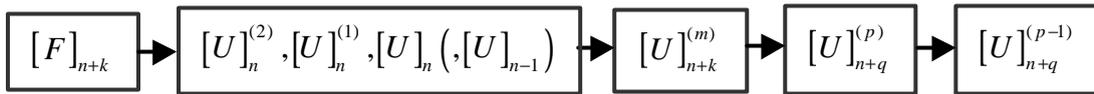


Figure II.1 : Schéma général de résolution en régime transitoire.

Ainsi, le vecteur de force (excitation) $[F]_{n+k}$ permet, au moyen de l'équation de la dynamique (II.5), de déterminer successivement les vecteurs (réponses) $[U]_{n+k}^{(m)}$, $[U]_{n+q}^{(p)}$, et $[U]_{n+q}^{(p-1)}$. Ces derniers sont respectivement un déplacement, une vitesse ou une accélération selon que les nombres de dérivées temporelles (m , p et $p-1$) valent 0, 1 ou 2.

I.2.1 Méthode des différences finies

I.2.1.1 Ecriture générale

Les méthodes de résolution en régime transitoire sont basées sur une même écriture itérative de l'équation de la dynamique. La plus connue pour sa simplicité est la méthode des différences finies, et consiste en une écriture discrète de la dérivation relativement au temps :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^{(1)}(t) = \dot{u}(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{u(t+dt) - u(t)}{dt} \quad (\text{II.6})$$

devient selon le schéma de résolution considéré :

$$\dot{u}(t_n) = \frac{u(t_n + \Delta t) - u(t_n)}{\Delta t} \quad \text{ou} \quad \dot{u}(t_n) = \frac{u(t_n) - u(t_n - \Delta t)}{\Delta t}$$

$$\text{ou} \quad \dot{u}(t_n) = \frac{u(t_n + \Delta t) - u(t_n - \Delta t)}{2\Delta t}.$$

Le pas de temps est noté Δt et l'instant considéré $n\Delta t$ est noté t_n . La dernière méthode, moyenne des deux expressions précédentes, est appelée différence centrale. La même démarche est utilisée pour les dérivées d'ordre supérieur, et l'équation (II.5) devient :

$$[M] \frac{\sum_{k=1}^{k_{a,\max}} a_k [U]_{n-k+2}}{(\Delta t)^2} + [C] \frac{\sum_{k=1}^{k_{b,\max}} b_k [U]_{n-k+2}}{\Delta t} + [K'] [U]_n = [F]_{n+1}$$

Les paramètres a_k et b_k dépendent de la méthode choisie, et $k_{a,\max}$ et $k_{b,\max}$ sont le nombre de coefficients pris en compte.

1.2.1.2 Différence centrale

La méthode des différences finies repose sur ce type de formalisme, et la méthode de la différence centrale en est une des variantes. La somme des coefficients a_i et b_i reste nulle, privilégiant soit l'instantanéité et la simplicité (parfois instable), soit la stabilité (avec un effet mémoire, conditionné par le nombre de termes entrant en compte, ici limité à 3) et la complexité de la formulation :

$$[\dot{U}]_n = \frac{[U]_{n+1} - [U]_{n-1}}{2\Delta t} \quad \text{d'où} \quad k_{a,max} = 3 \text{ et } (a_1, a_2, a_3) = (1/2, 0, -1/2)$$

$$\text{et} \quad [\ddot{U}]_n = \frac{[U]_{n+1} - 2[U]_n + [U]_{n-1}}{(\Delta t)^2} \quad \text{d'où} \quad k_{b,max} = 3 \text{ et } (b_1, b_2, b_3) = (1, -2, 1)$$

Cette méthode tient son nom de l'expression de la dérivée au premier ordre qui est donnée par la moyenne des dérivées numériques locales exprimées pour deux indices consécutifs. La condition de convergence est satisfaite si $\pi f_{\max} \Delta t < 1$.

Le schéma de résolution consiste à exprimer pour chaque itération n , la grandeur $[U]_{n+1}$ en fonction de l'excitation $[F]_{n+1}$, de $[U]_{n-1}$, de $[U]_n$ et ses dérivées première et seconde relativement au temps.

Les paramètres correspondants au schéma de résolution (*Figure II.1*) sont identifiés : les indices sont obtenus pour $(k, q) = (1, 0)$ et les dérivées d'ordre $(m, p) = (0, 2)$.

1.2.2 Développement en série de Taylor

Il existe d'autres méthodes basées sur un développement en série de Taylor, auquel cas l'écriture de la méthode de résolution peut s'écrire de façon générale. La condition de convergence de ces méthodes est déterminée par le nombre de termes pris en compte lors du développement en série. Encore une fois, plus le développement est long (plus la méthode de résolution est complexe), meilleures sont la convergence et la précision du résultat numérique :

$$[U]_{n+1}^{(m)} = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \frac{(\Delta t)^k}{k!} [U]_n^{(m)}$$

et les dérivées d'ordre m supérieur à 2 déterminées par différences finies avec k_{termes} coefficients :

$$[U]_n^{(m)} = \sum_{k=0}^{k_{\text{termes}}} a_k [U]_{n+k}^{(2)} \quad \text{avec } m > 2, \text{ et } k_{\text{termes}} \geq m-1$$

1.2.2.1 Méthode de Newmark

La méthode de Newmark de paramètres (\mathbf{b}, \mathbf{g}) consiste à utiliser un développement de Taylor pour déterminer la grandeur dérivée à l'ordre m pour l'incrément de temps $n+1$, en fonction de l'incrément n et des dérivées d'ordre supérieur ou égal à m (avec $m \leq 2$) :

$$[U]_{n+1} = [U]_n + \Delta t [\dot{U}]_n + \frac{(\Delta t)^2}{2} [\ddot{U}]_n + (6\mathbf{b}) \frac{(\Delta t)^3}{6} \frac{[\ddot{U}]_{n+1} - [\ddot{U}]_n}{\Delta t} \quad (\text{II.7})$$

$$\text{et } [\dot{U}]_{n+1} = [\dot{U}]_n + \Delta t [\ddot{U}]_n + (2\mathbf{g}) \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{[\ddot{U}]_{n+1} - [\ddot{U}]_n}{\Delta t} \quad (\text{II.8})$$

A partir de l'expression de $[U]$ et de ses dérivées par rapport au temps à l'instant $n+1$, l'équation de la dynamique est résolue par itérations successives. Pour chaque itération n , la grandeur $[U]_{n+1}^{(2)}$ est calculée en fonction de l'excitation $[F]_{n+1}$, de $[U]_n$ et ses dérivées première et seconde relativement au temps. Les paramètres correspondants au schéma de résolution (*Figure II.1*) sont identifiés : les indices sont obtenus pour $(k, q) = (1, 1)$ et les dérivées d'ordre $(m, p) = (2, 1)$. La convergence est obtenue à la condition où $\mathbf{g} \geq \frac{1}{2} \geq \mathbf{b}$ s'écrit $\pi f_{\max} \Delta t < 1/(2\mathbf{g} - 4\mathbf{b})^2$. Cependant, des valeurs $\mathbf{g} > \frac{1}{2}$, induisent un amortissement numérique qui se traduit par un filtrage passe-bas et donc une modification du spectre. La formulation de Newmark paramétrée par (\mathbf{b}, \mathbf{g}) permet de retrouver les formulations connues sous le nom de méthode de la différence centrale $(0, \frac{1}{2})$, méthode de l'accélération moyenne $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ ou méthode de l'accélération linéaire $(\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$.

1.2.2.2 Méthode de Wilson- q

L'introduction du paramètre q a pour but de palier aux oscillations observées autour de la solution exacte. Elle consiste donc à prendre des incréments de temps non entiers afin de moyenniser les perturbations. Ainsi, le développement en série de Taylor est écrit pour le pas de temps modifié $q\Delta t$, pondéré avec $1 \leq q \leq 2$. En effet, pour toute fonction dérivable, le critère de convergence est fonction du pas de temps et de l'ordre du développement en série de Taylor. Pour un ordre fixé, ce qui est le cas pour la méthode de Wilson- q , le critère de convergence se limite donc au pas de temps :

$$[U]_{n+1}^{(m)} = \frac{[U]_{n+q}^{(m)} + (q-1)[U]_n^{(m)}}{q} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{[U]_{n+q}^{(m)} - [U]_n^{(m)}}{q\Delta t} = [U]_n^{(m+1)}$$

En particulier pour $m = 2$, un développement en série de Taylor pour l'indice $n+q$ donne :

$$[U]_{n+q} = [U]_n + q\Delta t [\dot{U}]_n + \frac{(q\Delta t)^2}{2} [\ddot{U}]_n + \frac{(q\Delta t)^3}{6} \frac{[\ddot{U}]_{n+q} - [\ddot{U}]_n}{q\Delta t} \quad (\text{II.9})$$

$$\text{et } [\dot{U}]_{n+q} = [\dot{U}]_n + q\Delta t [\ddot{U}]_n + \frac{(q\Delta t)^2}{2} \frac{[\ddot{U}]_{n+q} - [\ddot{U}]_n}{q\Delta t} \quad (\text{II.10})$$

La stabilité de cette méthode est difficile à démontrer, mais est prouvée pour des valeurs de q supérieures à 1,366. Pour chaque itération n , la grandeur $[U]_{n+q}^{(2)}$ est calculée en fonction de l'excitation $[F]_{n+q}$, de $[U]_n$ et ses dérivées première et seconde relativement au temps. Les paramètres correspondants au schéma de résolution (*Figure II.1*) sont identifiés : les indices sont obtenus pour $(k, q) = (q, q)$ et les dérivées d'ordre $(m, p) = (2, 1)$.

1.3 Optimisation du maillage

Afin de déterminer les maillages radial et longitudinal optimaux, nous avons effectué des modélisations par éléments finis de configurations comparables avec différents modèles mono-modaux. Nous avons ainsi étudié par une analyse modale les modes propres de vibration de structures cylindriques sans pertes. De même, l'impédance d'un disque piézo-électrique avec pertes en résonateur libre a été calculée par une résolution harmonique dans le vide, et comparée avec celle établie par le standard IEEE [3] (*Equation A2.19*). Enfin, le déplacement à la surface d'un transducteur axisymétrique multicouche mono-élément a été calculé par une résolution transitoire et a été comparé à celui obtenu par une modélisation avec le schéma KLM (*Figure A2.4*).

1.3.1 Analyse modale – Densité du maillage

Une analyse modale a été réalisée sur chacune des couches constituant le transducteur mono-élément étudié, respectivement le milieu arrière, le disque piézo-électrique, la lame adaptatrice, et la lentille acoustique (*Annexe 5*). Les fréquences des modes propres de vibration relevés ont été comparées à celles données par le standard IEEE [3], *Brissaud* [4-6] et *Lunde et Vestrheim* [7].

1.3.1.1 Modes épaisseurs

Afin de satisfaire l'hypothèse de vibration unidimensionnelle, les fréquences des modes longitudinaux (selon l'épaisseur) ont été déterminées suite à une analyse modale réalisée avec les déplacements radiaux bloqués et comparées avec la formule classique :

$$f_{n\text{longitudinal}} = n \frac{c_l}{2e} \quad (\text{II.11})$$

où $f_{n, \text{longitudinal}}$ est la fréquence du $n^{\text{ième}}$ mode longitudinal, c_l la vitesse longitudinale et e l'épaisseur.

1.3.1.2 Modes radiaux

Les résultats obtenus pour les fréquences des modes radiaux ont été comparés aux formulations théoriques (II.12) et (II.13) données respectivement par *Brissaud* [4-6] et *Lunde et Vestrheim* [7]. La formulation usuelle (II.12) est approchée, tandis que la formulation (II.13) est plus précise et inclut un terme correctif du second ordre :

$$f_{n \text{ radiale}} = \frac{\mathbf{q}_n c_p}{2\mathbf{p}a} \quad (\text{II.12})$$

$$\text{et } f_{n \text{ radiale}} = \frac{\mathbf{q}_n c_p}{2\mathbf{p}a} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{c_p}{c_l} \frac{\mathbf{q}_n e}{2a} \right)^2} \quad (\text{II.13})$$

où :

a est le rayon du disque,

\mathbf{q}_n est la $n^{\text{ième}}$ solution de : $\mathbf{q} J_0(\mathbf{q}) - (1 - \mathbf{n}) J_1(\mathbf{q}) = 0$, et J_n est la $n^{\text{ième}}$ fonction de Bessel,

$$c_p = \sqrt{\frac{E}{\mathbf{r}(1 - \mathbf{n}^2)}},$$

$$\text{et } c_l = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\mathbf{r}}},$$

avec E le module d'Young, \mathbf{n} le coefficient de Poisson, \mathbf{r} la masse volumique et c_{33}^D le coefficient d'élasticité à induction électrique constante selon la direction épaisseur.

1.3.1.3 Résultats

La condition d'échantillonnage de Shannon a été appliquée pour une bande passante allant de 0 à $f_{\text{max}} = 2f_0$, où f_{max} est la fréquence maximale définie comme le double de celle de la fréquence d'anti-résonance fondamentale f_0 . Le maillage basique de longueur quart d'onde a donc été affiné par le coefficient K jusqu'à obtenir une convergence numérique des résultats obtenus :

$$e_{\text{maille, min}} \leq K \frac{\mathbf{l}_0}{4} \quad \text{et} \quad \mathbf{l}_0 = \frac{c_l}{f_0} \quad (\text{II.14})$$

où K est le coefficient d'ajustement du maillage de base quart d'onde ($0 < K \leq 1$), c_l la vitesse longitudinale et f_0 la fréquence de la fréquence traitée.

Les résultats calculés ont été limités au premier harmonique, et le maillage a été optimisé pour une telle configuration. En effet, par la suite, la modélisation effectuée se restreindra à la bande de fréquence d'intérêt utile, de 0 à $2f_0$, où f_0 est la fréquence du premier mode épaisseur (Tableau II.1). La densité de maillage du milieu arrière absorbant n'a pas été accrue car l'information propagée doit être atténuée. Cependant, pour l'élément actif et ceux situés en face avant, la densité du maillage est renforcée de façon à permettre la non altération du spectre utile.

Matériau	Milieu arrière	Disque piézo-électrique	Lame adaptatrice	Unité
Maillage pour le mode épaisseur	0,8	0,4	0,5	$\frac{I_0}{4}$
Mode épaisseur (IEEE [3])	2,178	43,48	88,462	MHz
Mode épaisseur (Eléments finis)	2,178	43,661	88,483	MHz
Maillage pour le mode radial	0,2	0,2	0,2	$\frac{I_0}{4}$
Mode radial ([4])	0,456	1,070	0,535	MHz
Mode radial ([7])	0,448	1,070	0,535	MHz
Mode radial (Eléments finis)	0,444	1,230	0,535	MHz

Tableau II.1 : Comparaison des fréquences propres calculées par ATILA et par les modèles [3-7].

Des méthodes de mesure optique ou d'impédancemétrie permettent de vérifier expérimentalement les résultats obtenus ci-dessus. Les fluctuations d'amplitude par interférométrie (*amplitude-fluctuation electronic speckle pattern interferometry, AF-ESPI*) et la vibrométrie laser par effet Doppler (*laser Doppler vibrometer, LDV*) décrites et utilisées par *Huang et al.* [8] permettent de retrouver ces résultats avec une très bonne précision.

I.3.2 Analyse en régime harmonique – Impédance

Un transducteur composé seulement d'un milieu arrière absorbant et d'un disque piézo-électrique est analysé en régime harmonique dans le vide. Après ajustement du maillage du disque piézo-électrique, puis du milieu arrière, le résultat obtenu est comparé par superposition à celui calculé par le modèle unidimensionnel KLM. Les paramètres de densité de maillage (II.14) pour le milieu arrière et pour l'élément piézo-électrique $K_{mar} = 0,8$ et $K_p = 0,25$ sont suffisant pour obtenir une excellente convergence. Les courbes d'impédance obtenues (Figure II.2) témoignent d'un ajustement parfait entre ces deux résultats.

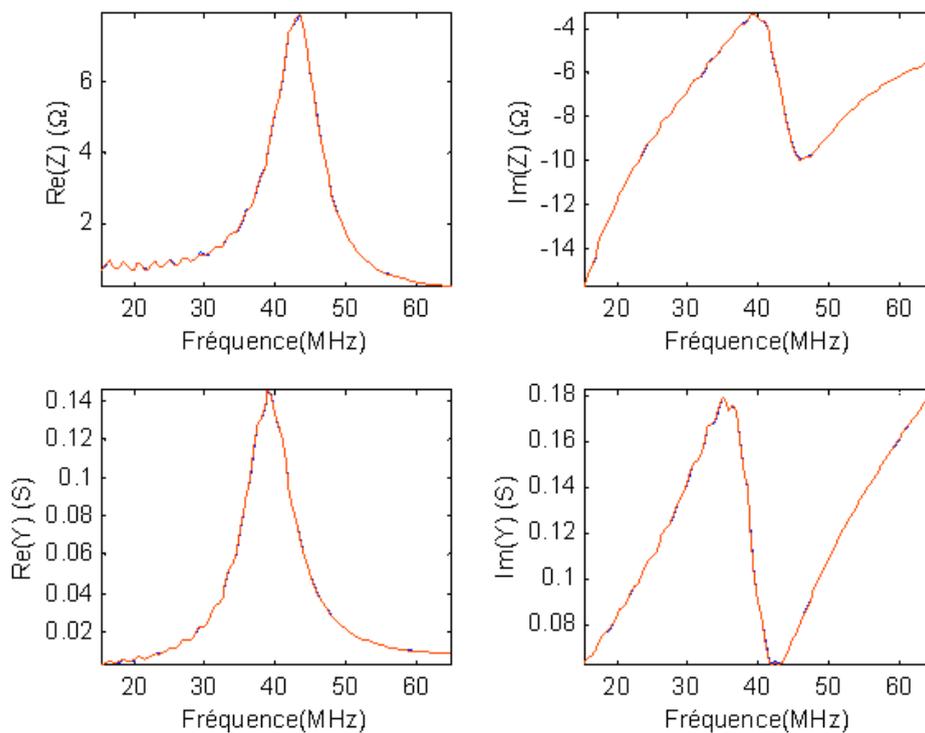


Figure II.2 : Superposition des parties réelle et imaginaire des impédance et admittance calculées avec ATILA (bleu) et KLM (rouge) pour un transducteur constitué d'un milieu arrière, et d'un disque piézo-électrique, dans le vide.

De façon similaire, les maillages des lames adaptatrices ajoutées en face avant sont ajustés jusqu'à observer la convergence sur le spectre d'impédance calculé par le modèle KLM.

I.3.3 Analyse en régime transitoire – Ajustement du maillage

Le déplacement impulsionnel est calculé à la surface du transducteur par une analyse en régime transitoire, et le résultat obtenu est comparé à celui donné par un modèle unidimensionnel KLM

(Annexe 3). Après plusieurs tests, la méthode de résolution de Wilson- \mathbf{q} est choisie avec le paramètre $\mathbf{q} = 2$. Elle est la seule méthode de résolution qui converge (avec $\mathbf{q} = 2$) vers la solution exacte pour les matériaux piézo-électriques avec pertes ([1], Chapitre I.2, p.16). Le maillage est alors ajusté avec le paramètre densité du maillage (II.14) couche par couche, depuis l'élément actif, jusqu'au milieu de propagation fluide.

1.3.3.1 Dans le vide

Afin d'ajuster le paramètre de densité du maillage (II.14) du disque piézo-électrique K_p , une analyse en régime transitoire a été effectuée. Un disque piézo-électrique dans le vide, avec des pertes dispersives, est excité avec une demie arche de sinus de fréquence f_{exc} (impulsion très large bande : $f_{exc} > 20f_0$). Le paramètre de densité de maillage (II.14) est accru $K_p = 0,25$ de façon à limiter le déphasage observé après quelques périodes (Figure II.3 (a)). La réponse temporelle résultante a une enveloppe en exponentielle décroissante, et un spectre faisant ressortir principalement la composante fondamentale et le troisième harmonique (Figure II.3 (b)).

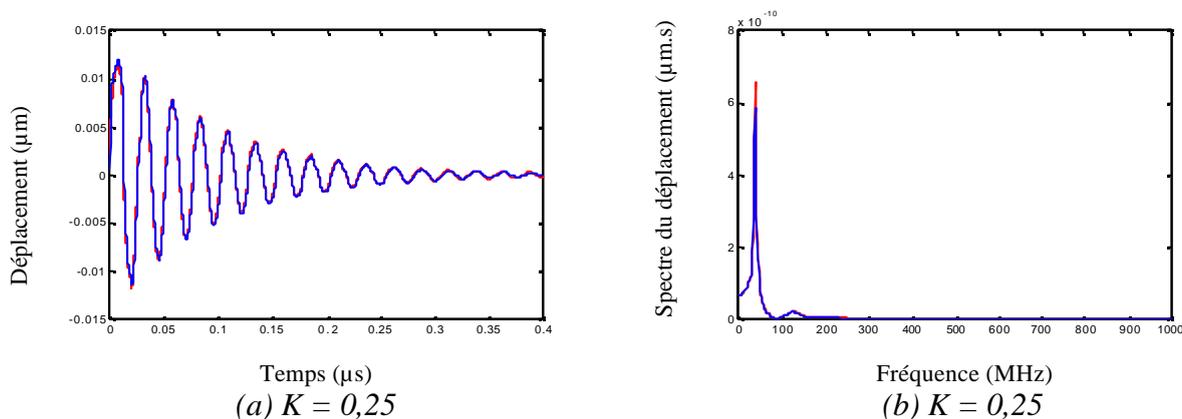


Figure II.3 : Comparaison (a) des déplacements et (b) spectres correspondants calculés avec les modèles ATILA (bleu, $K_p = 0,25$) et KLM (rouge) à la surface du disque piézo-électrique dans l'air.

De la même manière, les maillages des milieux passifs avant et arrière sont ajustés jusqu'à observer la convergence sur le fondamental du spectre donné par le modèle KLM.

1.3.3.2 Dans l'eau

Enfin, le maillage est ajusté pour le milieu fluide de propagation étudié : l'eau. Le déplacement temporel et son spectre (Figure II.4 (a) et (b)) montrent un bon accord entre les résultats ATILA et

KLM avec une densité de maillage (II.14) du milieu fluide ajustée à $K_{eau} = 0,8$. L'allure est relativement fidèle pour le fondamental, malgré un léger décalage, mais le troisième harmonique est déjà complètement atténué. En effet, le coefficient d'ajustement de densité du maillage K_{eau} n'est pas suffisant pour le troisième harmonique, ni pour les harmoniques d'ordre supérieur. Leur calcul précis nécessiterait une densité de maillage $K_{eau,n} < K_{eau}/n$ propre à l'harmonique n traité.

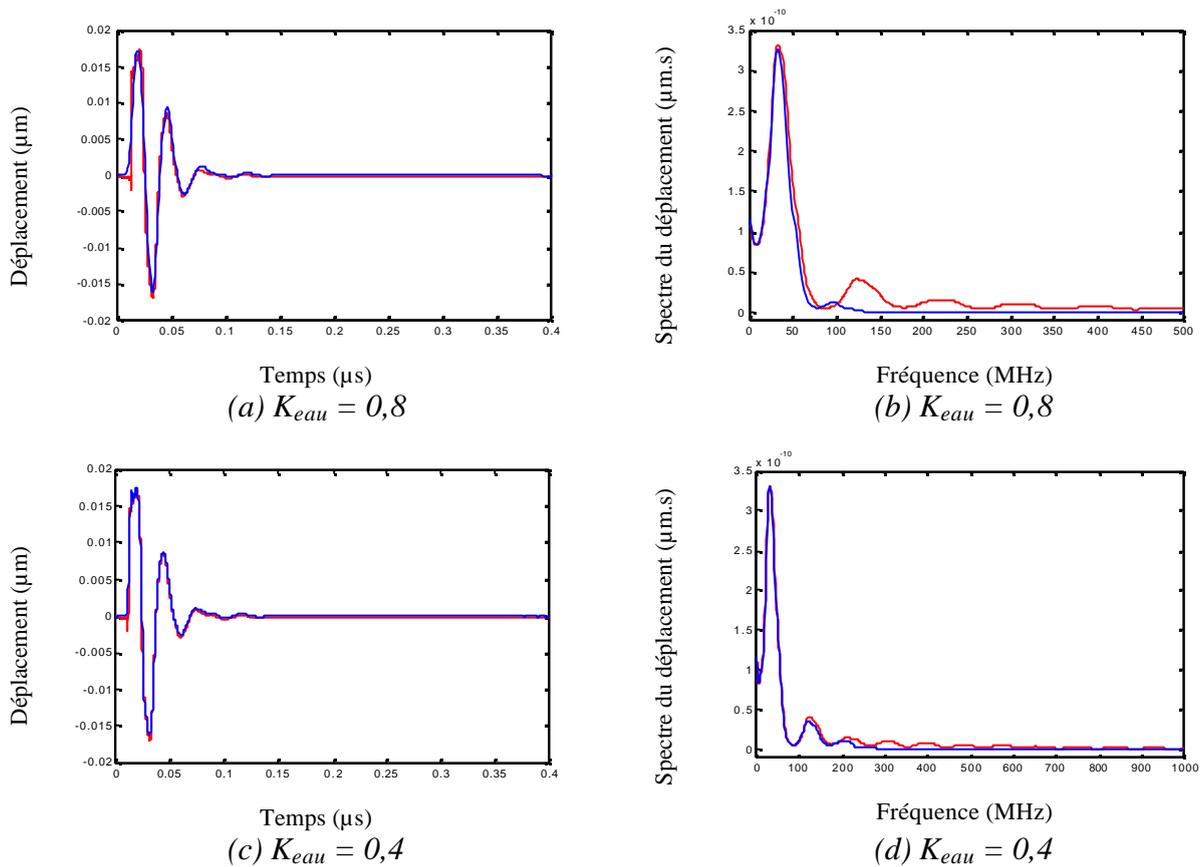


Figure II.4 : Comparaison (a), (c) des déplacements et (b), (d) spectres correspondants calculés dans l'eau avec les modèles ATILA (bleu) et KLM (rouge) pour des coefficients de densité de maillage (a), (b) $K_{eau} = 0,8$ et (c), (d) $K_{eau} = 0,4$ à la surface d'un transducteur constitué d'un milieu arrière, d'un disque piézo-électrique, et de 2 lames adaptatrices.

Avec une densité de maillage (II.14) du milieu fluide ajustée à $K_{eau} = 0,4$, le déplacement temporel et son spectre (Figure II.4 (c) et (d)) montrent un accord parfait pour le fondamental. L'allure du troisième harmonique est correcte, mais le cinquième est très atténué. En conséquence, cette densité de maillage sera celle retenue pour le fluide. On retiendra de façon générale pour la résolution en

régime transitoire qu'une densité du maillage fluide $K_{eau} = 0,4$ (soit une maille de longueur $e_{maille} = l/10$) permet d'obtenir le fondamental de façon précise [9].

I.3.4 Maillage optimal – Synthèse

La densité de maillage a été exprimée à partir du critère d'échantillonnage de Shannon, en fonction de la fréquence maximale de travail, soit $f_{max} = 2f_0$. Le maillage quart d'onde résultant de cette condition d'échantillonnage minimal (II.14) a été ajusté en fonction de l'analyse effectuée.

Analyse	Milieu arrière	Disque piézo-électrique	Lame adaptatrice et lentille	Milieu avant fluide: Eau	Unité
Modale	0,8	0,4	0,5 et 0,3	–	$\frac{l_0}{4}$
Harmonique	0,8	0,25	0,25	–	$\frac{l_0}{4}$
Transitoire	0,8	0,25	0,25	0,4	$\frac{l_0}{4}$
Optimal pour tout type d'analyse	$\frac{l_0}{5}$	$\frac{l_0}{16}$	$\frac{l_0}{16}$	$\frac{l_0}{10}$	m

Tableau II.2 : Paramètre K de densité de maillage longitudinal (II.14), selon le type d'analyse et le type de matériau.

Les critères de convergence sont variables selon le type d'analyse : une analyse modale converge dès lors que la fréquence de résonance étudiée est stable, tandis que pour une analyse harmonique ou transitoire, c'est la convergence du spectre qui est recherchée, en $f = 0$ à $2f_0$. De plus, les méthodes de résolution ne sont pas sujettes aux mêmes critères de convergence. Ces différences de critères de convergence et de méthodes de résolution expliquent notamment la raison pour laquelle la densité de maillage est moins importante (K plus élevé) pour une analyse modale. En conclusion de cette sous-partie, on peut remarquer que les densités de maillage varient peu selon le type d'analyse (Tableau II.2). On retiendra donc le maillage le plus contraignant des trois types d'analyses possibles, soit l'analyse transitoire : un maillage en $l_0/5$ pour le milieu arrière absorbant, $l_0/16$ pour l'élément piézo-électrique et les lames adaptatrices, et $l_0/10$ pour le milieu avant fluide. Pour ce qui est du maillage radial, on retiendra un maillage en $l_{radial}/20$ (Tableau II.1) par rapport

au premier mode radial, permettant de représenter de façon satisfaisante l'évolution du déplacement à la surface en fonction de la position radiale. La *Figure II.5 (a)* illustre le déplacement obtenu à la surface du transducteur (*Figure II.6 (a)*), constitué de : ① une onde plane, perturbée par ② une onde de bord émise par le côté du disque qui se propage ③ jusque dans l'axe du transducteur. Le spectre résultant (*Figure II.5 (b)*) comporte différentes composantes : ④ la principale centrée autour de la fréquence centrale du transducteur f_0 est perturbé par des composantes très basse fréquence, notamment ⑤ en $r = 0$ et ⑥ en $r = a$, où a est le rayon du transducteur.

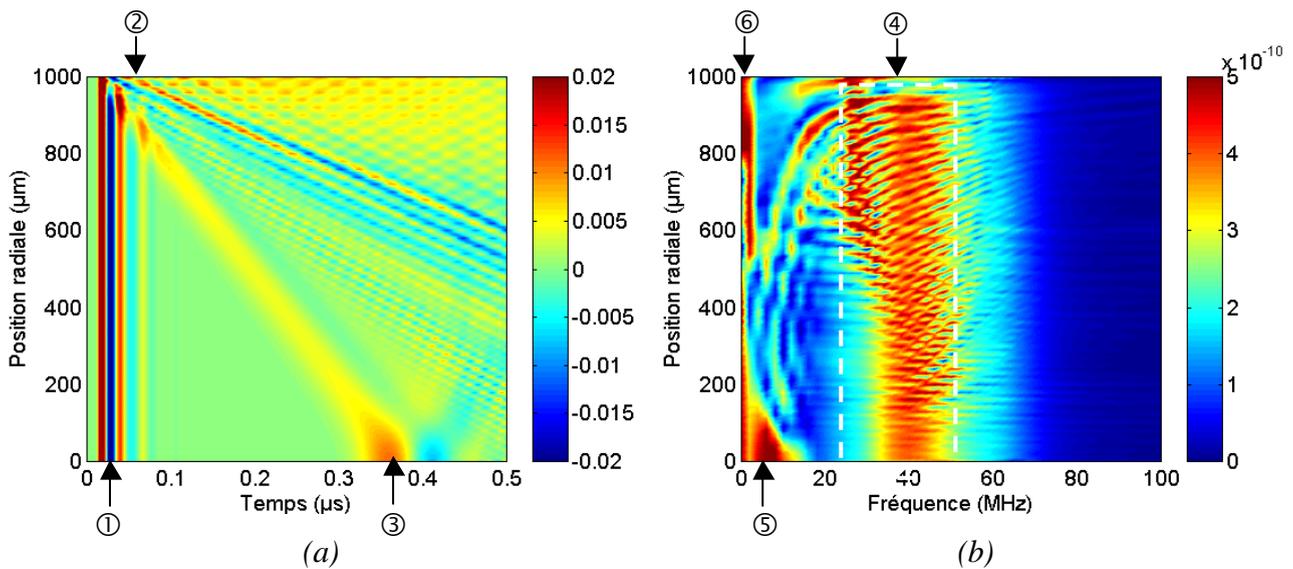


Figure II.5 : (a) Déplacement et (b) spectre correspondant dans l'eau calculé avec ATILA à la surface du transducteur constitué d'un milieu arrière, d'un disque piézo-électrique, et de deux lames adaptatrices en fonction de la position radiale r .

1.4 Limites de la modélisation

1.4.1 Limitations en nombre de pas de temps et nombre de nœuds

La résolution en régime transitoire permet d'obtenir le résultat escompté, mais une bonne précision nécessite un maillage dans les directions radiale et longitudinale relativement dense. Le maillage défini avec des éléments quadrilatères décrits par 8 nœuds engendre donc un nombre de nœuds fonction des nombres de mailles dans les directions radiale n_{radial} et longitudinale $n_{longitudinal}$. Le nombre de nœuds du maillage est réduit à 10^5 nœuds, limitant la géométrie du transducteur modélisé. Par densification du maillage, on observe que le temps de calcul est quasiment proportionnel au nombre de mailles dans les directions radiale n_{radial} et longitudinale $n_{longitudinal}$.

Par ailleurs, le temps de propagation est limité à 2000 pas de temps [1], soit un temps maximal égal à $t_{max} = 2000 \cdot \Delta t$, ce qui limite la valeur du pas de temps Δt du signal de durée donnée $t_{signal} < t_{max}$. La méthode de résolution utilisée étant itérative, le temps de calcul t_{calcul} est quasiment proportionnel à l'encombrement mémoire $E_{mémoire}$. Ce dernier est lui-même proportionnel au nombre de pas temporels $n_{temporel}$, et dépend des nombres de mailles dans les directions radiale n_{radial} et longitudinale $n_{longitudinal}$. Des essais successifs ont permis de réaliser un ajustement en loi de puissance 1,2 et 2,6 respectivement pour les nombres de mailles n_{radial} et $n_{longitudinal}$:

$$t_{calcul} \sim E_{mémoire} \sim n_{temporel} (n_{radial})^{1,2} (n_{longitudinal})^{2,6} \quad (\text{II.15})$$

Afin de repousser la fréquence de coupure f_c et de préserver la bande spectrale utile de la réponse du modèle de 0 à f_{max} , le pas de temps est réduit de façon à ce que les 2000 pas de temps disponibles soient utilisés. D'autre part, si l'encombrement mémoire $E_{mémoire}$ dépasse la capacité de mémoire vive disponible $C_{mémoire}$, le temps de calcul est très fortement accru. Il reste donc à ajuster le nombre de points du maillage de façon à ne pas dépasser la capacité de mémoire vive disponible $E_{mémoire} < C_{mémoire}$, le tout en obtenant au moins la fréquence de coupure désirée $f_c > f_{max}$, pour la dimension temporelle, comme pour les dimensions spatiales.

1.4.2 Pas de temps et condition de convergence

Les méthodes de résolution utilisées en régime transitoire nécessitent un échantillonnage temporel donné par le pas de temps $\Delta t = 1/f_e$ suffisamment faible de façon à satisfaire la condition d'échantillonnage de Shannon :

$$f_{max} \leq \frac{1}{2} f_e \Leftrightarrow \Delta t \leq \frac{1}{2f_{max}} \quad (\text{II.16})$$

avec f_e et f_{max} respectivement les fréquences d'échantillonnage et maximale et Δt le pas de temps.

D'autre part, des phénomènes d'atténuation numérique sont observés lors de la propagation sur plusieurs longueurs d'onde, en particulier dans un milieu fluide. La *Figure II.6* illustre l'évolution de la fréquence de coupure à -6 dB f_c pour un pas de temps Δt donné par l'équation (II.16), en fonction de la distance Δz parcourue. A partir de $400 \mu\text{m}$ de propagation, soit 12λ , la fréquence de coupure f_c devient inférieure à la fréquence d'anti-résonance du disque piézo-électrique f_0 . On observe alors un filtrage du spectre utile de $f = 0$ à la fréquence de coupure $f_c < f_{max}$, avec initialement $f_{max} = 2f_0$. La tendance observée en fonction du pas de temps Δt est similaire.

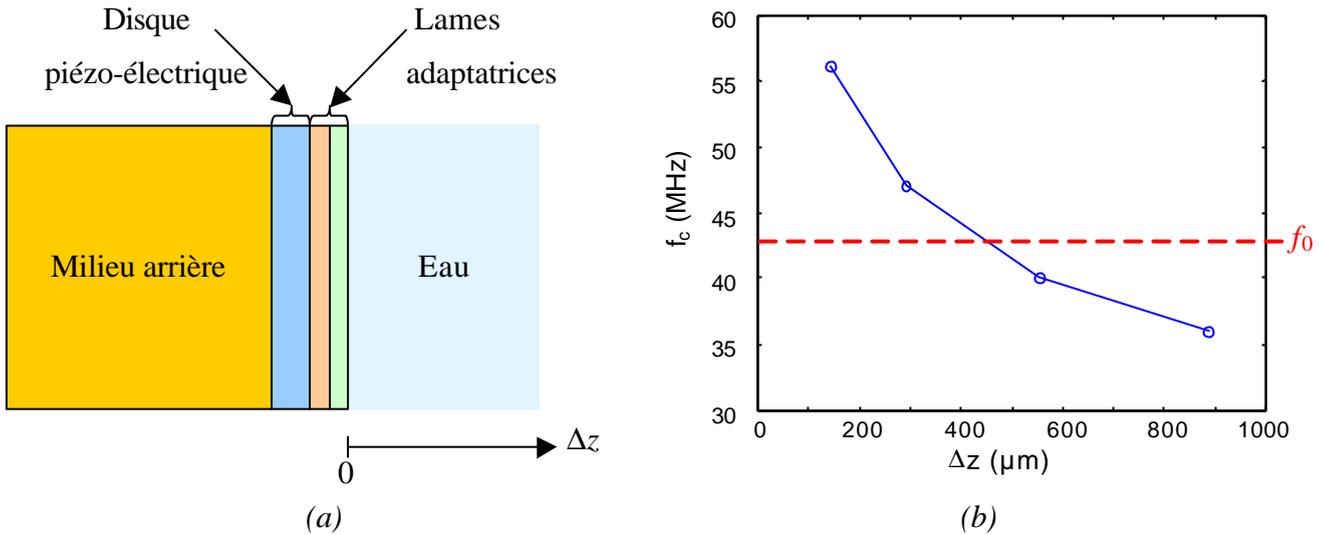


Figure II.6 : (a) Transducteur constitué d'un milieu arrière (orange), d'un disque piézo-électrique (bleu), et de deux lames adaptatrices (rouge et verte) avec de l'eau en face avant (bleu clair).
 (b) Fréquence de coupure f_c relevée sur la fonction de transfert en fonction de la distance de propagation Δz pour un pas de temps $\Delta t = 1$ ns, soit $f_e = 1$ GHz pour $f_0 = 43,5$ MHz.

Ce dernier est donc réduit par des essais successifs, et ce jusqu'à obtenir une réponse électro-acoustique stable pour le premier harmonique sur tout le spectre utile (de 0 à $f_{max} = 2f_0$) à la surface du transducteur. La fréquence de coupure f_c peut ainsi être décrite par une fonction puissance de la distance parcourue et du pas de temps Δt :

$$f_c = (\Delta z)^{-a} (\Delta t)^{-b} \quad (\text{II.17})$$

où f_c est la fréquence de coupure à -6 dB, Δz la distance parcourue, Δt le pas de temps, et a et b des paramètres réels positifs décrivant l'évolution décroissante caractéristique en x^{-n} respectivement pour la distance parcourue Δz et le pas de temps Δt . En conséquence de ces observations, la propagation en milieu fluide est réduite à zéro, et la pression ou le déplacement sont relevés directement à l'interface solide/fluide. La fréquence de coupure f_c dépend alors essentiellement du pas de temps Δt choisi pour la résolution.

II Formulation analytique de la propagation

Les limitations de la modélisation par éléments finis au niveau du maillage du milieu fluide conduisent à envisager une solution annexe pour le calcul de la propagation du champ de pression généré par le transducteur. Chacun des points relevés à la surface du transducteur est considéré comme un point source rayonnant dans un milieu semi-infini. La propagation est considérée dans le

cadre du développement linéaire des équations de l'acoustique, dans un milieu fluide homogène non dispersif, non atténuant. L'atténuation peut cependant être aisément prise en compte par l'ajout d'une composante imaginaire au terme de vitesse longitudinale (*Annexe I*). Les hypothèses et la formulation de cette approche de la propagation sont ici décrites de façon analytique.

II.1 Spécifications de rayonnement

II.1.1 Equation de Helmholtz-Kirchhoff

La résolution de la propagation dans un milieu fluide (selon la théorie de l'acoustique linéaire) est basée sur l'équation de Helmholtz inhomogène qui régit la propagation de l'onde de pression p générée par une force f :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\mathcal{F} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta p + k^2 p = -\mathcal{F} \quad (\text{II.18})$$

où p est la pression, c la célérité, t le temps et \mathcal{F} la fonction source.

L'écriture de cette équation dans un milieu fermé donne la formulation intégrale de Helmholtz-Kirchhoff faisant intervenir la fonction de Green g :

$$p = \iint_S \left(p_s \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial p_s}{\partial n} \right) dS \quad (\text{II.19})$$

où p_s est la pression sur la surface source, g est la fonction de Green, n la direction normale à la surface et $S = S_r \cup \pi \cup S_s$ la surface fermée d'intégration.

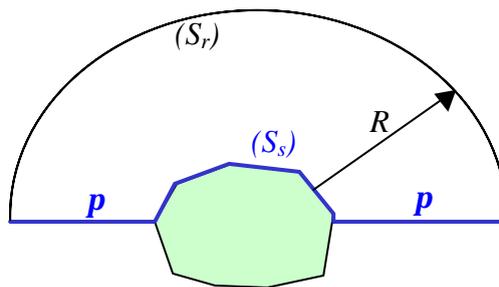


Figure II.7 : Source (S_s) rayonnant dans un espace fermé délimité par le plan (\mathbf{p}) environnant la source et la surface (S_r) située à la distance R en champ lointain [10].

La relation d'Euler donne:

$$\frac{\partial p_s}{\partial n} = -\mathbf{r} \frac{\partial v_n}{\partial t} = -j\omega \mathbf{r} v_n = -jkZ_0 v_n \quad (\text{II.20})$$

II.1.2 Conditions aux limites – Hypothèses

II.1.2.1 Condition de Sommerfeld

La condition de rayonnement de Sommerfeld (II.21) permet de faire l'hypothèse d'une contribution nulle de la surface située en champ lointain (S_r). Ainsi, l'intégration de Helmholtz-Kirchhoff (II.19) sur une surface fermée (S) est réduite à une intégration sur la surface source (S_s) et le plan radial environnant (π). Cette nouvelle surface d'intégration est notée S' :

➤ Condition de divergence :
$$\lim_{R \rightarrow +\infty} R \left(\frac{\partial p}{\partial R} - ikp \right) = 0 \quad (\text{II.21})$$

➤ Pression nulle en champ lointain :
$$\lim_{R \rightarrow +\infty} Rp = 0 \quad (\text{II.22})$$

d'où une surface d'intégration donnée par $S' = \mathbf{p} \cup S_s$.

II.1.2.2 Condition de baffle

Les conditions aux limites, dites conditions de baffle, permettent d'aboutir à différentes formulations de l'intégrale de Helmholtz-Kirchhoff au moyen de l'expression de la fonction de Green g_0 . Ces fonctions de Green sont basées sur l'hypothèse du rayonnement direct de points sources. Cette approche, si elle est valide pour une source plane, n'est qu'approchée dans le cas d'une source focalisée. En effet, les réflexions multiples de la source sur elle-même ne sont pas prises en compte. *Cathignol et Sapozhnikov* [11] ont développé une fonction de Green intégrant les réflexions primaires sur la source pour une configuration fortement focalisée ; cette approche ne sera cependant pas développée dans ce chapitre.

Les différentes conditions de baffle ont été explicitées avec la fonction de Green g_0 , solution de l'équation de Helmholtz (II.18), en fonction du rapport des impédances acoustiques de la source Z_s et du milieu de propagation Z_0 :

➤ Baffle rigide (*rigid baffle surface*): $Z_s \gg Z_0$ Condition de Neumann homogène

$$\frac{\partial g}{\partial n} = 0 \text{ et } g = 2g_0 \quad (\text{II.23})$$

➤ Baffle adapté (*pressure release surface*): $Z_s = Z_0$ Condition mixte

$$\frac{\partial g_0}{\partial n} = \frac{\partial g}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial n} = \left(\frac{1}{R} + jk \right) \frac{e^{-jkR}}{4\mathbf{p}R} \cos \mathbf{q} \text{ et } g_0 = \frac{e^{-jkR}}{4\mathbf{p}R} \quad (\text{II.24})$$

➤ Baffle mou (*unbaffled surface*): $Z_s \ll Z_0$ Condition de Dirichlet homogène

$$\frac{\partial g}{\partial n} = 2 \frac{\partial g_0}{\partial n} \text{ et } g = 0 \quad (\text{II.25})$$

II.1.2.3 Généralisation

De façon plus générale, le champ de pression est défini par :

$$p = \frac{jkZ_0}{2p} \iint_s \left(\mathbf{a}(\mathbf{q}) + \frac{\mathbf{b}(\mathbf{q})}{jkR} \right) \frac{e^{-jkR}}{R} v_n dS \quad (\text{II.26})$$

où k est le nombre d'onde (rad/m), $Z_0 = \mathbf{r}_0 c_0$ l'impédance acoustique (MRa) du milieu de propagation, R la distance (m) entre la source et le point considéré, et les coefficients \mathbf{a} et \mathbf{b} sont imposés par les conditions aux limites, dépendant du rapport des impédances acoustiques de la surface Z_s et du milieu de propagation Z_0 . Les coefficients \mathbf{a} et \mathbf{b} décrivent la fonction de Green propre à la configuration étudiée [12, 13] et peuvent être définis de façon généralisée [10, 14, 15] en fonction du coefficient de réflexion Γ :

$$\Gamma = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0}$$

$$\text{d'où } \mathbf{a}(\mathbf{q}) = \frac{1+\Gamma}{2} + (1-\Gamma) \frac{\cos \mathbf{q}}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{b}(\mathbf{q}) = (1-\Gamma) \frac{\cos \mathbf{q}}{2}$$

Il en résulte l'expression généralisée de l'intégrale de Helmholtz-Kirchhoff en fonction du coefficient de réflexion à la surface du transducteur [16] :

$$p = \frac{jkZ_0}{4p} \iint_s \left((1+\Gamma + (1-\Gamma)\cos \mathbf{q}) + \frac{(1-\Gamma)\cos \mathbf{q}}{jkR} \right) \frac{e^{-jkR}}{R} v_n dS \quad (\text{II.27})$$

Baffle	$\Gamma(Z_0)$	Condition	Intégrale	$\mathbf{a}(\mathbf{q})$	$\mathbf{b}(\mathbf{q})$
Rigide	+1	$Z_s \gg Z_0$	Rayleigh	1	0
Adapté	0	$Z_s = Z_0$	Kirchhoff	$\frac{1 + \cos \mathbf{q}}{2}$	$\frac{\cos \mathbf{q}}{2}$
Mou	-1	$Z_s \ll Z_0$	Sommerfeld	$\cos \mathbf{q}$	$\cos \mathbf{q}$

Tableau II.3 : Valeurs des coefficients \mathbf{a} et \mathbf{b} en fonction du rapport entre Z_s et Z_0 .

Cette expression généralisée, qui satisfait les trois conditions aux limites et les rapports d'impédance associés (Tableau II.3), peut aussi s'écrire directement en fonction des impédances acoustiques de la surface Z_s et du milieu de propagation Z_0 :

$$p = \frac{jkZ_0}{2p} \iint_s \frac{Z_s + Z_0 \cos \mathbf{q} \left(1 + \frac{1}{jkR} \right)}{Z_s + Z_0} \frac{e^{-jkR}}{R} v_n dS \quad (\text{II.28})$$

Une hypothèse simplificatrice couramment utilisée consiste à négliger la contribution apportée par le terme $\mathbf{b}(\mathbf{q})$. Cette approximation est valide si $kR \gg 1$. On obtient alors l'expression du champ de pression (II.26) directement en fonction du facteur d'obliquité $\mathbf{a}(\mathbf{q})$.

$$p = \frac{jkZ_0}{2\mathbf{p}} \iint_S \mathbf{a}(\mathbf{q}) \frac{e^{-jkR}}{R} v_n dS \quad (\text{II.29})$$

La plupart du temps, la formulation de l'intégrale de Helmholtz-Kirchhoff considérée est l'intégrale de Rayleigh. Cette hypothèse de baffle rigide valable pour $Z_s \gg Z_0$ impose une propagation unidirectionnelle. De plus, la plupart des résultats expérimentaux sont en très bon accord avec cette formulation.

$$p = \frac{jkZ_0}{2\mathbf{p}} \iint_S \frac{e^{-jkR}}{R} v_n dS \quad (\text{II.30})$$

La résolution de l'intégrale de Rayleigh peut se faire de façon analytique, sous certaines conditions. La première est de donner une expression correcte de la vitesse normale v_n à la surface du transducteur. La seconde condition concerne les possibilités d'intégration analytiques qui ne sont connues que pour des configurations géométriques bien précises, telles qu'une source plane axisymétrique, ou dans le cadre d'approximations, typiquement l'approximation de champ lointain.

II.1.3 Réponse impulsionnelle en diffraction

L'approche de la réponse impulsionnelle en diffraction est largement utilisée pour l'analyse des champs acoustiques transitoires. Cette approche consiste à exprimer l'intégrale de Helmholtz-Kirchhoff (II.19) dans le domaine temporel sous forme d'un double produit de convolution entre la fonction de Green g propre aux conditions aux limites et la vitesse normale v_n à la source étudiée :

$$p = jkZ_0 \iint_S \left(g + \frac{1}{jk} \frac{\partial g}{\partial n} \right) v_n dS$$

$$\Leftrightarrow p = jkZ_0 \left(g + \frac{1}{jk} \frac{\partial g}{\partial n} \right)_{x y t} *** v_n \quad (\text{II.31})$$

La fonction de Green et sa dérivée normale exprimées dans le domaine temporel s'écrivent :

$$g_0 = \frac{1}{4\mathbf{p}R} \mathbf{d} \left(t - \frac{R}{c} \right) \quad (\text{II.32})$$

$$\text{et } \frac{\partial g_0}{\partial n} = \frac{1}{4\mathbf{p}} \left(\mathbf{d} \left(t - \frac{R}{c} \right) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \mathbf{d}' \left(t - \frac{R}{c} \right) \frac{1}{cR} \frac{\partial R}{\partial n} \right) \quad (\text{II.33})$$

avec \mathbf{d} la fonction Dirac, \mathbf{d}' sa dérivée et R la distance entre le point source et celui d'intérêt :

$$R = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2} \quad (\text{II.34})$$

Les dérivées normales $\partial/\partial n$ de la distance R , et de son inverse $1/R$ sont données par :

$$\frac{\partial R}{\partial n} = \frac{\partial R}{\partial z_s} = \frac{z_s - z}{R} = -\cos \mathbf{q}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\partial}{\partial z_s} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{z - z_s}{R^3} = \frac{\cos \mathbf{q}}{R^2}$$

L'expression (II.31) devient :

$$p = \frac{jkZ_0}{2\mathbf{p}R} \left(\mathbf{a}(\mathbf{q})\mathbf{d} \left(t - \frac{R}{c} \right) + \frac{\mathbf{b}(\mathbf{q})}{jkR} \left(\mathbf{d} \left(t - \frac{R}{c} \right) \cos \mathbf{q} + \frac{R \cos \mathbf{q}}{c} \mathbf{d}' \left(t - \frac{R}{c} \right) \right) \right)_{x y t}^{***} v_n \quad (\text{II.35})$$

Cette formulation générale de la réponse impulsionnelle de diffraction est équivalente à celle développée dans le cadre de l'approche harmonique. Ce formalisme a été développé par *Guyomar et Powers* pour les différentes conditions aux limites [17], et pour une source plane [18] ou focalisée [19]. De la même façon que précédemment, un développement couramment utilisé consiste à ne prendre en compte que la contribution du facteur d'obliquité $\mathbf{a}(\mathbf{q})$. Dans l'hypothèse où l'approximation $kR \gg 1$ est valide, l'équation (II.35) devient :

$$p = \frac{jkZ_0}{2\mathbf{p}R} \mathbf{a}(\mathbf{q})\mathbf{d} \left(t - \frac{R}{c} \right)_{x y t}^{***} v_n \quad (\text{II.36})$$

L'expression obtenue ici a été largement développée et étudiée par *Stepanishen* [20-25] et *Harris* [26, 27], notamment avec les hypothèses de distribution de vitesse normale uniforme sur la surface source, dans un repère cartésien ou cylindrique, avec une source plane ou focalisée.

II.2 Intégrale de Rayleigh

II.2.1 Formulation générale

L'intégrale de Rayleigh (II.30) peut être développée dans le cas d'une formulation dans un repère cartésien, auquel cas elle devient :

$$p = \frac{jkZ_0}{2\mathbf{p}} \iint_{x_s, y_s} \frac{e^{-jkR}}{R} v_n dx_s dy_s \quad (\text{II.37})$$

Dans le cadre d'un développement limité basé sur l'hypothèse de champ lointain (II.38), le terme de distance R est exprimé en fonction de la distance R_M , pour une source de dimensions x_m par y_m :

$$x_m, x \ll R \quad \text{et} \quad y_m, y \ll R \quad (\text{II.38})$$

Les positions des points sources (x_s, y_s, z_s) sont définies respectivement sur $[0, x_m]$, $[0, y_m]$ et $[0, z_m]$. L'expression (II.34) donnant la distance R entre le point source et le point considéré se développe en factorisant par R_M :

$$R = \sqrt{R_M^2 - 2xx_s - 2yy_s + x_s^2 + y_s^2} \quad \text{avec} \quad R_M = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_s)^2}$$

$$R \approx R_M - \frac{xx_s}{R_M} - \frac{yy_s}{R_M} + \frac{x_s^2}{2R_M} + \frac{y_s^2}{2R_M}$$

Dans l'hypothèse où les termes du second ordre sont négligeables, soit :

$$x_m, y_m \ll 2\sqrt{1R_M}$$

L'équation (II.37) devient alors :

$$p(x, y, z) = \frac{jkZ_0}{2\mathbf{p}} \frac{e^{-jkR_M}}{R_M} v_n \operatorname{sinc}\left(\frac{kxx_m}{2R_M}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{kyy_m}{2R_M}\right) x_m y_m \quad (\text{II.39})$$

Le fenêtrage rectangulaire spatial de la source fait apparaître les fonctions sinus cardinal selon les axes x et y . Ces fonctions dépendent de la taille de la source (x_m, y_m) et sont caractérisées par une largeur de lobe principal et un niveau relatif des lobes secondaires. Par ailleurs, la largeur du lobe principal et la hauteur relative des lobes secondaires peuvent être optimisées par un fenêtrage adéquat. En effet, le compromis entre le niveau des lobes secondaires et la résolution peut être modifié en imposant un profil de vitesse v_n apodisé [27-29].

De manière plus générale, la pression rayonnée décrite par l'intégrale de Rayleigh (II.37) s'écrit aussi sous la forme d'un produit de convolution (II.36), équivalent à un produit de la fonction de Green g et de la vitesse normale v_n exprimées dans le domaine de Fourier. Soit, dans le cadre de l'approximation de Fresnel, en fonction du profil $s(x, y)$ de la source en vitesse (ouverture) :

$$p(x, y, z) = TF_{x,y} \left\{ \frac{jkZ_0}{2\mathbf{p}R_M} e^{-jkR_M} \right\} TF_{x,y} \{v_n\} = Z_0 e^{-jkz} TF_{x,y} \{s\} \quad (\text{II.40})$$

avec $p_0 = Z_0 v_0$ et $v_n = s(x, y) v_0$, où p_0 est la pression de référence, Z_0 l'impédance acoustique du milieu de propagation, et v_0 la vitesse de référence.

II.2.2 Formulation axisymétrique

Dans un repère cylindrique, le changement de variable (x, y, z) en (r, \mathbf{q}, z) pour une source de rayon a permet d'effectuer un développement en fonction de Bessel :

$$p = \frac{jkZ_0}{2\mathbf{p}} \iint_{r_s, \mathbf{q}_s} \frac{e^{-jkR}}{R} v_n r_s d r_s d \mathbf{q}_s \quad (\text{II.41})$$

Le terme de distance est donné par :

$$R = \sqrt{(z - z_s)^2 + r^2 + r_s^2 - 2rr_s \cos(\mathbf{y} - \mathbf{y}_s)} \quad (\text{II.42})$$

où (r_s, \mathbf{y}_s, z_s) et (r, \mathbf{y}, z) sont les coordonnées cylindriques du point source et du point image.

La formulation axisymétrique de l'intégrale de Rayleigh a été largement discutée [30, 31] et comparée à des travaux antérieurs pour une source plane [22] ou focalisée [32-34]. Les analogies et conditions de validité des différents modèles ont été établies et sont limitées à des sources faiblement focalisées $F \ll a$ et/ou de rayon grand devant la longueur d'onde $ka \gg 1$. L'approche qui suit consiste donc à établir une formulation approchée uniquement basée sur l'hypothèse de champ lointain, sans autre restriction.

II.2.2.1 Source plane

Un développement limité de (II.42), avec $z_s = 0$ et basé sur l'hypothèse de champ lointain [35] permet d'intégrer la dépendance angulaire sur \mathbf{y}_s de $[0, 2\mathbf{p}]$:

$$R = z + \frac{r^2 + r_s^2}{2z} - \frac{rr_s}{z} \cos(\mathbf{y} - \mathbf{y}_s) \quad (\text{II.43})$$

L'intégrale (II.41) incluant une fonction de Bessel est déduite du développement (II.43) :

$$p(r, z) = jkZ_0 e^{-jk\left(z + \frac{r^2}{2z}\right)} \int_0^a e^{-j\frac{kr_s^2}{2z}} J_0\left(\frac{kr r_s}{z}\right) v_n \frac{r_s}{R} dr_s \quad (\text{II.44})$$

Un autre développement, basé sur une approche angulaire donne :

$$R = \sqrt{R_{obs}^2 + r_s^2 - 2rr_s \cos(\mathbf{y} - \mathbf{y}_s)} \quad \text{avec } R_{obs}^2 = z^2 + r^2 \text{ et } r = R_{obs} \sin \mathbf{q}$$

$$\text{d'où } R = R_{obs} - r_s \sin \mathbf{q} \cos(\mathbf{y} - \mathbf{y}_s) \quad (\text{II.45})$$

Le rayonnement angulaire au point de coordonnées polaires (R_{obs}, \mathbf{q}) devient donc :

$$p(R_{obs}, \mathbf{q}) = jkZ_0 \frac{e^{-jkR_{obs}}}{R_{obs}} \int_0^a J_0(kr_s \sin \mathbf{q}) v_n r_s dr_s \quad (\text{II.46})$$

Ce résultat peut s'écrire sous la forme d'une transformée de Hankel (notée *TH*) du profil radial de vitesse normale $v_n(r)$:

$$p(R_{obs}, \mathbf{q}) = jkZ_0 \frac{e^{-jkR_{obs}}}{R_{obs}} \frac{TH\{v_n\}}{(\sin \mathbf{q})^2} \quad (\text{II.47})$$

Plus particulièrement, dans le cas d'un profil de vitesse homogène sur la surface source ($v_n = v_0$) :

$$p(R_{obs}, \mathbf{q}) = p_0 jka^2 \frac{e^{-jkR_{obs}}}{R_{obs}} J_{1c}(ka \sin \mathbf{q}) \quad (\text{II.48})$$

II.2.2.2 Source focalisée

L'expression axisymétrique obtenue dans un repère cylindrique peut être étendue au cas d'une source focalisée avec un retard pur \mathbf{j}_s et la fonction de transfert correspondante incluse dans l'intégrale (II.44) :

$$p(r, z) = jkZ_0 e^{-jk\left(z + \frac{r^2}{2z}\right)} \int_0^a e^{-j\mathbf{j}_s} e^{-j\frac{kr_s^2}{2z}} J_0\left(\frac{kr r_s}{z}\right) v_n \frac{r_s}{R} dr_s \quad (\text{II.49})$$

Typiquement, pour une source focalisée sphérique de distance focale F , ce retard s'écrit :

$$z_s = F - \sqrt{F^2 - r_s^2} \quad (\text{II.50})$$

Cette expression peut être étendue au cas d'une source focalisée géométriquement avec $z_d = z - z_s$ la distance modifiée entre les points sources et le point cible :

$$p(r, z) = jkZ_0 \int_0^a e^{-jk\left(z_d + \frac{r^2 + r_s^2}{2z_d}\right)} J_0\left(\frac{kr r_s}{z_d}\right) v_n(r_s) \frac{r_s}{R_d} dr_s \quad (\text{II.51})$$

Dans le cadre d'une focalisation par une source circulaire et d'une approximation de champ lointain et/ou de source faiblement focalisée $z_d \ll z$, les deux formulations conduisent à la même formule approchée :

$$\frac{1}{R_d} \simeq \frac{1}{R} \quad \text{et} \quad \frac{1}{z_d} \simeq \frac{1}{z},$$

En faisant un développement limité sur le terme de retard de focalisation, on obtient :

$$z_s = F - \sqrt{F^2 - r_s^2} \simeq \frac{r_s^2}{2F}$$

$$\text{d'où : } p(r, z) = jkZ_0 e^{-jk\left(z + \frac{r^2}{2z}\right)} \int_0^a e^{-j\frac{kr_s^2}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{F}\right)} J_0\left(\frac{kr r_s}{z}\right) v_n(r_s) \frac{r_s}{R} dr_s \quad (\text{II.52})$$

Avec l'hypothèse d'une vitesse constante sur toute la surface d'intégration de la source $v_0 = v_n(r_s)$, on retrouve la formulation donnée par *Lucas et Muir* [34], et plus particulièrement, l'expression de la pression dans l'axe se résume à :

$$p(0, z) = p_0 \frac{F}{F - z} \left(1 - e^{j\frac{ka^2}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{F}\right)} \right) e^{-jkz} \quad (\text{II.53})$$

Par ailleurs, des formulations plus précises de la pression dans l'axe, dérivées des formulations de [32, 33] ont été spécifiées et comparées [36, 37]. La formulation simplifiée de *Lucas et Muir* (II.53)

permet d'obtenir une très bonne approximation du champ de pression dans l'axe et de retrouver la distance focale effective et le gain de focalisation correspondant.

II.3 Expression de la vitesse normale

Les résultats de propagation sont obtenus à partir de sources calculées en déplacement u ou en pression p . Dans les deux cas, nous avons développé les expressions de la vitesse normale à la surface pour pouvoir utiliser l'intégrale de Rayleigh (II.30).

II.3.1 Expression générale de la vitesse normale

Les sinus et cosinus des angles définissant la normale à la surface dépendent du profil de la source sont notés respectivement $\sin \mathbf{q}_n$ et $\cos \mathbf{q}_n$.

➤ Dans le premier cas (source en déplacement selon r et z), la vitesse normale est obtenue à partir de la dérivée par rapport au temps de la reconstitution du déplacement normal à la surface à partir des projections selon r et z :

$$v_n = j\omega \frac{\partial u}{\partial n} = j\omega(u_z \cos \mathbf{q}_n + u_r \sin \mathbf{q}_n) \quad (\text{II.54})$$

➤ Dans le second cas (source en pression), le système d'équation d'Euler incompressible donne la relation entre vitesse et pression pour un fluide :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_0 \frac{\partial v_n}{\partial t} \Leftrightarrow -jk_n p = -j\omega \rho_0 v_n \quad (\text{II.55})$$

Il en résulte une relation entre la dérivée de la pression par rapport à la normale et l'accélération normale à la surface. La vitesse normale est alors calculée en utilisant la projection de la pression sur la normale à la surface:

$$v_n = \frac{p}{Z_0} \frac{k_n}{k} = \frac{p}{Z_0} \cos(\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_k) \quad (\text{II.56})$$

II.3.2 Onde plane

Pour un profil plan, les sinus et cosinus des angles définissant la normale à la surface, selon z sont exprimés par :

$$\sin \mathbf{q}_n = 0 \text{ et } \cos \mathbf{q}_n = 1 \quad (\text{II.57})$$

➤ Dans le cas d'une source en déplacement selon r et z , la vitesse normale v_n est obtenue à partir de la dérivée par rapport au temps du déplacement normal à la surface u_z :

$$v_n = j\omega u_z \quad (\text{II.58})$$

➤ Dans le cas d'une source en pression, la vitesse normale v_n est calculée en utilisant la projection de la pression sur la normale à la surface :

$$v_n = \frac{p}{Z_0} \frac{k_z}{k} = \frac{p}{Z_0} \sqrt{1 - \left(\frac{k_r}{k}\right)^2} \quad (\text{II.59})$$

II.3.3 Profil circulaire

Dans le cas d'un profil circulaire décrit par $P(r) = R_c - \sqrt{R_c^2 - r^2}$, les sinus et cosinus des angles définissant la normale à la surface sont déterminés de façon directe en fonction de la position radiale r et du rayon de courbure R_c :

$$\sin \mathbf{q}_n = \frac{r}{R_c} \quad \text{et} \quad \cos \mathbf{q}_n = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R_c}\right)^2} \quad (\text{II.60})$$

II.3.4 Profil quelconque

Dans le cas général d'une fonction quelconque décrivant le profil donnant les positions des points sources $P(r)$, les sinus et cosinus de l'angle par rapport à la normale sont donnés par :

$$\sin \mathbf{q}_n = \frac{P'(r)}{\sqrt{(P'(r))^2 + 1}} \quad \text{et} \quad \cos \mathbf{q}_n = \frac{1}{\sqrt{(P'(r))^2 + 1}} \quad (\text{II.61})$$

Plus particulièrement dans le cas d'un profil polynomial d'ordre m , noté $P_m(r)$:

$$P_m(r) = \sum_{k=0}^m a_k r^k$$

$$\text{d'où} \quad P'_m(r) = \frac{dP_m(r)}{dr} = \sum_{k=1}^m k a_k r^{k-1} \quad (\text{II.62})$$

Les formulations de la vitesse normale v_n en fonction du déplacement u ou de la pression p s'en trouvent modifiées en conséquence. Cependant, ces formulations généralisées restent valables avec un profil quelconque analytique $P(r)$ ou ajusté par un polynôme d'ordre m noté $P_m(r)$.

➤ Dans le premier cas (source en déplacement selon r et z), la vitesse normale est obtenue à partir de la dérivée par rapport au temps de la reconstitution du déplacement normal à la surface à partir des projections selon r et z .

$$v_n = j\omega \frac{\partial u}{\partial n} = j\omega \frac{u_z + P'(r)u_r}{\sqrt{(P'(r))^2 + 1}} \quad (\text{II.63})$$

➤ Dans le second cas (source en pression), la vitesse normale est calculée en utilisant la projection de la pression sur la normale à la surface:

$$v_n = \frac{p}{Z_0} \frac{k_n}{k} = \frac{p}{Z_0} \cos(\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_k) = \frac{p}{Z_0} \frac{\frac{k_z}{k} + P'(r) \frac{k_r}{k}}{\sqrt{(P'(r))^2 + 1}} = \frac{p}{Z_0} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{k_r}{k}\right)^2} + P'(r) \frac{k_r}{k}}{\sqrt{(P'(r))^2 + 1}} \quad (\text{II.64})$$

Ces formulations permettent de retrouver le rayonnement propre à la *source géométrique* simulée avec ATILA. Les coordonnées des points source doivent être prises en compte par le terme de distance R (II.42), mais aussi au niveau de la dérivation par rapport à la normale de la surface source comme défini ci-dessus pour une source en déplacement (u_r, u_z) ou en pression p .

Le calcul de la vitesse normale repose sur la précision de celui du vecteur d'onde radial k_r . Ce dernier est déterminé par transformée de Fourier bidimensionnelle ou par transformée de Fourier-Bessel, appelée aussi transformée de Hankel.

III Résolution numérique de l'intégrale de Rayleigh

Les différentes formulations de l'intégrale de Rayleigh présentées par la suite ont été développées pour des configurations géométriques particulières : source rectangulaire ou axisymétrique, plane ou focalisée. Pour plus de commodité et pour alléger les notations, le terme de déphasage $e^{j\mathbf{w}t}$ de pulsation harmonique \mathbf{w} sera sous-entendu, et le terme de pression p décrit seulement en fonction des trois dimensions spatiales (x, y, z).

III.1 Formulation fréquentielle

La résolution de l'intégrale de Rayleigh nécessite la connaissance de la fonction de répartition de la vitesse normale à la surface du transducteur. En pratique, elle est souvent considérée constante, car seule sa valeur moyenne sur la surface de réception est évaluée. Il existe cependant des moyens de mesure, telle que l'interférométrie laser, permettant d'établir une cartographie de la vitesse normale v_n . Plus particulièrement, pour un configuration axisymétrique une reconstruction tomographique permet de retrouver le profil radial de la vitesse normale v_n .

Par ailleurs, l'échantillonnage fréquentiel et la bande passante de l'excitation doivent satisfaire la condition d'échantillonnage de Shannon (Equation (II.16)) :

$$\Delta x \leq \frac{1}{2f_{x,\max}} \quad (\text{II.65})$$

III.1.1 Décomposition en ondes planes dans un repère cartésien – Transformée de Fourier bidimensionnelle

La formulation intégrale de Rayleigh peut aussi être écrite sous la forme d'un produit de convolution :

$$p(x, y, z) = j\omega R \frac{e^{-jkR}}{2pR} * v_n(x, y, z_s) \quad (\text{II.66})$$

avec: $R = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}$

Ce produit de convolution dans le domaine spatial bidimensionnel s'écrit sous la forme d'un produit dans le domaine des fréquences spatiales comme décrit par [38-42]. Il se fait par transformée de Fourier, et son calcul numérique avec la FFT (*Fast Fourier Transform*). La fonction de Green g et la vitesse normale v_n sont décomposées en ondes planes :

$$TF_{x,y} \{g(x, y)\} = g(k_x, k_y) \Leftrightarrow TF_{x,y} \left\{ \frac{e^{-jkR}}{2pR} \right\} = -j \frac{e^{-jk_z(z-z_s)}}{k_z}$$

$$TF_{x,y} \{v_n(x, y, z_s)\} = v_n(k_x, k_y, z_s)$$

La propagation dans la direction z se fait par application de l'opérateur de propagation :

$$p(k_x, k_y, z) = j\omega R \left(-j \frac{e^{-jk_z(z-z_s)}}{k_z} \right) v_n(k_x, k_y, z_s) \quad (\text{II.67})$$

soit $p(k_x, k_y, z) = Z_0 \frac{k}{k_z} v_n(k_x, k_y, z_s) e^{-jk_z(z-z_s)}$

On retrouve l'équation (II.59) qui donne la relation entre vitesse normale et pression :

$$p(k_x, k_y, z) = p(k_x, k_y, z_s) e^{-jk_z(z-z_s)} \quad (\text{II.68})$$

avec:

$$e^{-jk_z(z-z_s)} = e^{-jk_z \Delta z} \quad \text{l'opérateur de propagation,} \quad (\text{II.69})$$

et $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ le nombre d'onde selon la direction z . (II.70)

L'algorithme de propagation se résume en trois étapes: le passage du domaine spatial à celui des nombres d'ondes, l'application de l'opérateur de propagation, puis le retour du domaine des pulsations spatiales à celui de l'espace.

$$p(x, y, z + \Delta z) = TF_{k_x, k_y, \omega}^{-1} \left\{ TF_{x, y, z} \{ p(x, y, z) \} e^{-jk_z \Delta z} \right\} \quad (\text{II.71})$$

L'algorithme, s'il est relativement simple dans sa formulation analytique, pose de nombreux problèmes dans son implémentation numérique : l'échantillonnage de la source, la décomposition

en ondes planes de la fonction de Green g entraîne des singularités autour de ses pôles [41]. Le pas d'échantillonnage (spatial et temporel) doit être suffisamment fin pour limiter le repliement spectral. La taille de la source (y compris les contributions nulles) doit être suffisante pour permettre la distinction des différentes contributions dans le domaine des fréquences. Ces contraintes et leurs optimisations ont été largement étudiées dans les années 1990 notamment par *Orofino* [43-47], et *Wu* [48-52]. Une alternative à la décomposition en ondes planes avec la FFT qui consiste à exprimer analytiquement la fonction de Green g dans un repère cylindrique est proposée et décrite par *Christopher* [53].

III.1.2 Décomposition en ondes planes dans un repère cylindrique – Transformée de Hankel

La transformée de Fourier bidimensionnelle est donnée par :

$$p(k_x, k_y, z, \mathbf{w}) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int p(x, y, z, \mathbf{w}) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (\text{II.72})$$

La transformée de Fourier-Bessel ou de Hankel est obtenue par une expression en coordonnées cylindriques du nombre d'onde :

$$\begin{cases} k_r = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \\ \mathbf{f} = \text{Arctan}\left(\frac{k_y}{k_x}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_x = k_r \cos \mathbf{f} \\ k_y = k_r \sin \mathbf{f} \end{cases}$$

et de la position radiale, soit :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \mathbf{q} = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r \cos \mathbf{q} \\ y = r \sin \mathbf{q} \end{cases}$$

On obtient alors:

$$p(k_r, z, \mathbf{w}) = \int_0^{+\infty} p(r, z, \mathbf{w}) \left[\int_0^{2\pi} e^{-jk_r r \cos(q-\mathbf{f})} d\mathbf{q} \right] r dr$$

$$\text{soit: } p(k_r, z, \mathbf{w}) = \int_0^{+\infty} p(r, z, \mathbf{w}) J_0(k_r r) r dr = TH \{ p(r, z, \mathbf{w}) \} \quad (\text{II.73})$$

III.1.2.1 Propagation par produit d'opérateur échantillonné en fréquence (FSC)

De la même façon que dans un repère cartésien, l'opérateur de propagation [54] est donné par :

$$H(k_r, z) = e^{-jk_z z} = \begin{cases} e^{-jz\sqrt{k^2 - k_r^2}}, & |k_r| \leq k \\ e^{-z\sqrt{k_r^2 - k^2}}, & |k_r| > k \end{cases} \quad (\text{II.74})$$

L'application de cet opérateur de propagation est appelé algorithme FSC (*Frequency Sampled Convolution*), ou de convolution avec échantillonnage fréquentiel, et permet un calcul rapide de la source propagée.

Une extension de cette écriture consiste à réduire le domaine des nombres d'ondes à celui "utile" pour la propagation, en éliminant les ondes évanescentes, atténuées après propagation sur seulement quelques longueurs d'onde. Plus particulièrement, l'angle d'ouverture est limité par une approximation géométrique issue de la théorie des rayons, et son implémentation permet un calcul très rapide, au prix d'une détérioration de la précision.

III.1.2.2 Propagation par produit d'opérateur échantillonné dans l'espace (SSC)

L'opérateur de propagation défini par l'algorithme SSC (*Spacially Sampled Convolution*), ou de convolution avec échantillonnage spatial [55], permet un calcul certes moins rapide, mais avec une précision bien meilleure :

$$h(r, z) = \frac{jk}{2p} \left(\frac{z}{d} - \frac{z}{jkd^2} \right) \frac{e^{-jkd}}{d} \quad \text{où} \quad d = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (\text{II.75})$$

De plus, ce formalisme permet d'appliquer la fonction identité résultante au calcul de la transformée de Hankel discrète (*Discrete Hankel Transform*, DHT) puis de sa réciproque (*Inverse Discrete Hankel Transform*, IDHT) à la source convoluée avec son opérateur de propagation. En effet, tout comme pour la FFT dont le domaine de passage est pseudo fréquentiel, mais dont la réciproque résulte bien en une fonction identité, la DHT permet de passer dans un domaine de pseudo nombre d'onde, d'y effectuer l'opération de propagation et de revenir dans le domaine spatial "identité", à la propagation près.

III.1.2.3 Implémentation de la transformée de Hankel discrète (DHT)

Semblable à la transformée de Fourier rapide (FFT), un algorithme de calcul rapide de transformée de Hankel discrète (DHT) a été développé par *Johnson* en 1988 [56], et implémenté par *Christopher* en 1991 [54]. Cet algorithme intègre sur une section de façon analogue le fenêtrage rectangulaire de la source, cependant sans périodiser la source, évitant ainsi les problèmes de repliement spatial inhérents à la FFT.

➤ L'implémentation de la DHT se fait en 3 étapes :

① Un rééchantillonnage de la source sur les zéros de la fonction J_0 de Bessel, noté j_n , pour les indices de 1 à N , et regroupés dans un vecteur $[j_0]$.

$$[f] = f\left(\frac{a}{j_{0,N}}[j_0]\right) \quad \text{ou} \quad f(n) = f\left(\frac{a}{j_{0,N}}j_{0,n}\right)$$

② Le calcul des coefficients $Y(n,m)$ de la matrice passage dans le domaine des nombres d'onde k_r .

$$[Y] = 2J_0\left(\frac{[j_0][j_0]^t}{j_{0,N}}\right)\left(J_1^2([j_0])\right)^{-1} \quad \text{ou} \quad Y(m,n) = 2\frac{J_0(j_{0,m}j_{0,n}/j_{0,N})}{J_1^2(j_{0,n})}$$

③ La source dans le domaine des nombres d'onde k_r est donné par le produit de la matrice de passage normalisée:

$$[F] = \frac{2pa^2}{j_N^2}[Y][f] \quad \text{ou} \quad F(m) = \frac{2pa^2}{j_N^2} \sum_{n=1}^{N-1} Y(m,n) f(n)$$

➤ Réciproquement, l'implémentation de l'IDHT se fait en 3 étapes :

① Un rééchantillonnage de la source sur les zéros de la fonction J_0 de Bessel, noté j_n , pour les indices de 1 à N , et regroupés dans un vecteur $[j_0]$.

$$[F] = F\left(\frac{[j_0]}{2pa}\right) \quad \text{ou} \quad F(m) = F\left(\frac{j_m}{2pa}\right)$$

② Le calcul des coefficients $Y(n,m)$ de la matrice passage dans le domaine des nombres d'onde k_r .

$$[Y] = 2J_0\left(\frac{[j_0][j_0]^t}{j_{0,N}}\right)\left(J_1^2([j_0])\right)^{-1} \quad \text{ou} \quad Y(n,m) = 2\frac{J_0(j_{0,n}j_{0,m}/j_{0,N})}{J_1^2(j_{0,m})}$$

③ La source dans le domaine des nombres d'onde k_r est donné par le produit de la matrice de passage normalisée:

$$[f] = \frac{1}{2pa^2}[Y][F] \quad \text{ou} \quad f(n) = \frac{1}{2pa^2} \sum_{m=1}^{N-1} Y(n,m) F(m)$$

III.2 Formulation spatiale

III.2.1 Discrétisation dans un repère cartésien

Cette formulation discrète a l'avantage de pouvoir s'appliquer à n'importe quel type de surface, et repose sur l'hypothèse de champ lointain, dont la formulation simplifiée est connue sous le nom d'approximation de Fresnel. La méthode consiste à découper la source en petits éléments devant la distance de champ lointain [57, 58] :

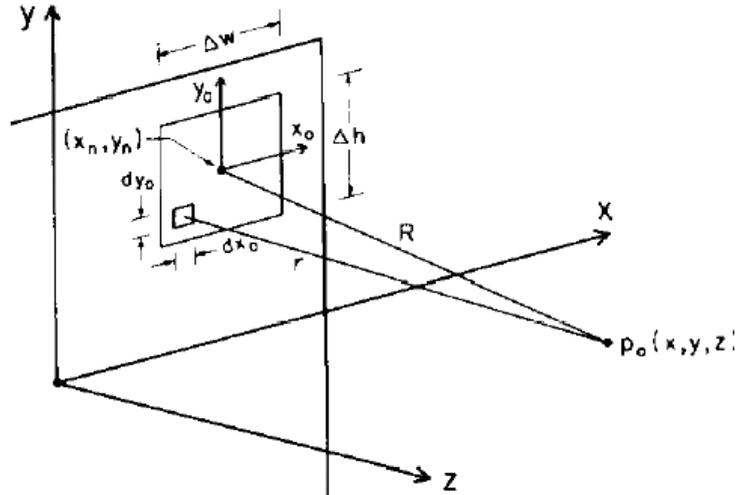


Figure II.8 : Découpage de la source en éléments de petites dimensions [57].

L'approximation de Fresnel s'écrit :

$$z \gg L_{cp} \quad \text{où} \quad L_{cp} = \frac{a^2}{\lambda} \text{ pour une source circulaire de rayon } a.$$

Le découpage en éléments discrets de la surface dans les directions x et y est donnée par :

$$\Delta x_m = \sqrt{\frac{\lambda z}{M}}$$

et $\Delta y_n = \sqrt{\frac{\lambda z}{N}}$ où M et N sont les multiplicateurs de la distance de champ proche.

III.2.1.1 Source rectangulaire

La fonction d'ouverture rectangulaire $s_{f,m,n}$ pour chaque élément de surface est donnée par :

$$s_{f,m,n}(x, y) = \prod_{-\Delta x_m/2}^{+\Delta x_m/2} (x) \prod_{-\Delta y_n/2}^{+\Delta y_n/2} (y) \tag{II.76}$$

$$\text{avec } \prod_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} (x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\Delta x/2, +\Delta x/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'élément de surface intégré est noté $I_{m,n}$:

$$I_{m,n} = \iint_S \frac{e^{-jkR}}{R} s_{\square,m,n} dS \quad (\text{II.77})$$

L'expression de l'intégrale de Rayleigh discrétisée s'écrit alors :

$$p(x, y, z) = \frac{jkZ_0}{2\mathbf{p}} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N v_{\perp,m,n} I_{m,n} \quad (\text{II.78})$$

Après intégration sur l'élément de surface considéré, la pression est alors donnée par la double somme selon les directions x et y [57]:

$$p(x, y, z) = \frac{jkZ_0}{2\mathbf{p}} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{e^{-jkR_{m,n}}}{R_{m,n}} v_{\perp,m,n} \text{sinc}\left(\frac{kx'_m \Delta x_m}{2R_{m,n}}\right) \text{sinc}\left(\frac{ky'_n \Delta y_n}{2R_{m,n}}\right) \Delta x_m \Delta y_n \quad (\text{II.79})$$

où $x'_m = x - x_m$, $y'_n = y - y_n$ et $z'_{m,n} = z - z_{m,n}$ sont les distances selon les directions x , y et z entre le point d'observation (x, y, z) et le centre de l'élément d'intégration $(x_m, y_n, z_{m,n})$, et $R_{m,n} = \sqrt{x'^m_2 + y'^n_2 + z'^{m,n}_2}$ est le module de cette distance.

III.2.1.2 Source circulaire plane

Ce formalisme est étendu à une géométrie circulaire plane, puis focalisée [58] avec l'expression de l'opérateur de rotation :

$$M_{\mathbf{j}_m} = \begin{bmatrix} \sin \mathbf{j}_m & \cos \mathbf{j}_m & 0 \\ -\cos \mathbf{j}_m & \sin \mathbf{j}_m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, pour une source circulaire, on obtient :

$$I_{m,n} = \int_{(\mathbf{j}_m - \Delta \mathbf{j})(r_n - \Delta r)}^{(\mathbf{j}_m + \Delta \mathbf{j})(r_n + \Delta r)} \frac{e^{-jkR_{\circ,m,n}}}{R_{\circ,m,n}} M_{\mathbf{j}_m} \{s_{\square,m,n}\} r dr d\mathbf{j}$$

avec $R_{\circ,m,n} = \sqrt{z^2 + r^2 + r_n^2 - 2rr_n \cos(\mathbf{j} - \mathbf{j}_m)}$ la distance entre le point source et le point image pour une source circulaire, et $\mathbf{j}_m = x_m/r_n = (m+0,5)\Delta x/r_n$ est la position angulaire correspondant au centre de l'élément source situé en (r_n, \mathbf{j}_m) .

III.2.1.3 Source circulaire focalisée

Pour une source circulaire focalisée sphérique de rayon de courbure R_c , l'élément d'intégration $I_{m,n}$ devient :

$$I_{m,n} = \int_{(j_m - \Delta j)(r_n - \Delta r)}^{(j_m + \Delta j)(r_n + \Delta r)} \frac{e^{-jkR_{(m,n)}}}{R_{(m,n)}} M_{j_m} \{s_{\square, m, n}\} r dr d\mathbf{j}$$

où $R_{(m,n)} = \sqrt{(z - z_n)^2 + r^2 + r_n^2 - 2rr_n \cos(\mathbf{j} - \mathbf{j}_m)}$ est la distance pour une source incurvée entre le point source (r_n, \mathbf{j}_m, z_n) et le point image (r, \mathbf{j}, z) , et $z_n = R_c - \sqrt{R_c^2 - r_n^2}$ la position selon z d'un point source situé à la position radiale r_n .

III.2.2 Discrétisation dans un repère cylindrique

III.2.2.1 Source plane

La formulation intégrale de (II.44) développée pour une source plane discrète échantillonnée sur N points de coordonnées cylindriques $(r_n, 0)$ est intégrée sur la source axisymétrique selon \mathbf{j} , puis exprimée en fonction de la vitesse normale discrétisée $v_{\perp, n}$:

$$p(r, z) = jkZ_0 e^{-jk\left(z + \frac{r^2}{2z}\right)} \sum_{n=1}^N e^{-j\frac{kr_n^2}{2z}} J_0\left(\frac{kr r_n}{z}\right) v_{\perp, n} \frac{r_n}{R_n} \Delta r_n \quad (\text{II.80})$$

L'expression (II.80) se simplifie dans le cas où le découpage de la source est suffisamment fin (hypothèse de champ lointain satisfaite) :

$$\text{Si } N \gg \frac{pa^2}{lz},$$

$$\text{alors } p(r, z) = jkZ_0 e^{-jk\left(z + \frac{r^2}{2z}\right)} \sum_{n=1}^N e^{-j\frac{kr_n^2}{2z}} v_{\perp, n} \frac{r_n}{R_n} \Delta r_n.$$

III.2.2.2 Source focalisée

L'écriture discrétisée de la formulation intégrale (II.49) d'une source focalisée par un retard pur \mathbf{j}_n est donnée par :

$$p(r, z) = jkZ_0 e^{-jk\left(z + \frac{r^2}{2z}\right)} \sum_{n=1}^N e^{+j\mathbf{j}_n} e^{-j\frac{kr_n^2}{2z}} J_0\left(\frac{kr r_n}{z}\right) v_{\perp, n} \frac{r_n}{R_n} \Delta r_n \quad (\text{II.81})$$

Cette expression est étendue au cas d'une source sphérique focalisée géométriquement (II.51) par le déphasage induit par la distance modifiée entre les points sources (r_n, z_n) et le point cible (r, z) :

$$p(r, z) = jkZ_0 \sum_{n=1}^N e^{-jk \left((z-z_n) + \frac{r^2 + r_n^2}{2(z-z_n)} \right)} J_0 \left(\frac{kr r_n}{z-z_n} \right) v_{\perp, n} \frac{r_n}{R_n} \Delta r_n \quad (\text{II.82})$$

IV Conclusion

L'objectif visé au cours de ce chapitre a été d'établir une modélisation axisymétrique d'un transducteur mono-élément focalisé. Dans cette optique, un outil de modélisation hybride éléments finis / code de propagation a été développé. Les différents codes de propagation utilisés tirent avantages de la géométrie du transducteur, et du résultat recherché, plan ou ponctuel. Il en résulte un outil de modélisation de la transduction et du rayonnement d'un transducteur focalisé permettant de déterminer la réponse électro-acoustique du transducteur.

IV.1 Tableau récapitulatif

Les différentes méthodes abordées pour la résolution numérique de l'intégrale de Rayleigh (paragraphe 0) sont synthétisées dans le *Tableau II.4* qui suit :

Formulation	Géométrie	Source focalisée	Résultat	Précision	Temps de calcul
Transformée de Fourier discrète 2D dans un repère cartésien (FFT 2D)	Quelconque	Non	Plan	-	+
Transformée de Hankel discrète dans un repère cylindrique (DHT-SSC)	Axisymétrique	Oui	Plan radial	++	++
Intégration numérique dans un repère cartésien (NIM)	Quelconque	Oui	Point	++	-
Intégration numérique dans un repère cylindrique (NIM axisymétrique)	Axisymétrique	Oui	Point	++	+++

Tableau II.4 : Récapitulatif des codes de propagation : Appréciation précision/temps de calcul.

Les méthodes de propagation utilisées sont basées sur l'intégrale de Rayleigh (II.30). Chacune des formulations développées, selon que le résultat recherché en plan ou ponctuel, permet d'obtenir un certain compromis entre précision et temps de calcul (*Tableau II.4*).

Les formulations dans le domaine spectral (FFT 2D et DHT) permettent de propager un plan à chaque pas de calcul. Ainsi, dans le cas où le résultat recherché est un plan, ces méthodes sont performantes en terme de temps de calcul. Plus particulièrement, la méthode basée sur la FFT 2D permet de traiter une géométrie plane quelconque, mais nécessite une capacité mémoire et une puissance de calcul importantes. De plus, des problèmes de repliement spectral viennent s'ajouter si la source n'est pas entourée d'une "zone tampon" suffisamment importante, qui nécessite elle aussi des capacités mémoire. Pour une configuration axisymétrique, on préférera utiliser la méthode basée sur la DHT, permettant une économie importante des capacités mémoires et contournant le problème du repliement avec un algorithme prenant en compte implicitement une source finie entourée d'une "zone tampon". La formulation SSC de la DHT a été retenue pour son meilleur compromis précision/temps de calcul, bien que la DHT-FSC donne des résultats acceptables [59].

L'approche de la formulation dans le domaine spatial, plus classique consiste à procéder à une intégration numérique d'une multitude de contributions en champ lointain, aisées à calculer. La NIM s'adapte à toute sorte de géométrie plane ou non, du moment que les contributions secondaires de la source peuvent être négligées. Elle permet de calculer un point image à la fois, et comporte l'avantage d'être très performante en terme de temps de calcul, pour un encombrement mémoire minime. La précision peut être poussée à la limite de celle du logiciel utilisé pour peu que l'on découpe la source plus finement au prix d'un temps de calcul augmenté en conséquence. Ici encore, pour une configuration de source axisymétrique, la NIM est formulée dans un repère cylindrique et permet de réaliser une seule intégration, l'intégration angulaire étant formulée implicitement. Il en résulte un temps de calcul encore réduit, et une meilleure précision pour ce type de géométrie.

Le sujet de l'étude étant un transducteur circulaire mono-élément focalisé, on utilisera donc par la suite les formulations axisymétriques spectrale (DHT) ou spatiale (NIM axisymétrique) de l'intégrale de Rayleigh. La première sera préférée à la seconde, pour le calcul d'un plan radial car plus rapide. La seconde est, quant à elle, mieux adaptée pour le calcul du champ dans l'axe du transducteur.

IV.2 Schéma de principe – Utilisation

Les moyens de modélisation traditionnellement utilisés se limitent à une hypothèse de vibration unidimensionnelle. Pour pallier à cette restriction, une modélisation par éléments finis a été mise en place ; son principe de résolution, et une optimisation du maillage ont été détaillés en première partie. La réponse obtenue a été comparée et vérifiée à la surface du transducteur, mais un filtrage de l'excitation est constaté au cours de la propagation dans le fluide. En conséquence, un code de propagation linéaire dans un milieu fluide homogène a été développé pour relayer la résolution par éléments finis de la transduction dans le solide (*Figure II.9*). La réponse électro-acoustique en émission peut alors être déterminée en n'importe quel point de l'espace. Typiquement, le champ de pression est calculé dans l'axe et autour du point focal. En particulier, la réponse électro-acoustique est caractérisée au point focal et ce en fonction de différentes configurations.

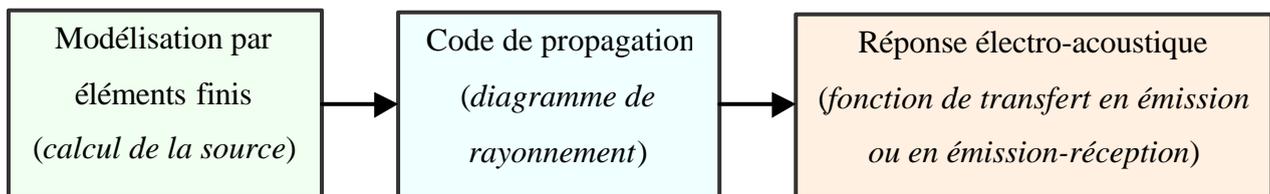


Figure II.9 : Schéma de principe de la modélisation du rayonnement d'un transducteur.

Les performances du transducteur seront alors évaluées et comparées pour des configurations géométriques et acoustiques de la lentille de focalisation variables en vue de déterminer celle optimale pour une application donnée (l'imagerie médicale). C'est l'objet du chapitre qui suit.

Bibliographie :

1. ISEN L.A., *Finite element code for piezoelectric and magnetostrictive transducer and actuator modeling*. Documentation ATILA. Laboratoire d'Acoustique. Institut Supérieur d'Electronique du Nord, 1997.
2. Wilson E., *Dynamic analysis by numerical integration*. Computer and Structure, Inc., 1998. **20**(http://www.csiberkeley.com/Tech_Info/20.pdf): p. 1-12.
3. IEEE Std., *Standard on Piezoelectricity ANSI/IEEE Std. 176-1987*. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, 1996. **43**(5): p. 1-55.
4. Brissaud M., *Characterization of piezoceramics*. IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control, 1991. **38**(6): p. 603-617.

5. Moffett M.B., Ricketts D., *Comments on "Characterization of piezoceramics"*. IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control, 1993. **40**(6): p. 825.
6. Brissaud M., *Author's reply*. IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control, 1993. **40**(6): p. 826-827.
7. Lunde P., Vestrheim M., *Comparison of models for radial and thickness modes in piezoceramic disks*. IEEE Proceedings of the Ultrasonics Symposium, 1994: p. 1005-1008.
8. Huang C.H., Lin Y.C., Ma C.C., *Theoretical analysis and experimental measurement for resonant vibration of piezoceramic circular plate*. IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control, 2004. **51**(1): p. 12-24.
9. Abboud N.N., Wojcik G.L., Vaughan D.K., Mould J., Powell D.J., Nikodym L., *Finite element modeling for ultrasonic transducers*. SPIE Proceeding of the Ultrasonic Transducer Engineering Conference, 1998.
10. Sbaï J.M., *Application de l'approche de la réponse impulsionnelle à la modélisation du rayonnement de transducteurs acoustiques de structure arbitraire*. Thèse de doctorat en Electronique. Université de Valenciennes et du Hainaut Cambresis. Académie de Lille, 1996.
11. Cathignol D., Sapozhnikov O.A., *On the application of the Rayleigh integral on the calculation of the field of a concave focusing radiator*. Acoustical Physics, 1999. **45**(6): p. 735-742.
12. Archer-Hall J.A., Basher A.I., Hazelwood A.J., *A means for computing the Kirchhoff surface integral for a disk radiator as a single integral with fixed limits*. Journal of the Acoustical Society of America, 1979. **65**(6): p. 1568-1570.
13. Archer-Hall J.A., Gee D., *A single integral computer method for axisymmetric transducers with various boundary conditions*. Non Destructive Testing International, 1980. **13**(3): p. 95-101.
14. Piwakovski B., Delannoy B., *Method for computing spatial pulse response: Time-domain approach*. Journal of the Acoustical Society of America, 1989. **86**(6): p. 2422-2432.
15. Piwakovski B., Sbaï K., Delannoy B., *Computer-aided computing of acoustic field radiated from arbitrarily structured transducer arrays*. IEEE Ultrasonics Symposium, 1994: p. 983-986.
16. Pesqué P., Fink M., *Effect of the planar baffle impedance on the radiation of a phased array element theory and experimentation*. IEEE Proceedings of the Ultrasonics Symposium, 1984: p. 1034-1038.

17. Guyomar D., Powers J., *Boundary effects on transient radiation fields from vibrating surfaces*. Journal of the Acoustical Society of America, 1985. **77**(2): p. 907-915.
18. Guyomar D., Powers J., *Transient radiation from axially symmetric sources*. Journal of the Acoustical Society of America, 1986. **79**(2): p. 273-277.
19. Guyomar D., Powers J., *Transient fields radiated by curved surfaces - Application to focusing*. Journal of the Acoustical Society of America, 1984. **76**(5): p. 1564-1572.
20. Stepanishen P.R., *An approach to computing time-dependent interaction forces and mutual impedances between pistons in a rigid planar baffle*. Journal of the Acoustical Society of America, 1970. **49**(1): p. 283-292.
21. Stepanishen P.R., *The transient response of arrays of transducers*. Journal of the Acoustical Society of America, 1971. **50**(3): p. 964-974.
22. Stepanishen P.R., *The time-dependent force and radiation impedance on a piston in a rigid infinite planar baffle*. Journal of the Acoustical Society of America, 1971. **49**(3): p. 841-849.
23. Stepanishen P.R., *The impulse response and mutual radiation impedance between a circular piston and a piston of arbitrary shape*. Journal of the Acoustical Society of America, 1973. **54**(3): p. 746-754.
24. Stepanishen P.R., *Asymptotic behavior of the acoustic nearfield of a circular piston*. Journal of the Acoustical Society of America, 1976. **59**(4): p. 749-754.
25. Stepanishen P.R., *Acoustic transients from planar axisymmetric vibrators using the impulse response approach*. Journal of the Acoustical Society of America, 1981. **70**(4): p. 1176-1181.
26. Harris G.R., *Review of transient field theory for a baffled planar piston*. Journal of the Acoustical Society of America, 1981. **70**(1): p. 10-20.
27. Harris G.R., *Transient field of a baffled planar piston having an arbitrary vibration amplitude distribution*. Journal of the Acoustical Society of America, 1981. **70**(1): p. 186-204.
28. Jeong M.K., *A Fourier transform-based sidelobe reduction method in ultrasound imaging*. IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control, 2000. **47**(3): p. 759-763.
29. Harris F.J., *On the use of windows for harmonic analysis with the Discrete Fourier Transform*. IEEE Proceedings, 1978. **66**(1): p. 51-83.

30. Chen X., Schwarz K.Q., *Radiation pattern of a focused transducer: A numerically convergent solution*. Journal of the Acoustical Society of America, 1993. **94**(5): p. 2979-2991.
31. Coulouvrat F., *Continuous field radiated by a geometrically focused transducer: numerical investigation and comparison with an approximate model*. Journal of the Acoustical Society of America, 1993. **94**(3): p. 1663-1675.
32. Williams A.O.Jr., *Acoustic intensity distribution from a piston source*. Journal of the Acoustical Society of America, 1945. **17**(3): p. 219-227.
33. O'Neil H.T., *Theory of focusing radiators*. Journal of the Acoustical Society of America, 1949. **21**(5): p. 516-526.
34. Lucas B.G., Muir T.G., *The field of a focusing source*. Journal of the Acoustical Society of America, 1982. **72**(4): p. 1289-1296.
35. Kino G.S., *Acoustic waves: devices, imaging, and analog signal*. Prentice-Hall, Inc. ed. 2000.
36. Hamilton M.F., Gee D., *Comparison of three transient solutions for the axial pressure in a focused sound beam*. Journal of the Acoustical Society of America, 1992. **92**(1): p. 527-532.
37. Cathignol D., Sapozhnikov O.A., Zhang J., *Lamb waves in piezoelectric radiator as a reason for discrepancy between O'Neil's formula and experiment*. Journal of the Acoustical Society of America, 1997. **101**(3): p. 1286-1297.
38. Stepanishen P.R., Guigli J., *Acoustic scattering and transmission of wide-band plane waves by fluid loaded plates*. Journal of the Acoustical Society of America, 1980. **68**(3): p. 980-988.
39. Stepanishen P.R., Benjamin K.C., *Forward and backward projection of acoustic fields using FFT methods*. Journal of the Acoustical Society of America, 1982. **71**(4): p. 803-812.
40. Stepanishen P.R., Forbes M., Letcher S., *The relationship between the impulse response and angular spectrum methods to evaluate acoustic transient fields*. Journal of the Acoustical Society of America, 1991. **90**(5): p. 2794-2798.
41. Williams E.G., MAYnard J.D., *Numerical evaluation of the Rayleigh integral for planar radiators using the FFT*. Journal of the Acoustical Society of America, 1982. **72**(6): p. 2020-2030.
42. Williams E.G., *Numerical evaluation of the radiation from un baffled, finite plates using the FFT*. Journal of the Acoustical Society of America, 1983. **74**(1): p. 343-347.

43. Orofino D.P., Pedersen P.C., *Efficient angular spectrum decomposition of acoustic sources - Part I: Theory*. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 1993. **40**(3): p. 238-249.
44. Orofino D.P., Pedersen P.C., *Efficient angular spectrum decomposition of acoustic sources - Part II: Results*. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 1993. **40**(3): p. 250-257.
45. Christopher P.T., *Comments on "Efficient angular spectrum decomposition of acoustic sources - Part I and II"*. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 1994. **41**(4): p. 568-569.
46. Pedersen P.C., Orofino D.P., *Author's reply [on "Efficient angular spectrum decomposition of acoustic sources - Part I and II"]*. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 1994. **41**(4): p. 570-571.
47. Orofino D.P., Pedersen P.C., *Evaluation of angle-dependent spectral distortion for infinite, planar elastic media via angular spectrum decomposition*. Journal of the Acoustical Society of America, 1993. **93**(3): p. 1235-1248.
48. Wu P., Kazys R., Stepinski T., *Analysis of the numerically implemented angular spectrum approach based on the evaluation of two-dimensional acoustic fields - Part I: Errors due to the discrete Fourier transform and discretization*. Journal of the Acoustical Society of America, 1996. **99**(3): p. 1339-1348.
49. Wu P., Kazys R., Stepinski T., *Analysis of the numerically implemented angular spectrum approach based on the evaluation of two-dimensional acoustic fields - Part II: Characteristics as a function of angular range*. Journal of the Acoustical Society of America, 1996. **99**(3): p. 1349-1359.
50. Wu P., Kazys R., Stepinski T., *Erratum: Analysis of the numerically implemented angular spectrum approach based on the evaluation of two-dimensional acoustic fields - Part I and II*. Journal of the Acoustical Society of America, 1996. **101**(4): p. 2395-2396.
51. Assad J., Rouvaen J.M., *Comments on "Analysis of the numerically implemented angular spectrum approach based on the evaluation of two-dimensional acoustic fields - Part I and II"*. Journal of the Acoustical Society of America, 1997. **101**(6): p. 3800.
52. Wu P., Kazys R., Stepinski T., *Response to "Comments on "Analysis of the numerically implemented angular spectrum approach based on the evaluation of two-dimensional acoustic fields - Part I and II""*. Journal of the Acoustical Society of America, 1996. **101**(6): p. 3804-3805.

-
53. Christopher P.T., *A solution to the longstanding problem associated with discrete Fourier transform-based, diffractive computation*. Journal of the Acoustical Society of America, 1993. **94**(6): p. 3515-3517.
 54. Christopher P.T., Parker K.J., *New approaches to the linear propagation of acoustic fields*. Journal of the Acoustical Society of America, 1991. **90**(1): p. 507-521.
 55. Waag R.C., Campbell J.A., Ridder J., Mesdag P.R., *Cross-sectional measurement and extrapolations of ultrasonic fields*. IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, 1985. **32**(1): p. 26-35.
 56. Johnson H.F., *An improved method for computing a discrete Hankel transform*. Computer Physics Communications, 1987. **43**: p. 181-202.
 57. Ocheltree K.B., Frizzell L.A., *Sound field calculation for rectangular sources*. IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control, 1989. **36**(2): p. 242-248.
 58. Lee C., Benkeser P.J., *A computationally efficient method for the calculation the the transient field of acoustic radiators*. Journal of the Acoustical Society of America, 1994. **96**(1): p. 545-551.
 59. Marechal P., Levassort F., Tran-Huu-Hue L.P., Lethiecq M., *Electro-acoustic response at the focal point of a focused transducer as a function of the acoustical properties of the lens*. Proceeding of the 5th World Congress on Ultrasonics, 2003: p. 535-538.

